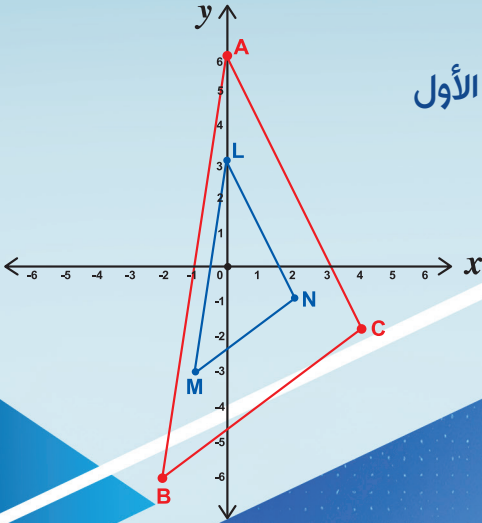




الرياضيات

الصف العاشر

الفصل الدراسي الأول - القسم الأول



IXI



فكرة
الدرس



مسألة
الدرس



لنعمل معاً
لنستكشف



استخدام
النماذج



تحقق
من فهمك



أنتدرب
وأحل المسائل



مهارات
تفكير عليا



الرياضيات

الصف العاشر

الفصل الدراسي الأول - القسم الأول

كتاب الطالب

تأليف

أ. دلال مبارك فلاح الحجر (رئيساً)

أ. محمد عبدالله الحمد المجرن
أ. هيا محمد فالح العازمي
أ. ضحى إبراهيم مزعل الدوسري
أ. حصة مضحي عبدالله الهاجري
أ. ثريا غدير مربد الشمري

الطبعة الأولى

١٤٤٨ هـ

٢٠٢٦ - ٢٠٢٧ م

الطبعة الأولى: 2026 / 2027 م

الفريق العلمي



أ. سمير عبدالله أحمد مرسي
أ. خالد صاوي سيد شحاته

عضو الشروحات التعليمية المعززة بالذكاء الاصطناعي



أ. نهال هاشم عبدالحميد هاشم

عضو التصميم والإخراج



أ. خلود خالد مهدي الشمري

المراجعة اللغوية



أ. عبدالله محمد الذروة
أ. عباس فيصل الصراف
أ. أماني عبدالكريم العريفي



المنشأة للنشر

24797888

أودع في مكتبة الكويت الوطنية - ردمك: 0-124-33-9921-978

أودع في مكتبة وزارة التربية تحت رقم (531) بتاريخ 9 / 8 / 2026 م





حضرة صاحب السمو الشيخ مشعل آل أحمد آل جابر الصباح
أمير دولة الكويت

H.H. Sheikh Meshal AL-Ahmad AL-Jaber AL-Sabah
Amir Of The State Of Kuwait



سَمُو الشَّيْخِ صَبَّاحٍ كَهْدٍ الْحَمَادِ الصَّبَّاحِ
وَلِيِّ مَعْهُدِ دَوْلَةِ الْكُوَيْتِ

H. H. Sheikh Sabah Khaled Al-Hamad Al-Sabah
Crown Prince Of The State Of Kuwait

المحتوى

الوحدة الأولى	الجبر وحل المعادلات	الصفحة
(1-1)	دالة القيمة المطلقة	16
(2-1)	حل معادلة القيمة المطلقة	33
(3-1)	حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد «جبرياً وبيانياً»	42
(4-1)	إيجاد مجموع وناتج ضرب جذريّ معادلة تربيعية - تكوين المعادلة التربيعية بمعلومية جذريها	54
(5-1)	حل متباينة من الدرجة الثانية	62

الوحدة الثانية	الهندسة المستوية	الصفحة
(1-2)	التناسب	82
(2-2)	تشابه المضلعات	96
(3-2)	تشابه المثلثات	104
(4-2)	التشابه في المثلثات القائمة الزاوية	116
(5-2)	التناسب والمثلثات المتشابهة	123

أيقونات الكتاب



انتبه

تكون في هامش الدرس يعرض فيها معلومة رياضية لتجنب الوقوع بالخطأ



لنستكشف
أو فكر معي

تعتمد على التفكير المنطقي للوصول لمعلومة أو تعميم أو نظرية



استخدام
النماذج أو تدريب

استخدام النماذج: مسائل حياتية للدرس
تدرب: اتباع خطوات للتوصل للحل



تحقق من
فهمك

تطبيق للمثال في الدرس



أدرب وأحل

يتضمن أسئلة موضوعية ومقالية للدرس



فكرة الدرس

يبين ما ستتعلم بهذا الدرس



مصطلحات

التعرف على المفاهيم الجديدة المستخدمة في الرياضيات



مسألة الدرس

مدخل الدرس من خلاله
يتم التعرف على الدرس



ملحوظة

تكون في هامش الدرس يعرض فيها معلومة تم استنتاجها من الدرس الحالي أو عرضها سابقاً



تذكر

تكون في هامش الدرس يعرض فيها معلومة نحتاج إليها في الدرس



مهارات تفكير
عليا

يتضمن أسئلة موضوعية ومقالية فيها تحدي للمتعم

المقدمة

مرحباً بكم في كتاب الرياضيات للصف العاشر؛ حيث نأخذك في رحلة تعليمية ممتعة عبر وحدات دراسية مترابطة تشمل الجبر وحل المعادلات، والهندسة المستوية، وحساب المثلثات والمنطق والإحصاء، وهندسة الدائرة، والمصفوفات، والهندسة الإحداثية، والمتتاليات. ويقدم الكتاب الرياضيات بوصفها لغة للتفكير وأداة لفهم الحياة وحل المشكلات، من خلال مواقف وتطبيقات تساعدك على اكتشاف أهمية ما تتعلمه وتوظيفه في مجالات متنوعة. كما يتضمن الكتاب رموز الـ (QR) في بداية عدد من الدروس تقودك إلى فيديوهات جاذبة تربط المفاهيم الرياضية بالحياة اليومية، ورموزاً أخرى عند بعض التمارين تقدم شرحاً مرئياً يساعدك على فهم طريقة التفكير والوصول إلى الحل.

وفي بداية كل وحدة ستجد مشروعاً تكاملياً وفق منهجية STEAM، يتيح لك توظيف معارفك ومهاراتك في العلوم والتقنية والهندسة والفنون والرياضيات لمعالجة مشكلة أو تنفيذ مهمة واقعية؛ بما يعزز قدرتك على البحث والاستقصاء والتصميم والإبداع والعمل التعاوني، ويجعل تعلم الرياضيات تجربة حية تتجاوز حدود الصف الدراسي إلى مواقف الحياة والعالم من حولك.

ويحرص هذا الكتاب على تنمية مهارات القرن الحادي والعشرين، وفي مقدمتها التفكير الناقد والإبداعي، وحل المشكلات، والتواصل والتعاون، والتعلم الذاتي، وتوظيف التقنية؛ لإعداد متعلم يمتلك المعرفة والمهارة والقدرة على المبادرة وصناعة الحلول. فالغاية ليست أن تتعلم الرياضيات فحسب، بل أن تسهم في بناء مواطن واع ومبدع وقادر على المشاركة الفاعلة في نهضة وطنه وبناء مستقبل دولة الكويت. فكّر، اكتشف، جرّب، وأبدع... فكل فكرة تبدأ اليوم قد تكون خطوة نحو مستقبل أفضل للكويت.



المؤلفون

الإطار التنظيمي للكتاب

ما أهمية هذه الوحدة؟

تعد المعادلات والقيمة المطلقة والمتباينات من المفاهيم المهمة في الرياضيات، لأنها تساعدنا على وصف المواقف الحياتية وتمثيلها باستخدام الرموز الرياضية، فمن خلال المعادلات نستطيع إيجاد القيم المجهولة، ومن خلال القيمة المطلقة نفهم المسافة أو مقدار البعد عن قيمة معينة بغض النظر عن الاتجاه، أما المتباينات فنستطيع دراستها من خلال علاقة الترتيب.



سأتعلمُ في هذه الوحدة:

- تحديد مجال ومدى دالة المطلق.
- تمثيل دالة المطلق بيانياً.
- حل معادلات القيمة المطلقة.
- حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد «جبرياً وبيانياً».
- إيجاد مجموع الجذرين وحاصل ضرب الجذرين في معادلة تربيعية.
- حل متباينة من الدرجة الثانية.



تعلمتُ سابقاً:

- حل المعادلات التي تحتوي متغيرات في طرفيها.
- إيجاد قيمة مقدار جبري يتضمن قيمة مطلقة.
- مفهوم الدالة والذي يحتل مكاناً رئيسياً في دراسة الرياضيات.
- حل متباينة خطية بأكثر من خطوة وتمثيلها على خط الأعداد.



استعد للوحدة



عزيزي المعلم ، عزيزي المتعلم :
يحتوي رمز الـ (QR) الموجود في بداية الوحدة على مفاهيم علمية وتمرين تساعد في الاستعداد للوحدة وتعزز المفاهيم الواردة فيها.

الجبر وحل المعادلات

حل متباينة من
الدرجة الثانية

دالة القيمة
المطلقة

حل معادلة
القيمة المطلقة

إيجاد مجموع وناتج
ضرب جذريّ معادلة
تربيعية - تكوين
المعادلة التربيعية
بمعلومية جذريها

حل معادلة من الدرجة
الثانية في متغير
واحد «جبرياً وبيانياً»

حل المعادلة على الصورة:
 $|ax+b|=|cx+d|$

حل المعادلة على الصورة:
 $|ax+b|=cx+d$



تناغم الظلال والأنوار (Harmony of Light & Shadows)



هدف المشروع



يهدف المشروع إلى مساعدة المتعلمين على فهم العلاقة بين الرياضيات والظواهر الضوئية، من خلال توظيف المعادلات التربيعية ومفاهيم مجموع الجذرين وحاصل ضربهما في تفسير أبعاد الظلال وشدة الضوء. كما يهدف إلى تنمية مهارات التفكير العلمي والإبداعي لدى المتعلمين، وربط المفاهيم الرياضية بتطبيقات واقعية في العلوم والهندسة والفن والتكنولوجيا.

فكرة المشروع



تقوم فكرة المشروع على استكشاف كيفية تحكم الأرقام والمسافات والأبعاد في الضوء والظل. فعند وضع حاجز أو فتحة بين مصدر الضوء والجدار تتغير مساحة الظل وشكله تبعاً لأبعاد الفتحة والمسافات، ويمكن تمثيل ذلك رياضياً باستخدام معادلات تربيعية. ومن خلال دراسة مجموع الجذرين وحاصل ضربهما، يستطيع المتعلمون توقع أبعاد الفتحة أو الظل، ثم توظيف هذه المعرفة في تصميم صندوق ضوئي ولوحات فنية تبرز أثر الضوء والظل بطريقة إبداعية.

خطوات تنفيذ المشروع



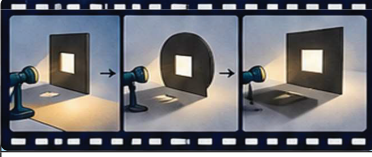
- ملاحظة أثر مصدر الضوء عند سقوطه على حاجز أو فتحة بين المصباح والجدار، وتسجيل تغير شكل الظل ومساحته.
- تحويل الموقف العملي إلى نموذج رياضي باستخدام معادلة تربيعية تمثل العلاقة بين أبعاد الفتحة أو المسافات.
- استخدام مجموع الجذرين وحاصل ضربهما لتحديد الأبعاد المناسبة، مثل المعادلة: $x^2 - 6x + 8 = 0$ ، حيث يمثل الجذران بعدين أو مسافتين.
- تصميم فتحة مثالية تحقق التماثل الضوئي، مثل حالة مجموع البعدين 6 وحاصل ضربهما 9، فينتج مربع أبعاده 3×3 .
- تجربة فكرة المعكوس الضوئي، بحيث يكون أحد البعدين معكوساً ضربياً للآخر، ودراسة أثر ذلك على توزيع الضوء والظل.
- استخدام الهاتف أو تطبيق حساس الضوء لقياس شدة الإضاءة ومقارنة النتائج العملية بالنتائج الرياضية.
- إعداد عرض بصري أو بطاقات تعليمية توضح كيف تتحكم الأبعاد والمسافات في أحجام الظلال وشدة الضوء.

الموارد والأدوات

Mathematics	Art	Engineering	Technology	Science
الرياضيات التعبير عن شدة الضوء والمساحة كدالة تربيعية واستخدام مجموع وناتج ضرب الجذرين.	الفن ابتكار لوحات "خيال الظل" التي تعتمد على تناسب الأبعاد.	الهندسة تصميم "صندوق الضوء" بفتحات متغيرة الأبعاد (مربعة ومستطيلة).	التكنولوجيا استخدام كشاف الهاتف وحساس الضوء (Light Sensor) في تطبيقات الهواتف الذكية.	العلوم دراسة "قانون التربيع العكسي" للضوء وكيف تتوزع الطاقة الضوئية.

- مصدر ضوء مناسب مثل كشاف أو مصباح صغير.
- حواجز وفتحات مربعة ومستطيلة بأبعاد مختلفة.

- صندوق ضوئي أو نموذج هندسي بسيط لتثبيت الفتحات والحواف.
- جدار أو شاشة بيضاء لاستقبال الظلال.
- هاتف ذكي يحتوي على تطبيق قياس شدة الضوء أو حساس الضوء.
- مسطرة، ورق مقوى، مقص، لاصق، وأدوات رسم وتلوين.
- بطاقات تعليمية لكتابة المعادلات التربيعية وتحليل الجذور.



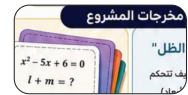
عرض النتائج

الرقم	البند	التفاصيل
1	عرض جزء من نتائج المشروع	
2	الصعوبات التي واجهت فريق العمل وكيفية التغلب عليها	
3	المعلومات الجديدة التي تم إضافتها لخبرات المتعلمين السابقة	
4	كيفية تطوير المشروع وتعزيز المهارات	
5	تقييم المشروع	

أداة تقييم المشروع

يستخدم الجدول التالي لتقييم أداء المتعلمين في المشروع، بوضع علامة في مستوى الأداء المناسب لكل معيار.

الرقم	المعيار	1	2	3
1	وضوح فكرة المشروع وأهدافه			
2	دقة توظيف المعادلات التربيعية			
3	فهم العلاقة بين الضوء والظل والمسافات			
4	تنظيم خطوات تنفيذ المشروع			
5	استخدام الموارد والأدوات بطريقة مناسبة			
6	عرض النتائج وتفسيرها بوضوح			



دالة القيمة المطلقة Absolute Value Function

1-1

فكرة الدرس:



التعرف على دالة القيمة المطلقة، وتمثيلها بيانياً، والتعرف على خواص دالة القيمة المطلقة، واستخدام هندسة التحويلات لرسم بعض دوال القيمة المطلقة.

المصطلحات:



Function	2. الدالة	Absolute Value	1. القيمة المطلقة
Vertex	4. رأس المنحنى	Domain	3. المجال
Range	6. المدى	Graph	5. التمثيل البياني
		Axis of Symmetry	7. محور التماثل

مسألة الدرس:



في معرض العلوم بالمدرسة صمم أحمد وزملاؤه تجربة باستخدام شعاع الليزر ومرآة مستوية، لوحظ أن شعاع الليزر انطلق من المصدر واصطدم بالمرآة عند النقطة (0,0) ثم انعكس ليصيب الهدف.



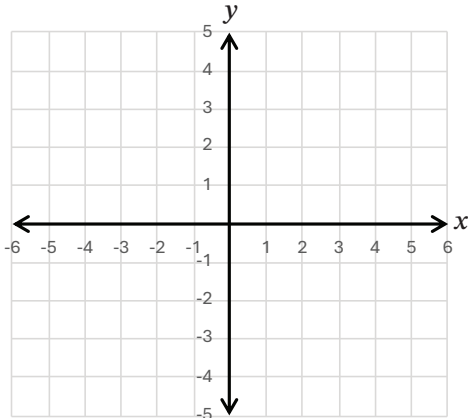
المطلوب:

كتابة قاعدة الدالة الناتجة من انعكاس شعاع الليزر.

والآن: ارسم كل من الدوال التالية:

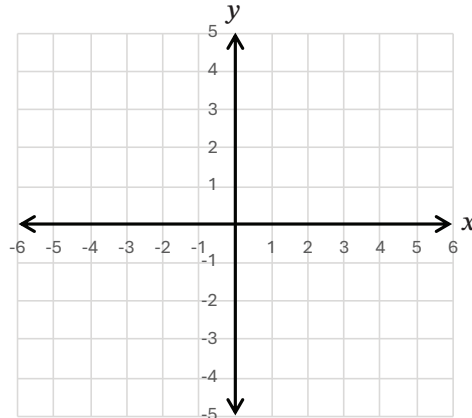
a) $y_1 = x : x \geq 0$

x	0		
y	0		



b) $y_2 = -x : x < 0$

x			0
y			0



! انتبه

سنرمز لمحور السينات

x بـ x-axis

وسنرمز لمحور

الصادات

y بـ y-axis

أعد تعريف الدالة : $y_3 = |x|$

وما علاقة y_3 بكل من y_1, y_2 ؟

مما سبق: فإن الصورة الأساسية لدالة القيمة المطلقة هي :

$$f: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|$$

(المجال) (المجال المقابل)

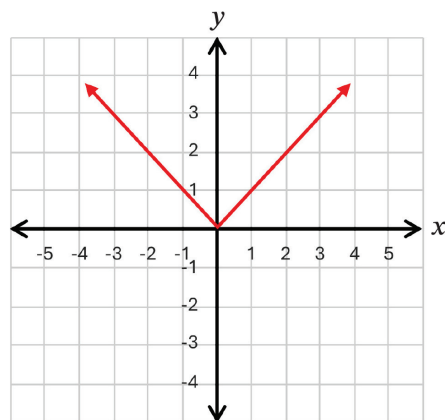
والتي مكوناتها هي :

1. المجال $\mathbb{R}$

2. المجال المقابل $\mathbb{R}$

3. قاعدة اقترانها $f(x) = |x|$

$$f(x) = \begin{cases} x & : x > 0 \\ 0 & : x = 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases} \Rightarrow \therefore f(x) = \begin{cases} x & : x \geq 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$$



x	-2	-1	0	1	2
y	2	1	0	1	2

نستنتج أن :

1. تمثيل الدالة $y = |x|$ بيانياً ينتج من

اتحاد شعاعين لهما نفس نقطة البداية

(رأس المنحنى) وهي نقطة الأصل ويشبهان الحرف V.

2. رأس المنحنى هو (0,0) وعنده توجد أصغر قيمة للدالة.

3. متماثلة حول محور الصادات ($x=0$) نسميها فيما بعد دالة زوجية

4. مدى الدالة هو $[0, \infty)$

ومن التعريف:

إذا كانت $a, b, x \in \mathbb{R}$ عددين حقيقيين فإن :

$$1. |x| = \begin{cases} x & : x \geq 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$$

$$2. |x+a| = \begin{cases} x+a & : x \geq -a \\ -x-a & : x < -a \end{cases}$$

$$3. |ax+b| = \begin{cases} ax+b & : x \geq \frac{-b}{a} \\ -ax-a & : x < \frac{-b}{a} \end{cases}$$

① معلومة

محور التماثل :

هو خط يقسم التمثيل
البياني إلى جزأين
متطابقين تمامًا (يحول
التمثيل البياني إلى نفسه).

$$1. |x| \geq 0$$

$$2. |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$3. |a + b| \leq |a| + |b|$$

خواص القيمة المطلقة:

$$1. |a|^2 = a^2$$

ملحوظات هامة:

$$2. \sqrt{x^2} = |x|$$

رسم بيان دالة القيمة المطلقة باستخدام رأس المنحنى ومحور التماثل

$$f(x) = |2x + 4|$$

ارسم بيان الدالة:

مثال (1)

الحل:

مجال الدالة هو $\mathbb{R}$

$$2x + 4 = 0$$

أولاً: باستخدام محور التماثل لرسم بيان الدالة نضع

$$\therefore 2x = -4 \Rightarrow x = -2$$

$$f(-2) = |2(-2) + 4| = 0$$

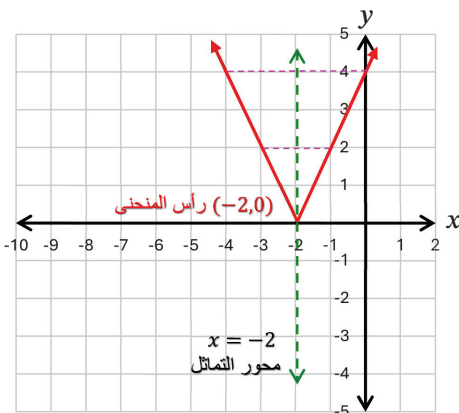
$\therefore$ تسمى النقطة $(-2, 0)$ رأس المنحنى

نكون جدول بأخذ قيمتين لـ x على يمين $x = -2$

$$f(-1) = |2(-1) + 4| = 2, \quad f(0) = |2(0) + 4| = 4$$

ومن التماثل حول المستقيم $x = -2$ نوجد قيمتين لـ x على يسار $x = -2$

$$f(-3) = f(-1) = 2, \quad f(-4) = f(0) = 4$$



x	-4	-3	-2	-1	0
y	4	2	0	2	4

ومن التماثل:

- نرسم الدالة:

نلاحظ أن:

رأس المنحنى هو $(-2, 0)$ ومحور التماثل هو $x = -2$ ومنحنى الدالة مفتوح للأعلى

انتبه!

مجال دالة القيمة

المطلقة هو $\mathbb{R}$ ما لم

يذكر غير ذلك

معلومة

يمكن الاستعانة

بالآلة الحاسبة لإيجاد

قيم الدالة $f(x)$



انتبه !

عند رسم بيان أي
دالة اكتب مجال
الدالة أولاً.

ثانياً : باستخدام إعادة تعريف القيمة المطلقة

$$2x + 4 = 0 \quad \text{نضع}$$

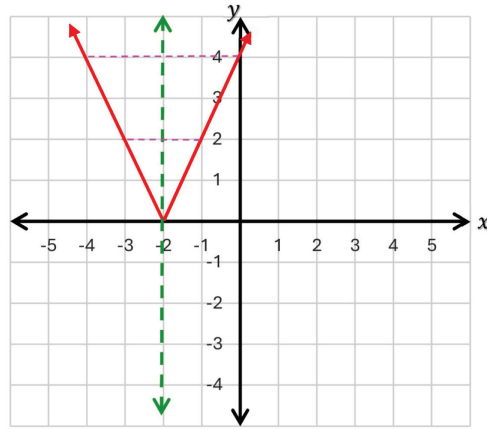
$$2x = -4 \quad \Rightarrow \quad x = -2$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & : x \geq -2 \\ -2x - 4 & : x < -2 \end{cases}$$

- نكون جدولاً من إعادة تعريف القيمة المطلقة

$$f(-1) = 2(-1) + 4 = 2, \quad -1 > -2$$

$$f(-3) = -2(-3) - 4 = 2, \quad -3 < -2$$



$$f(x) = -2x - 4 \mid f(x) = 2x + 4$$

x	0	-1	-2	-3	-4
y	4	2	0	2	4

نرسم الدالة

مما سبق نلاحظ :

$$f(x) = |2x + 4| + 0$$

بفرض أن

$$a = 2, \quad b = 4, \quad c = 0$$

$$1. \text{ رأس المنحنى هو } \left(\frac{-b}{a}, c \right) = (-2, 0)$$

$$2. \text{ معادلة محور التماثل هو } x = \frac{-b}{a} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$3. \text{ مدى الدالة هو } [c, \infty) = [0, \infty)$$

تحقق من فهمك (1)

ارسم بيان الدالة : $f(x) = |3x + 6|$

تعميم:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

(المجال) (المجال المقابل)

الصورة القياسية لدوال القيمة المطلقة:
 $f(x) = |ax + b| + c$

مجال الدالة هو $\mathbb{R}$ ، ومجالها المقابل هو $\mathbb{R}$

1. رأس المنحنى هو النقطة $\left(-\frac{b}{a}, c\right)$

2. معادلة محور التماثل هو $x = -\frac{b}{a}$

3. مدى الدالة هو $[c, \infty)$

4. مدى الدالة يتغير إذا كانت الدالة على الصورة $f(x) = -|ax + b| + c$ ويصبح $(-\infty, c]$ حيث منحنى الدالة في هذه الحالة يكون مفتوحاً للأسفل

أوجد رأس المنحنى ومعادلة محور التماثل ومدى كل من الدوال التالية ثم ارسم بيان كل منها

مثال (2)

a $y = |x - 2| + 1$

b $y = -|2x + 3|$

الحل:

مجال الدالة هو $\mathbb{R}$

بفرض أن $a = 1$, $b = -2$, $c = 1$

رأس المنحنى هو $\left(-\frac{b}{a}, c\right) = (2, 1)$

معادلة محور التماثل هو $x = -\frac{b}{a} = \frac{2}{1} = 2$

مدى الدالة هو $[c, \infty) = [1, \infty)$

يتضمن رأس منحنى الدالة (x, y) نضع جدول قيم الأزواج المرتبة

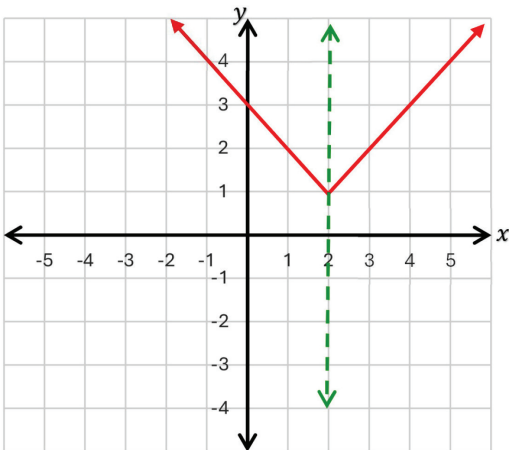
نرسم الدالة

x	1	2	3
y	2	1	2

نلاحظ أن:

أن عند رأس منحنى $(2, 1)$ توجد

أصغر قيمة للدالة.



تذكروا

$$f(x) = |ax + b| + c$$

$$ax + b = 0$$

$$x = \frac{-b}{a}$$

$$f\left(\frac{-b}{a}\right) = c$$

رأس المنحنى هو

$$\left(\frac{-b}{a}, c\right)$$

ملحوظة

الإشارة السالبة خارج
القيمة المطلقة لا
تؤثر على نقطة رأس
المنحنى والمنحنى الدالة
يكون مفتوحاً للأسفل

b $y = -|2x + 3|$

مجال الدالة هو $\mathbb{R}$

بفرض أن $a = 2$, $b = 3$, $c = 0$

رأس المنحنى هو $\left(\frac{-b}{a}, c\right) = \left(\frac{-3}{2}, 0\right)$

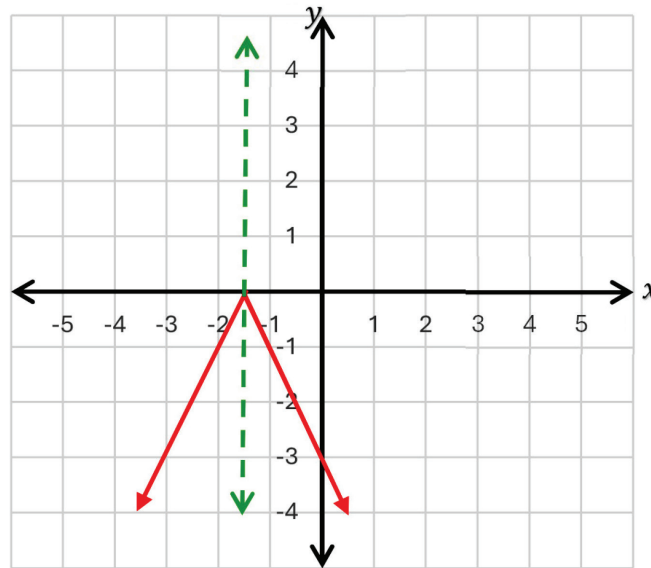
معادلة محور التماثل هي $x = \frac{-b}{a} = \frac{-3}{2}$

مدى الدالة هو $(-\infty, c) = (-\infty, 0]$

- نضع جدول قيم الأزواج المرتبة (x, y) يتضمن رأس منحنى الدالة

- نرسم الدالة

x	-2	$\frac{-3}{2}$	-1
y	-1	0	-1



نلاحظ أن :

عند رأس منحنى $\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$

توجد أكبر قيمة للدالة.

تحقق من فهمك (2)

أوجد رأس المنحنى ومعادلة محور التماثل ومدى كل من الدوال التالية
ثم ارسم بيان كل منها

- a $f(x) = |x + 1| + 3$ b $y = -|x + 1|$
c $g(x) = \left| \frac{1}{2}x + 1 \right|$ d $f(x) = 1 - |x - 2|$

رسم بيان دوال القيمة المطلقة باستخدام بعض التحويلات الهندسية
Graph of Absolute Value Function using same
Geometric Transformations

التحويلات الهندسية لمنحنى الدالة الأساسية $f(x) = |x|$

1. الانسحاب في اتجاه محور السينات (إزاحة أفقية)

$$f(x) = |x - 3|$$

ارسم بيان الدالة :

استكشف

الحل:

$$f(x) = |x + 3|$$

مجال الدالة هو $\mathbb{R}$

1 - لإيجاد صفر المطلق نضع $f(x) = 0$

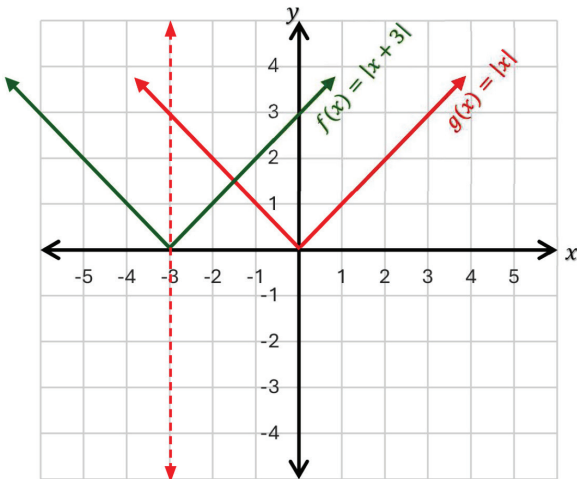
$$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

وهو محور التماثل

2 - نكون جدول القيم

x	-4	-3	-2
y	1	0	1

3 - نرسم الدالة



ملحوظة

معامل x هو الواحد
دائمًا في الدالة
الأساسية.

تذكر!

$$|x| = \begin{cases} x & : x \geq 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$$

معلومة

الدالة الأساسية:
هي دالة المرجع
 $g(x) = |x|$

4 - نلاحظ أن:

بيان الدالة $f(x) = |x + 3|$ يمكن الحصول عليه بانسحاب بيان الدالة الأساسية $g(x) = |x|$ بمقدار ثلاث وحدات في الاتجاه السالب لمحور السينات (جهة اليسار)

ارسم بيان كل من الدالة $f(x) = |x - 1|$ باستخدام التحويلات الهندسية

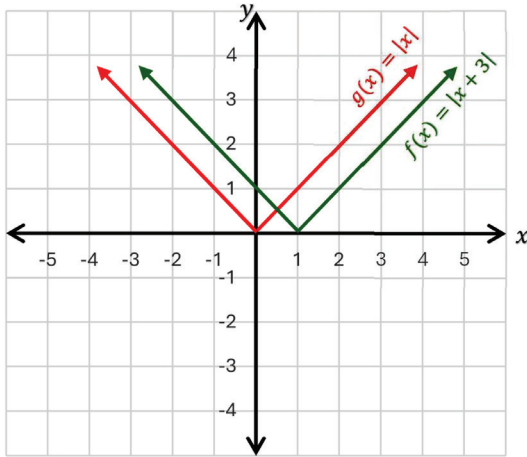
مثال (3)

مجال الدالة هو $\mathbb{R}$

1 - لإيجاد صفر المطلق نضع $f(x) = 0$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ وهو محور التماثل}$$

2 - نكون جدول القيم لدالة المرجع $g(x) = |x|$

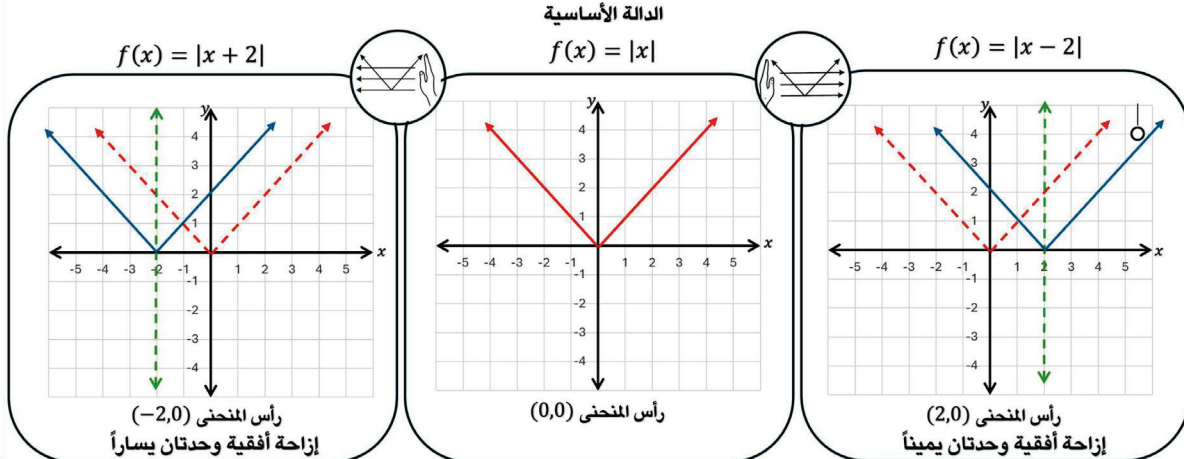


x	-1	0	1
y	1	0	1

3 - نرسم الدالة

بإزاحة مقدارها وحدة واحدة جهة اليمين.

ملخص:



تعميم:

يكون منحنى الدالة $f(x) = |x + a|$ هو نفس منحنى الدالة الأساسية $g(x) = |x|$ وبإزاحة أفقية مقدارها $|a|$ وحدة في الاتجاه:

- 1 - الموجب لمحور السينات (جهة اليمين) عندما $a < 0$
- 2 - السالب لمحور السينات (جهة اليسار) عندما $a > 0$

تحقق من فهمك (3)

لكل من الدوال التالية حدد مسافة الانسحاب ، ثم ارسم بيان كل منها مستخدماً الإزاحة لبيان الدالة الأساسية $g(x) = |x|$:

- | | |
|----------------------|-------------------|
| a $f(x) = x - 3 $ | b $y = x + 2 $ |
| c $f(x) = x - 3.5 $ | d $y = x - 1.5 $ |

2. الانسحاب في اتجاه محور الصادات (إزاحة رأسية)

$$f(x) = |x| - 1$$

ارسم بيان الدالة :

استكشف

$$f(x) = |x| - 1$$

الحل:

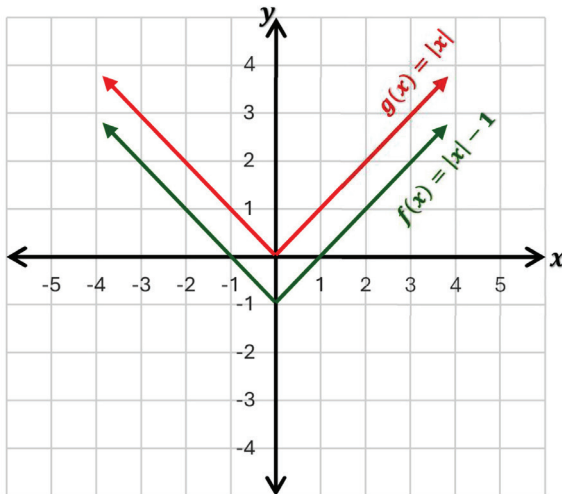
1 - لإيجاد صفر المطلق

نلاحظ أن صفر المطلق هو $x = 0$ وهي معادلة محور التماثل ، رأس المنحنى $(0, -1)$

2 - نكون جدول القيم

x	-1	0	1
y	0	-1	0

3 - نرسم الدالة



4 - نلاحظ أن:

بيان الدالة $f(x) = |x| - 1$ يمكن الحصول عليه بانسحاب بيان الدالة الأساسية $g(x) = |x|$ بمقدار وحدة واحدة في الاتجاه السالب لمحور الصادات رأسياً (لأسفل).

ارسم بيان الدالة $f(x) = |x| + 2$

مثال (4)

باستخدام التحويلات الهندسية

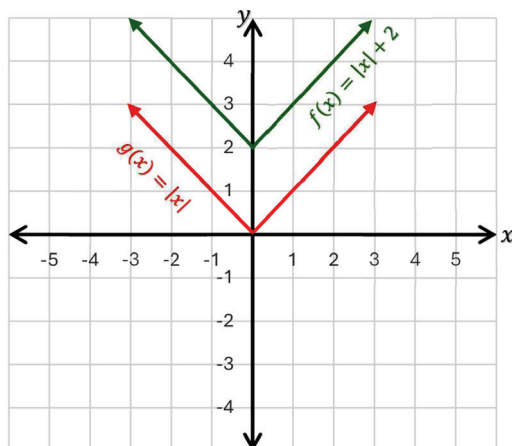
$$f(x) = |x| + 2$$

1 - لإيجاد صفر المطلق

نلاحظ أن صفر المطلق هو $x = 0$ وهي معادلة محور التماثل ، رأس المنحنى (0 ، 2)

2 - نكون جدول القيم.

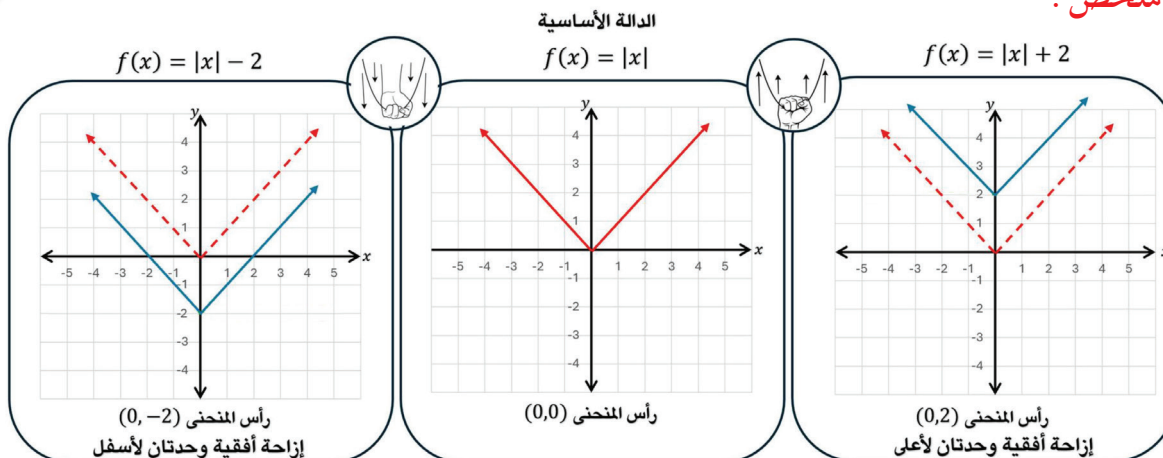
x	-1	0	1
y	1	0	1



3 - نرسم الدالة

بيان الدالة $f(x) = |x| + 2$ يمكن الحصول عليه بانسحاب بيان الدالة الأساسية $g(x) = |x|$ بمقدار وحدتين في الاتجاه الموجب لمحور الصادات رأسياً (لأعلى).

ملخص:



تعميم:

يكون منحني الدالة $f(x) = |x| + a$ هو نفس منحني الدالة الأساسية $g(x) = |x|$ وبإزاحة رأسية مقدارها $|a|$ وحدة في الاتجاه:

1. الموجب لمحور الصادات (رأسيًا للأعلى) عندما $a > 0$
2. السالب لمحور الصادات (رأسيًا للأسفل) عندما $a < 0$

تحقق من فهمك (4)

ارسم بيان كل من الدوال التالية باستخدام التحويلات الهندسية والدالة الأساسية $g(x) = |x|$:

- | | |
|----------------------|-----------------|
| a $f(x) = x + 3$ | b $y = x - 2$ |
| c $f(x) = x - 2.5$ | d $y = x - 1$ |

3. الانسحاب المركب: إزاحة أفقية تليها إزاحة رأسية لمنحني الدالة $f(x) = |x|$

ارسم بيان كل دالة مما يلي باستخدام دالة المرجع والإزاحة:

- | | |
|------------------------|------------------------|
| a $f(x) = x - 4 + 2$ | b $f(x) = x + 3 - 1$ |
|------------------------|------------------------|

مثال (5)

- a $f(x) = |x - 4| + 2$

الحل:

بيان الدالة $f(x) = |x - 4| + 2$ يمكن الحصول عليه بإزاحة لبيان الدالة الأساسية $g(x) = |x|$

1 - لإيجاد صفر المطلق أربع وحدات في الاتجاه الموجب لمحور السينات (إزاحة أفقية).

2 - إزاحة وحدتين للأعلى في الاتجاه الموجب

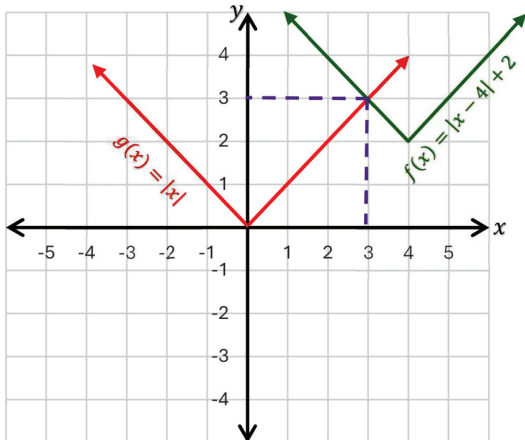
لمحور الصادات (إزاحة رأسية).

3 - نرسم الدالة.

4 - ملحوظة: نقطة تقاطع منحني الدالة $f(x)$

مع الدالة الأساسية $g(x)$ هي $(3, 3)$

اذكر ما تعبر عنه هذه النقطة ؟



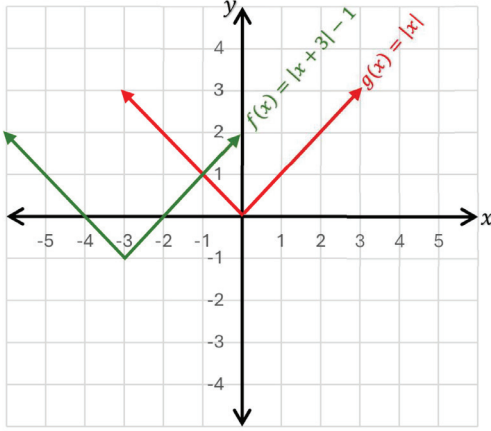
b $f(x) = |x + 3| - 1$

بيان الدالة $f(x) = |x + 3| - 1$ يمكن الحصول عليه بإزاحة لبيان الدالة الأساسية $g(x) = |x|$

1 - ثلاث وحدات في الاتجاه السالب لمحور السينات (إزاحة أفقية).

2 - إزاحة وحدة واحدة للأسفل في الاتجاه السالب لمحور الصادات (إزاحة رأسية).

3 - نرسم الدالة.



ملحوظة:

منحنى الدالة $f(x) = |x + 3| - 1$ يقطع محور السينات عند $x = -4$ ، $x = -2$

تعميم:

منحنى الدالة $f(x) = |x + a| + b$ هو نفس منحنى الدالة الأساسية $g(x) = |x|$ بإزاحة:

1 - أفقية (محور السينات) مقدارها $|a|$ مع مراعاة الاتجاه يميناً أو يساراً.

2 - رأسية (محور الصادات) مقدارها $|b|$ مع مراعاة الاتجاه للأعلى أو للأسفل.

تحقق من فهمك (5)

ارسم بيان الدوال التالية باستخدام دالة المرجع والإزاحة :

a $f(x) = |x + 3| + 2$

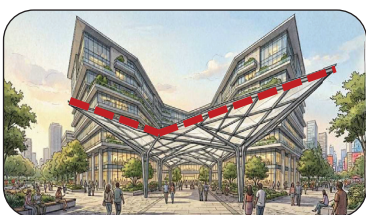
b $y = |x - 2| - 1$

c $f(x) = |x + 2| - 2$

d $y = |x - 1| + 3$

استخدام النماذج

صمم مهندس مظلة مدخل مبنى على شكل حرف V ، ويمكن تمثيل شكلها بالدالة $y = |x|$ ثم عدّل المظلة بإزاحة 3 وحدات إلى اليمين و4 وحدات إلى الأعلى.



المطلوب:

- a اكتب الدالة الجديدة.
- b حدّد إحداثيات رأس المنحنى.
- c ارسم الدالة الجديدة.

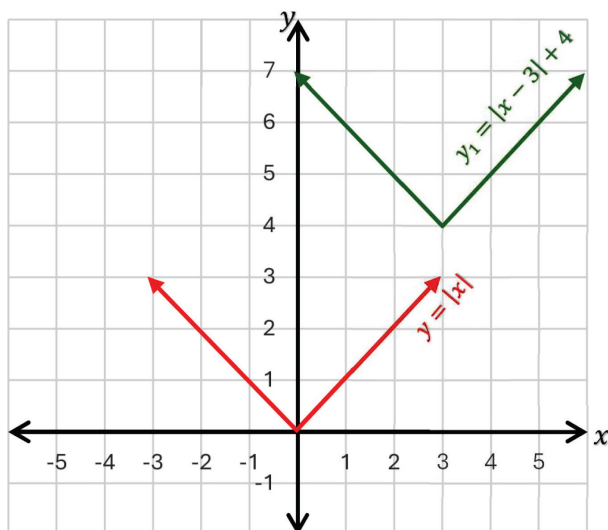
الحل:

a ∴ الدالة $y = |x|$ ثم تحريكها 3 وحدات إلى اليمين ، 4 وحدات إلى الأعلى

∴ الدالة الجديدة هي : $y_1 = |x - 3| + 4$

b إحداثيات رأس المنحنى هو (3,4)

c التمثيل البياني للدالة الجديدة هي:



تذكروا!

رأس دالة القيمة المطلقة

$$f(x) = |ax + b| + c$$

هو $\left(\frac{-b}{a}, c\right)$

الانعكاس في محور السينات للدالة الأساسية $g(x) = |x|$ Reflection across the x-axis of the parent function $g(x) = |x|$

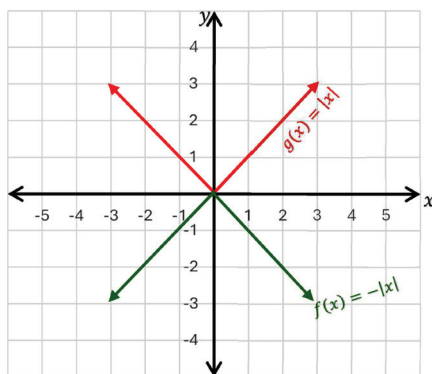
$$f(x) = -|x|$$

ارسم بيان دالة:

استكشف

الحل:

$$f(x) = \begin{cases} -(x) & : x \geq 0 \\ -(-x) & : x < 0 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} -x & : x \geq 0 \\ x & : x < 0 \end{cases}$$



x	-1	0	1
y	-1	0	-1

نلاحظ أن:

بيان الدالة $f(x) = -|x|$ هو انعكاس في محور السينات لبيان الدالة الأساسية $g(x) = |x|$

انتبه!

$$|a-x| = |x-a|$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$|-x| = |x|$$

$$|-ax| = |ax|$$

$$\sqrt{(x+a)^2} = |x+a|$$

تعميم:

• إذا كانت $g(x) = |x|$ ، $f(x) = -|x+b|$ يجب مراعاة

ترتيب التحويلات الهندسية لرسم بيان الدالة $f(x)$:

1 - انعكاس في محور السينات أولاً للدالة الأساسية.

2 - إزاحة أفقية (يميناً أو يساراً).

3 - إزاحة رأسية (للأعلى أو للأسفل).

4 - تحديد الرأس للمنحنى و محور التماثل.

ارسم بياناً منحنى الدالة $f(x) = -|x+1| + 2$

مستخدماً منحنى الدالة الأساسية $g(x) = |x|$

مثال (6)

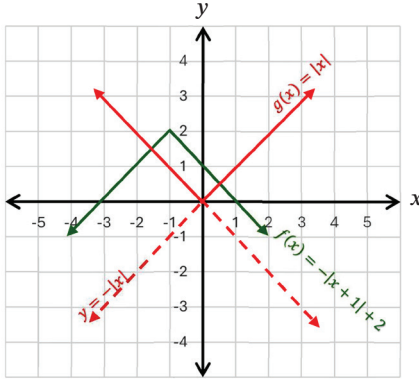
الحل:

بيان الدالة $f(x) = -|x+1| + 2$ يمكن الحصول عليه بـ

1 - انعكاس لبيان الدالة الأساسية $g(x) = |x|$

2 - ثم إزاحة أفقية مقدارها وحدة واحدة لجهة اليسار

3 - ثم إزاحة رأسية مقدارها وحدتان للأعلى



ملحوظة :

منحنى الدالة $f(x) = -|x+1| + 2$

يقطع محور السينات

عند $x = -3$ ، $x = 1$

تحقق من فهمك (6)

ارسم بيانيًا كلا من الدوال التالية مستخدمًا بيان منحنى الدالة الأساسية $g(x) = |x|$:

a $f(x) = -|x - 2| + 3$

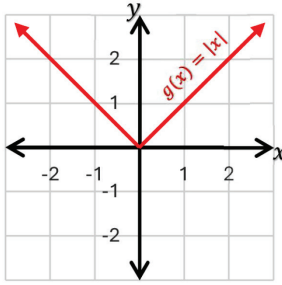
b $f(x) = -|x + 1| - 2$

c $f(x) = -|x - 1| - 1$

d $f(x) = -|x + 2| + 1$

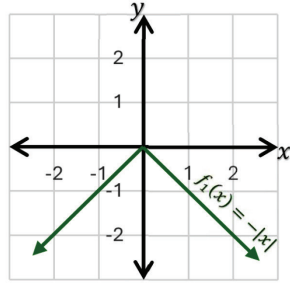
فكر معي: هل يمكن رسم بيان الدالة $f(x) = |2x - 4| + 3$ باستخدام التحويلات الهندسية؟

من منحنى الدالة الأساسية $g(x) = |x|$ ونحصل على منحنى الدالة $f(x) = -|x + 1| + 2$ كالآتي :



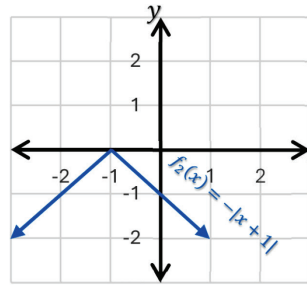
من منحنى الدالة الأساسية

$g(x) = |x|$



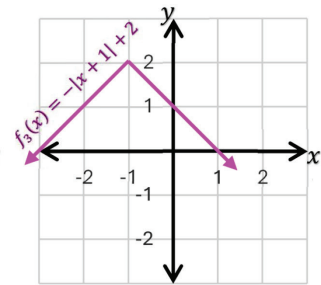
الانعكاس في محور السينات

$f_1(x) = -|x|$



إزاحة أفقية وحدة واحدة إلى اليسار

$f_2(x) = -|x + 1|$

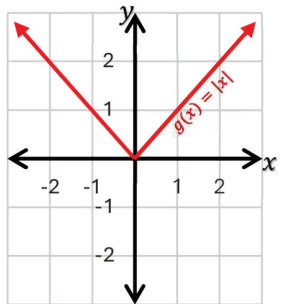


إزاحة رأسية وحدتان للأعلى

$f_3(x) = -|x + 1| + 2$

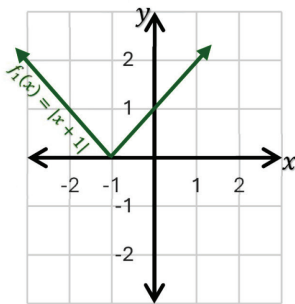
سؤال : هل يمكن أن نعكس الترتيب بإجراء الإزاحة الرأسية أو الإزاحة الأفقية قبل إجراء الانعكاس في محور السينات؟

بالطبع لا يمكننا لأننا سوف نحصل على منحنى آخر غير المنحنى المطلوب ، وسيكون على الصورة التالية.



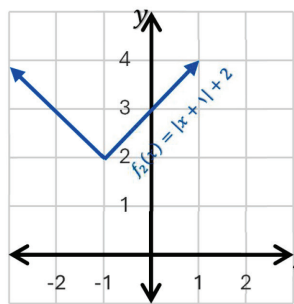
من منحنى الدالة الأساسية

$g(x) = |x|$



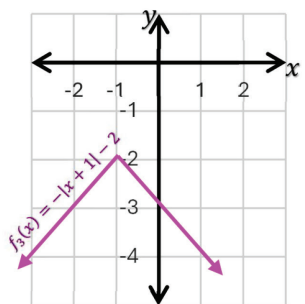
إزاحة أفقية وحدة واحدة إلى اليسار

$f_1(x) = |x + 1|$



إزاحة رأسية وحدتان للأعلى

$f_2(x) = |x + 1| + 2$



الانعكاس في محور السينات

$f_3(x) = -|x + 1| + 2$

وهذا المنحنى ستكون معادلته هي $f(x) = -|x + 1| + 2$ ، يمكننا التحقق :

بإعادة تعريف القيمة المطلقة ثم رسم بيان الدالة ، أو تحديد الرأس ومحور التماثل وفتحه بيان الدالة.

أولاً - البنود الموضوعية :

■ في البنود من (1-5) اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة:

(1) بيان الدالة $f(x)=|x|$ ينطبق على بيان الدالة $g(x)=x$ (a) (b)

(2) بيان الدالة $f(x)=|x|$ هو انعكاس لبيان الدالة $g(x)=-|x|$ حول (a) (b)

محور السينات

(3) بيان الدالة $f(x)=|x-4|+2$ يمكن الحصول عليه بانسحاب بيان (a) (b)

الدالة $g(x)=|x|$ في الاتجاه المحدد 4 وحدات جهة اليمين ووحدتان للأعلى

(4) محور التماثل للدالة $f(x)=|x-3|$ هو $x=3$ (a) (b)

(5) مدى الدالة $f(x)=|x+3|-3$ هو $[-3, \infty)$ (a) (b)

■ في البنود من (1-2) اختر الإجابة الصحيحة :

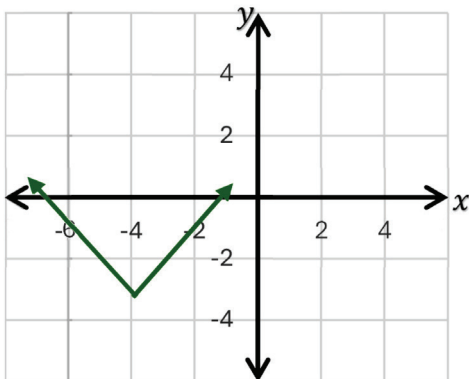
(1) أي من الدوال التالية رأس مُنَحْنَاهَا $(-3, 2)$:

(a) $y=|x+3|+2$

(b) $y=|x-3|+2$

(c) $y=|x+3|-2$

(d) $y=|x-3|-2$



(2) أي من قواعد الدوال التالية تمثل منحنى الدالة المرسوم :

(a) $y=|x-4|-3$

(b) $y=|x-4|+3$

(c) $y=|x+4|+3$

(d) $y=|x+4|-3$

ثانيًا - أسئلة المقال :

(1) مثل بيانيًا فيما يلي كلاً من الدوال التالية ثم حدّد كلاً من مجالها ومداها :

(a) $g(x) = |-3x|$

(d) $f(x) = 2|x|$

(b) $h(x) = |x+4|$

(e) $g(x) = |x|+3$

(c) $f(x) = 2|x-4|-6$

(2) ارسم بيانيًا كلاً من الدوال التالية مستخدماً التحويلات الهندسية للدالة الأساسية $g(x) = |x|$:

(a) $f(x) = |x+5|$

(d) $h(x) = -|x+3|$

(b) $h(x) = |x-2|$

(e) $f(x) = -|x-4|+3$

(c) $h(x) = |x|-2$

(f) $f(x) = |1-x|+2$



2(e)

(3) ارسم بيانيًا كلاً من الدالتين على نفس المستوى الإحداثي ، ثم أوجد الإحداثيات السينية

لنقاط تقاطعهم

(a) $f(x) = |x-2|$

, $g(x) = -|x-1|+3$

(b) $f(x) = |x-3|$

, $g(x) = 3-|x|$

(c) $f(x) = |x-2|-3$

, $g(x) = 4-|x-2|$

مهارات تفكير عليا



■ ارسم بيان الدالة : $f(x) = \sqrt{(x-2)^2}$

■ مَثِّلْ كُلَّ دَالَةٍ مِمَّا يَلِيَّ بِيَانِيًا ، ثُمَّ حَدِّدْ كُلًّا مِنْ مَجَالِهَا وَمَدَاهَا:

(a) $f(x) = 3 - |2x|$

(b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$

■ اختر الإجابة الصحيحة:

المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x) = |x+2|-2$

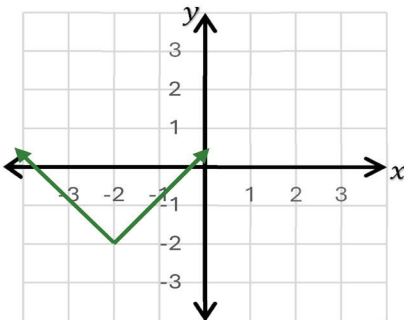
ومحور السينات تساوي وحدة مربعة

(a) 2

(b) 3

(c) 5

(d) 4



فكرة الدرس:



حل معادلة القيمة المطلقة جبرياً على الصورة :

$$1. \quad |ax+b| = |cx+d|$$

$$2. \quad |ax+b| = cx+d$$

المصطلحات:



1. معادلة القيمة المطلقة Absolute Value Equation

2. مجموعة الحل Solution Set (S.S.)

مسألة الدرس:



أراد حمد أن يشتري كرة قدم للمباراة التي ستقام في ملعب المدرسة فلنساعد حمداً لإيجاد الكرة المناسبة ، علماً بأن الكتلة المثالية لكرة القدم هي 430g ، ويسمح أن تزيد أو تنقص عن هذه الكتلة بمقدار 20g .



1. ما أكبر كتلة يمكن أن تكون لكرة القدم ؟

2. ما أقل كتلة يمكن أن تكون لكرة القدم ؟

3. اكتب معادلة قيمة مطلقة تمثل الموقف .

معادلات القيمة المطلقة (Absolute Value Equation)

معادلة القيمة المطلقة : هي معادلة تتضمن تعبيراً جبرياً داخل رمز القيمة المطلقة. ومن تعريف القيمة المطلقة فيمكن تحويل معادلة القيمة المطلقة إلى معادلتين مرتبطتين بها لا تحتويان على رمز القيمة المطلقة ، وذلك بجعل العبارة التي داخل القيمة المطلقة موجبةً مرةً وسالبةً مرةً أخرى .

مفهوم أساسي « حل معادلات القيمة المطلقة »

لحل المعادلة $|ax+b|=c$ حيث $c \geq 0$

نحل المعادلتين المرتبطتين بها وهما :

$$ax+b=c$$

أو

$$ax+b=-c$$

تعلمنا
فيما سبق:

- حل معادلات من

الدرجة الأولى.

- حل معادلات تربيعية.

- حل معادلات القيمة

المطلقة.

ملحوظة

مجموعة حل المعادلة
ويرمز لها بالرمز S.S.
هي مجموعة جميع قيم
المتغيرات التي تجعل
المعادلة صحيحة.

حل المعادلة على الصورة $|ax+b|=c, c \geq 0$

تعلّمنا فيما سبق أن حل معادلة القيمة المطلقة :

1 $|x|=A$

إذا كان $A > 0$ ، فإن
للمعادلة حلان هما:

$$x=A \quad \text{or} \quad x=-A$$

$$S=\{-A, A\}$$

2 $|x|=0$

إذا كان $A=0$ ، فإن
للمعادلة حل وحيد وهو:

$$x=0$$

$$S=\{0\}$$

3 $|x|=A$

إذا كان $A < 0$ ، فإن
للمعادلة ليس لها حل:

$$S=\emptyset$$

أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات التالية:

مثال توضيحي: **a** $|x-3|=2$ **b** $|3x+2|=0$ **c** $|5x+2|=-4$

الحل:

a $|x-3|=2$

$$\therefore |x-3|=2$$

$$\therefore x-3=2 \quad \text{or} \quad x-3=-2$$

$$\therefore x=5 \quad x=1$$

$\therefore$ مجموعة الحل هي:

$$S.S. = \{1, 5\}$$

b $|3x+2|=0$

$$\therefore |3x+2|=0$$

$$\therefore 3x+2=0$$

$$3x=-2$$

$$x = \frac{-2}{3}$$

$\therefore$ مجموعة الحل هي:

$$\therefore S.S. = \left\{ \frac{-2}{3} \right\}$$

c $|5x+2|=-4$

$$\therefore |5x+2|=-4$$

$$-4 < 0$$

$\therefore$ مجموعة الحل هي:

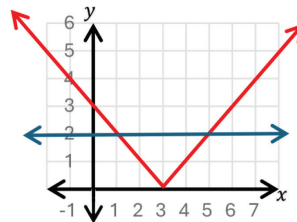
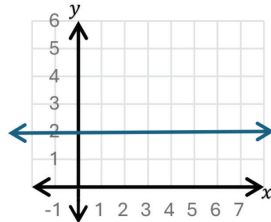
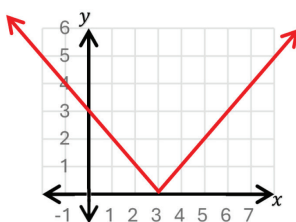
$$\therefore S.S. = \emptyset$$

من المثال التوضيحي:

$$f_1(x) = |x+3|$$

$$f_2(x) = 2$$

$$f_1(x) = f_2(x)$$



ملحوظة

1. $|A| \geq 0$ دائماً

2. $|A|=0 \Leftrightarrow A=0$

تذكر!

1. إذا كان $|x|=x$

فإن $x \geq 0$

$$x \in [0, \infty)$$

2. إذا كان $|x|=-x$

فإن $x \leq 0$

$$x \in (-\infty, 0]$$

ملحوظة

$$|a|=|b| \Leftrightarrow a^2=b^2$$

انتبه!

$$|a|=|b| \Leftrightarrow a=b$$

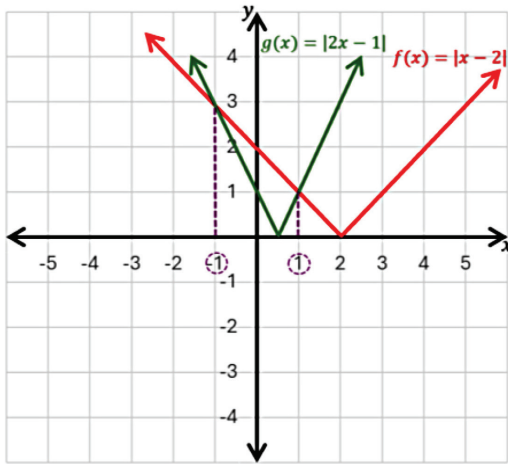
$$\text{or } a=-b$$

خواص القيمة المطلقة

لكل $a, b \in \mathbb{R}$ فإن :

1. $|a| \geq 0$
2. $|a+b| \leq |a| + |b|$
3. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
4. $|x-a| = |a-x|$
5. $\frac{|a|}{|b|} = \left| \frac{a}{b} \right|$, $b \neq 0$
6. $|x| = |-x|$
7. $|n|^2 = n^2$ حيث n عدد زوجي
8. $\sqrt{x^2} = |x|$ لأي عدد حقيقي x يكون

أولاً : حل المعادلة على الصورة $|ax+b| = |cx+d|$



1. ارسم بيان الدالة $f(x) = |x-2|$ وبيان الدالة $g(x) = |2x-1|$ على نفس المستوى الإحداثي، مستخدماً إحداثي رأس المنحنى ومحور التماثل في كل منهما:

x		2	
$f(x)$		0	
x		?	
$g(x)$		0	

2. من الرسم أوجد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع المنحنيين $f(x)$ ، $g(x)$

$$x_1 = \dots\dots\dots x_2 = \dots\dots\dots$$

3. تسمى مجموعة الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع المنحنيين

- مجموعة حل المعادلة

أي أن: مجموعة حل المعادلة $|x-2| = |2x-1|$

هي { ، }

وهذه الطريقة تسمى الطريقة البيانية لحل المعادلة $|x-2| = |2x-1|$

مثال (1) أوجد مجموعة حل المعادلة: $|x-2| = |2x-1|$

* الحل الأول (باستخدام خواص القيمة المطلقة)

نعلم أن $|a| = |b| \Leftrightarrow a = \pm b$
 $\therefore$ أي أن أحد المقدارين $\pm$ المقدار الآخر
 $\therefore |x-2| = |2x-1|$
 $\therefore x-2 = +(2x-1) \quad \text{or} \quad x-2 = -(2x-1)$
 $x-2 = 2x-1 \quad \quad \quad x-2 = -2x+1$
 $x-2x = 2-1 \quad \quad \quad x+2x = 2+1$
 $-x = 1 \quad \quad \quad 3x = 3$
 $x = -1 \quad \quad \quad x = 1$
 $\therefore S.S. = \{-1, 1\}$

* الحل الآخر (بتربيع الطرفين)

$\therefore |x-2| = |2x-1|$
 $\therefore (|x-2|)^2 = (|2x-1|)^2$
 $x^2 - 4x + 4 = 4x^2 - 4x + 1$
 $4x^2 - 4x + 1 - x^2 + 4x - 4 = 0$
 $3x^2 - 3 = 0$
 $3(x^2 - 1) = 0$
 $3(x-1)(x+1) = 0$
 $x-1 = 0 \quad \text{or} \quad x+1 = 0$
 $x = 1 \quad \quad \quad x = -1$
 $\therefore S.S. = \{-1, 1\}$

تحقق من فهمك (1)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $|x-1| = |x+2|$

ملحوظة: سوف تقتصر دراستنا على الحل الجبري والذي يعتمد على خواص القيمة المطلقة أو بعض العمليات الجبرية

أوجد مجموعة حل كل معادلة مما يلي:

(a) $|x+4| = |x+3|$ (b) $|2y+1| = |3y+4|$

تذكر!

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
 2. $|a| = |b|$
 فإن $|a|^2 = |b|^2$
 3. $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$

انتبه!

$x^2 - 1 = 0$
 $\therefore x^2 = 1$
 $\therefore \sqrt{x^2} = \sqrt{1}$
 $\therefore |x| = 1$
 $\therefore x = \pm 1$

انتبه!

$|a| = |b| \Leftrightarrow a = b$
 or $a = -b$

! انتبه

يمكنك حل المعادلة باستخدام:
 • خواص القيمة المطلقة.
 • بتربيع الطرفين.
 وهذا ما يسمى بالحل الجبري.

a) $|x+4| = |x+3|$

$\therefore |x+4| = |x-3|$

$\therefore x+4 = x-3 \quad \text{or} \quad x+4 = -(x-3)$

$x-x = -4-3$

$0x = -7$

عبارة خاطئة

لا يوجد حل

$x+4 = -x+3$

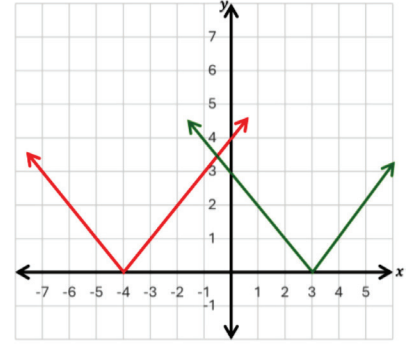
$x+x = -4+3$

$2x = -1$

$x = \frac{-1}{2}$

$\therefore S.S. = \left\{ \frac{-1}{2} \right\}$

الحل:
 باستخدام خواص القيمة المطلقة
 نعلم أن $|a| = |b| \Leftrightarrow |a| = \pm |b|$



a) $|2y+1| = |3y+4|$

$\therefore (|2y+1|)^2 = (|3y+4|)^2$

$4y^2 + 4y + 1 = 9y^2 + 24y + 16$

$9y^2 + 24y + 16 - 4y^2 - 4y - 1 = 0$

$5y^2 + 20y + 15 = 0$

$5(y^2 + 4y + 3) = 0$

$5(y+1)(y+3) = 0$

(÷5)

$5 \neq 0 \quad \text{or} \quad y+1=0 \quad \text{or} \quad y+3=0$

$y = -1$

$y = -3$

$\therefore S.S. = \{-1, -3\}$

بتربيع الطرفين

تحقق من فهمك (2)

أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية:

a) $|y-4| = |2y-5|$

b) $|2x-3| = |x+1|$

c) $|3y+1| = |y-2|$

d) $|x-4| = |2x-5|$

ثانيًا: حل المعادلة على الصورة $|ax+b|=cx+d$

مثال (3) أوجد مجموعة حل المعادلة: $|x-3|=3x-1$

الحل:

∴ القيمة المطلقة دائماً غير سالبة

∴ يجب أن يكون $3x-1 \geq 0$ وهذا ما نسميه شرط الحل

$$3x \geq 1$$

$$x \geq \frac{1}{3} \quad \therefore x \in \left[\frac{1}{3}, \infty \right)$$

∴ نقبل كل قيم x التي أكبر من أو تساوي $\frac{1}{3}$

أي أن مجموعة التعويض هي $\left[\frac{1}{3}, \infty \right)$ ويكون:

$$x-3 = +(3x-1)$$

or

$$x-3 = -(3x-1)$$

$$x-3 = 3x-1$$

$$x-3 = -3x+1$$

$$x-3x = 3-1$$

$$x+3x = 3+1$$

$$-2x = 2$$

$$4x = 4$$

$$x = -1$$

$$x = 1$$

$$-1 \notin \left[\frac{1}{3}, \infty \right)$$

$$1 \in \left[\frac{1}{3}, \infty \right)$$

∴ $x = -1$ ليس حلاً للمعادلة

∴ $x = 1$ حلاً للمعادلة

$$\therefore S.S. = \{ 1 \}$$

تحقق من فهمك (3)

أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية:

a $|2x-1|=x+2$

b $|2x+5|=x+5$

أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية:

a $|4x+2|=1-2x$

b $|x+4|+2x+3=0$

مثال (4)

الحل:

a $|4x+2|=1-2x$

$$|4x+2|=1-2x$$

$$1-2x \geq 0$$

∴ نوجد شرط الحل:

$$-2x \geq -1$$

$$x \leq \frac{-1}{-2}$$

$$x \leq \frac{1}{2}$$

$$\therefore x \in \left(-\infty, \frac{1}{2} \right]$$

تذكروا

1. $|x|=c, c \geq 0$ دائماً

2. $cx+d \geq 0$

$\Rightarrow x \geq \frac{-d}{c}, c \geq 0$

3. شرط الحل هو: ما يسمى بمجموعة التعويض (مجال الدالة)

4. $|ax+b|$

$$= \begin{cases} (ax+b) : x \geq \frac{-b}{a} \\ -(ax+b) : x < \frac{-b}{a} \end{cases}$$

! انتبه

إذا كانت $a > b, c < 0$
فإن $a \cdot b < b \cdot c$

! انتبه

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} |4x+2| \\ &= \left| \frac{1}{4} \cdot |4x+2| \right| \\ &= \left| \frac{1}{4} (4x+2) \right| \\ &= \left| x + \frac{1}{2} \right| \end{aligned}$$

! انتبه

1. $|3x-9|=3|x-3|$
2. $|3-x|=|x-3|$
3. $\sqrt{x^2-4x+4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$
4. $x^2 = |x|^2$

$$\begin{aligned} 4x+2 &= 1-2x \\ 4x+2x &= 1-2 \\ 6x &= -1 \end{aligned}$$

$$\therefore x = \frac{-1}{6}$$

$$x = \frac{-1}{6}, \frac{-1}{6} \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$$

or

$$\begin{aligned} 4x+2 &= -1+2x \\ 4x-2x &= -1-2 \\ 2x &= -3 \end{aligned}$$

$$\therefore x = \frac{-3}{2}$$

$$x = \frac{-3}{2}, \frac{-3}{2} \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$$

$$\therefore S.S. = \left\{ \frac{-1}{6}, \frac{-3}{2} \right\}$$

b) $|x+4| + 2x + 3 = 0$

$$|x+4| = -2x-3$$

∴ نوجد شرط الحل:

$$-2x-3 \geq 0$$

$$\therefore -2x \geq 3$$

$$x \leq \frac{-3}{2}$$

$$\therefore x \in \left(-\infty, \frac{-3}{2}\right]$$

$$\therefore x+4 = -2x-3$$

$$x+2x = -4-3$$

$$3x = -7$$

نتحقق من شرط الحل

$$x = \frac{-7}{3}, \frac{-7}{3} \in \left(-\infty, \frac{-3}{2}\right)$$

or

$$x+4 = 2x+3$$

$$x-2x = -4+3$$

$$x = 1$$

نتحقق من شرط الحل

$$x = 1, 1 \notin \left(-\infty, \frac{-3}{2}\right)$$

$$\therefore S.S. = \left\{ \frac{-7}{3} \right\}$$

تحقق من فهمك (4)

- أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية:

a) $|2\ell-3| = |4\ell-1|$

b) $|3x-1| + 4x - 13 = 0$



استخدام النماذج

يقع منزل سعد بين مدرسته و النادي الرياضي في منطقتة كما في الشكل :



وتوجد هذه المواقع الثلاثة على خط مستقيم يمر بحديقة الأحمدية ، تبعد المدرسة عن الحديقة 2 km ويبعد النادي الرياضي عن الحديقة 7 km في الاتجاه المعاكس، كم يبعد منزل سعد عن الحديقة إذا كان البعد بين المنزل والنادي الرياضي ضعف البعد بين المنزل والمدرسة ؟

الحل:



ليكن x موقع منزل سعد على خط الأعداد:

$$\therefore |x - (-2)| = |x + 2|$$

البعد بين المنزل والمدرسة

$$|7 - x| = |x - 7|$$

البعد بين المنزل والنادي الرياضي

$$\therefore |x - 7| = 2|x + 2|$$

$$|x - 7| = |2x + 4|$$

خواص القيمة المطلقة

$$\therefore x - 7 = 2x + 4$$

$$2x - x = -7 - 4$$

$$x = -11$$

مرفوضة لماذا؟

or

$$x - 7 = -(2x + 4)$$

$$x - 7 = -2x - 4$$

$$x + 2x = 7 - 4$$

$$3x = 3$$

$$x = 1$$

∴ يبعد منزل سعد عن الحديقة 1 km في اتجاه النادي الرياضي

أدرب وأحل المسائل

أولاً - البنود الموضوعية:

■ في البنود من (1-7) ظلل دائرة الإجابة الصحيحة :

حل المعادلة $|2x - 1| = x + 3$ هو (1)

(a) $x = 1$

(b) $x = 2$

(c) $x = -1$

(d) لا يوجد حل

أهمية الرياضة في حياة المتعلم

تساعد الرياضة على تحسين صحته الجسدية وزيادة نشاطه وتركيزه داخل الصف، كما تعزز ثقته بنفسه وتنمي لديه روح التعاون والانضباط مما يعكس إيجاباً على تحصيله الدراسي.

تذكر!

$$\forall a, b \in \mathbb{R}$$

$$|a - b| = |b - a|$$

$$|a| \cdot |b| = |a \cdot b|$$

انتبه !

$$2|A| = |2| \cdot |A|$$

$$= |2A|$$

من معالم بلادي:

«حديقة الأحمدية»

تعد حديقة الأحمدية من أبرز المعالم في محافظة الأحمدية وتتميز بمساحتها الخضراء وتصميمها الجميل، وهي مكان مناسب لممارسة الرياضة والتنزه للعائلات، وتعد من أقدم الحدائق المنظمة في الكويت.

(2) حل المعادلة $|x+2|=x+2$ هو

- (a) $x=-2$ (b) $x \in (-2, \infty)$ (c) $x \in [-2, \infty)$ (d) $\emptyset$

(3) حل المعادلة $|x-3|=|x+1|$ هو

- (a) $x=\pm 1$ (b) $x=-1$ (c) $x=1$ (d) $x=2$

(4) مجموعة حل المعادلة $|x-3|=|3-x|$ هي

- (a) $\{3\}$ (b) $\{-3, 3\}$ (c) $\mathbb{R}$ (d) $\emptyset$

(5) حل المعادلة $|x-4|=|4-x|$ هو

- (a) $x=-4$ (b) $x=4$ (c) $\mathbb{R}$ (d) لا يوجد حل

(6) حل المعادلة $|2x-3|=|x+3|$ هو

- (a) $x=0, x=6$ (b) $x=-5, x=0$ (c) $x=5, x=6$ (d) $x=\pm 6$

(7) مجموعة حل المعادلة $|x-2|+x=2$ هي

- (a) $\emptyset$ (b) $(-\infty, 2)$ (c) $(-\infty, 2]$ (d) $\{2\}$

ثانيًا - أسئلة المقال:

■ أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية:

(a)



(a) $|x-2|=|x+4|$

(c) $|4-5x|+|3x+1|=0$

(e) $|2y+3|=3y-2$

(g) $|2i-3|=4i-1$

(j) $|x+4|+23=17$

(k) $|2x+6|=x-3$

(b) $|x-4|=|x+2|$

(d) $|x-3|=2x-1$

(f) $|x-1|=5x+10$

(h) $|3y-7|=2y-5$

(i) $\frac{1}{2}|8x-2|=x+2$



مهارات تفكير عليا



(1) حل المعادلة مستخدمًا خواص القيمة المطلقة: $(x+5)^2=9$

(2) أوجد مجموعة حل المعادلتين التاليتين: (a) $|3x-9|-|3-x|=10$ (b) $\sqrt{x^2-2x+1}+x=5$

(3) اختر الإجابة الصحيحة:

إذا كانت مجموعة حل المعادلة $|x-a|=b$ هي $\{5, 11\}$ فإن (a, b)

- (a) $(-8, 3)$ (b) $(-3, 8)$ (c) $(8, 3)$ (d) $(3, 8)$

حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد «جبرياً وبيانياً» Solving a Quadratic Equation in one Variable Algebraically and Graphically

فكرة الدرس:



حل المعادلة التربيعية باستخدام القانون - بيانياً.

المصطلحات:



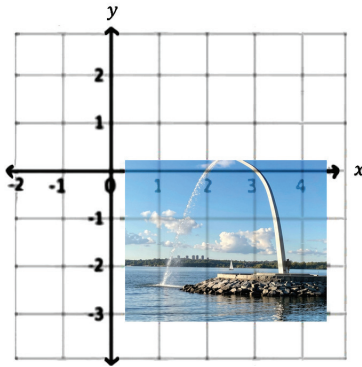
Discriminant

Quadratic Formula

1. المميز

2. القانون العام

مسألة الدرس:



في الشكل المقابل يُمثل الماء الخارج من النافورة منحنى قطع مكافئ ، ويمكن تمثيل هذا المسار بالدالة التربيعية :

$$y = -x^2 + 5x - 6$$

1. أوجد الإحداثيات السينية لنقطتي تقاطع المنحنى مع المحور السيني ؟
2. أوجد إحداثيات الرأس (أعلى نقطة للمنحنى) ؟

مفاهيم أساسية:

1. الدالة الثابتة : $c \in \mathbb{R}$, $f(x) = c$ (دالة من الدرجة الصفرية) وتمثيلها البياني يكون خط مستقيم أفقي يوازي محور السينات ويقطع محور الصادات عند القيمة c .

2. الدالة الخطية : $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $f(x) = ax + b$

(دالة من الدرجة الأولى) وتمثيلها البياني على شكل خط مستقيم.

3. الدالة التربيعية : $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $f(x) = ax^2 + bx + c$

(دالة من الدرجة الثانية) تمثل قطع مكافئ

مفتوحاً للأعلى إذا كانت $a > 0$ ، ومفتوحاً للأسفل إذا كانت $a < 0$

تذكروا!

$$(a \pm b)^2 =$$

$$a^2 \pm 2ab + b^2$$

ملحوظة

الدالة التربيعية تسمى
(دالة القطع المكافئ)
تتغير فتحة القطع
المكافئ للأسفل إذا
كان المعامل الرئيسي
لها عددًا سالبًا.

ملحوظة

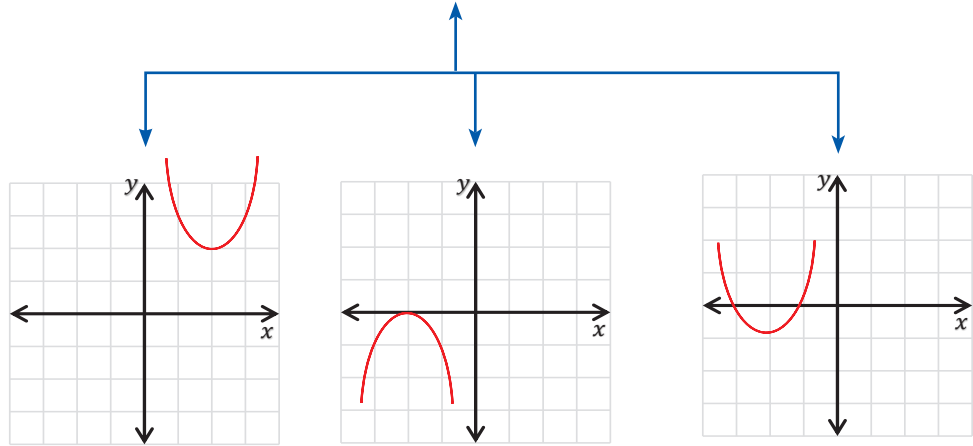
مجموعة الحل هي :
الإحداثيات السينية
لتقاطع المنحنى مع
محور السينات.

* حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد (المعادلة التربيعية) بيانياً:

لحل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد (المعادلة التربيعية) بيانياً نتبع الخطوات التالية:

1. ضع المعادلة على الصورة: $ax^2+bx+c=0$
2. افرض أن: $f(x)=ax^2+bx+c$ ، ثم ارسم منحنى الدالة f
3. عين نقاط تقاطع منحنى الدالة f مع محور السينات فتكون الاحداثيات السينية لنقاط التقاطع هي:

حلول المعادلة $f(x)=0$



المنحنى لا يقطع
محور السينات، لا
يوجد حل للمعادلة
في $\mathbb{R}$

عدد الحلول = 0

المنحنى يقطع محور
السينات في نقطة واحد،
يوجد حلان حقيقيان
متساويان للمعادلة في $\mathbb{R}$

عدد الحلول = 1 مكرر

المنحنى يقطع
محور السينات
في نقطتين، يوجد
حلان مختلفان
للمعادلة في $\mathbb{R}$

عدد الحلول = 2

أوجد بيانياً مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية في $\mathbb{R}$
مستعيناً بالفترة الموضحة:

- a) $x^2-2x-3=0$, $[-2, 4]$
- b) $-x^2-4x-4=0$, $[-4, 0]$
- c) $x^2+2=0$, $[-2, 2]$

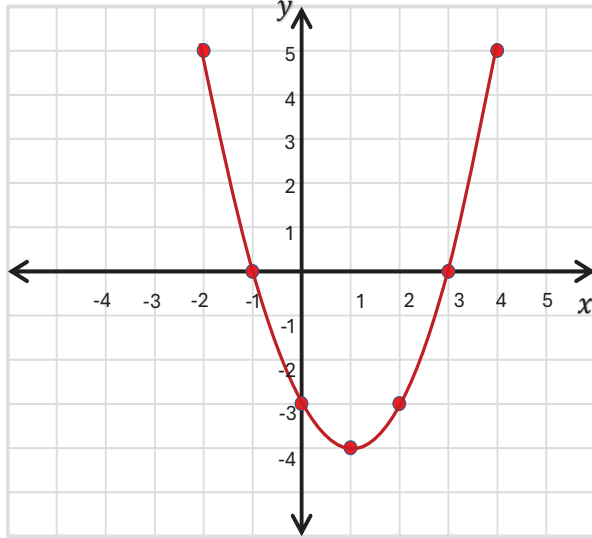
مثال (1)

a $x^2 - 2x - 3 = 0$, $[-2, 4]$

نفرض أن $f(x) = x^2 - 2x - 3$

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	5	0	-3	-4	-3	0	5

نكون جدول القيم



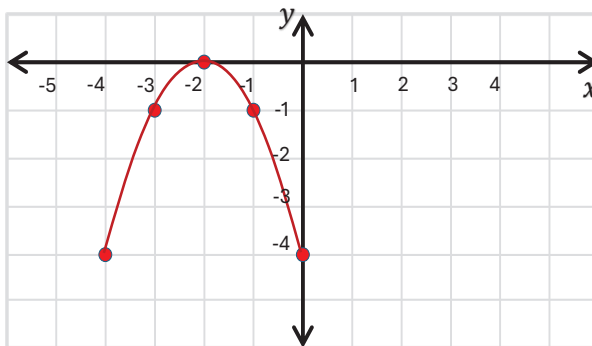
من الرسم :
نلاحظ أن الإحداثيات السينية
لنقاط تقاطع المنحنى مع
محور السينات هي $x = -1$
 $x = 3$ ، وبالتالي:
فإن مجموعة الحل هي
 $S.S. = \{-1, 3\}$

b $-x^2 - 4x - 4 = 0$, $[-4, 0]$

نفرض أن $f(x) = -x^2 - 4x - 4$

نكون جدول القيم

x	-4	-3	-2	-1	0
$f(x)$	-4	-1	0	-1	-4



من الرسم :
نلاحظ أن الإحداثيات
السينية لنقاط تقاطع المنحنى
مع محور السينات هي
 $x = -2$ ، وبالتالي:
فإن مجموعة الحل هي
 $S.S. = \{-2\}$

! إنتبه

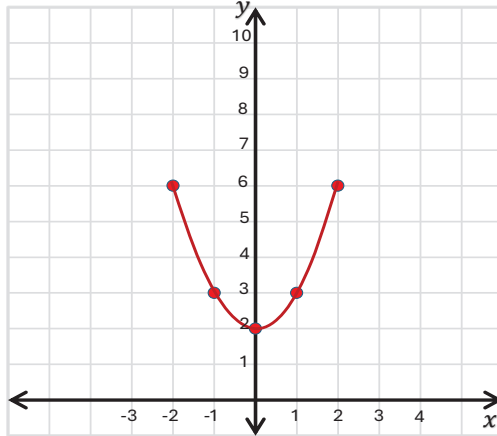
الإحداثيات السينية
لنقاط تقاطع المنحنى
مع محور السينات هي
التي عندها $f(x) = 0$

c $x^2 + 2 = 0$, $[-2, 2]$

نفرض أن $f(x) = x^2 + 2$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	6	3	2	3	6

نكون جدول



من الرسم :
نلاحظ أن المنحنى لا يقطع
محور السينات نهائياً وبالتالي :
فإن مجموعة حل المعادلة هي

$$S.S. = \emptyset$$

تحقق من فهمك (1)

أوجد بيانياً مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية في $\mathbb{R}$ مستعيناً بالفترة الموضحة :

- a $x^2 - 6x + 8 = 0$, $[1, 5]$
b $x^2 + 4x + 4 = 0$, $[-4, 0]$
c $x^2 + 4x + 5 = 0$, $[-4, 0]$

تعلمنا سابقاً :

إيجاد حل المعادلة التربيعية باستخدام التحليل إلى عاملين وباستخدام إكمال المربع، ولكن يوجد قانون عام لحل المعادلة التربيعية.
والآن سنقوم باستنتاج القانون العام لحل أي معادلة تربيعية.

استنتاج القانون العام لحل المعادلة التربيعية:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad , a \neq 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$ax^2 + bx = -c$$

إضافة المعكوس الجمعي لـ c للطرفين

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

قسمة الطرفين على a

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

بإكمال المربع

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = +\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

بتوحيد المقام

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}, \quad b^2 - 4ac \geq 0$$

ب طرح $\frac{b}{2a}$ للطرفين

$$x = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} - \frac{b}{2a}$$

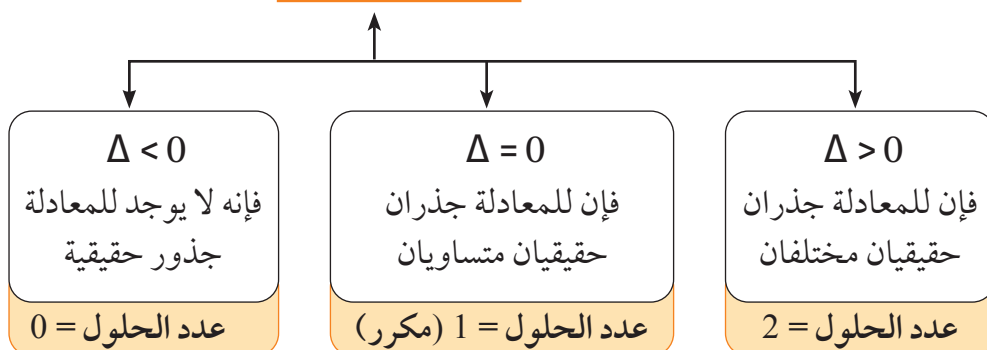
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

القانون العام لحل المعادلات التربيعية في متغير واحد وهو:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad b^2 - 4ac \geq 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

يُسمى المقدار $b^2 - 4ac$ مميّز المعادلة التربيعية ، ويرمز له بالرمز Δ ويقرأ (دلتا) ، والمميّز هو الذي يميّز نوع الجذرين ويحدد عدد الحلول الحقيقية للمعادلة بدون حلها ، أي أن

$$\Delta = b^2 - 4ac$$



حدد عدد الحلول الحقيقية لكل معادلة من المعادلات التالية بدون حل المعادلة:

(a) $4x^2 - 4x - 3 = 0$

(b) $2x^2 - 4x + 2 = 0$

(c) $x^2 + 2x + 3 = 0$

مثال (2)

تذكروا!

المربع الكامل:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$\sqrt{x^2} = |x|^2$$

$$\sqrt{(x+a)^2} = |x+a|$$

$$|x+a| = c, \quad c > 0$$

$$\therefore x+a = \pm c$$

إنتبه!

المعادلة التربيعية مثل القفل له مفتاح ثابت والقانون العام هو المفتاح الذي يفتح أي معادلة تربيعية مهما كانت صعبة، وهو خطه إنقاذ ثابت لحل المعادلة التربيعية التي يستحيل حلها بالتحليل.

الحل:

a $4x^2 - 4x - 3 = 0$

$a=4$ نوجد a, b, c

$b=-4$

$c=-3$

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac$ المميز

$= (-4)^2 - 4(4)(-3)$

$= 64$

$\therefore \Delta > 0$

$\therefore$ عدد الحلول = 2

b $2x^2 - 4x + 2 = 0$

$a=2$ نوجد a, b, c

$b=-4$

$c=2$

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac$ المميز

$= (-4)^2 - 4(2)(2)$

$= 0$

$\therefore \Delta = 0$

$\therefore$ عدد الحلول = 1 (مكرر)

c $x^2 + 2x + 3 = 0$

$a=1$ نوجد a, b, c

$b=2$

$c=3$

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac$ المميز

$= (2)^2 - 4(1)(3)$

$= -8$

$\therefore \Delta < 0$

$\therefore$ عدد الحلول = 0

تحقق من فهمك (2)

حدد عدد الحلول الحقيقية لكل معادلة من المعادلات التالية بدون حل المعادلة:

a $2x^2 - 7x - 4 = 0$

b $x^2 - 10x + 25 = 0$

c $3x^2 - 2x + 2 = 0$

d $x^2 = 15$

e $x^2 - x = 0$

f $2x^2 - 8x + 8 = 0$

أوجد مجموعة حل المعادلات التالية باستخدام القانون:

a $x^2 - x - 5 = 0$

b $x^2 - 8 = 0$

c $x^2 = x + 1$

d $x^2 - 6x + 9 = 0$

مثال (3)

a $x^2 - x - 5 = 0$

الحل:

$a=1, b=-1, c=-5$

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac$

$= (-1)^2 - 4(1)(-5) = 21$

$\therefore \Delta > 0$

1. نوجد قيم a, b, c

2. نوجد المميز Δ

3. نحدد نوع الجذرين

$\therefore$ للمعادلة حلان حقيقيان مختلفان هما:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

4. نوجد الجذرين باستخدام القانون

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{21}}{(2)(1)}$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \quad \text{or} \quad x = \frac{1 - \sqrt{21}}{2}$$

$$\therefore \text{S.S.} = \left\{ \frac{1 + \sqrt{21}}{2}, \frac{1 - \sqrt{21}}{2} \right\}$$

(b) $x^2 - 8 = 0$

$\therefore x^2 - 8 = 0$

$a = 1, b = 0, c = -8$

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac$

$= (0)^2 - 4(1)(-8) = 32$

$\therefore \Delta > 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x = \frac{-(0) \pm \sqrt{32}}{(2)(1)}$

$x = \frac{\sqrt{32}}{2} = 2\sqrt{2} \quad \text{or} \quad x = \frac{-\sqrt{32}}{2} = -2\sqrt{2}$

$\therefore \text{S.S.} = \{ 2\sqrt{2}, -2\sqrt{2} \}$

(c) $x^2 = x + 1$

$x^2 - x - 1 = 0$

$a = 1, b = -1, c = -1$

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac$

$= (-1)^2 - 4(1)(-1) = 5$

$\therefore \Delta > 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{5}}{(2)(1)}$

$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{or} \quad x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

$\therefore \text{S.S.} = \left\{ \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right\}$

(d) $x^2 - 6x + 9 = 0$

$a = 1, b = -6, c = 9$

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac$

$= (-6)^2 - 4(1)(9) = 0$

$\therefore \Delta = 0$

1. نوجد قيم a, b, c

2. نوجد المميز Δ

3. نحدد نوع الجذرين

$\therefore$ للمعادلة حلان حقيقيان مختلفان هما :

4. نوجد الجذرين باستخدام القانون

! انتبه

توضع المعادلة دائماً

على الصورة العامة :

$ax^2 + bx + c = 0$

نوجد قيمة المميز Δ

فإن :

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

! انتبه

في المعادلة التربيعية :

$ax^2 + bx + c = 0$

إذا كانت $b = 0$

نوجد قيمة المميز Δ

فإن :

$x = \frac{\pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

معلومة (i)

معلومة :

العدد الذهبي يساوي

$1.618 \approx x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

تقريباً

ملحوظة

$$\begin{aligned} x^2 - 8 &= 0 \\ x^2 &= 8 \\ \sqrt{x^2} &= \sqrt{8} \\ |x| &= 2\sqrt{2} \\ x &= \pm 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

إنتبه !

إذا كانت $\Delta = 0$
فإن حل المعادلة هو
 $x = \frac{-b}{2a}$

إنتبه !

مجموعة حل المعادلة
يرمز له بالرمز $S.S.$

ملحوظة

إذا كان معامل x^2 عدد
سالِب فإن منحنى الدالة
التربيعية يكون مفتوحًا
للأسفل.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{(2)(1)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$$

$$\therefore S.S. = \{ 3 \}$$

4. نوجد الجذرين باستخدام القانون

تحقق من فهمك (3)

أوجد مجموعة حل المعادلات التالية باستخدام القانون :

a $x^2 - 4x + 2 = 0$

b $4x^2 - 5x + 1 = 0$

c $x^2 - 2x + 1 = 0$

d $x^2 - 6x + 8 = 0$

حل المعادلة التالية باستخدام القانون : $x^2 - 3x = 0$

مثال (4)

$$x^2 - 3x = 0$$

الحل: 1. الصورة العامة للمعادلة

$$a = 1, b = -3, c = 0$$

2. نوجد قيم a, b, c

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac$$

3. نوجد المميز Δ

$$= (-3)^2 - 4(1)(0) = 9$$

4. نحدد نوع الجذرين

$$\therefore \Delta > 0$$

∴ للمعادلة حلان حقيقيان مختلفان هما :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

5. نوجد الجذرين باستخدام القانون

$$x = \frac{3 + \sqrt{9}}{2} \quad \text{or} \quad x = \frac{3 - \sqrt{9}}{2} \quad \therefore \text{حل المعادلة:}$$

تحقق من فهمك (4)

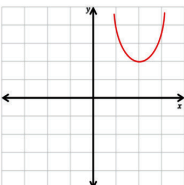
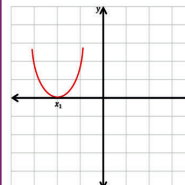
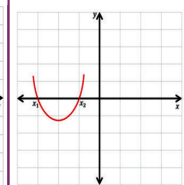
حل المعادلتين التاليتين باستخدام القانون .

a $x^2 + 7x + 10 = 0$

b $2x^2 - 5x - 52 = 0$

تعميم :

للدالة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ حيث $a, b, c \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$

المميز	$b^2 - 4ac < 0$ سالِب	$b^2 - 4ac = 0$ صفر	$b^2 - 4ac > 0$ موجب
عدد الحلول	لا يوجد حلول حقيقية	حلان حقيقيان متساويان	حلان حقيقيان مختلفان
التمثيل البياني			

عدنان فرديان متتاليان مجموع مربعيهما 34 فما العدنان؟

مثال (5)

الحل: نفرض أن العدد الفردي الأول $x =$

$\therefore$ العدد الفردي الثاني $x+2 =$

$\therefore$ مجموع مربعي العددين $34 =$

$$(x)^2 + (x+2)^2 = 34$$

$$x^2 + x^2 + 4x + 4 - 34 = 0$$

$$2x^2 + 4x - 30 = 0$$

$$2(x^2 + 2x - 15) = 0$$

$$2 \neq 0, \therefore x^2 + 2x - 15 = 0 \text{ بالتحليل}$$

$$(x-3)(x+5) = 0$$

$$x-3=0$$

or

$$x+5=0$$

$$\therefore x=3$$

or

$$x=-5$$

العدد الفردي الأول 3

العدد الفردي الأول -5

العدد الفردي الثاني 5

العدد الفردي الثاني -3

$\therefore$ العدنان فرديان هما 3, 5 أو -5 و -3

هل يمكن الحل بطريقة أخرى؟

تحقق من فهمك (5)

a أوجد عددين زوجيين متتاليين مجموع مربعيهما 100

b مستطيل يزيد طوله عن عرضه بمقدار 3cm ومساحته $40cm^2$

أوجد بعدي المستطيل .

استخدام النماذج

ملعب كرة القدم في استاد جابر الدولي في الكويت مستطيل الشكل ، إذا كان عرض الملعب x متراً ، وكان طوله يزيد عن عرضه بمقدار 37 متراً ، فإذا علمت أن مساحة الملعب 7140 متراً مربعاً:



أوجد عرض الملعب و طوله ؟

الحل:

مساحة المنطقة المستطيلة = الطول $\times$ العرض

$$\text{مساحة الملعب : } x(x+37) = 7140$$

إنتبه !

إذا كان العدد هو x فإن :

- ضعف العدد $2x =$

- ثلاثة أمثال العدد $3x =$

- العدد الذي يليه $x+1 =$

- مربع العدد $x^2 =$

- عدد فردي فإن العدد

الفردي الذي يليه هو

$$x+2$$

- عدد زوجي فإن العدد

الزوجي الذي يليه هو

$$x+2$$

ملحوظة

الأبعاد لا يمكن أن تكون قيمها بالسالب

من معالم
بلادي:

«استاد جابر»

استاد جابر الأحمد الدولي هو أكبر ملعب رياضي في دولة الكويت ويعد من أهم المنشآت الرياضية ويسمى بهذا الاسم تكريماً للأمير الراحل الشيخ جابر الأحمد الصباح ، رحمه الله .



$$x^2 + 37x - 7140 = 0$$

تحويل المساحة إلى الصورة العامة للدالة التربيعية

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

نستخدم القانون العام

$$x = \frac{-37 \pm \sqrt{(37)^2 - 4(1)(7140)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-37 + \sqrt{173}}{2} \quad \text{or} \quad x = \frac{-37 - \sqrt{173}}{2}$$

$$x = 68 \quad (\text{مقبولة}) \quad \text{or} \quad x = -105 \quad (\text{مرفوضة})$$

عرض الملعب هو 68 متراً $\Leftarrow 68 + 37 = 105$
 $\therefore$ طول الملعب يساوي 105 متراً

أتدرب وأحل المسائل

أولاً - البنود الموضوعية :

■ في البنود من (1-3) اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة :

- (1) جذرا المعادلة $x^2 - 5x + 6 = 0$ هما جذران حقيقيان متساويان (a) (b)
- (2) المعادلة $x^2 - 4x + 4 = 0$ لها جذران حقيقيان متساويان (a) (b)
- (3) جذرا المعادلة $x^2 + 9 = 0$ هما 3 ، -3 (a) (b)

■ في البنود من (1-7) اختر الإجابة الصحيحة :

$$(1) \text{ المعادلة } x^2 - 6x + 9 = 0$$

- (a) لها جذران حقيقيان مختلفان (b) لها جذران حقيقيان متساويان
- (c) ليس لها جذور حقيقية (d) ليس أيّاً مما سبق
- (2) المعادلة $x^2 + 4x + 5 = 0$

- (a) لها جذران حقيقيان مختلفان (b) لها جذران حقيقيان متساويان
- (c) ليس لها جذور حقيقية (d) ليس أيّاً مما سبق

$$(3) \text{ جذرا المعادلة } x^2 - 3x - 4 = 0 \text{ هما:}$$

- (a) -1,4 (b) 1,4 (c) -2,2 (d) -1,3

(4) حل المعادلة $x^2=9$ هو:

- (a) 3 (b) -3 (c) ± 3 (d) لا يوجد حل

(5) جذرا المعادلة $2x^2-7x+3=0$ هما:

- (a) $\frac{1}{2}, 3$ (b) 1, 3 (c) 2, 3 (d) 1, $\frac{3}{2}$

(6) حل المعادلة $x^2-25=0$ هو:

- (a) 5 (b) -5 (c) ± 5 (d) لا يوجد حل

(7) المعادلة التي مجموع جذريها يساوي 5 فيما يلي:

- (a) $(x+1)(x+4)=0$ (b) $x(x-5)=0$
(c) $(x-1)(x+6)=0$ (d) $(x-5)(x+1)=0$

ثانيًا - أسئلة المقال :

(1) أوجد حل كل معادلة من المعادلات التالية باستخدام القانون العام:

- (a) $x^2-3x-10=0$ (b) $2x^2-5x-3=0$
(c) $\frac{1}{2}x^2-3=0$ (d) $3x^2+x-2=0$



(b) 1

(2) أوجد نوع الجذرين للمعادلتين التاليتين ثم تحقق باستخدام القانون :

- (a) $x^2-4x-5=0$ (b) $2x^2-4x+2=0$

(3) أوجد حل كل معادلة من المعادلات التالية:

- (a) $\frac{1}{2}x(x+6)=8$ (b) $2x(x+1)=2$

(4) ثلاثة أعداد موجبة متتالية مربع أكبرهم يساوي مجموع مربعي العددين الآخرين، أوجد هذه الأعداد.

(5) عدداً زوجيان متتاليان مجموع مربعيهما يزيد عن حاصل ضربيهما بمقدار 28، فما العدداً ؟

! إنتبه

مربع العدد x هو x^2
ضعف العدد x هو $2x$

مهارات تفكير عليا



■ اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة:

(1) إذا كانت المعادلة $x^2 - 6x - k = 0$ لها جذران حقيقيان متساويان

فإن قيمة k هي 3

(a) (b)

■ في البنود من (5 - 2) اختر الإجابة الصحيحة:

(2) إذا كانت المعادلة $x^2 - kx + 4 = 0$ ليس لها جذور حقيقية فإن k تحقق:

(a) $k^2 > 16$

(b) $k^2 = 16$

(c) $k^2 < 16$

(d) $k > 16$

(3) مجموعة حل المعادلة $x^2 = 2 - |x|$ هي:

(a) $\{1, -1\}$

(b) $\{2, -2\}$

(c) $\{1, -2\}$

(d) $\{-1, 2\}$

(4) مجموعة حل المعادلة $x^2 - 2|x| = 8$ هي:

(a) $\{2, -2\}$

(b) $\{4, -4\}$

(c) $\{2, 4\}$

(d) $\emptyset$

(5) إذا كانت $|x| > x$ ، $x^2 + 2x - 3 = 0$ فإن $2x + 4$ تساوي:

(a) -2

(b) 2

(c) 6

(d) 8

(6) أوجد قيمة k بحيث يكون للمعادلة التالية جذران حقيقيان متساويان:

$$x^2 + kx + 4 = 0$$

(7) حل كلا من المعادلتين التاليتين:

(a) $x^2 - 3|x| - 28 = 0$

(b) $|x - 3|^2 - |x - 3| - 6 = 0$

إيجاد مجموع وناتج ضرب جذريّ معادلة تربيعية - تكوين المعادلة التربيعية بمعلومية جذريها

Sum and Product of Roots of a Quadratic Equation – Forming a Quadratic Equation

فكرة الدرس:



- إيجاد مجموع الجذرين وحاصل ضرب الجذرين من معادلة تربيعية
- تكوين المعادلة التربيعية بمعلومية جذريها

المصطلحات:



1. مجموعة الجذرين Sum of the Roots
2. حاصل ضرب الجذرين Product of the Roots

مسألة الدرس:



إذا علمت أن جذريّ المعادلة: $x^2 - 5x + 6 = 0$ هما $m=3$, $\ell=2$ فأجب عن الأسئلة التالية:

1. أوجد مجموع جذري المعادلة
2. أوجد ناتج ضرب جذري المعادلة
3. أوجد $a = \dots$, $b = \dots$, $c = \dots$
4. أوجد $\frac{-b}{a} = \dots$, $\frac{c}{a} = \dots$
5. هل توجد علاقة بين مجموع جذري المعادلة ومعاملات حدودها؟
6. هل توجد علاقة بين ناتج ضرب جذري المعادلة ومعاملات حدودها؟

مما سبق:

**أولاً : إيجاد مجموع الجذرين وحاصل ضرب الجذرين
للمعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ بدون حلها**

∴ جذري المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ هما:

$$x_1 = \ell = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = m = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

فإن: ① $x_1 + x_2 = \ell + m = \frac{-b}{a}$ ② $x_1 \cdot x_2 = \ell \cdot m = \frac{c}{a}$

③ $x_1 - x_2 = \ell - m = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} = \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \right|$

تعلمنا
فيما سبق:

كيفية إيجاد جذري
المعادلة التربيعية في متغير
واحد بعدة طرق
التحليل - إكمال مربع -
القانون العام لحل المعادلة
التربيعية - بيانياً.

تذكروا!

الصورة العامة للمعادلة
التربيعية هي:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

حيث:

a	معامل x^2
b	معامل x
c	الحد الثابت

! إنتبه

- يجب وضع المعادلة في الصورة العامة
- استخراج قيم كل من a, b, c
- التأكد من حفظ قانون مجموع جذريّ المعادلة وناتج ضربيهما
- دائماً نرسم لجذريّ المعادلة بالرمز ℓ, m

💡 تذكر

- مجموع جذريّ المعادلة التربيعية هو $-\frac{b}{a}$
- حاصل ضرب جذريّ المعادلة هو $\frac{c}{a}$

أكمل الجدول التالي:

تدرب

المعادلة	المعاملات	مجموع الجذرين	حاصل ضرب الجذرين
$2x^2 + 5x - 12 = 0$	$a = 2$ $b = 5$ $c = -12$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{-12}{2} = -6$
$3x^2 = 23x - 30$	$a =$ $b =$ $c =$		
$(2x - 3)(x + 2) = 0$	$a =$ $b =$ $c =$		
$2x^2 + x - 6 = 0$	$a =$ $b =$ $c =$		
$ax^2 + bx + c = 0$, $a = 1$	$a =$ $b =$ $c =$		

إذا علمت أن ℓ, m هما جذرا المعادلة

$$ax^2 + bx + c = 0$$

أوجد: $\ell + m$ ، $\ell \cdot m$ في الحالتين التاليتين:

(a) عندما $a = b$

(b) عندما $a = c$

فكر معي

إذا كان حاصل ضرب جذرا المعادلة $2x^2 - 3x + c = 0$

يساوي -1 أوجد قيمة c .

مثال (1)

الحل:

من المعادلة نوجد: $a = 2$, $b = -3$, $c = c$

بفرض أن ℓ, m هما جذريّ المعادلة

فإن ناتج ضرب الجذرين: $\ell \cdot m = \frac{c}{a}$

$$\therefore -1 = \frac{c}{2} \implies \therefore c = -2$$

تحقق من فهمك (1)

إذا كان حاصل ضرب جذريّ المعادلة $3x^2 + 10x - c = 0$ يساوي $-\frac{8}{3}$ أوجد قيمة c .

مثال (2) إذا كان مجموع جذريّ المعادلة: $2x^2 + bx - 5 = 0$ هو $\frac{3}{2}$ ، فأوجد قيمة b .

الحل:

من المعادلة نوجد: $a=2$, $b=b$, $c=-5$

∴ مجموع جذريّ المعادلة هو: $\ell + m = \frac{3}{2}$

$$\therefore \frac{-b}{a} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{-b}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \therefore -b = 3 \Rightarrow \therefore b = -3$$

تحقق من فهمك (2)

إذا كان حاصل ضرب جذريّ المعادلة $ax^2 - 5x + 2 = 0$ يساوي $\frac{3}{2}$ أوجد قيمة a ، ثم حل المعادلة.

إذا كان ℓ , m هما جذريّ المعادلة $2x^2 - 8x + 5 = 0$ ، فأوجد القيم العددية لكل مما يلي:

مثال (3) (a) $\ell^2 + m^2$ (b) $\frac{1}{\ell} + \frac{1}{m}$ (c) $\ell - m$

الحل:

من المعادلة نوجد: $a=2$, $b=-8$, $c=5$

$$\ell + m = \frac{-b}{a} = 4$$

$$\ell \cdot m = \frac{c}{a} = \frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{(a) } \ell^2 + m^2 &= (\ell + m)^2 - 2\ell \cdot m \\ &= (4)^2 - 2\left(\frac{5}{2}\right) = 11 \end{aligned}$$

ملحوظة Q

تستخدم قانون حاصل ضرب الجذرين.

! إنتبه

عندما $c=0$

في المعادلة التربيعية

$$ax^2 + bx + c = 0$$

فإن الجذران أحدهما

نظير ضربي للآخر.

ملحوظة Q

تستخدم قانون جمع الجذرين

! إنتبه

1. $(\ell+m)^2$
 $=\ell^2+m^2+2\ell m$
2. ℓ^2+m^2
 $=(\ell+m)^2-2\ell m$
3. $\ell-m = \left| \frac{\Delta}{a} \right|$
4. $(\ell-m)^2$
 $=(\ell+m)^2-4\ell m$
5. ℓ^3+m^3
 $=(\ell+m)[(\ell+m)^2-3\ell m]$
6. $xy+xz=x(y+z)$
7. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$
 $= \frac{(a.d+c.d)}{(b.d)}$

$$\text{b) } \frac{1}{\ell} + \frac{1}{m} = \frac{m + \ell}{\ell \cdot m} = \frac{4}{\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{8}{5}$$

$$\text{c) } \ell - m = \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \right| = \left| \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} \right|$$

$$= \left| \frac{\sqrt{(-8)^2 - 4(2)(5)}}{2} \right|$$

$$= \left| \frac{2\sqrt{6}}{2} \right| = \sqrt{6}$$

تحقق من فهمك (3)

إذا علمت أن جذريّ المعادلة $x^2 - 7x + 9 = 0$ هما ℓ ، m ، فأوجد قيمة كل من:

- a) $\ell + m$ b) $\ell \cdot m$ c) $\ell^2 + m^2$

ثانيًا: إيجاد المعادلة التربيعية إذا عُلِمَ جذراها

استكشف

بفرض أن ℓ, m هما جذرا المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ ، $a \neq 0$

1. أوجد $\ell + m = \dots\dots\dots$ = مجموع الجذرين
2. أوجد $\ell \cdot m = \dots\dots\dots$ = حاصل ضرب الجذرين
3. من المعادلة التربيعية قسّم طرفي المعادلة على a :
4. قارن بين النتائج في (1) ، (2) ، (3) ماذا تلاحظ ؟
تكون المعادلة على الصورة :

$$x^2 - (\dots\dots\dots)x + (\dots\dots\dots) = 0$$

يعبر عن

يعبر عن

تعميم

إذا كان l, m هما جذرا المعادلة التربيعية فإن المعادلة التربيعية تكون على الصورة:

$$x^2 - (l + m)x + (l \cdot m) = 0$$

↓ ↓
حاصل ضرب الجذرين مجموع الجذرين

كُون معادلة تربيعية في متغير واحد والتي جذراها 4 , -3 بطريقتين مختلفتين.

مثال (4)

الحل:

ليكن l, m هما جذرا المعادلة التربيعية:

$$l + m = (-3) + 4 = 1$$

$$l \cdot m = (-3) \cdot (4) = -12$$

والمعادلة التربيعية تكون على الصورة:

$$x^2 - (l + m)x + (l \cdot m) = 0$$

$$x^2 - (1)x + (-12) = 0$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

* الحل الآخر:

عندما يكون l, m هما جذرا المعادلة فإن المعادلة تكون على الصورة:

$$(x - l)(x - m) = 0$$

$$(x - (-3))(x - 4) = 0$$

$$(x + 3)(x - 4) = 0$$

$$x^2 - 4x + 3x - 12 = 0$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

تحقق من فهمك (4)

أوجد المعادلة التربيعية التي جذراها معلومان في الحالات التالية:

a 3, 5

b 4, $-\frac{1}{3}$

c 2, -2

معلومة

المعادلة التربيعية على

الصورة:

$$(x - l)(x - m) = 0$$

جذراها l, m

ملحوظة

$$(a + b)(c + d)$$

$$= ac + ad + bc + bd$$

ملحوظة

$$1. (x-y)(x+y)$$

$$= x^2 - y^2$$

$$2. a.b=0$$

$$\Leftrightarrow a=0 \text{ or } b=0$$

تذكر!

المعادلة التربيعية في متغير واحد تسمى: معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد

إنتبه!

إذا كانت $\ell + m = 0$ فإن: ℓ, m نظير جمعي للآخر $b = 0$

إذا كانت $\ell.m = 1$ فإن: ℓ, m نظير ضربي للآخر $a = c$

فكر معي

هل المعادلة التربيعية التي جذراها 3, -3 هي معادلة تربيعية وحيدة؟

ملحوظة هامة جدًا (بصورة عامة):

إذا كان جذرا المعادلة التربيعية هما m, ℓ فإنه يوجد عدد غير منته من المعادلات والتي لها الجذرين نفسها ويمكن كتابتها على الصورة العامة:

$$k[x^2 - (\ell + m)x + (\ell.m)] = 0, k \in \mathbb{R}^*$$

فمثلاً: حل المعادلة $x^2 - 5x + 6 = 0$ هو نفس حل المعادلات التالية:

$$2(x^2 - 5x + 6) = 0$$

$$3(x^2 - 5x + 6) = 0$$

و هكذا

كُون المعادلة التربيعية التي جذراها:

(a) $\frac{4}{3}, \frac{3}{4}$

(b) $5\sqrt{3}, -5\sqrt{3}$

مثال (5)

الحل:

لتكن ℓ, m هما جذرا المعادلة فإن:

$$\ell + m = \frac{4}{3} + \frac{3}{4} = \frac{25}{12}$$

$$\ell.m = \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = 1$$

∴ المعادلة التربيعية هي: $x^2 - (\ell + m)x + (\ell.m) = 0$

$$x^2 - \left(\frac{25}{12}\right)x + 1 = 0$$

$$\therefore 12x^2 - 25x + 12 = 0$$

(b) $5\sqrt{3}, -5\sqrt{3}$

لتكن ℓ, m هما جذرا المعادلة فإن:

$$\ell + m = 5\sqrt{3} + (-5\sqrt{3}) = 0$$

$$\ell.m = (5\sqrt{3}) \cdot (-5\sqrt{3}) = -75$$

∴ المعادلة التربيعية هي: $x^2 - (\ell + m)x + (\ell.m) = 0$

$$x^2 - 0x + (-75) = 0$$

$$x^2 - 75 = 0$$

تحقق من فهمك (5)

كُون المعادلة التربيعية التي جذراها: $3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}$

ثالثاً: تكوين معادلة تربيعية بمعلومية معادلة أخرى

إذا كان l, m هما جذرا المعادلة التربيعية $2x^2 - 3x - 1 = 0$ كون المعادلة

مثال (6)

التربيعية التي جذراها $2l, 2m$

الحل:

من المعادلة المعلومة: $a = 2, b = -3, c = -1$

$$l+m = \frac{-b}{a}, \frac{-(-3)}{2} = \frac{3}{2}, l \cdot m = \frac{c}{a} = \frac{-1}{2}$$

$$2l+2m = 2(l+m) = 2\left(\frac{3}{2}\right) = 3 \quad \text{مجموع جذريّ المعادلة المطلوبة}$$

$$2l \cdot 2m = 4(l \cdot m) = 4\left(\frac{-1}{2}\right) = -2 \quad \text{حاصل ضرب جذريّ المعادلة المطلوبة}$$

$$x^2 - (2l+2m)x + (2l \cdot 2m) = 0 \quad \text{المعادلة التربيعية هي:}$$

$$x^2 - 3x - 2 = 0$$

تحقق من فهمك (6)

إذا كان l, m هما جذرا المعادلة التربيعية $2x^2 + 15x - 8 = 0$ كون المعادلة التربيعية التي جذراها $2l, 2m$

ملحوظة هامة: في المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ إذا علمت أن $l+m$ هما جذرا المعادلة:

1. عند $b = 0$ فإن $l+m = 0$ والجذرين أحدهما نظير جمعيّ للآخر

2. عند $c = a$ فإن $l \cdot m = 1$ والجذرين أحدهما نظير ضربيّ للآخر

أولاً - البنود الموضوعية :

أندرب وأحل المسائل

■ في البنود (1-6) اختر الإجابة الصحيحة:

(1) إذا كان ناتج ضرب جذريّ المعادلة التربيعية $x^2 - 3x + c = 0$ يساوي 2 فإن c يساوي:

- (a) -4 (b) -2 (c) 4 (d) 2

(2) إذا كان مجموع جذريّ المعادلة $x^2 - ax + 6 = 0$ يساوي 5 فإن a يساوي:

- (a) -6 (b) -5 (c) 5 (d) 6

(3) إذا كان أحد جذريّ المعادلة $x^2 - (m+2)x + 3 = 0$ هو معكوس جمعيّ للآخر فإن m تساوي:

- (a) 3 (b) 2 (c) -2 (d) -3

(4) عدنان حقيقيان مجموعهما 2 و حاصل ضربهما -35 هما:

- (a) 5, 7 (b) -5, -7 (c) -7, 5 (d) 7, -5

(5) حاصل ضرب جذريّ المعادلة $x(2x-3)=7$ يساوي:

(a) $-\frac{3}{2}$

(b) $\frac{3}{2}$

(c) $-\frac{7}{2}$

(d) $\frac{7}{2}$

ثانيًا - أسئلة المقال :



1 (a)

(1) كَوّن كلاً من المعادلات التربيعية التالية والتي جذراها:

(a) 2, 3

(b) -5, -7

(c) $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$

(d) $2a$, $-\frac{1}{2}a$



(3)

(2) كَوّن معادلة الدرجة الثانية التي جذراها متساويان وكل منهما يساوي $-\frac{1}{2}$

(3) إذا كان مجموع جذريّ المعادلة $x^2-5\ell x+m=0$ هو 10 وحاصل ضربهما يساوي 6 فما قيمة كل من ℓ , m ؟ ثم أوجد قيمة الجذرين.

(4) إذا كان ℓ , m هما جذرا المعادلة $x^2-5x-4=0$ فأوجد المعادلة التي جذراها ℓ^2 , m^2

(5) إذا كان ℓ , m هما جذريّ المعادلة $x^2-3x+1=0$ ، فأوجد المعادلة التي جذراها $\ell+m$, $\ell \cdot m$

(6) إذا كان ℓ , m هما جذرا المعادلة $x^2-7x+5=0$ ، فأوجد المعادلة التي جذراها $\frac{1}{\ell}$, $\frac{1}{m}$

(7) إذا كان ℓ , m هما جذرا المعادلة $x^2-4x+1=0$ فما قيمة ؟

(a) $\frac{4}{\ell}$, $\frac{4}{m}$

(b) $\ell - m$

سؤال تحدي:

(8) أوجد قيمة k التي تجعل مجموع جذريّ المعادلة $x^2-(k+2)x+2=0$ يساوي حاصل ضرب جذريّ

المعادلة $x^2-3kx+k^2=0$

مهارات تفكير عليا



(1) إذا كان ℓ , m جذرا المعادلة $x^2+2x-3=0$ ، فأوجد معادلة من الدرجة

الثانية جذريها $\ell + \frac{1}{\ell}$, $m + \frac{1}{m}$

(2) لتكن المعادلة $-4x^2+5x+7=0$ جذراها ℓ , m أوجد:

(a) $(2\ell-3)(2m-3)$

(b) كون معادلة تربيعية جذراها $\ell+1$, $m+1$

(c) كون معادلة تربيعية جذراها 2ℓ , $2m$

(3) اختر الإجابة الصحيحة:

إذا كان أحد جذريّ المعادلة: $2x^2+6x+c=0$ هو 3 ، فإن c تساوي:

(a) 18

(b) 36

(c) -6

(d) -36

حل متباينة من الدرجة الثانية Solving Quadratic Inequalities

1-5

فكرة الدرس:



- حل متباينة تربيعية في متغير واحد.
- دراسة إشارة الدالة التي ترتبط بهذه المتباينة .
- تحديد قيم المتغير التي تجعل الدالة التربيعية موجبة أو سالبة باستخدام التمثيل البياني والطرق الجبرية .

المصطلحات:



1. متباينة من الدرجة الثانية
Quadratic Inequality
2. الفترة
Interval
3. أقل من ، أقل من أو يساوي
Less than , less than or equal to
4. أكبر من ، أكبر من أو يساوي
Greater than, greater than or equal to



مسألة الدرس:



في مطار الكويت الدولي الجديد T4 ، تم تخصيص منطقة مستطيلة لوضع شاشة إلكترونية جديدة .
إذا كان عرض المنطقة x متر ، وطولها يزيد عن عرضها بمقدار 6 متر ويريد مشرفي المطار أن تكون مساحة المنطقة لا تزيد عن 40 مترًا مربعًا .

∴ عرض المنطقة x ، فإن الطول هو $x+6$

- 1 . اكتب عبارة تمثل مساحة المنطقة بدلالة x
- 2 . كيف تترجم عبارة: مساحة المنطقة أصغر من 40 مترًا مربعًا إلى متباينة رياضية؟
- 3 . بعد كتابة المتباينة قم بتبسيطها إلى الصورة العامة $ax^2+bx+c<0$
- 4 . هل تعتقد أن الحل سيكون قيمة واحدة أم مجموعة قيم؟ ولماذا؟

نلاحظ أن:

$$x(x+6) \leq 40$$

$$x^2+6x-40 \leq 0 \text{ هي}$$

تعلّمنا فيما سبق:

متباينة الدرجة الأولى
في متغير واحد، وعلمت
أن حل المتباينة هي
إيجاد جميع قيم المتغير
التي تحقق هذه المتباينة.
وتكتب على صورة فترة.

تذكروا

مساحة المنطقة
المستطيلة =
الطول × العرض

! إنتبه

إذا كان حاصل ضرب
عددين حقيقيين أكبر
من الصفر فإما العددين
موجبان معاً أو العددين
سالبان معاً

أولاً: حل المتباينة من الدرجة الثانية باستخدام التحليل

«خواص المتباينات في الأعداد الحقيقية» :

1 . عندما : $a.b \geq 0$ فإن : $a \geq 0, b \geq 0$ or $a \leq 0, b \leq 0$

2 . عندما : $a.b \leq 0$ فإن : $a \leq 0, b \geq 0$ or $a \geq 0, b \leq 0$

حل كلاً من المتباينات التالية جبرياً ومثل الحل على خط الأعداد :

مثال (1)

a) $x^2 - 2x - 8 \geq 0$

b) $x^2 - 2x - 8 \leq 0$

الحل:

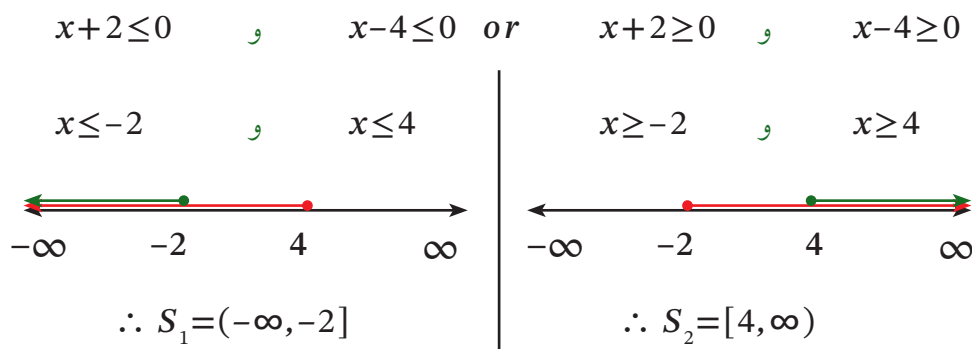
1 . نضع المتباينة على الصورة $ax^2 - bx + c \geq 0$

$$x^2 - 2x - 8 \geq 0$$

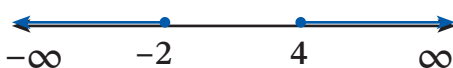
2 . نحلل

$$(x+2)(x-4) \geq 0$$

3 . باستخدام خواص المتباينات



$$\therefore S = (-\infty, -2] \cup [4, \infty)$$



4 . مثل على خط الأعداد

$$\therefore S = S_1 \cup S_2 = (-\infty, -2] \cup [4, \infty) = \mathbb{R} - (-2, 4)$$

b) $x^2 - 2x - 8 \leq 0$

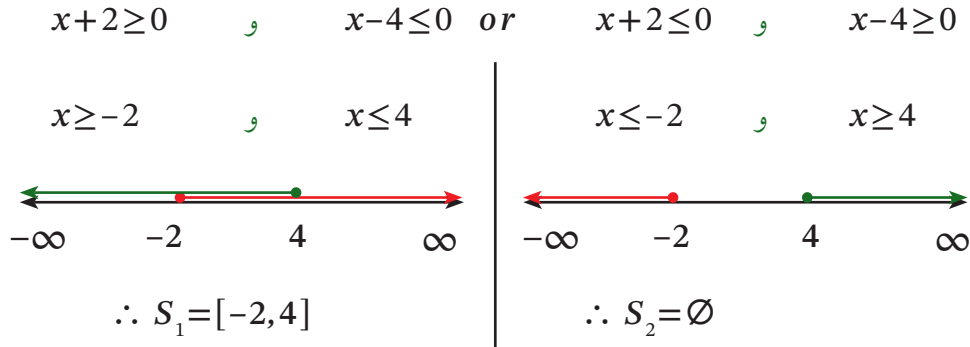
1. نضع المتباينة على الصورة $ax^2 - bx + c \leq 0$

$$x^2 - 2x - 8 \leq 0$$

2. نحلل

$$(x+2)(x-4) \leq 0$$

3. باستخدام خواص المتباينات



$$\therefore S = [-2, 4] \cup \emptyset$$

4. مثل على خط الأعداد



$$\therefore S = S_1 \cup S_2 = [-2, 4] \cup \emptyset = [-2, 4]$$

ملحوظة: حل المتباينة: $x^2 - 2x - 8 > 0$ هو

هو $x^2 - 2x - 8 < 0$

تحقق من فهمك (1)



حل كلاً من المتباينات التالية جبرياً ومثل الحل على خط الأعداد :

a) $x^2 + x - 12 \leq 0$

b) $x^2 + 4x - 5 \geq 0$

c) $x^2 - x - 6 < 0$

d) $(x-3)(2x+5) < 0$

e) $x^2 - 2x + 1 > 0$

f) $x^2 + 6x + 9 < 0$

ثانيًا: حل المتباينة من الدرجة الثانية بدراسة الإشارة

هناك طرق عديدة لحل متباينة من الدرجة الثانية تعرضنا على طريقة توظيف خواص التباين والآن سنتعرف معًا على حل المتباينة من الدرجة الثانية بالبحث عن إشارة المقدار الثلاثي ax^2+bx+c بإيجاد مجموعة جميع الأعداد الحقيقية x التي تجعل المقدار سالبًا أو موجبًا ، **لنتعرف أولاً على دراسة مقدار من الدرجة الأولى :**

مثال (2)

ادرس إشارة كل من : (a) $f(x)=2x-8$ (b) $g(x)=-3x+6$

الحل:

(a) $f(x)=2x-8$

$$2x-8 = 0$$

1. نضع $f(x)=0$

$$2x=8$$

2. نحل المعادلة

$$\therefore x=4$$

3. اختر $f(x)$ باختبار قيم مختلفة للمتغير x في كل فترة من الفترات

عندما $x < 4$	عندما $x > 4$
1 قيمة اختيارية فمثلاً $f(1)=2(1)-8=-4$ فإن $f(x) < 0$	5 قيمة اختيارية فمثلاً $f(5)=2(5)-8=2$ فإن $f(x) > 0$



(b) $g(x)=-3x+6$

$$-3x+6 = 0$$

1. نضع $g(x)=0$

$$-3x = -6$$

2. نحل المعادلة

$$\therefore x=2$$

2. اختبر $g(x)$ باختيار قيم مختلفة للمتغير x في كل فترة من الفترات

عندما $x > 2$	عندما $x < 2$
فمثلاً $g(3) = -3(3) + 6 = -3$ فإن $g(x) < 0$	فمثلاً $g(1) = -3(1) + 6 = 3$ فإن $g(x) > 0$



قاعدة هامة

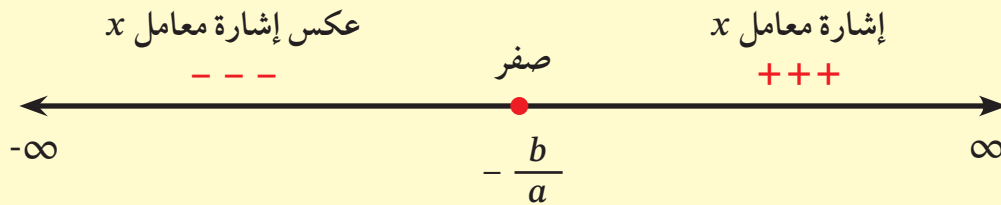
لدراسة إشارة $g(x) = ax + b$, $a \neq 0$ تتبع التالي :

1. نضع $x = -\frac{b}{a} \iff ax + b = 0 \iff g(x) = 0$

2. نحدد العدد $x = -\frac{b}{a}$ على خط الأعداد

3. تكون إشارة $g(x)$: • ماثلة للإشارة a على يمين العدد $-\frac{b}{a}$

• ومخالفة للإشارة a على يسار العدد $-\frac{b}{a}$



كيف يمكنك حل متباينة $x^2 - 4 < 0$ بيانياً؟

لنستكشف

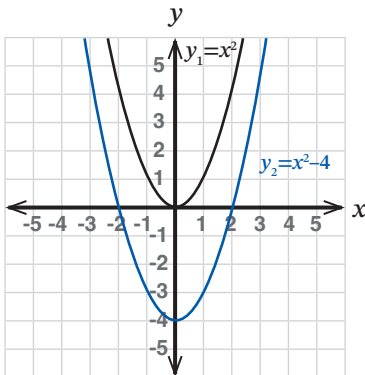
الحل:

الخطوة (1): مثل بيانياً $g(x) = x^2$

x					
$g(x)$					

الخطوة (2): مثل بيانياً $f(x) = x^2 - 4$

x					
$f(x)$					



ملحوظة

حل المتباينة:

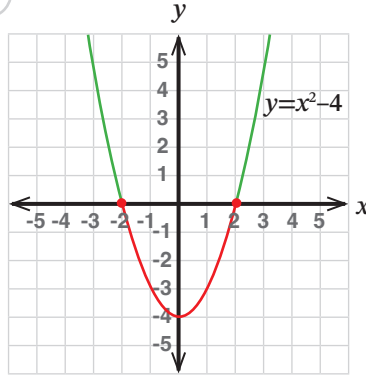
هي إيجاد قيم x التي يكون عندها منحنى الدالة أعلى أو أسفل محور السينات (x -axis)

الفترة:

هي طريقة التعبير عن مجموعة من الأعداد الحقيقية ويمكن تمثيلها على خط الأعداد.

! انتبه

بما أن $x^2 - 4 < 0$ فإن الطرفين 2, -2 لا يتميان إلى مجموعة الحل.



ماذا تلاحظ ؟

بيان الدالة $f(x)$ هو إزاحة لبيان الدالة $g(x) = x^2$ بمقدار لجهة

الخطوة (2):

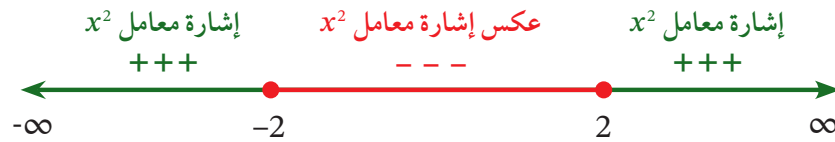
حدد قيم x الناتجة عن تقاطع المنحنى مع المحور x -axis
 $x = -2$, $x = 2$

الخطوة (3):

متى تكون الدالة $f(x) < 0$ ؟ (أي سالبة)
 متى تكون الدالة $f(x) > 0$ ؟ (أي موجبة)

نلاحظ أن:

$f(x) < 0$ عندما x تنحصر بين العددين -2, 2 ومنحنى الدالة أسفل محور السينات
 $f(x) > 0$ عندما $x > 2$ ، عندما $x < -2$



تحقق من فهمك (2)

من السؤال السابق أكمل الجدول التالي وحدد الفترات التي تعبر عن حل المتباينات في كل مما يلي:

$f(x)$	المتباينة	الفترة	التمثيل على خط الأعداد
$f(x)$	$x^2 - 4 \leq 0$		
$f(x)$	$x^2 - 4 > 0$		
$f(x)$	$x^2 - 4 \geq 0$		

قاعدة هامة

لدراسة إشارة $a \neq 0$ ، $f(x) = ax^2 + bx + c$ نتبع التالي:

1. نوجد المعادلة المناظرة: $f(x) = 0$
2. نوجد قيم x التي تجعل $f(x) = 0$ إما بالتحليل أو باستخدام المميز عندما يصعب التحليل
3. لدينا ثلاثة احتمالات:

للمعادلة $f(x)=0$ حلان حقيقيان مختلفان $x_1 < x_2$	$\Delta > 0$	
للمعادلة $f(x)=0$ حلان حقيقيان متساويان $x_1 = x_2$	$\Delta = 0$	
ليس للمعادلة $f(x)=0$ جذور حقيقية	$\Delta < 0$	

حل كلاً من المتباينات التالية :

(a) $x^2 - 2x - 8 \leq 0$

(b) $x^2 - x \leq 5$

(c) $x^2 - 10x + 25 > 0$

(d) $-3x^2 + 4x - 2 \geq 0$

مثال (3)

(a) $x^2 - 2x - 8 \leq 0$

الحل:

$f(x) = x^2 - 2x - 8$

1. نضع

$f(x) = 0$

2. نضع

3. حل المعادلة

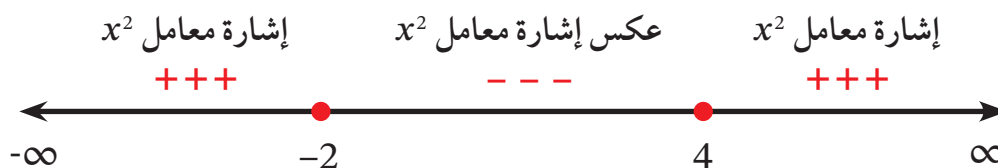
$x^2 - 2x - 8 = 0$

$(x-4)(x+2) = 0$

$x = 4 \quad \text{or} \quad x = -2$

∴ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان

4. دراسة الإشارة:



نلاحظ أن $f(x) \leq 0$ عندما $-2 \leq x \leq 4$

5. ∴ مجموعة حل المتباينة هي :

$S = [-2, 4]$

b) $x^2 - x \leq 5$

$$f(x) = x^2 - x - 5$$

1. نضع

$$f(x) = 0$$

2. نضع

3. نحل المعادلة التربيعية باستخدام القانون

$$a = 1, \quad b = -1, \quad c = -5$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-1)^2 - 4(1)(-5)$$

$$\Delta = 1 + 20 = 21 > 0$$

∴ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان هما :

$$\therefore x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

or

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$$

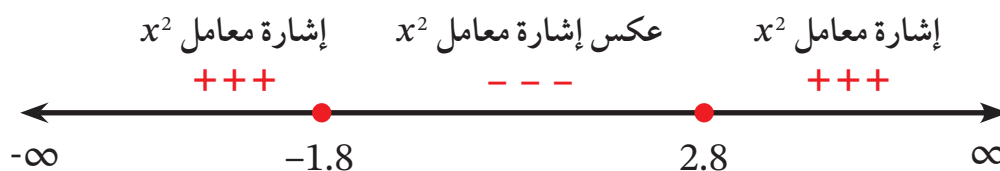
$$= \frac{1 - \sqrt{21}}{2}$$

$$x_1 \approx 2.8$$

$$x_2 \approx -1.8$$

4. دراسة الإشارة:

$$a = 1 > 0$$



نلاحظ عندما $a > 0$ فإن إشارة الدالة موجبة أطراف الجذرين وسالبة بينهما .

5. ∴ مجموعة حل المتباينة :

$$f(x) \leq 0$$

$$S = \left[\frac{1 - \sqrt{21}}{2}, \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \right] \text{ هي}$$

من السؤال السابق و مستعيناً بالحل السابق و بدراسة الإشارة، اكمل الجدول التالي حيث $\Delta > 0$:

التمثيل	الحل	المتباينة
$x^2 - x < 5$		$\longleftrightarrow$
$x^2 - x \geq 5$		$\longleftrightarrow$
$x^2 - x > 5$		

c $x^2 - 10x + 25 > 0$

$$f(x) = x^2 - 10x + 25$$

1. نضع

$$f(x) = 0$$

2. نضع

3. نحل المعادلة التربيعية باستخدام القانون

$$a = 1$$

$$b = -10$$

$$c = 25$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-10)^2 - 4(1)(25)$$

$$\Delta = 100 - 100 = 0$$

∴ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان هما :

$$\therefore x_1 = x_2$$

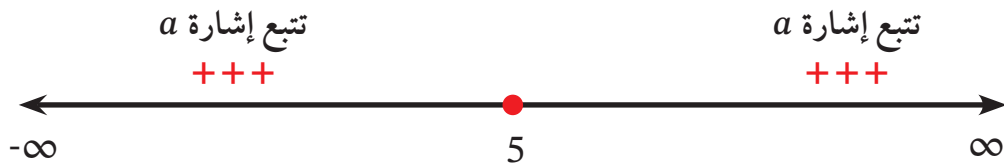
$$= \frac{-b}{2a}$$

$$= \frac{-(-10)}{2(1)}$$

$$= \frac{10}{2}$$

$$= 5$$

4. دراسة الإشارة:



أي إن $x^2 - 10x + 25$ موجب دائماً لكل قيم $x \in \mathbb{R}$ ما عدا $x = 5$

5. ∴ مجموعة حل المتباينة

$$S = \mathbb{R} \setminus \{5\}$$

من السؤال السابق و مستعينا بالحل السابق و بدراسة الإشارة، اكمل الجدول التالي حيث $\Delta = 0$:

التمثيل	الحل	المتباينة
$\longleftrightarrow$		$x^2 - 10x + 25 \geq 0$
$\longleftrightarrow$		$x^2 - 10x + 25 < 0$
		$x^2 - 10x + 25 \leq 0$

d) $-3x^2 + 4x - 2 \geq 0$

$f(x) = -3x^2 + 4x - 2$

1. نضع

$f(x) = 0$

2. نضع

3. نحل المعادلة التربيعية باستخدام القانون

$a = -3$

$b = 4$

$c = -2$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (4)^2 - 4(-3)(-2)$

$\Delta = 16 - 24$

$= -8 < 0$

∴ المعادلة ليس لها جذر حقيقي

4. دراسة الإشارة للمقدار ثابتة على طول خط الأعداد كما هو في الشكل التالي:



بما أن الدالة لا تقطع محور x فإن إشارتها ثابتة وتعتمد على إشارة a

$-3x^2 + 4x - 2 \geq 0$

5. حل المتباينة:

∴ $S = \emptyset$

هي:

لحل المتباينة التربيعية بصورها المختلفة التي على الصورة $ax^2 + bx + c \geq 0$ ، $a \neq 0$ ، يجب ملاحظة إشارة $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، $a \neq 0$ لايجاد قيمة Δ

تحقق من فهمك (3)

حل كل من المتباينات التالية جبرياً ومثل الحل على خط الأعداد :

a) $2x^2 + 3x - 2 < 0$

b) $-x^2 - x + 6 > 0$

c) $x^2 - 6x + 9 \geq 0$

حالة خاصة : حل المتباينة من الدرجة الثانية باستخدام القيمة المطلقة

خاصية

إذا كان a, b عددين حقيقيين موجبين فإن: $a \leq b \iff a^2 \leq b^2$

يمكن استبدال الرمز $<$ بالرمز $\leq$ أو الرمز $>$ بالرمز $\geq$
تستخدم هذه الخاصية لحل متباينات مثل $x^2 > 4$ ، $x^2 < 9$
فمثلاً لحل المتباينة $x^2 < 9$

$$\sqrt{x^2} < \sqrt{9} \quad \text{نوجد الجذر التربيعي للطرفين}$$

$$\therefore |x| < 3$$

$$-3 < x < 3$$

$\therefore$ مجموعة الحل $(-3, 3)$



ملحوظة:

عند حل المتباينة $x^2 < 0$ فإننا نلاحظ أنه لا يوجد أي عدد حقيقي بحيث يكون مربعه أصغر من الصفر.

أي إن المتباينة $x^2 < 0$ ليس لها أي حل ، وبالتالي فإن مجموعة حل هذه المتباينة هي المجموعة الخالية $\emptyset$.

وبالمقابل فإن المتباينة $x^2 \geq 0$ صحيحة لأي عدد حقيقي و بالتالي فإن مجموعة حل هذه المتباينة هي مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

بصفة عامة : إذا كان a, b, c أعداداً حقيقية بحيث $a \neq 0, c < 0$ فإن :

1. مجموعة حل المتباينة $(ax+b)^2 < c$ هي المجموعة الخالية $\emptyset$
 2. مجموعة حل المتباينة $(ax+b)^2 > c$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$
 3. مجموعة حل المتباينة $(ax+b)^2 < 0$ هي $\emptyset$
- مجموعة حل المتباينة $(ax+b)^2 > 0$ هي $\mathbb{R} - \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$

ملحوظة:

المتباينة	مجموعة الحل
$x^2 < 0$	$\emptyset$
$x^2 \leq 0$	$\{0\}$
$x^2 \geq 0$	$\mathbb{R}$
$x^2 > 0$	$\mathbb{R} - \{0\}$

تذكروا!

بفرض أن a, b, c أعداد حقيقية:

1. إذا كان $a < b$ فإن

$$a + c < b + c$$

2. إذا كان $a < b$ و كان

$$a \cdot c < b \cdot c \quad \text{فإن } c > 0$$

3. إذا كان $a < b$ و كان

$$a \cdot c > b \cdot c \quad \text{فإن } c < 0$$

4. إذا كان $a > 0$ فإن:

$$|x| < a \quad \text{تكافئ}$$

$$-a < x < a$$

$$|x| > a \quad \text{تكافئ}$$

$$x > a \quad \text{or} \quad x < -a$$

تذكروا!

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

تذكروا

1. $\sqrt{x^2} = |x|$
2. $|x| \leq a$, $a > 0$
 $\therefore -a \leq x \leq a$
3. $|x| \geq a$, $a > 0$
 $\therefore x \geq a$ or $x \leq -a$

تذكروا

مجموعة حل كل من المتبايتين:

1. $|x| < 0$
2. $x^2 < 0$

هو $\emptyset$

أوجد مجموعة حل المتباينة ومثل الحل على خط الأعداد :

مثال (4)

(a) $2x^2 + 5 \geq 23$ (b) $(5x+7)^2 + 3 < 2$

الحل:

(a) $2x^2 + 5 \geq 23$

$$2x^2 \geq 18$$

$$\left(\frac{1}{2}\right) \cdot 2x^2 \geq \left(\frac{1}{2}\right) 18$$

$$x^2 \geq 9$$

$$|x| \geq 3$$

$$x \geq 3 \quad \text{or} \quad x \leq -3$$

$$\therefore S.S. = (-\infty, 3] \cup [3, \infty)$$

$$= \mathbb{R} \setminus (-3, 3)$$



بإضافة (-5) لطرفين المتباينة

بضرب طرفي المتباينة بـ $\frac{1}{2}$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

من خواص القيمة المطلقة

(b) $(5x+7)^2 + 3 < 2$

حسب الخاصية التالية :

$$(5x+7)^2 + 3 + (-3) < 2 + (-3)$$

$$(5x+7)^2 < -1$$

$$\therefore S.S. = \emptyset$$

تحقق من فهمك (4)

أوجد مجموعة حل المتباينة ومثل الحل على خط الأعداد :

(a) $3x^2 - 4 \leq 8$

(b) $(4x-3)^2 + 2 > -3$

(c) $(2-3x)^2 < 1$

(d) $(2x+1)^2 - 3 \geq 1$



استخدام النماذج



قام قسم الرياضيات في إحدى مدارس منطقة الفروانية التعليمية في دولة الكويت بتجهيز مسرح المدرسة لتقديم دورة للمعلمات الجدد، حيث وزعت الكراسي على شكل مربع مكون من 20 صفًا أفقيًا وعموديًا ترغب الإدارة في تقليل عدد الصفوف أفقيًا وعموديًا مع الحفاظ على الشكل المربع، بحيث لا يزيد عدد الكراسي عن 225 كرسياً.

كم صفًا من الكراسي يجب على الإدارة إزالته؟

الحل:

ليكن x عدد صفوف الكراسي المراد إزالتها حيث $0 < x < 20$
 $\therefore$ عدد الصفوف المتبقية: $20 - x$ ، عدد الصفوف الكلي $= (20 - x)^2$
 1. اكتب المتباينة التي تمثل الموقف وحلها:

$$(20 - x)^2 = 225$$

2. المعادلة التربيعية المرتبطة:

$$(20 - x)^2 = 225$$

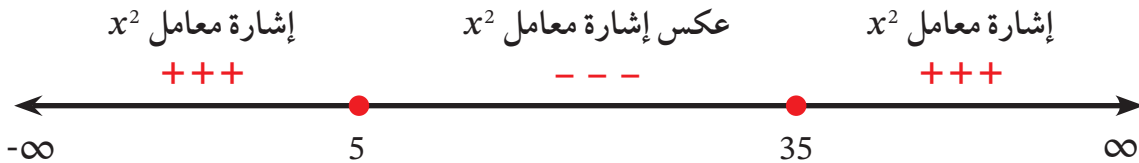
$$(x - 20)^2 = (15)^2$$

$$(x - 20)^2 - (15)^2 = 0$$

$$(20 - x - 15)(20 - x + 15) = 0$$

$$(5 - x)(35 - x) = 0$$

فرق بين مربعين



3. بما أن الصفوف الأفقية والعمودية هي في الأصل 20 صفًا وعمودًا فإن عدد الصفوف الممكن إزالتها 5 صفوف على الأقل.

هل يمكن أن يكون عدد الصفوف المحذوفة عددًا كسريًا . ولماذا ؟

أجب عن الأسئلة التالية :

- 1 . ما الفرق بين حل معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد وحل متباينة من الدرجة الثانية في متغير واحد ؟
- 2 . ما علاقة بحث إشارة الدالة التربيعية بحل متباينات الدرجة الثانية في متغير واحد ؟

أندرب وأحل المسائل

أولاً - البنود الموضوعية :

■ في البنود من (1-5) اختر الإجابة الصحيحة:

(1) مجموعة حل المتباينة $(x+2)(x-5) > 0$ هي:

- | | |
|--------------------------------------|------------------|
| (a) $(-2,5)$ | (b) $[-2,5]$ |
| (c) $(-\infty, -2) \cup (5, \infty)$ | (d) $\mathbb{R}$ |

(2) مجموعة حل المتباينة $x^2 - 2x < 0$ هي:

- | | |
|-------------------|--------------------|
| (a) $(0,2)$ | (b) $[-\infty, 0]$ |
| (c) $(2, \infty)$ | (d) $[0,2]$ |

(3) مجموعة حل المتباينة $x^2 + 6x + 9 \leq 0$ هي:

- | | |
|--------------------------------------|------------------|
| (a) $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$ | (b) $\{-3\}$ |
| (c) $[-3,3]$ | (d) $\mathbb{R}$ |

(4) أي مما يلي ليس حلاً للمتباينة $4x^2 - 4x - 5 > 0$

- | | | | |
|--------|---------|-------|-------|
| (a) 60 | (b) -20 | (c) 2 | (d) 0 |
|--------|---------|-------|-------|

(5) أي من المتباينات التالية حلها نفس حل المتباينة $-2x^2+5x-3>0$:

(a) $x^2-5>2x^2$

(b) $-x^2-x>x^2-4x$

(c) $2x^2+3<5x$

(d) $x^2-3x>2x-x^2$

ثانياً - أسئلة المقال :

(1) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات التالية:

(a) $x^2-25>0$

(b) $x^2-5x+6<0$

(c) $x^2-6x+9>0$

(d) $3x^2-6x-10<-10$

(e) $(3x-7)(2x+9)\leq 0$

(f) $2x^2+5x-3<-10$

(g) $-2x^2+x+21<0$

(h) $3x^2+x+7<0$

(k) $x^2-6x+8<0$

(l) $-2x^2+6x+8\geq 0$

(m) $(x-4)(3-x)>0$

(n) $x^2+2x-8\leq 0$

(o) $9x^2+1\geq 0$

(p) $-16x^2+24x-7>0$



1 (b)

(2) اكتشف الخطأ :

تقول نور: إن المتباينة $-x^2+2x-7<0$ لا حلول لها بين الخطأ في حل نور ثم صححه.

(3) اكتب متباينة تربيعية يكون حلها مجموعة الأعداد الحقيقية .



(1) أوجد مجموعة حل المتباينة :

$$(x+3)^2 \leq 10-3(x+3)$$

(2) إذا علمت أن $\Delta=0$ ، فما حل المتباينة $-2x^2+8x+c<0$ ؟

(3) تقول هديل: إن المتباينة $2x^2+x-3<0$ و $\frac{2x^2+x-3}{x^2+1}$ لهما الحل نفسه هل توافقها الرأي؟ وضح إجابتك.



استعد للاختبار

1

عزيزي المعلم ، عزيزي المتعلم :

يحتوي رمز الـ (QR) الخاص باختبار الوحدة على أسئلة مهمة، يجب الاستفادة منها في التقييم البنائي والنهائي وتدريب المتعلم عليها جيداً.

ما أهمية هذه الوحدة؟

تعتبر النسبة والتناسب من أكثر المفاهيم الرياضية التي نستخدمها بشكل تلقائي ويومي ، فهي الإدارة التي تساعدنا في مقارنة الكميات و ضمان التوازن في مختلف المجالات . ودراسة التشابه مهمه جداً فهي الرابط الرياضي الذي يحفظ « جوهر الشكل » مع تغيير « حجمه » مما يجعله المحرك الأساسي لكل عمليات التصميم والبناء و فهم أسرار الطبيعة حولنا .



سأتعلمُ في هذه الوحدة:

- النسبة والتناسب واستخدامهما في حل المسائل ، خواص التناسب المتسلسل .
- التشابه من حيث المفهوم بين الأشكال الهندسية المستوية .
- حالات تشابه المثلثات و التطبيق في مواقف حياتية .
- تطبيق التشابه على المثلث القائم الزاوية والخصائص الناتجة من العمود المرسوم من رأس القائمة إلى الوتر المقابل .
- نظرية المستقيم الموازي .
- نظرية طاليس .
- خصائص منصف الزاوية الداخلية في المثلث .



تعلمتُ سابقاً:

- التناسب وبعض خواصه .
- حالات تطابق المثلثات .
- نظرية فيثاغورث وتطبيقاتها في المثلثات القائمة الزاوية .
- علاقة الزوايا الناتجة من تقاطع مستقيم مع مستقيمات متوازية .
- منصف الزاوية والمنصف العمودي للقطعة المستقيمة في المثلث والعمود المرسوم من الرأس إلى الضلع المقابل في المثلث .



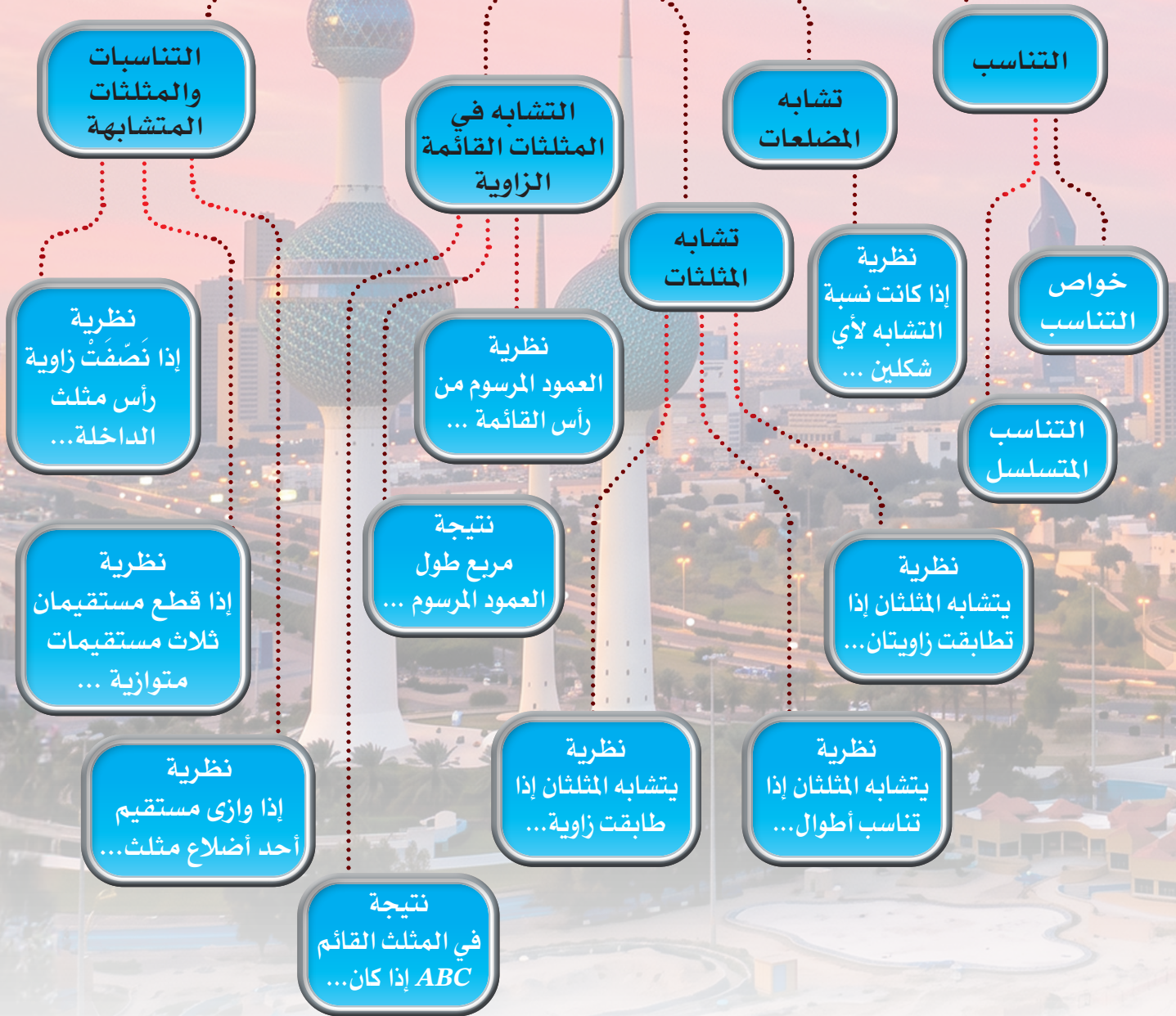
استعد للوحدة



عزيزي المعلم ، عزيزي المتعلم :

يحتوي رمز الـ (QR) الموجود في بداية الوحدة على مفاهيم علمية وتمارين تساعد في الاستعداد للوحدة وتعزز المفاهيم الواردة فيها .

الهندسة المستوية



التشابه الهندسي والنمذجة الرقمية لأبراج الكويت Geometric similarity and digital modeling of the Kuwait Towers



فكرة المشروع:

يقوم المتعلمين بدراسة الأبعاد الحقيقية لأبراج الكويت (Kuwait Towers)، ثم استخدام التكنولوجيا لإنشاء نموذج رقمي ثلاثي الأبعاد للأبراج. يعتمد المشروع على تطبيق مفهوم التشابه الهندسي ومقياس الرسم لتحويل الأبعاد الحقيقية إلى نموذج مصغر مع الحفاظ على نفس النسب بين الأبعاد.

أهداف المشروع:

- يتعلم المتعلم من خلال هذا المشروع ما يلي:
- تطبيق مفهوم التشابه الهندسي والنسبة في الرياضيات.
- استخدام البرمجيات الهندسية في تصميم النماذج.
- تحويل القياسات الحقيقية إلى نماذج رقمية مصغرة باستخدام مقياس الرسم.
- الربط بين الرياضيات والتكنولوجيا والهندسة.
- الأدوات التكنولوجية المقترحة: يمكن للطلاب استخدام أحد البرامج التالية لإنشاء النموذج الرقمي:
- SketchUp - GeoGebra - Tinkercad - AutoCAD

مراحل تنفيذ المشروع:

(1) جمع البيانات



الارتفاع الحقيقي	البرج
m187	البرج الرئيسي
m147	البرج الأوسط
m113	البرج الصغير

يبحث المتعلمين عن الأبعاد الحقيقية لأبراج الكويت

(2) تحديد مقياس الرسم 1:500

أي 1 سم في النموذج = 5 متر في الواقع

(3) الحسابات الرياضية:

يحسب الطلاب ارتفاع النموذج باستخدام التناسب مثال: $187 \div 5 = 37.4 \text{ cm}$

(6) مخرجات المشروع :

- يقوم المتعلمين بتقديم
- (a) نموذج ثلاثي الأبعاد للأبراج
- (b) تقرير يوضح الحسابات الرياضية
- (c) عرض تقديمي يشرح خطوات المشروع

(5) التحليل الرياضي :

- يقوم المتعلمين بتحليل :
- (a) نسبة التشابه
- (b) معامل التكبير أو التصغير
- (c) العلاقة بين المساحة والحجم
- في النماذج المتشابهة

(4) بناء النموذج الرقمي :

- يقوم المتعلمين باستخدام أحد البرامج :
- رسم الأبراج
- إنشاء الكرات الخاصة بالأبراج
- ضبط الأبعاد حسب مقياس الرسم
- مقارنة النموذج بالحجم الحقيقي

المشروع يطور

- التفكير التحليلي
- استخدام التكنولوجيا
- حل المشكلات
- العمل الجماعي

كويت مصغرة: اكتشاف النسبة والتشابه من خلال نماذج المعالم

Miniature Kuwait: Discovering Ratio and Similarity Through Iconic Landmarks

Real Measurements vs. Scale Model

Real Kuwait Towers

- Male Tower height: 187 meters
- Male Tower height: 187 meters
- Male Tower height: 187 meters
- Male Tower: 137 meters
- Male Tower height: 87 meters

Scale	Height	Scale	Scale Equal
1	187	1.00	1.100
2	167	1.50	1.100
3	163	1.50	1.100
4	162	1.50	1.100
5	163	1.40	1.100
6	163	2.50	1.100
7	196	1.50	1.100
8	176	1.250	1.700

The table shows how the heights of the model compare to the real towers using different scale ratios.

Similarity Conditions

- Equal angles

vs.

- Largest sphere vs. its model version

Similarity Conditions

■ Hawet's Voglers ■ Central Voglers

■ Angha Rogles

Objective: Understanding ratio and similarity by comparing real landmarks with their scale models.

التناسب Proportion

فكرة الدرس:



التعرف على خواص التناسب وكذلك التناسب المتسلسل (الهندسي) واستخدامه في حل التمارين الرياضية .

المصطلحات:

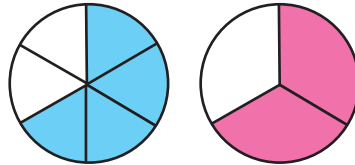


Ratio	النسبة
Proportion	التناسب
Properties of Propotion	خواص التناسب
Continued Proportion	تناسب المتسلسل

مسألة الدرس:



لدى ديما وخلود دوائر متطابقة، قامت ديما بتقسيم دائرتها إلى ثلاثة أجزاء متساوية ولونت جزئين، بينما خلود جزأت دائرتها إلى ستة أجزاء متساوية ولونت أربعة أجزاء.



هل $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ ؟

تعلمت في دراستك السابقة :

النسبة : هي مقارنة بين كميتين من النوع نفسه ولهما نفس وحدة القياس ويمكن التعبير عن النسبة بصورة a إلى b ، وتكتب $a:b$ أو $\frac{a}{b}$

التناسب : هو تساوي نسبتين أو أكثر .

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{12}{20} = \dots \quad \text{فمثلاً:}$$

ويمكن أن يُكتب كالتالي :

$$3:5 = 6:10 = 12:20 = \dots$$

إذا كان : $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$

وكانت $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

فإن a, b, c, d تسمى أعدادًا متناسبة

تعلمنا
فيما سبق:

- النسبة والتناسب
- التقسيم التناسبي
- تطبيقات حياتية (الزكاة ، الميراث ، مقياس الرسم)

تذكروا

$\mathbb{R}^*$: هي مجموعة الأعداد الحقيقية ماعدا الصفر.

ويسمى

الأول المتناسب a الثاني المتناسب b الثالث المتناسب c الرابع المتناسب d

طرفي المتناسب a, d وسطي المتناسب b, c

أي أن :

$$\begin{array}{c} \text{طرفي المتناسب} \\ \overbrace{a : b = c : d} \\ \text{وسطي المتناسب} \end{array}$$

ملحوظة :

إذا كان $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ أعداد متناسبة فإن $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ حيث $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$

خواص التناسب :

لنستكشف

إذا كان : $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ حيث $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

1. ضرب التناسب في $(b.d)$ $\frac{a}{b} (b.d) = \frac{c}{d} (b.d)$

$$a.d = c.b$$

2. قم بالاختصار والتبسيط

هل نستطيع أن نضع قاعدة ؟

خاصية (1) : « الضرب التقاطعي »

إذا كان : $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ وكان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$$a.d = c.b$$

أي إن : حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين وتسمى هذه الخاصية «قاعدة الضرب التقاطعي»

مثال (1) إذا كانت : $2, x, 4, 6$ أعدادًا متناسبة ، أوجد قيمة : x

الحل :

$\therefore 2, x, 4, 6$ أعداد متناسبة

باستخدام الملاحظة السابقة

خاصية الضرب التقاطعي

بالضرب بالنظير الضربي للعدد 4

$$\therefore \frac{2}{x} = \frac{4}{6}$$

$$4x = 12$$

$$x = 3$$

تحقق من فهمك (1)

إذا كانت : $3, 5, 6, x$ أعدادًا متناسبة ، أوجد قيمة x

مثال (2) أوجد الرابع المتناسب للأعداد : 1, 3, 9, ...

الحل: نفرض أن الرابع للمتناسب هو x

$$\therefore \frac{1}{3} = \frac{9}{x}$$
$$x = (3)(9)$$
$$x = 27$$

تحقق من فهمك (2) 

أوجد الثالث المتناسب للأعداد : 4, 7,, 35

مثال (3) أوجد العدد الذي إذا طُرِح من حدّي النسبة $\frac{7}{9}$ أصبحت $\frac{4}{5}$

الحل: نفرض أن العدد x

$$\therefore \frac{7-x}{9-x} = \frac{4}{5}$$
$$4(9-x) = 5(7-x)$$
$$36 - 4x = 35 - 5x$$
$$-4x + 5x = 35 - 36$$
$$x = -1$$

بالضرب التقاطعي

بتوزيع الضرب على الطرح

بتجميع الحدود الجبرية المتشابهة

تحقق من فهمك (3) 

أوجد العدد الذي إذا طُرِح من حدّي النسبة $\frac{5}{6}$ أصبحت $\frac{9}{4}$

مثال (4) إذا كان $(x+4) : (5x-1) = 4:5$ أوجد قيمة x

الحل:

$$\frac{5x-1}{x+4} = \frac{4}{5}$$
$$5(5x-1) = 4(x+4)$$
$$25x - 5 = 4x + 16$$
$$25x - 4x = 16 + 5$$
$$21x = 21$$
$$x = 1$$

بالضرب التقاطعي

بتوزيع الضرب على الطرح والجمع

بتجميع الحدود الجبرية المتشابهة

ملحوظة

إذا كانت :

$$ax = by$$

ويكون :

$$\frac{x}{y} = \frac{b}{a}$$

حيث :

$$a, b, x, y \in \mathbb{R}^*$$

تحقق من فهمك (4)

أوجد قيمة x إذا كان : $(2x+3) : (3x-5) = 3 : 4$

هل عكس الخاصية (1) صحيح ؟

لنستكشف

إذا كان : $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ وكانت $a.d = b.c$

$$\frac{a.d}{b.d} = \frac{b.c}{b.d} \quad (b.d)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{قم بالاختصار والتبسيط}$$

هل نستطيع أن نضع قاعدة ؟

خاصية (2): "عكس الخاصية 1"

إذا كان : $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ وكان $a.d = b.c$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{فإن :}$$

هل يمكن استنتاج (2) ؟

مثال (5) إذا كان $5a = 4b$ فأوجد $\frac{a}{b}$ حيث $a, b \in \mathbb{R}^*$

$$\therefore 5a = 4b$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{4}{5}$$

الحل:

تحقق من فهمك (5)

إذا كان : $2a = 7b$ ، فأوجد $\frac{a}{b}$



استخدام النماذج

استخدام التناسب في الرياضيات

يمارس إبراهيم رياضة كرة السلة لمدة 30 دقيقة ليفقد 300
ساعة حرارية فإذا أراد إبراهيم أن يفقد 450 ساعة حرارية فكم
دقيقة يحتاج إبراهيم ليمارس لعبة كرة السلة ؟

الحل: نفرض أن x يمثل عدد الدقائق

$$\frac{300}{450} = \frac{30}{x} \quad \text{فيكون:}$$

بالضرب التقاطعي

$$(300)(x) = (30)(450)$$

$$x = 45 \text{ دقيقة}$$

لماذا؟

لنعمل معاً لنستكشف

عزيزي المتعلم إذا كان لدينا التناسب التالي :

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$$

هل تستطيع التحقق مما يلي ؟

$$(1) \frac{5}{3} = \frac{10}{6} \quad (2) \frac{3}{6} = \frac{5}{10} \quad (3) \frac{6}{3} = \frac{10}{5}$$

اكتب تناسباً آخراً وطبق ما سبق مرة أخرى ، ماذا تستنتج ؟

خاصية (3): إذا كان : $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ وكان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

فإن :

$$(1) \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

$$(2) \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$(3) \frac{c}{a} = \frac{d}{b}$$

خواص التناسب

هل يمكن برهان خاصية (3) ؟

معلومة i

"كرة السلة"

تُعد كرة السلة في الكويت
من أبرز الألعاب
الجماعية ، حيث تأسس
الاتحاد الكويتي لكرة
السلة عام 1959 وشارك
المنتخب الوطني في
عدة بطولات آسيوية ،
وكانت أفضل مشاركة له
عام 1983 بالحصول على
المركز الرابع في بطولة
أمم آسيا لكرة السلة التي
أقيمت في هونج كونج.



معلومة

فصل المتغيرات :
بوضع الحدود الجبرية
التي تحتوي على
المتغير x في أحد
الأطراف للمساوية
والحدود الجبرية التي
تحتوي على المتغير
 y في الطرف الآخر
للمساوية.

أوجد $\frac{x}{y}$ في كل مما يلي حيث : $y \neq 0, x \neq 0$

مثال (6)

(a) $3x = 4y$

(b) $\frac{2x+y}{5x-3y} = \frac{1}{2}$

الحل:

(a) $3x = 4y$

$$\therefore \overbrace{3x}^{\text{}} = \overbrace{4y}^{\text{}}$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{4}{3}$$

(b) $\frac{2x+y}{5x-3y} = \frac{1}{2}$

$$5x - 3y = 2(2x + y)$$

$$5x - 3y = 4x + 2y$$

$$5x - 4x = 2y + 3y$$

$$x = 5y$$

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{1}$$

$$x:y = 5:1$$

بالضرب التقاطعي
فصل المتغيرات

تحقق من فهمك (6) 

أوجد $\frac{x}{y}$ في كل مما يلي حيث : $y \neq 0, x \neq 0$

(a) $5x = 7y$

(b) $\frac{5x-2y}{5x+2y} = \frac{1}{4}$

لنستكشف 

إذا كان : $\frac{x}{y} = \frac{3}{7}$

هل يمكن القول إن : $y=7, x=3$ ؟

تذكر أن : إذا كان ... $\frac{x}{y} = \frac{3}{7} = \frac{3 \times 2}{7 \times 2} = \frac{3 \times 3}{7 \times 3} =$

فما قيمة x, y ؟

أي أن : إذا كان : $\frac{x}{y} = \frac{3}{7}$

فإن : $x=3k, y=7k$

خاصية (4): إذا كان : $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ وكان $k \in \mathbb{R}^*$

حيث k عدد ثابت $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$

فإن $a = bk, c = dk$

مثال (7) إذا كان : $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ أوجد $\frac{2a+5b}{3b+2a}$

الحل:

نفرض أن : $a=3k$, $b=4k$

, $k \neq 0$

$$\therefore \frac{2a+5b}{3b+2a} = \frac{2(3k)+5(4k)}{3(4k)+2(3k)}$$

استخدام خاصية 4

تجميع الحدود الجبرية

$$= \frac{6k+20k}{12k+6k}$$

$$= \frac{26k}{18k} = \frac{13}{9}$$

المتشابهة بسطاً ومقاماً

* الحل الآخر:

$$\therefore \frac{2a+5b}{3b+2a}$$

$$= \frac{\frac{2a}{b} + \frac{5b}{b}}{\frac{3b}{b} + \frac{2a}{b}}$$

بقسمة كل من البسط والمقام على b

$$= \frac{2\left(\frac{3}{4}\right) + 5}{3 + 2\left(\frac{3}{4}\right)}$$

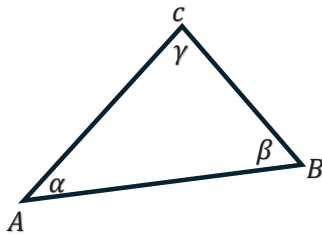
بالتعويض بقيمة $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$

$$= \frac{\frac{3}{2} + 5}{3 + \frac{3}{2}} = \frac{\frac{13}{2}}{\frac{9}{2}} = \frac{13}{9}$$

تحقق من فهمك (7)

إذا كان : $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ ، فأوجد القيمة العددية للمقدار : $\frac{2x+3y}{5x+2y}$

استخدام التناسب في الهندسة



إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا المثلث هي 4:5:6

احسب قياس كل زاوية من زوايا المثلث

نرسم شكلاً تخطيطياً للمثلث

نفرض أن قياسات زوايا المثلث تمثلها α, β, γ وتكون : $\alpha : \beta : \gamma = 4 : 5 : 6$

$$\frac{\alpha}{4} = \frac{\beta}{5} = \frac{\gamma}{6} = k, \quad k \neq 0$$

$$\therefore \alpha = 4k, \quad \beta = 5k, \quad \gamma = 6k$$

لماذا ؟

$$\therefore 4k + 5k + 6k = 180^\circ$$

لماذا ؟

$$15k = 180^\circ \rightarrow \therefore k = 12^\circ$$

$$\therefore m(\hat{A}) = (4)(12^\circ) = 48^\circ, \quad m(\hat{B}) = (5)(12^\circ) = 60^\circ,$$

$$m(\hat{C}) = (6)(12^\circ) = 72^\circ$$

* تحقق من الحل وفكر بطريقة أخرى للحل .

تذكروا

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلية يساوي 180°

معلومة

α, β, γ

هي حروف

لاتينية

تُستخدم للتعبير

عن الزوايا

α تُقرأ ألفا

γ تُقرأ جاما

β تُقرأ بيتا

معلومة (i)

$$\frac{x}{y} \text{ النسبة}$$

يسمى x مقدم النسبة
يسمى y تالي النسبة

لنعمل معاً لنستكشف

$$\text{إذا كان } \frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12}$$

1. (اجمع مقدمات النسب الثلاث)

(اجمع توالي النسب الثلاث)

$$\frac{3+6+9}{4+8+12} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \text{إحدى النسب} = \frac{\text{(مجموع مقدمات النسب الثلاث)}}{\text{(مجموع توالي النسب الثلاث)}}$$

2. (اجمع مقدمات النسبتين الأولى والثانية)

(اجمع توالي النسبتين الأولى والثانية)

$$\frac{3+6}{4+8} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \text{إحدى النسب} = \frac{\text{(مجموع المقدمات النسبتين الأولى والثانية)}}{\text{(مجموع التوالي للنسبتين الأولى والثانية)}}$$

3. جرب ذلك على النسبتين الأولى والثالثة

كرر العمل مرة أخرى باستخدام تناسب آخر
ماذا تستنتج ؟

4. إذا كان لدينا النسبة $\frac{3}{4}$ وتم ضرب حديها في العدد 3 هل تتغير النسبة ؟
وإذا تم ضرب حدي النسبة في (-2) هل تتغير النسبة ؟

«النسبة لا تتغير إذا تم ضرب حديها في عدد حقيقي لا يساوي الصفر»

مما سبق نستنتج أن :

إذا كان لدينا مجموعة من النسب المتساوية فإنه يمكننا الحصول على العديد من النسب الأخرى التي كل منها يساوي أي نسبة من النسب الأصلية ، وذلك عن طريق جمع المقدمات والتوالي لكل النسب أو بعضها سواء مباشرة أو بعد ضرب حدي كل نسبة في أي عدد حقيقي لا يساوي الصفر .

خاصية (4): إذا كان : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{\ell}{s} = \dots$ وكانت $k_1, k_2, k_3, \dots \in \mathbb{R}^*$

$$\text{فإن: إحدى النسب} = \frac{ak_1 + ck_2 + \ell k_3 + \dots}{bk_1 + dk_2 + sk_3 + \dots}$$

إذا كانت الأعداد 5, 6, 3 متناسبة مع a, b, c ،
أوجد قيمة المقدار : $\frac{a+2b+c}{3a+b+c}$

مثال (8)

الحل:

∴ الأعداد 5, 6, 3 متناسبة مع a, b, c ،
بضرب حدي النسبة الثانية في 2 ، وجمع المقدمات والتوالي للنسب الثلاث

$$\frac{a+2b+c}{5+12+3} = \text{إحدى النسب}$$

$$\frac{a+2b+c}{20} = \text{إحدى النسب} \Rightarrow (1)$$

بضرب حدي النسبة الأولى في 3 ، وجمع المقدمات والتوالي للنسب الثلاث

$$\frac{3a+b+c}{15+6+3} = \text{إحدى النسب}$$

$$\frac{3a+b+c}{24} = \text{إحدى النسب} \Rightarrow (2)$$

$$\therefore \frac{a+2b+c}{20} = \frac{3a+b+c}{24} = \text{إحدى النسب}$$

$$\frac{a+2b+c}{3a+b+c} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$$

* الحل الآخر: (باستخدام خاصية 4)

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{3} = k, k \neq 0 \text{ نفرض أن:}$$

$$\therefore a=5k, b=6k, c=3k$$

$$\frac{a+2b+c}{3a+b+c}$$

$$\frac{5k+2(6k)+3k}{3(5k)+6k+3k} = \frac{5k+12k+3k}{15k+6k+3k}$$

$$\frac{20k}{24k} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$$

تحقق من فهمك (8)



إذا كان : $\frac{a}{2} = \frac{b}{7} = \frac{c}{5}$ ، أوجد : $\frac{a+2b}{3b+c}$ (بطريقتين مختلفتين).

! إنتبه

إذا كانت a, b, c متناسبة مع E, F, G فإن :
 $\frac{a}{E} = \frac{b}{F} = \frac{c}{G} = k$
حيث $k \neq 0$ عدد ثابت

عرض المعلم السؤال التالي على المتعلمين في الفصل
إذا كان : $2a=3b=5c$ أوجد $a:b:c$
قام فهد وإبراهيم بحل السؤال بطريقتين مختلفتين

طريقة (إبراهيم)

$$2a=3b=5c$$

بالقسمة على 30

$$\frac{2a}{30} = \frac{3b}{30} = \frac{5c}{30}$$

$$\frac{a}{15} = \frac{b}{10} = \frac{c}{6}$$

$$a:b:c$$

$$15:10:6$$

طريقة (فهد)

$$2a=3b=5c$$

$$a:b:c$$

$$2:3:5$$

أي الطريقتين تؤيد ؟ دلل على إجابتك .

التناسب المتسلسل (الهندسي)

تعريف:

الكميات : a, b, c, d في تناسب متسلسل إذا وفقط إذا كان :

$$b^2=ac \text{ أو } \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

ويسمى : a الأول المتناسب ، b الوسط المتناسب ، c الثالث المتناسب

$$b = \pm \sqrt{a \cdot c}$$

ملحوظة : a, c إما أن يكونا موجبين معاً أو سالبين معاً

$$\frac{\text{مربع الوسط المتناسب}}{\text{الأول المتناسب}} = \frac{\text{الثالث المتناسب}}{\text{الوسط المتناسب}}, \quad \frac{\text{مربع الوسط المتناسب}}{\text{الثالث المتناسب}} = \frac{\text{الأول المتناسب}}{\text{الوسط المتناسب}}$$

أوجد الوسط المتناسب بين العددين 9, 16

مثال (9)

الحل: نفرض أن b هو الوسط المتناسب بين العددين 9, 16

$$b = \pm \sqrt{(9)(16)}$$

$$= \pm \sqrt{144} = \pm 12$$

أوجد الوسط المتناسب بين العددين -27 ، -3

فكر معي

عزيزي المتعلم إذا كان لدينا $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ في تناسب متسلسل ،فإن : $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k$ حيث k عدد ثابتمن التناسب $c = \dots\dots$ استبدل $c = d \cdot k$ $\therefore b = \dots\dots$ استبدل $b = d \cdot k^2$ $\therefore a = \dots\dots$

نستطيع استنتاج التالي :

إذا كان $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ ، k عدد ثابت لا يساوي الصفر وكان :

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k$$

فإن : $a = dk^3$ ، $b = dk^2$ ، $c = dk$ مثال (10) إذا كان : a, b, c في تناسب متسلسل أثبت أن : $\frac{2a+3b}{2b+3c} = \frac{a}{b}$ الحل : $\therefore a, b, c$ في تناسب متسلسل فإن

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k \quad \therefore b = ck , a = ck^2$$

بالتعويض

$$\text{الطرف الأيسر} = L.H.S = \frac{2a+3b}{2b+3c} = \frac{2ck^2+3ck}{2ck+3c} = \frac{ck(2k+3)}{c(2k+3)} = k \longrightarrow (1)$$

$$\text{الطرف الأيمن} = R.H.S = \frac{a}{b} = \frac{ek^2}{ek} = k \longrightarrow (2)$$

من (1) ، (2) يتبع أن : $\frac{2a+3b}{2b+3c} = \frac{a}{b}$

تذكروا

إذا كان :

في a, b, c تناسب

متسلسل فإن :

$$(1) \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

$$(2) b^2 = ac$$

تحقق من فهمك (10)

إذا كان : a, b, c في تناسب متسلسل أثبت أن : $\frac{a+3b}{b+3c} = \frac{a-2b}{b-2c}$ حيث المقام $\neq$ صفر

مثال (11)

إذا كان : $\frac{2a+3b}{2b+3a} = \frac{2+2b}{b+2c}$ أثبت أن : b وسط متناسب بين a, c

الحل:

$$\frac{2a+3b}{2b+3c} = \frac{a+2b}{b+2c}$$

بالضرب التقاطعي $(2a+3b)(b+2c) = (a+2b)(2b+3c)$

$$2ab + 4ac + 3b^2 + 6bc = 2ab + 3ac + 4b^2 + 6bc$$

بالتبسيط وجمع الحدود الجبرية المتشابهة $4ac - 3ac = 4b^2 - 3b^2$

$$ac = b^2$$

$\therefore b$ وسط متناسب بين a, c

تحقق من فهمك (11)

إذا كان : $\frac{a+b}{b+c} = \frac{a}{b}$ أثبت أن b وسط بين a, c

فكر معي

عرض المعلم السؤال التالي على المتعلمين في الفصل إذا كانت الأعداد : $6, x, 54, 162$ في تناسب متسلسل أوجد قيمة x وكان هناك إجابتين لفهد وإبراهيم.

طريقة (إبراهيم)

$\therefore$ الأعداد في تناسب متسلسل

$$\frac{6}{x} = \frac{x}{54} = \frac{54}{162}$$

$$\frac{6}{x} = \frac{x}{54}$$

$$x^2 = 324$$

$$x = \pm \sqrt{324}$$

$$x = \pm 18$$

طريقة (فهد)

$\therefore$ الأعداد في تناسب متسلسل

$$\frac{6}{x} = \frac{x}{54} = \frac{54}{162}$$

$$\frac{6}{x} = \frac{54}{162}$$

$$(x)(54) = (6)(162)$$

$$x = \frac{972}{54}$$

$$x = 18$$

أي الطريقتين تؤيد ؟ دلل على إجابتك .

تعميم: الكميات : $a, b, c, d, \dots$ في تناسب متسلسل إذا وفقط إذا كان : $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \dots$

أولاً - البنود الموضوعية :

■ في البنود (1-4) اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة :

- (1) إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ فإن $ab = 3 \times 4$ (a) (b)
- (2) إذا كان $\frac{x}{3} = \frac{14}{23}$ فإن $x = \frac{23}{42}$ (a) (b)
- (3) إذا كان $\frac{x-7}{7} = \frac{1}{8}$ فإن $x = \frac{63}{8}$ (a) (b)
- (4) زوج النسب التالي: $\frac{9}{12} = \frac{4}{5}$ لا يكون تناسباً (a) (b)

■ في البنود (1-5) اختر الإجابة الصحيحة :

- (1) إذا كانت $a, 3x, 2b, 4x$ في تناسب فإن $\frac{a}{b}$ تساوي :
- (a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{4}{3}$ (d) $\frac{3}{4}$
- (2) إذا كان $\frac{x}{y} = 7$ فإن $x + 7y$ تساوي :
- (a) $7x$ (b) $8x$ (c) $2x$ (d) $10x$
- (3) إذا كان $2x - 5y = 0$ فإن $\frac{x}{y}$ تساوي :
- (a) $\frac{5}{2}$ (b) $\frac{2}{5}$ (c) $\frac{3}{2}$ (d) $\frac{2}{3}$
- (4) إذا كان $\frac{x}{2y} = \frac{3}{5}$ فإن $\frac{x+2y}{2x-y}$ تساوي :
- (a) $\frac{15}{9}$ (b) $\frac{16}{7}$ (c) $\frac{7}{16}$ (d) $\frac{9}{15}$

(5) إذا كان $20, x, 32$ في تناسب متسلسل فإن x تساوي :

(a) $\pm 2\sqrt{10}$

(b) $\pm 4\sqrt{10}$

(c) $\pm 8\sqrt{10}$

(d) $\pm \frac{1}{8\sqrt{10}}$

ثانيًا - أسئلة المقال :

(1) أوجد الرابع المتناسب للأعداد $5, 7, 10, \dots$

(2) أوجد الثالث المتناسب للأعداد $4, 6, \dots, 9$

(3) أوجد قيمة x إذا كانت الأعداد $5, 20, 25, x$ متناسبة.

(4) أوجد العدد الحقيقي الذي إذا أضيف إلى حدي النسبة $\frac{4}{5}$ أصبحت $\frac{2}{3}$.

(5) أوجد العدد الذي إذا طرح من كل الأعداد $16, 10, 11, 7$ بالترتيب نفسه أصبحت متناسبة.



(6) إذا كان : $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$, $\frac{c}{d} = \frac{3}{4}$ أوجد $\frac{3ac+2bd}{bc-2ad}$



(7) إذا كانت الأعداد : $1, \frac{1}{2}, x-2, 4$ في تناسب متسلسل أوجد قيمة x .

(8) إذا كانت الأعداد : a, b, c تكون تناسبًا متسلسلاً ، أثبت أن $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \frac{a}{c}$ حيث المقام $\neq$ صفر

(9) إذا كانت الأعداد $3, 5, 11$ متناسبة مع a, b, c أوجد القيمة العددية للمقدار : $\frac{a+3b}{5b+c}$

مهارات تفكير عليا



(1) إذا كان : $4x^2 - 12xy + 9y^2 = 0$ أوجد $\frac{x}{y}$

(2) إذا كان : $9x^2 - 25y^2 = 0$ أوجد $\frac{x}{y}$

تشابه المضلعات Similar Polygons

2-2

فكرة الدرس:



سوف نتعلم دراسة تشابه المضلعات .

المصطلحات:



Similar Polygons	مضلعات متشابهة
Corresponding Sides	أضلاع متناظرة
Corresponding Angles	زوايا متناظرة
Similar Ratio	نسبة التشابه

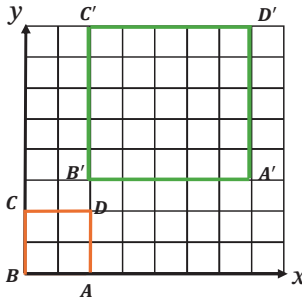
مسألة الدرس:



قام عبدالله بتكبير صورة شخصية له من 2×3 إلى 4×6
لإرفاقها في السيرة الذاتية للتقديم بوظيفة حكومية
ما الذي اختلف في الصورتين ؟
ما الذي ظل ثابتاً ؟



لنعمل معاً لنستكشف



يوضح الشكل المقابل المضلع $ABCD$

وصورته $A'B'C'D'$ بتحويل هندسي «تكبير»

1. قارن بين قياسات الزوايا المتناظرة. **ماذا تستنتج؟**
2. أوجد النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة. **ماذا تلاحظ ؟**

تعريف تشابه المضلعين :

تعميم (1) : يقال لمضلعين (لهما العدد نفسه من الأضلاع) انهما متشابهان

إذا تحقق الشرطان التاليان معا :

1. قياسات زواياهما المتناظرة متساوية .
2. أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة .

«والعكس صحيح»

وتسمى النسبة بين طولي أي ضلعين متناظرين **نسبة التشابه** ، ويستخدم الرمز $(\sim)$ للتعبير عن تشابه المضلعين .

تعلّمنا فيما سبق:

التحويلات الهندسية:

- التكبير
- الدوران
- الانعكاس
- الانسحاب

تذكروا

التكبير تحويل هندسي
يحافظ على قياسات
الزوايا ولا يحافظ على
الأطوال .

تذكر!

يستخدم الرمز $\cong$ للتعبير عن التطابق

معلومة

- المضلع المنتظم : هو شكل هندسي جميع زواياه متطابقة وجميع أضلاعه متطابقة.
- جميع الأشكال الهندسية المنتظمة والتي لها نفس العدد من الأضلاع متشابهة.

لنعمل معاً لنستكشف

- هل جميع المستطيلات متشابهة ؟
- هل جميع المعينات متشابهة ؟
- هل جميع المربعات متشابهة ؟
- هل جميع المثلثات القائمة الزاوية متشابهة ؟
- هل جميع المثلثات المتطابقة الأضلاع متشابهة ؟

تعميم (2) :

المضلعان المتطابقان متشابهان.

إذا كان المضلع $ABCD \cong MNHK$ فإن :

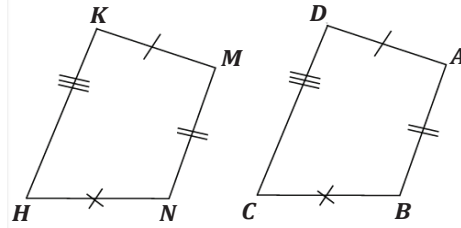
$$m(\hat{A}) = m(\hat{M}) \quad (1)$$

$$m(\hat{B}) = m(\hat{N})$$

$$m(\hat{C}) = m(\hat{H})$$

$$m(\hat{D}) = m(\hat{K})$$

$$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NH} = \frac{CD}{HK} = 1 \quad (2)$$



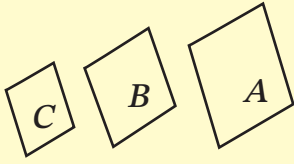
ماذا تستنتج ؟

أي أن المضلع $ABCD \sim MNHK$

ملحوظة :

يراعى ترتيب كتابة الرؤوس المتناظرة للأشكال الهندسية المتشابهة حتى يسهل كتابة التناسب بين الأضلاع المتناظرة .

تعميم (3) :



إذا كان المضلع A يشابه المضلع B ، وكان المضلع B يشابه المضلع C
فإن المضلع A يشابه المضلع C
أي أنه : إذا كان $A \sim B, B \sim C$ فإن $A \sim C$

من تعميم 1، 2، 3 :

نستطيع القول إن الشكلين الهندسيين متشابهان إذا كان أحدهما تكبيراً أو تصغيراً أو مطابقاً للآخر .

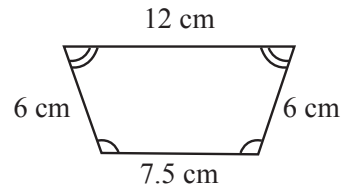
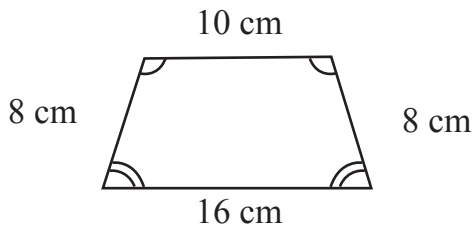
■ المضلعات المتشابهة يكون لها نفس عدد الأضلاع وليس بالضرورة أن يكون لها نفس القياس بالأطوال .

لنعمل معاً لنستكشف

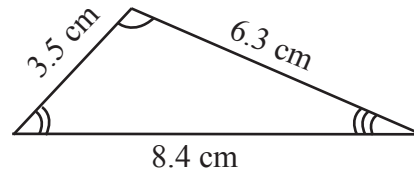
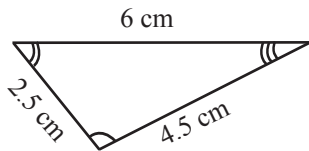
نشاط

في كل من الأشكال التالية:

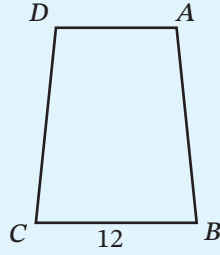
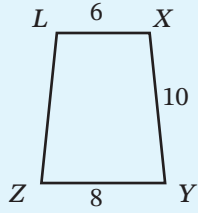
ابحث تشابه المضلعين، فإذا كان المضلعان متشابهين اكتب عبارة التشابه ونسبة التشابه،
فيما عدا ذلك اشرح السبب.



1



2



في الشكل المقابل :
 $XYZL \sim ABCD$ إذا كان :
 أوجد : **AB, DA**

مثال (1)

الحل:

$\therefore XYZL \sim ABCD$ المثلع

$$\therefore \frac{XY}{AB} = \frac{YZ}{BC} = \frac{LX}{DA}$$

باستخدام تعريف التشابه

$$\frac{10}{AB} = \frac{8}{12} = \frac{6}{DA}$$

$$\frac{10}{AB} = \frac{8}{12}$$

باستخدام الضرب التقاطعي

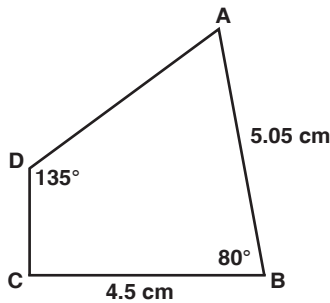
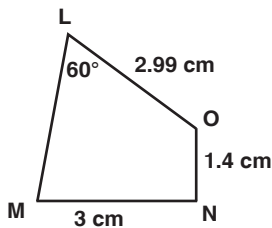
$$AB = \frac{10 \times 12}{8} = 15$$

$$\frac{6}{DA} = \frac{8}{12}$$

وبالمثل

$$DA = \frac{6 \times 12}{8} = 9$$

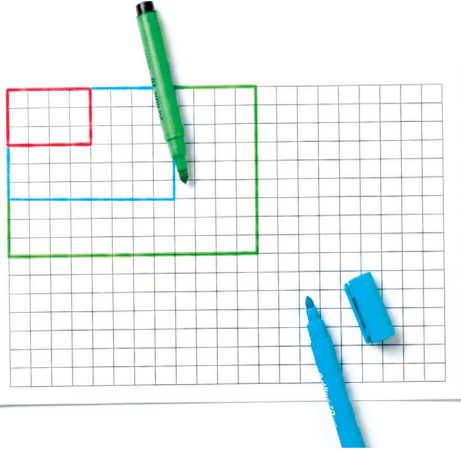
تحقق من فهمك (1)



في الشكل المقابل :
 المثلعتان **$LMNO, ABCD$** متشابهتان
 أوجد قياسات الزوايا المجهولة وأطوال
 الأضلاع المجهولة في كلا من المثلعتين

لنعمل معاً لنستكشف

- من خلال العمل التعاوني سوف نتوصل إلى العلاقة بين محيطي شكلين متشابهين والعلاقة بين مساحتهما . اتبع الخطوات التالية:
- (1) على ورقة المربعات ارسم مستطيلاً أبعاده 3 وحدات ، 4 وحدات .
 - (2) حدد وليكن 3 مستطيلات مشابهة للمستطيل الأصلي .
 - (3) من خلال ما تم رسمه أكمل الجدول رقم (1)
 - (4) أكمل الجدول رقم (2) بالاستعانة من معلومات جدول رقم (1) .
 - (5) ماذا تعني النسبة التي حصلت عليها مع نسبة التشابه ؟
 - (6) هل يوجد اختلاف بين نتيجتك ونتيجة زملائك ؟



المستطيل	العرض	الطول	المحيط	المساحة
الأصلي				
I				
II				

المستطيل	النسبة بين العرضين	النسبة بين الطولين	النسبة بين المحيطين	نسبة التشابه	النسبة بين المساحتين
I : الأصلي					
II : الأصلي					

حاول مرة أخرى
مع أشكال هندسية
أخرى

نظرية :

إذا كانت نسبة التشابه لأي شكلين متشابهين هي $\frac{a}{b}$ فإن :

1 . النسبة بين محيطي الشكلين $= \frac{a}{b}$ و هي نسبة التشابه

2 . النسبة بين مساحتي الشكلين $= \left(\frac{a}{b}\right)^2$ و هي مربع نسبة التشابه

ملاحظة :

إذا كان المضلع A يشابه المضلع B (كانت k نسبة تشابه المضلع A : المضلع B) :
(1) $k > 1$

فإن المضلع A هو تكبير للمضلع B وتسمى K معامل التكبير
(2) $0 < k < 1$

فإن المضلع A هو تصغير للمضلع B وتسمى K معامل التصغير
(3) $k = 1$

فإن المضلع A يطابق المضلع B

مثال (2) إذا كانت نسبة التشابه لمضلعين متشابهين تساوي $\frac{5}{6}$ ، وكان محيط المضلع الأصغر يساوي 14.5 cm ، أوجد محيط المضلع الأكبر.

الحل:

النسبة بين محيطي المضلعين = نسبة التشابه

$$\frac{5}{6} = \frac{\text{محيط المضلع الأصغر}}{\text{محيط المضلع الأكبر}}$$

$$\frac{6 \times 14.5}{5} = \text{محيط المضلع الأكبر}$$

$$17.4 \text{ cm} =$$

تحقق من فهمك (2)

لدينا شكلان رباعيان متشابهان ونسبة التشابه بينهما $\frac{5}{4}$ ، فإذا كانت مساحة الشكل الرباعي الأكبر هي 30 cm^2 فما مساحة الشكل الرباعي الأصغر ؟

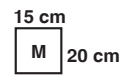
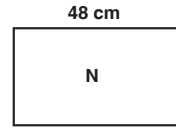
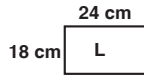
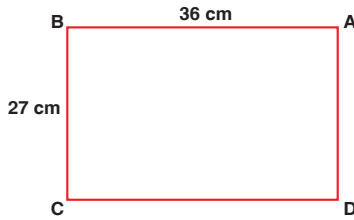
أولاً - البنود الموضوعية :

■ في البنود من (1-3) ظل (a) إذا كانت العبارة صحيحة أو (b) إذا كانت العبارة خاطئة :

- (1) كل مضلعين متطابقين هما مضلعان متشابهان . (a) (b)
 (2) كل مضلعين متشابهين هما مضلعان متطابقان . (a) (b)
 (3) إذا تساوت الزوايا المتناظرة في مضلعين فإن المضلعين متشابهان . (a) (b)

■ في البنود من (1-6) ظل دائرة الإجابة الصحيحة .

(1) المستطيلات المشابهة للمستطيل $BADC$ هي



- (a) فقط L (b) فقط N
 (c) L, N, M (d) فقط N, L

(2) المضلعان المتشابهان يكونان متطابقين إذا كانت نسبة التشابه x ، فإن x تساوي:

- (a) $x = 1$ (b) $x > 1$
 (c) $0 < x < 1$ (d) $x = \frac{1}{2}$

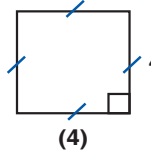
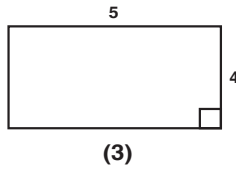
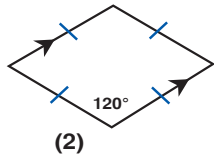
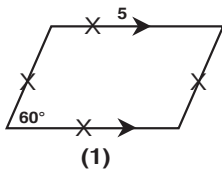
(3) مضلعان متشابهان النسبة بين محيطيهما 36:25 ، فإن النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما تساوي:

- (a) 6 : 5 (b) 5 : 6
 (c) 36 : 25 (d) 4 : 5

(4) إذا كانت النسبة بين مساحتي سطحي مضلعين متشابهين 16 : 25 طولي ضلعين متناظرين فيهما تساوي:

- (a) 2 : 5 (b) 4 : 5
 (c) 16 : 25 (d) 16 : 41

(5) أي من المضلعين التاليين متشابهان ؟



- (a) المضلعان (1), (2) (b) المضلعان (1), (3)
 (c) المضلعان (3), (4) (d) المضلعان (2), (4)

(6) إذا كان : $\Delta ABC \sim \Delta LMN$, $LM=6cm$, $AB=3cm$, $MN=8cm$ فإن BC تساوي:

- (a) 4 cm
(c) 2 cm

- (b) 3 cm
(d) 1.5 cm

ثانياً - أسئلة المقال :

(1) إذا كانت نسبة التشابه بين مستطيلين هي 3:2 ، وكان محيط المستطيل الأكبر يساوي 75 ، أوجد محيط المستطيل الأصغر؟

(2) النسبة بين مساحتي مضلعين متشابهين هي $\frac{16}{9}$ ، ما محيط المضلع الأكبر إذا كان محيط المضلع الأصغر 24 cm ؟

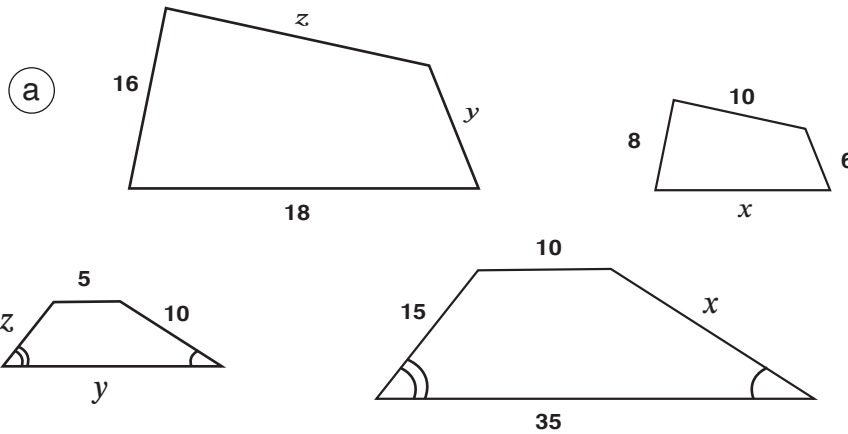


(3)

(3) مستطيلان متشابهان. بُعدا الأول 8 cm , 12 cm ، ومحيط الثاني 200 cm .
- أوجد نسبة التشابه .

- أوجد مساحة المستطيل الثاني .

(4) احسب x, y, z في الحالات التالية علماً بأن المضلعين متشابهان .



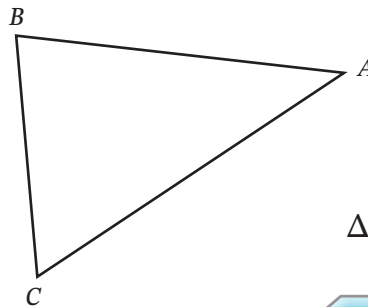
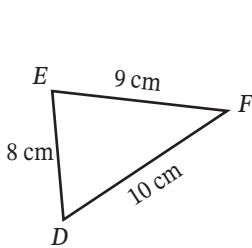
(5) في الشكل المقابل :

$\Delta DEF \sim \Delta ABC$

إذا كان محيط :

$\Delta ABC = 81 cm$

أوجد أطوال أضلاع ΔABC



مهارات تفكير عليا



■ النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين هي 3:4 ، إذا كان مجموع مساحتي سطحيهما

تساوي $225 cm^2$ ، فأوجد مساحة كل منهما ؟

تشابه المثلثات

Similar Triangles

فكرة الدرس:



سوف نتعلم في هذا البند حالات تشابه المثلثات.

المصطلحات:

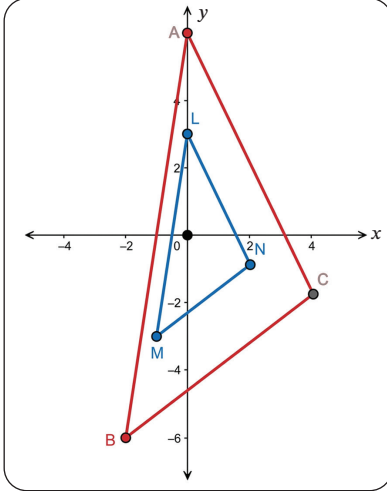


رمز التشابه ~

مسألة الدرس:



في الشكل المقابل :
 ΔABC هو صورة ΔLMN
 تحت تأثير تكبير مركزه نقطة
 الأصل معاملته 2 .



من خواص التكبير أنه يحافظ على قياسات الزوايا :

$$m(\hat{A}) = m(\dots\dots)$$

$$m(\hat{B}) = m(\dots\dots)$$

$$m(\hat{C}) = m(\dots\dots)$$

(1) قياسات الزوايا المتناظرة في المثلثين متساوية

من خواص التكبير أنه يحافظ على تناسب أطوال الأضلاع :

$$\therefore \frac{AB}{LM} = \frac{AC}{LN} = \frac{BC}{MN} = \frac{2}{1} \quad (\text{معامل التكبير})$$

(2) أطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة

(1، 2) هذان الشرطان أساسيان لتشابه أي مضلعين.

ونكتفي بشرط واحد لإثبات تشابه مثلثين حيث إن تشابه المثلثات يعتبر حالة خاصة من تشابه المضلعات .

– هل كل مثلثين متطابقين متشابهان؟ وضح إجابتك

عزيزي المتعلم من مسألة اليوم نستطيع إيجاد طرق أخرى لإثبات تشابه مثلثين حيث إن تشابه المثلثات هو حالة خاصة من حالات تشابه المضلعات .

في أي مثلثين متشابهين تكون قياسات الزوايا المتناظرة متساوية ، والنسب بين طولي كل ضلعين متناظرين متساوية .

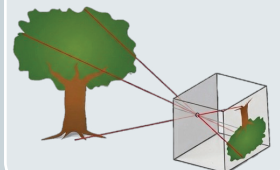
النظريات التالية تبين أنه إذا توافر أحد الشرطين يكفي لإثبات أن المثلثين متشابهان حيث إن الشرط الآخر سيكون محققاً أيضاً .

تعلمنا فيما سبق:

- التكبير
- التصغير
- التطابق

معلومة

الفكرة التي بنيت عليها فكرة التصوير الفوتوغرافي عند وضع جسم وليكن مثلاً كما هو موضع (شجرة) أمام صندوق يحتوي على ثقب صغير والثقب يقابله على الوجه الآخر للصندوق لوح شفاف فإن الأشعة تسقط على الثقب في خطوط مستقيمة وتتقاطع عنده فيظهر أسفل الجسم من الأعلى ويظهر رأس الجسم في الأسفل وكلما اقترب الجسم من الثقب تكبر الصورة والعكس صحيح وتعد هذه الظاهرة أساس عمل الغرفة المظلمة (Camera Obscura) والتي بنيت عليها فكرة التصوير الفوتوغرافي.



تذكروا

يتشابه المضلعان إذا
وفقاً إذا كان :
(1) زواياها المتناظرة
متطابقة .
(2) أطوال أضلاعها
المتناظرة متناسبة .

ملحوظة

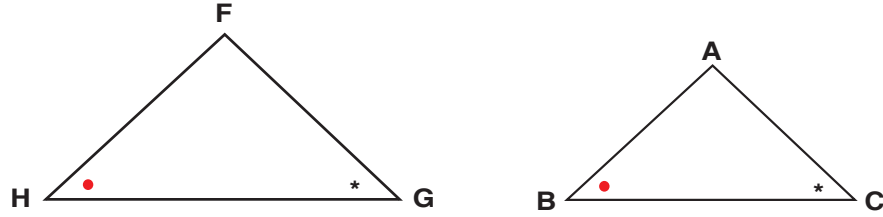
يراعى ترتيب رؤوس
المثلثين عند كتابة عبارة
التشابه .

تذكروا

إذا تطابقت زاويتان في
مثلث مع زاويتين في
مثلث آخر فإن الزاوية
الثالثة في المثلث الأول
تطابق الزاوية الثالثة في
المثلث الآخر.

نظرية (1) :

يتشابه المثلثان إذا تطابقت زاويتان في أحد المثلثين مع زاويتين في المثلث الآخر.



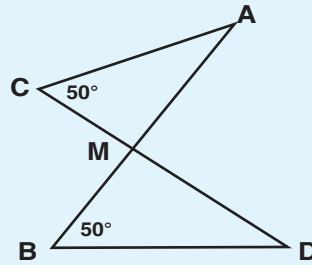
$$m(\hat{H}) = m(\hat{C})$$

$$m(\hat{G}) = m(\hat{B})$$

$$\Delta FGH \sim \Delta ABC$$

وينتج من التشابه أن :

$$\frac{FG}{AB} = \frac{GH}{BC} = \frac{FH}{AC}$$



في الشكل المقابل :

$$m(\hat{C}) = m(\hat{B}) = 50^\circ$$

مثال (1)

أثبت أن: $\Delta DBM \sim \Delta ACM$

الحل: ΔDBM , ΔACM وفيهما :

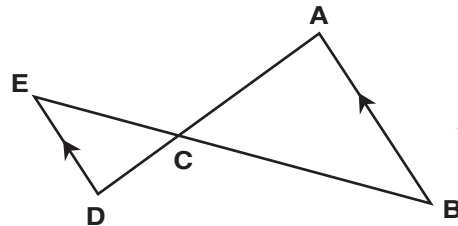
$$m(\hat{C}) = m(\hat{B}) = 50^\circ \quad \text{معطى} \quad \longrightarrow (1)$$

$$m(\hat{CMA}) = m(\hat{BMD}) \quad \text{بالتقابل بالرأس} \quad \longrightarrow (2)$$

من (1) ، (2) ينتج أن :

$$\Delta DBM \sim \Delta ACM$$

تحقق من فهمك (1)



في الشكل المقابل :

أثبت أن المثلثين DEC , ABC

متشابهان ثم اكتب عبارة التشابه

في الشكل المقابل :

$m(\hat{A})=45^\circ, m(\hat{C})=50^\circ$
 $m(\hat{L})=85^\circ, m(\hat{M})=50^\circ$
 أثبت أن: $\Delta ABC \sim \Delta NLM$

مثال (2)

الحل: $\Delta ABC, \Delta NML$ وفيهما :

$m(\hat{M}) = m(\hat{C}) = 50^\circ$ $\longrightarrow$ (1)

$m(\hat{B}) = 180^\circ - (50^\circ + 45^\circ) = 85^\circ$
 $m(\hat{L}) = m(\hat{B}) = 85^\circ$ $\longrightarrow$ (2)

من (1)، (2) ينتج أن :

$\Delta ABC \sim \Delta NML$

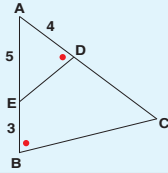
تحقق من فهمك (2)

المثلث ABC قائم الزاوية في A فيه $m(\hat{B}) = 55^\circ$ ، والمثلث NLM قائم الزاوية في L فيه $m(\hat{M}) = 35^\circ$ ، أثبت أن المثلثين متشابهان .

في الشكل المقابل :

1. أثبت أن: $\Delta ACB \sim \Delta AED$
 2. أوجد طول $\overline{DC}$

مثال (3)



الحل: $\Delta ACB, \Delta AED$ فيهما :

$\hat{A}$ $\longrightarrow$ (1) زاوية مشتركة

$m(\hat{D}) = m(\hat{B})$ $\longrightarrow$ (2) معطى

$\Delta ACB \sim \Delta AED$

$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE}$

$\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD}$

$\frac{AC}{5} = \frac{8}{4}$

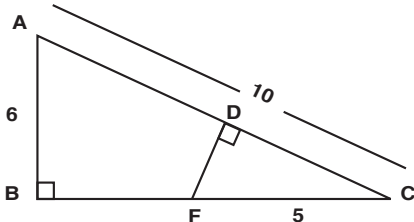
$AC = \frac{8 \times 5}{4} \longrightarrow AC = 10$

$DC = 10 - 4 = 6$

تحقق من فهمك (3)

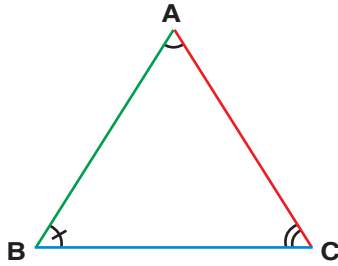
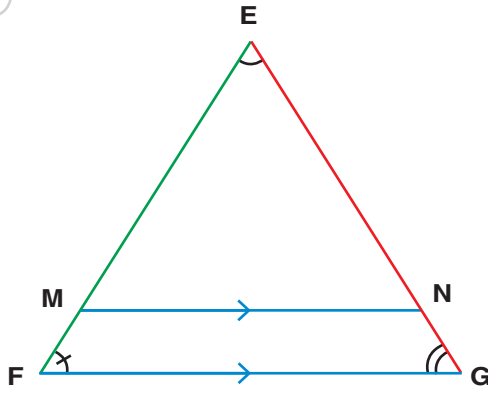
في الشكل المقابل :

(1) أثبت أن المثلثين ABC, FDC متشابهان
 (2) أوجد طول $\overline{FD}$



لنعمل معاً لنستكشف

نشاط



المعطيات : $\Delta ABC, \Delta EFG$ فيهما

$$\frac{AC}{EG} = \frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG}$$

المطلوب : إثبات أن $\Delta ABC \sim \Delta EFG$

عزيزي المتعلم لإثبات المطلوب تحتاج لوسيلة مساعدة وهي :

العمل : 1. نأخذ النقطة $M \in \overline{EF}$ بحيث $EM=AB$ (فرضاً)

2. نرسم $\overline{MN} \parallel \overline{FG}$

البرهان : نبدأ البرهان بالسؤال التالي :

هل يمكن إثبات أن $\Delta EMN \sim \Delta EFG$

وإذا استطعنا ذلك ... هل يمكن كتابة التناسب

$$\frac{EM}{EF} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$$

وحيث إن : $AB=EM$

يمكن كتابة التناسب السابق كالاتي :

$$\frac{AB}{EF} = \frac{EN}{EG} = \frac{MN}{FG}$$

$$\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{EG} = \frac{BC}{FG}$$

بمقارنة التناسب الموجود داخل المستطيل المتقطع نستنتج أن :

$$EN=AC, MN=BC, \dots\dots$$

يمكننا القول إن : $\Delta ABC \cong \Delta EMN$

$$\therefore \Delta ABC \sim \Delta EMN \longrightarrow (1)$$

لماذا ؟

وفي بداية البرهان تم إثبات أن :

$$\Delta EMN \sim \Delta EFG \longrightarrow (2)$$

من (1)، (2) ينتج أن :

$$\Delta ABC \sim \Delta EFG$$

وهذا الاستكشاف يقودنا إلى :

نظرية (2) :

يتشابه المثلثان إذا تناسب أطوال أضلاعهما المتناظرة .

مثال (4)

في الشكل المقابل :
أثبت أن المثلثين ABC, LMN متشابهان.

الحل: $\Delta ABC, \Delta LMN$ وفيهما :

$$\frac{LM}{AB} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \longrightarrow (1)$$

$$\frac{LN}{AC} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \longrightarrow (2)$$

$$\frac{MN}{BC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \longrightarrow (3)$$

من 1، 2، 3 ينتج أن :

$$\frac{LM}{AB} = \frac{LN}{AC} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \Delta ABC \sim \Delta NLM$$

تحقق من فهمك (4)

a في الشكل المقابل :
أثبت أن المثلثين ABC, QRS متشابهان.

b في الشكل المقابل :
المثلثان ABC, LMN متشابهان.
أوجد طول كل من $\overline{MN}$ ، $\overline{LN}$

معلومة i

عندما نقول :
(بالتوازي والتناظر) نعني
وجود مستقيمين متوازيين
وقاطع لهما وزاويتان في
وضع تناظر .

لنعمل معاً لنستكشف

نشاط

المعطيات: المثلثان ΔABC , ΔEFG فيهما:

$$\frac{AC}{EG} = \frac{AB}{EF}, m(\hat{A}) = m(\hat{E})$$

المطلوب: إثبات أن $\Delta ABC \sim \Delta EFG$

عزيزي المتعلم تحتاج للوصول إلى هذا الإثبات أن تستخدم

وسيلة مساعدة وهي:

العمل: 1. نأخذ النقطة $M \in \overline{EF}$ بحيث $EM = AB$ (فرضاً)

2. نرسم $\overline{MN} \parallel \overline{FG}$

البرهان: نبدأ البرهان بالسؤال التالي:

هل يمكن إثبات أن $\Delta EMN \sim \Delta EFG$

وإذا استطعنا ذلك ... هل يمكن كتابة التناسب

$$\frac{EM}{EF} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$$

$\therefore AB = EM$ (فرضاً)

$$\therefore \frac{AB}{EF} = \frac{EN}{EG} = \frac{MN}{FG}$$

$$\therefore \frac{AB}{EF} = \frac{AC}{EG}$$

بمقارنه التناسب الموجود داخل المستطيل المتقطع نستنتج أن:

$$EN = AC$$

يمكننا القول أن: $\Delta ABC \cong \Delta EMN$

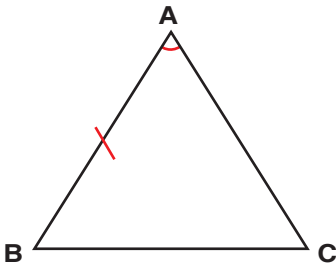
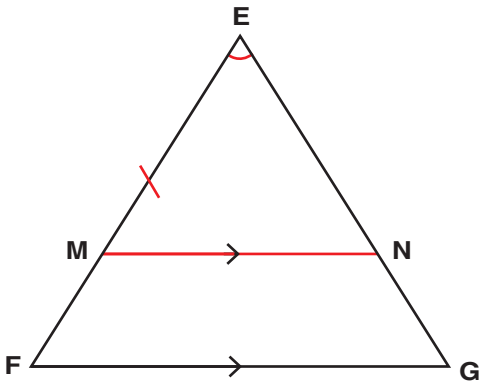
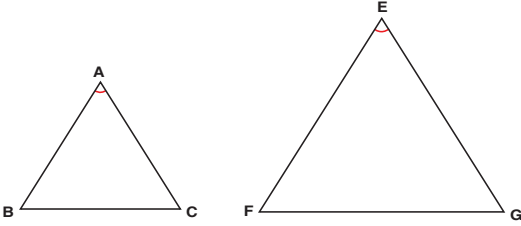
$$\therefore \Delta ABC \sim \Delta EMN \longrightarrow (3)$$

وفي بداية البرهان تم إثبات أن:

$$\Delta EMN \sim \Delta EFG \longrightarrow (4)$$

من 3، 4 ينتج أن:

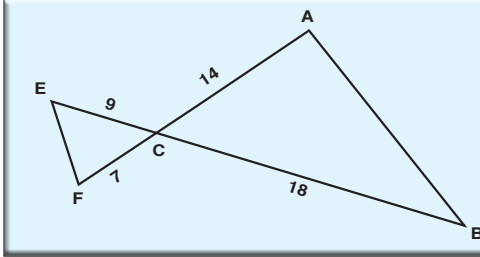
$$\Delta ABC \sim \Delta EFG$$



وهذا الاستكشاف يقودنا إلى :

نظرية (3) :

يتشابه المثلثان إذا طابقت زاوية في أحدهما زاوية في المثلث الآخر، وتناسب طولوا الضلعين المحددين لهاتين الزاويتين .



في الشكل المقابل :
أثبت أن المثلثين FEC , ABC متشابهان.
ثم اكتب عبارة التشابه .

مثال (5)

الحل: المثلثان ΔABC , ΔFEC فيهما :

$$\therefore m(\hat{ECF}) = m(\hat{BCA}) \longrightarrow (1)$$

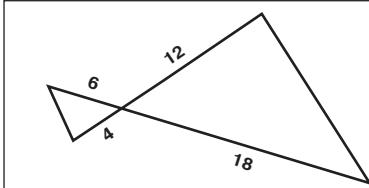
$$\therefore \frac{FC}{AC} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{EC}{BC} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

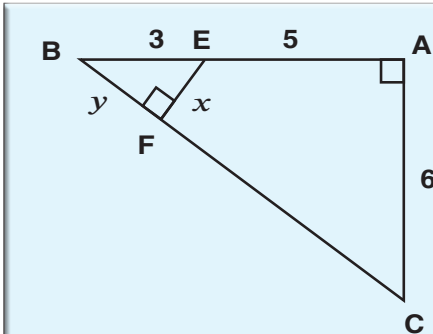
$$\therefore \frac{FC}{AC} = \frac{EC}{BC} \longrightarrow (2)$$

من (1), (2) ينتج أن : $\Delta ABC \sim \Delta FEC$

تحقق من فهمك (5)



في الشكل المقابل :
أثبت أن المثلثين متشابهان .



في الشكل المقابل :
أثبت أن المثلثين BAC , BFE متشابهان.
ثم أوجد كلا من x, y

مثال (6)

الحل: المثلثان ΔBAC , ΔBFE فيهما :

$\hat{B} \longrightarrow (1)$ زاوية مشتركة

$m(\hat{BFE}) = m(\hat{BAC}) = 90^\circ \longrightarrow (2)$ معطى

من (1), (2) ينتج أن :

$$\Delta BFE \sim \Delta BAC$$

في ΔABC القائم في A $(BC)^2 = (AC)^2 + (BA)^2$

$$= (6)^2 + (8)^2 = 100$$

$$BC = \sqrt{100}$$

$$\therefore BC = 10$$

$$\frac{BF}{BA} = \frac{FE}{AC} = \frac{BE}{BC}$$

$$\frac{y}{8} = \frac{x}{6} = \frac{3}{10}$$

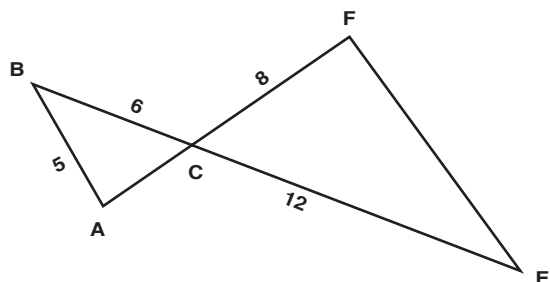
$$\frac{x}{6} = \frac{3}{10} \longrightarrow x = \frac{3 \times 6}{10}$$

$$\therefore x = 1.8 \text{ cm}$$

$$\frac{y}{8} = \frac{3}{10} \longrightarrow y = \frac{3 \times 8}{10}$$

$$\therefore y = 2.4 \text{ cm}$$

تحقق من فهمك (6)



في الشكل المرسوم :

a أثبت أن $\Delta FEC \sim \Delta ABC$

b أوجد $\overline{EF}$

استخدام المرايا في حساب ارتفاع مبنى

استخدام النماذج

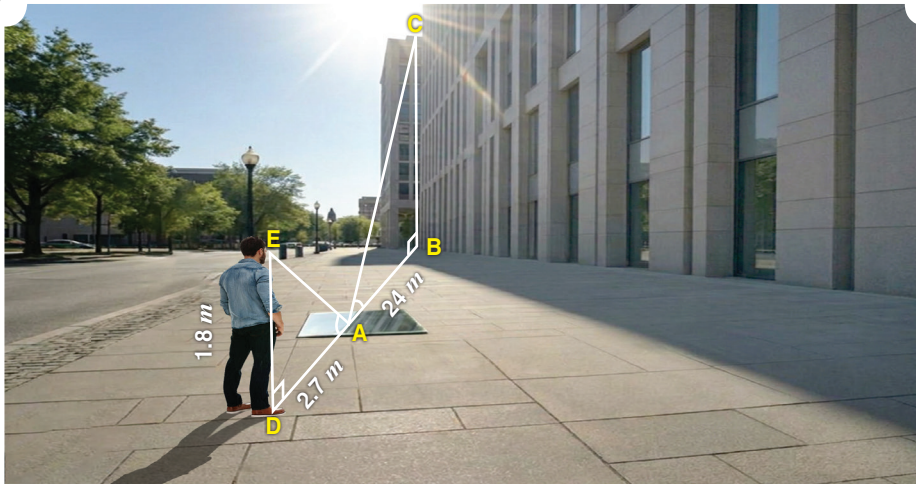
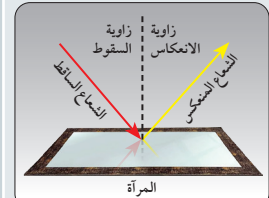
أراد فهد قياس ارتفاع مبنى فوضع مرآة على الرصيف عند النقطة A على مسافة 24 m ، ثم تراجع فهد مسافة 2.7 m من المرآة عندما شاهد قمة المبنى في المرآة ، هل يستطيع فهد حساب ارتفاع المبنى ؟
علمًا بأن طول فهد 1.8 m

معلومة

في بعض الحالات ،
يصعب قياس مسافة أو
ارتفاع معين مباشرة ،
وفي هذه الحالة يمكن
استخدام تشابه المثلثات
لإيجاد هذا القياس بطريقة
غير مباشرة إحدى الطرائق
تستخدم خاصية انعكاس
الضوء في المرآة المستوية
فكما تعرف في الفيزياء ،
إن قياس زاوية السقوط
يساوي قياس زاوية
الانعكاس .

تذكروا

قياس زاوية السقوط
يساوي قياس زاوية
الانعكاس



بفرض أن ارتفاع المبنى $BC = x$ ومن خلال دراستك لتشابه المثلثات
أثبت أن $\Delta BCA \sim \Delta DEA$
اكتب التناسب

$$\frac{ED}{BC} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

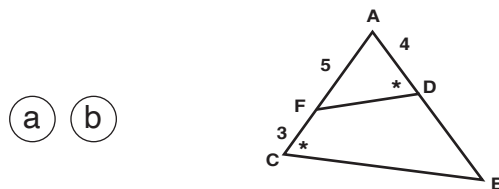
$$\frac{1.8}{x} = \frac{2.7}{24}$$

$$\therefore x = 16$$

أدرب وأحل المسائل

أولاً - البنود الموضوعية :

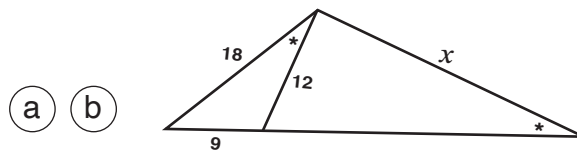
■ في البنود (1-3) اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة :



(1) في الشكل المقابل :
طول $(\overline{BD})$ يساوي 6

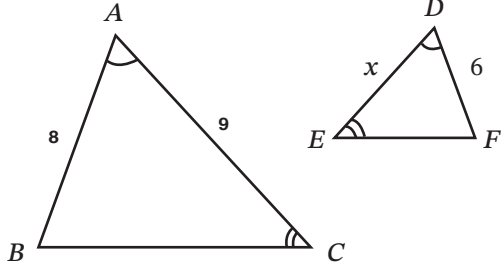


(2) في الشكل المقابل :
 x يساوي 2



(3) في الشكل المقابل :
 x يساوي 24

■ في البنود (1-5) اختر الإجابة الصحيحة :



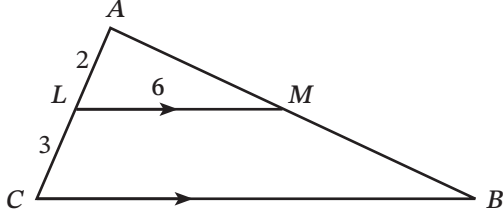
(1) في الشكل المرسوم قيمة x بوحدات الطول تساوي :

- (a) 6 (b) $5\frac{1}{3}$
(c) 7 (d) 6.75

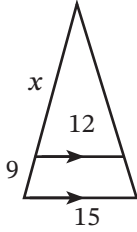
(2) في الشكل المقابل :

$(\overline{LM}) \parallel (\overline{BC})$, $AL=2cm$, $LC=3cm$

$LM=6cm$, فإن BC تساوي :

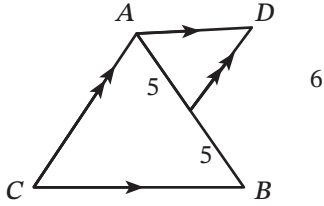


- (a) 9 cm (b) 12 cm
(c) 15 cm (d) 10 cm



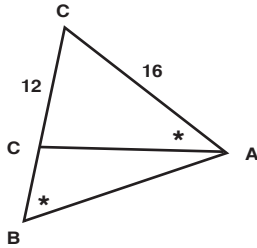
(3) في الشكل المقابل : قيمة x تساوي :

- (a) 12 (b) 24
(c) 36 (d) 48



(4) في الشكل المقابل : طول $\overline{AC}$ تساوي :

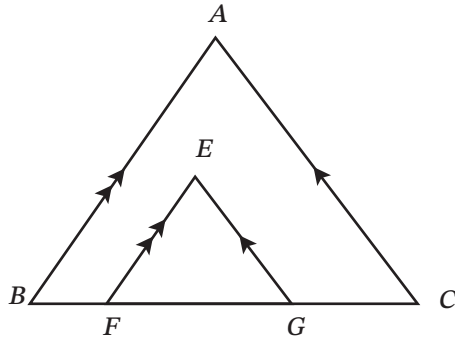
- (a) 6 (b) 9
(c) 12 (d) 15



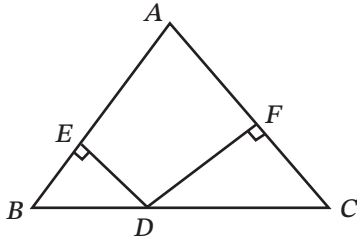
(5) في الشكل المقابل : طول $\overline{BC}$ تساوي :

- (a) 16 (b) 12
(c) $9\frac{1}{3}$ (d) $23\frac{1}{3}$

ثانياً - أسئلة المقال



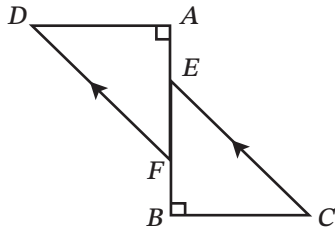
(1) في الشكل المرسوم $\overline{EG} \parallel \overline{AC}$, $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$
أثبت أن المثلث ABC يشابه المثلث EFG



(2) في الشكل المرسوم ABC مثلث فيه

$$\frac{ED}{DF} = \frac{5}{7} , BC = 48cm , AB = AC$$

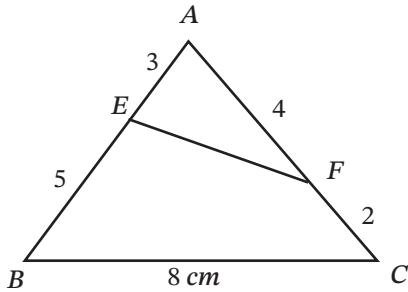
أوجد طول $\overline{DC}$



(3) في الشكل المرسوم $m(\hat{A}) = m(\hat{B}) = 90^\circ$

$$\overline{DF} \parallel \overline{EC}$$

أثبت أن $\Delta ADF \sim \Delta BCE$



(4)

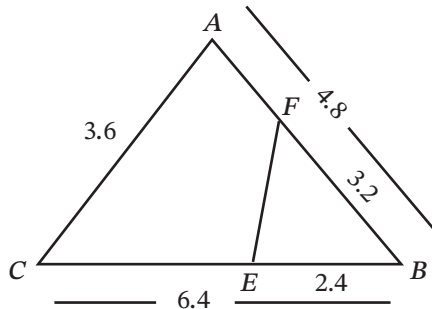
(4) في الشكل المرسوم ABC مثلث فيه

$$BE=5cm , BC=8cm , EA=3cm$$

$$AF=4cm , FC=2cm$$

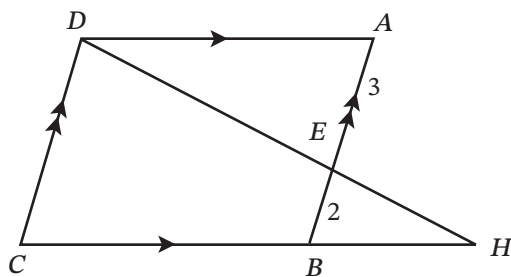
(a) أثبت أن $\Delta AEF \sim \Delta ACB$

(b) أوجد طول $\overline{EF}$.



(5) في الشكل المرسوم

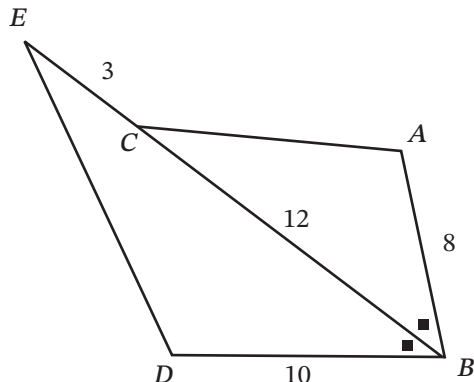
أثبت أن $\Delta BCA \sim \Delta BDE$



(6) في الشكل المقابل: $ABCD$ متوازي أضلاع
 $\overrightarrow{CB} \cap \overrightarrow{DE} = \{H\}$, $\frac{3}{2} = \frac{AE}{EB}$, $E \in (\overline{AB})$

(a) أثبت أن $\Delta EAD \sim \Delta DCH$

(B) أوجد : $\frac{\text{مساحة } \Delta DCH}{\text{مساحة } \Delta EAD}$



(7) في الشكل المقابل:

$\overrightarrow{BE}$ منصف ABD

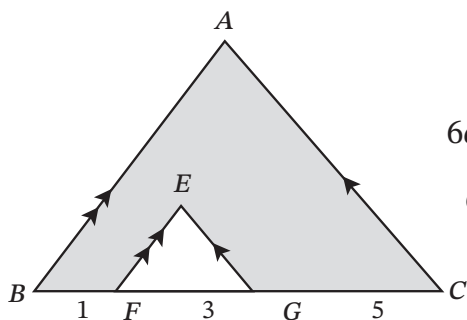
مساحة المثلث: $ABC = 48 \text{ cm}^2$

أوجد مساحة: ΔEBD

مهارات تفكير عليا



■ اختر الإجابة الصحيحة :



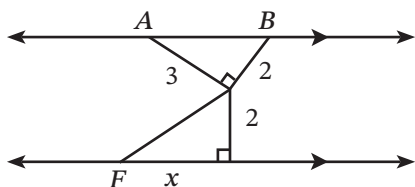
(1) في الشكل المقابل إذا كان مساحة المثلث EFG تساوي 6 cm^2
 فإن مساحة المنطقة المظللة بالشكل تساوي بالسنتيمتر المربع

(a) 27

(b) 36

(c) 48

(d) 54



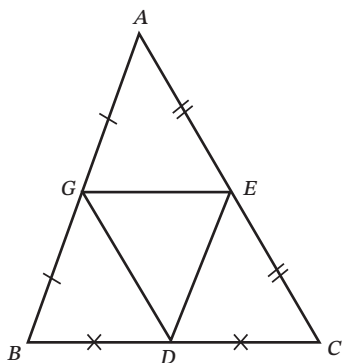
(2) في الشكل المرسوم قيمة x بوحدات الطول تساوي

(a) 3

(b) 2

(c) $\frac{4}{3}$

(d) $\frac{3}{4}$



(3) في المثلث ABC إذا كانت E منتصف AC ، G منتصف AB

D منتصف BC

استخدم تشابه المثلثات في إثبات :

(a) كل من : ΔAGE , ΔBGD , ΔEDC , ΔGED متطابقة

(b) $\Delta GED \sim \Delta CBA$

التشابه في المثلثات القائمة الزاوية

Similarity in Right Triangles

فكرة الدرس:



استخدام التشابه في المثلثات القائمة
«العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية»

المصطلحات:



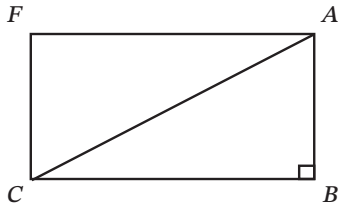
تعلمنا
فيما سبق:

- التشابه
- خواص المستطيل
- نظرية فيثاغورث

Similarity of Triangles

تشابه المثلثات

مسألة الدرس:



اشترك مع أحد زملائك في الآتي :

- أحضر قطعة ورق مستطيلة الشكل
- ارسم قطرًا للمستطيل

- اقطع الورقة عند القطر سوف تحصل على مثلثين قائمي الزاوية

- اختر $\triangle ABC$

- ارسم $\overline{BD} \perp \overline{AC}$

- قم بقص المثلث $\triangle ABC$

إلى مثلثين $\triangle DCB, \triangle DAB$

- في المثلثات الثلاثة

1. المثلث ABC

2. المثلث DAB

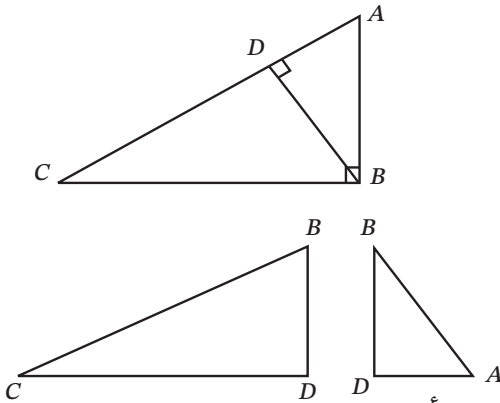
3. المثلث DCB

- فكّر وناقش مع زملائك كيف يمكن إثبات أن :

- المثلث DAB يشابه المثلث ABC

- المثلث DCB يشابه المثلث ABC

- المثلث DAB يشابه المثلث DCB



عزيزي المتعلم النشاط السابق يقودنا إلى :

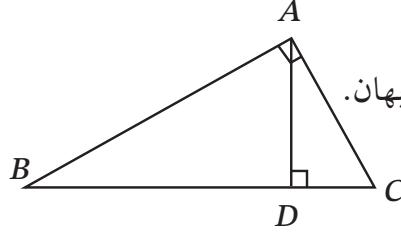
نظرية :

العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية يقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين وكل منهما يشابه المثلث الأصلي .

هل نستطيع إيجاد العلاقات بين DC ، AD ، BD ؟

نشاط

لنعمل معاً لنستكشف



عزيزي المتعلم من النشاط السابق :

- استطعنا إثبات أن ΔBDA ، ΔADC متشابهان.
- اكتب التناسب

$$\frac{AD}{BD} = \frac{DC}{AD} = \frac{AC}{BA}$$

بالضرب التقاطعي

$$(AD)^2 = DC \cdot DB$$

مما سبق نستطيع استنتاج أن :

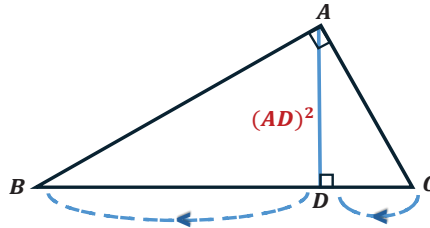
«نظرية إقليدس»

نتيجة (1) :

مربع طول العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية يساوي ناتج ضرب طولي القطعتين المستقيمتين اللتين ينقسم إليهما الوتر بهذا العمود.

أي أن في المثلث ABC القائم الزاوية في (A) إذا كان $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ فإن :
 $(AD)^2 = DC \cdot BD$

يمكن تمثيل هذه العلاقة بالشكل المجاور



سأل عمر هل يمكن القول بأن

$\overline{AD}$ هو الوسط المتناسب لكل من $\overline{BD}$ ، $\overline{DC}$ ؟

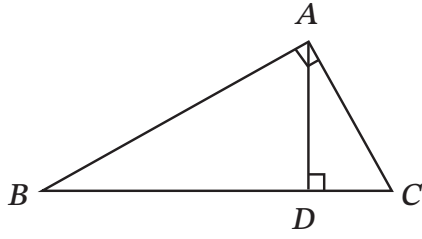
معلومة



إقليدس EUCLIDS

هو عالم رياضيات لقب
 بأبي الهندسة .
 اشتهر بكتابة (العناصر)
 عرض فيه مجموعة
 بديهيات وتطرق
 للعديد من مجالات
 الرياضيات.

هل نستطيع إيجاد العلاقات بين AC ، BC ، DC ؟



لنعمل معاً لنستكشف

نشاط

- حاول إثبات أن $\Delta BAC \sim \Delta ADC$
- اكتب التناسب

$$\frac{BA}{AD} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$$

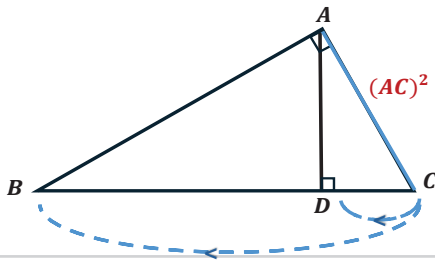
بالضرب التقاطعي

$$\therefore (AC)^2 = CD \cdot CB$$

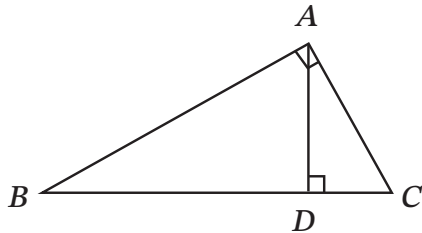
يمكن تمثيل هذه العلاقة بالشكل المجاور

هل يمكن القول أن :

AC وسط متناسب بين DC ، BC



هل نستطيع إيجاد العلاقات بين AC ، BC ، DC ؟



لنعمل معاً لنستكشف

نشاط

عزيزي المتعلم:

- حاول إثبات أن $\Delta CBA \sim \Delta ABD$
- اكتب التناسب

$$\frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{AD}{CA}$$

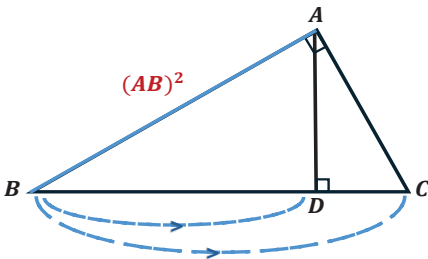
بالضرب التقاطعي

$$\therefore (AB)^2 = BD \cdot BC$$

يمكن تمثيل هذه العلاقة بالشكل المجاور

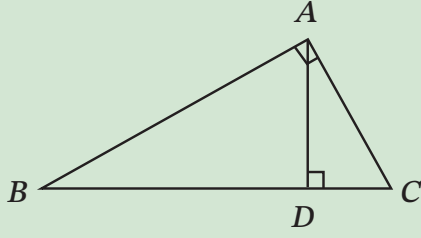
هل يمكن القول أن :

AB وسط متناسب بين BC ، BD



«نظرية إقليدس»

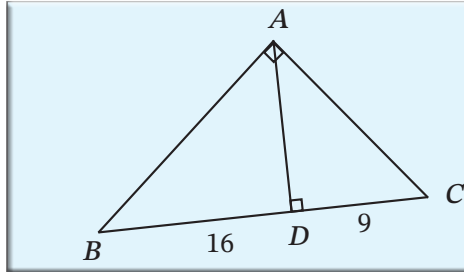
نتيجة (2) :



في المثلث القائم ABC إذا كان $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ فإن :

- ① $(AB)^2 = BD \cdot BC$
- ② $(AC)^2 = CD \cdot CB$
- ③ $(AB) \cdot (AC) = (AD) \cdot (BC)$

حاول إثبات أن : $(AB) \cdot (AC) = (AD) \cdot (BC)$ ؟



في الشكل المرسوم :

ABC مثلث قائم الزاوية في A ،

إذا كان $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ،

أوجد طول كل من : $\overline{AD}$ ، $\overline{AC}$

مثال (1)

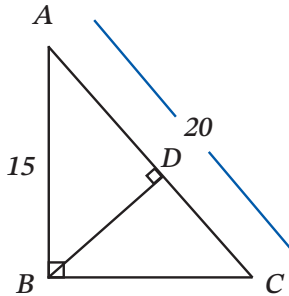
∴ المثلث ABC قائم الزاوية في A

∴ $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad (AD)^2 &= DC \cdot DB \\ (AD)^2 &= (9) \cdot (16) \\ (AD)^2 &= 144 \\ AD &= \sqrt{144} \\ AD &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad (AC)^2 &= CD \cdot CB \\ (AC)^2 &= (9) \cdot (25) \\ (AC)^2 &= 225 \\ AC &= \sqrt{225} \\ AC &= 15 \end{aligned}$$

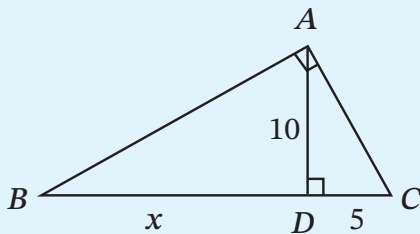
تحقق من فهمك (1)



في الشكل المرسوم :

a أوجد طول $\overline{BC}$

b أوجد طول $\overline{CD}$



في الشكل المرسوم : أوجد قيمة x

مثال (2)

$$\therefore \overline{AD} \perp \overline{BC}$$

الحل:

$$\therefore (AD)^2 = (DC)(DB)$$

$$(10)^2 = 5 \times (DB) \quad \text{باستخدام نتيجة 1}$$

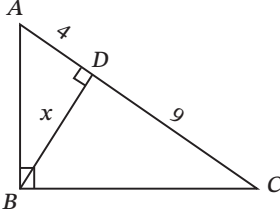
$$DB = \frac{100}{5} \quad \text{بقسمة الطرفين على 5}$$

$$\therefore DB = 20$$

تحقق من فهمك (2)



في الشكل المرسوم : أوجد قيمة x

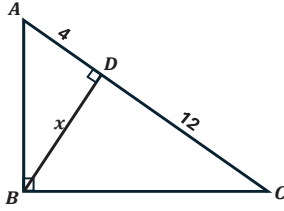


أولاً - البنود الموضوعية :

أتدرب وأحل المسائل

■ في البنود (1-5) ظل دائرة الإجابة الصحيحة :

(1) في الشكل المرسوم قيمة x تساوي :



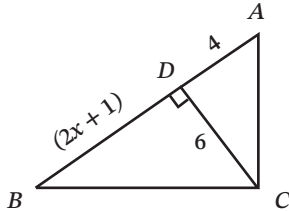
(a) $4\sqrt{3}$

(b) $3\sqrt{4}$

(c) 48

(d) 16

(2) في الشكل المرسوم قيمة x تساوي :



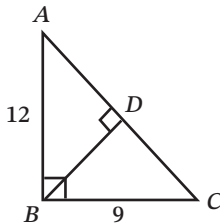
(a) 6

(b) 4.8

(c) 8

(d) 4

(3) في الشكل المرسوم طول $\overline{BD}$ تساوي :



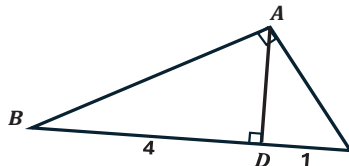
(a) 9.5

(b) 7.2

(c) 7.5

(d) 8

(4) في الشكل المرسوم طول $\overline{AD}$ تساوي :



(a) 2

(b) 4

(c) 5

(d) 16

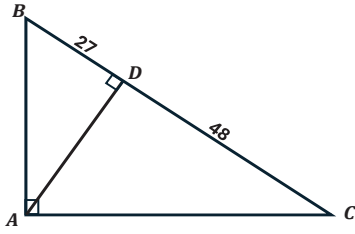
(5) في الشكل المرسوم طول $\overline{AD}$ تساوي :

(a) 24

(b) 12

(c) 36

(d) 75

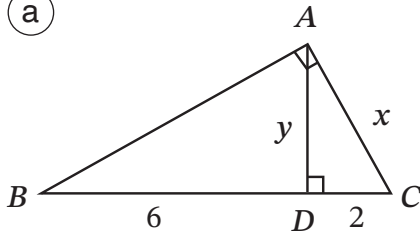


ثانياً - أسئلة المقال

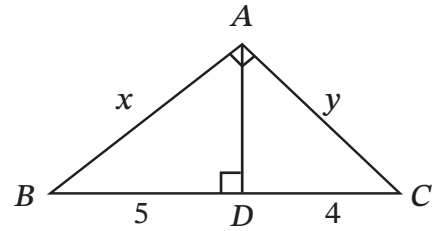
■ أجب عن الأسئلة التالية :

(1) أوجد قيمة x, y في كل من الأشكال التالية :

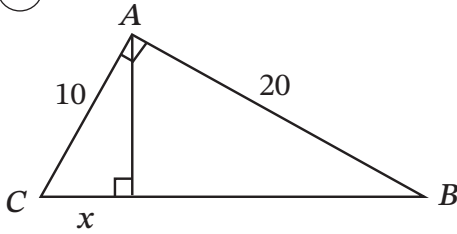
(a)



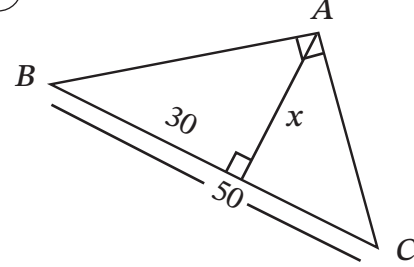
(b)



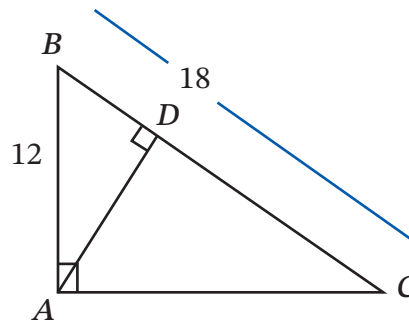
(c)



(d)

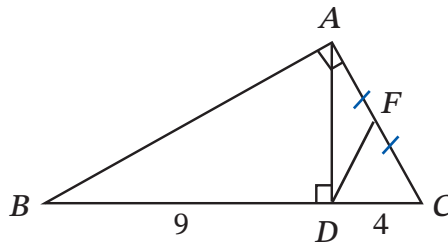


(2)



(2) في الشكل المقابل :

أوجد طول $\overline{DC}$

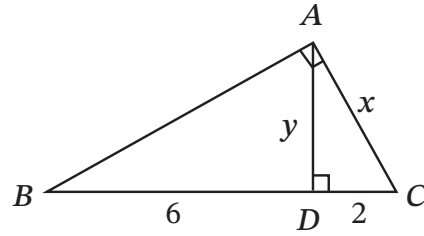


(3) في الشكل المقابل :

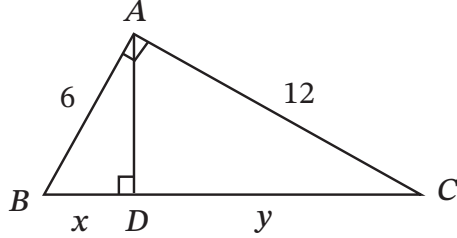
أوجد قيمة $\overline{DF}$



(4)



(4) في الشكل المقابل :
أوجد قيمة x, y



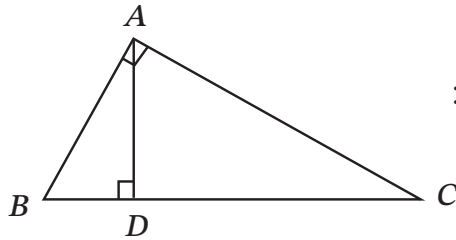
(5) في الشكل المقابل :

$\overline{AD} \perp \overline{BC}$, ΔABC قائم الزاوية في A

$AB=6cm, AC=12cm$

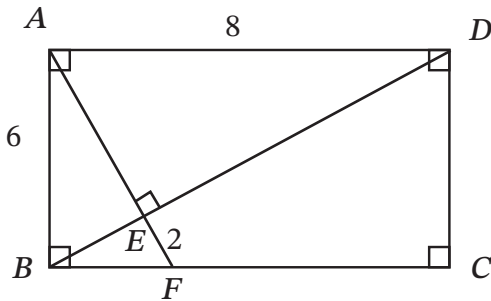
أوجد طول $\frac{x}{y}$

مهارات تفكير عليا

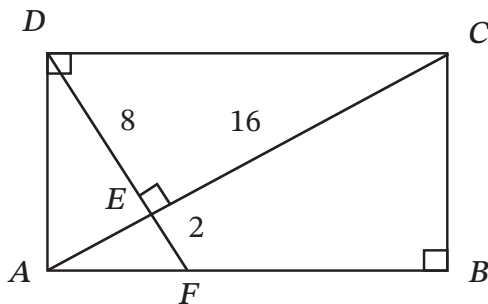


(1) في الشكل المرسوم استخدم نظرية إقليدس لإثبات أن :

$$(AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2$$



(2) في الشكل المرسوم أوجد طول $\overline{EF}$



(3) في الشكل المقابل :

$F \in \overline{AB}$, مستطيل $\Delta ABCD$

رسم $\overline{DF} \perp \overline{AC}$ ، فإذا كان

$EF=2cm, DE=8cm$

أوجد طول $\overline{DA}$

فكرة الدرس:



ستتعلم:

- (1) نظرية المستقيم الموازي لأحد أضلاع مثلث .
- (2) نظرية طاليس .
- (3) نظرية منصف الزاوية الداخلي لمثلث .

تعلمنا
فيما سبق:

- تشابه المثلثات
- التناسب



مسألة الدرس:

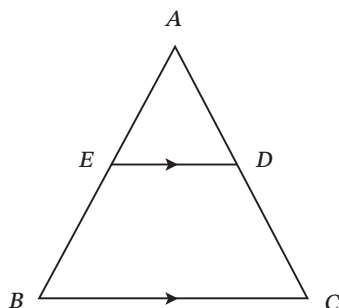


لنعمل معاً لنستكشف



معلومة رياضية

إذا كان
 $\overrightarrow{ED} // \overrightarrow{BC}$
فإن
 $\overline{ED} // \overline{BC}$
والعكس صحيح



عزيزي المتعلم في الشكل المرسوم

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC} \quad \text{المطلوب إثبات أن :}$$

حاول التفكير معي :

$$\therefore \overline{ED} // \overline{BC}$$

لماذا ؟ $\Delta ABC \sim \Delta AED$

من التشابه يمكن كتابته التناسب التالي :

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AE} \quad (1)$$

ومن هندسة الشكل فإن :

$$AC = AD + DC$$

$$AB = \dots + \dots$$

$$\frac{AD+DC}{AD} = \frac{\dots \dots \dots}{AE}$$

وبالتعويض في العلاقة (1)

$$\frac{AD}{AD} + \frac{DC}{AD} = \frac{AE}{AE} + \frac{EB}{AE}$$

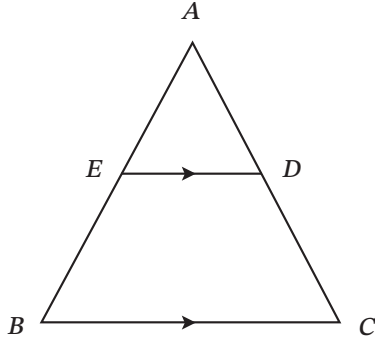
ويمكن كتابة هذا التناسب بالصورة

$$1 + \frac{DC}{AD} = 1 + \frac{EB}{AE} \implies \therefore \frac{DC}{AD} = \frac{EB}{AE}$$

ومن خلال الاستكشاف السابق نستطيع أن نصل إلى النظرية التالية :

نظرية (1) : « نظرية المستقيم الموازي » Parallel Line Theory

إذا وازى مستقيم أحد أضلاع مثلث وقطع ضلعيه الآخرين ، فإنه يقسم هذين الضلعين إلى أجزاء أطوالها متناسبة .



أي أن في المثلث ABC

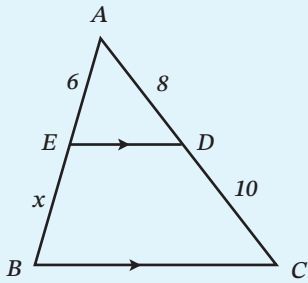
$$\overline{ED} \parallel \overline{BC}$$

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC}$$

فإن :

عكس النظرية صحيح

أي أنه إذا كان : $\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC}$ فإن : $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$



في الشكل المقابل : أوجد قيمة x

مثال (1)

الحل:

وباستخدام نظرية المستقيم الموازي نكتب التناسب :

$$\because \overline{ED} \parallel \overline{BC}$$

$$\frac{6}{x} = \frac{8}{10}$$

الأجزاء المتناسبة

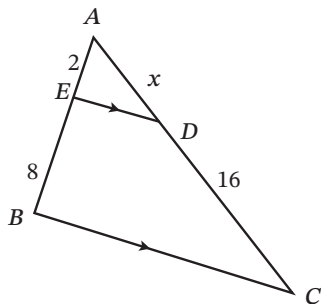
$$8x = 60$$

باستخدام الضرب التقاطعي والقسمة على 8

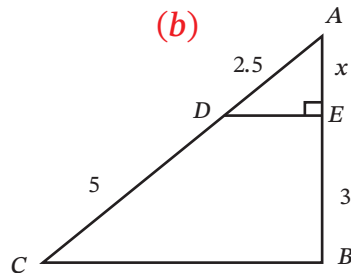
$$x = 7.5$$

تحقق من فهمك (1)

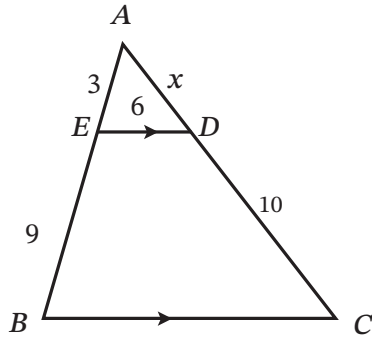
(a)



(b)



في الأشكال التالية :
أوجد قيمة x



في الشكل المرسوم

$\overline{ED} \parallel \overline{BC}$ مثلث فيه ABC

المطلوب :

1. طول $\overline{AD}$

2. طول $\overline{BC}$

- من خلال متابعة المعلم لطلابه وجد أن هناك طريقتين في التفكير للمتعلمين فهد وإبراهيم فعُرضت الطريقتان على متعلمي الفصل.

طريقة (إبراهيم)

$$\begin{aligned} \frac{AE}{EB} &= \frac{AD}{DC} = \frac{ED}{BC} \\ \frac{3}{9} &= \frac{AD}{10} = \frac{6}{BC} \\ \frac{3}{9} &= \frac{AD}{10} \\ 9AD &= 30 \rightarrow AD = \frac{10}{3} \\ \frac{3}{9} &= \frac{6}{BC} \\ \therefore 3BC &= (6)(9) \\ BC &= \frac{(6)(9)}{3} \\ BC &= 18 \end{aligned}$$

طريقة (فهد)

من تشابه المثلثين AED, ABC

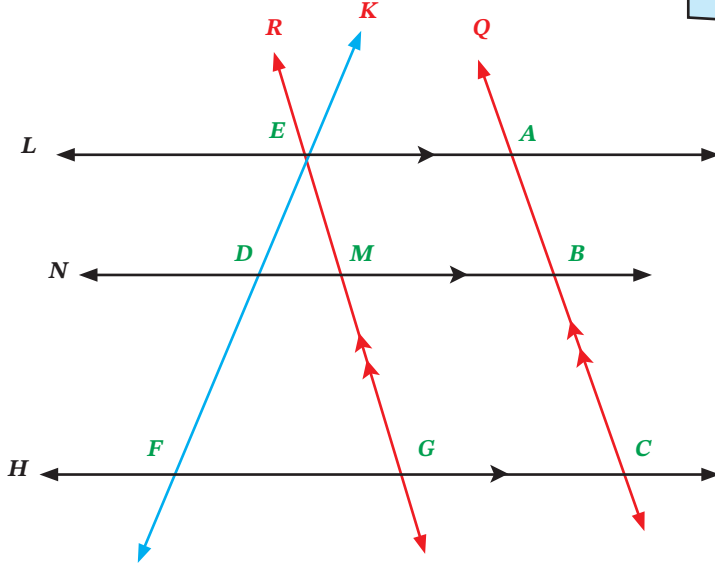
$$\begin{aligned} \frac{AE}{AB} &= \frac{AD}{AC} = \frac{ED}{BC} \\ \frac{3}{12} &= \frac{AD}{AD+10} = \frac{6}{BC} \\ 3AD + 30 &= 12AD \\ 12AD - 3AD &= 30 \\ 9AD &= 30 \\ AD &= \frac{10}{3} \\ \therefore \frac{3}{12} &= \frac{6}{BC} \\ 3BC &= 72 \rightarrow BC = 24 \end{aligned}$$

أي الرأيين تؤيد ؟ دلل على إجابتك.

نظرية (2) : Thales Theory « نظرية طاليس »

لنعمل معاً لنستكشف

نشاط



1. ارسم المستقيمات $L // N // H$

2. ارسم المستقيم k يقطع $\overline{H}$, $\overline{N}$, $\overline{L}$

في النقاط F, D, E على الترتيب

3. ارسم المستقيم Q يقطع $\overline{H}$, $\overline{N}$, $\overline{L}$

في النقاط C, B, A على الترتيب

4. ارسم $\overline{Q} // \overline{R}$ يقطع $\overline{H}$, $\overline{N}$, $\overline{L}$

في النقاط G, M, E على الترتيب

عزيزي المتعلم من هندسة الشكل :

الشكل $ABME$ متوازي الأضلاع

$$\therefore \overline{(AB)} // \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots = AB$$

وأيضاً الشكل $BCGM$ متوازي الأضلاع

$$\therefore \overline{(BC)} // \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots = BC$$

في المثلث EFG (من نظرية المستقيم الموازي)

$$\therefore \overline{(DM)} // \dots\dots\dots$$

$$\therefore \frac{ED}{DF} = \dots\dots\dots$$

$$\therefore \frac{ED}{DF} = \frac{AB}{BC}$$

والاستكشاف السابق يقودنا إلى النظرية التالية :

نظرية (2) : « نظرية طاليس » Thales Theory

إذا قطع مستقيمان ثلاث مستقيمات متوازية أو أكثر فإن أطوال القطع المستقيمة الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر .

أي أن

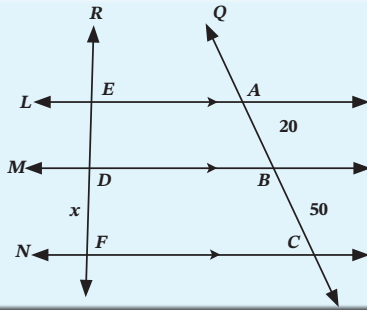
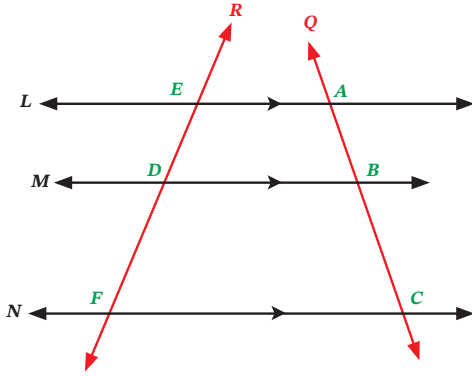
إذا كان

$$\overrightarrow{N} \parallel \overrightarrow{M} \parallel \overrightarrow{L}$$

$\overrightarrow{Q}, \overrightarrow{R}$ تقطع كلاً من

$$\overrightarrow{L}, \overrightarrow{M}, \overrightarrow{N}$$

$$\frac{ED}{DF} = \frac{AB}{BC} \quad \text{فإن :}$$



مثال (2) في الشكل المقابل : أوجد قيمة x

الحل :

باستخدام نظرية طاليس

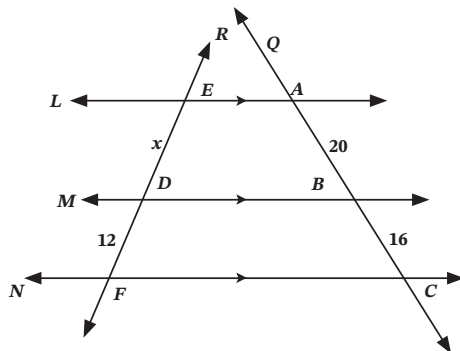
$$\frac{12}{x} = \frac{20}{50}$$

$$20x = (12)(50)$$

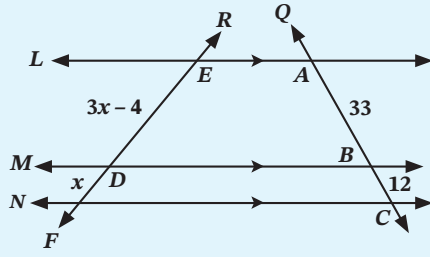
$$x = \frac{(12)(50)}{20}$$

$$x = 30$$

تحقق من فهمك (2)



في الأشكال المقابل : أوجد قيمة x



في الشكل المقابل : أوجد قيمة x

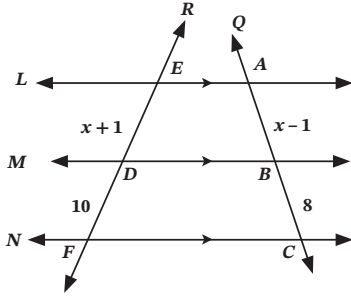
مثال (3)

الحل:

باستخدام نظرية طاليس

$$\begin{aligned}\frac{3x-4}{x} &= \frac{33}{12} \\ 12(3x-4) &= 33x \\ 36x-48 &= 33x \\ 36x-33x &= 48 \\ 3x &= 48 \\ x &= 16\end{aligned}$$

تحقق من فهمك (3)



في الأشكال المرسوم : أوجد قيمة x

ملحوظة:

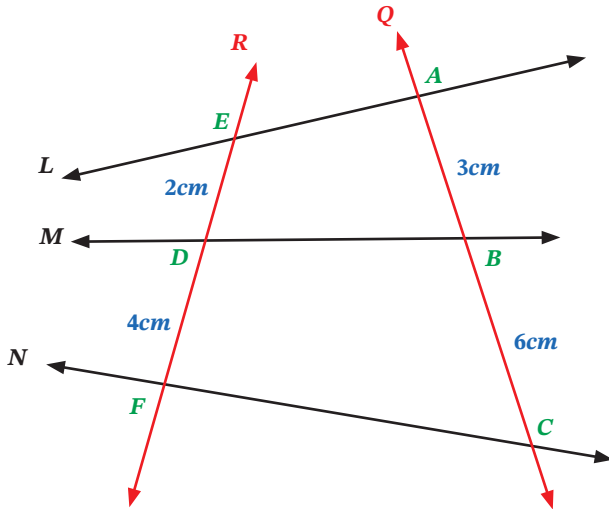
في الشكل المرسوم نجد أن :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{ED}{DF} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{ED}{DF} = \frac{1}{2}$$

أي أن :

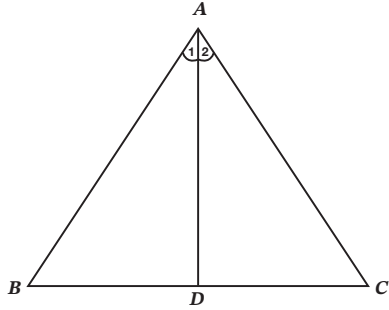


ولكن المستقيمات L, M, N ليست متوازية

إذا كانت أطوال القطع المستقيمة الناتجة من أحد القاطعين متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر فليس بالضرورة أن تكون المستقيمات متوازية .

∴ عكس نظرية طاليس ليس بالضرورة صحيح

نظرية (3) : « نظرية منصف الزاوية في مثلث » Angle Bisector Theoremina Triangle



نشاط
لنعمل معاً لنستكشف

1. ارسم المثلث ABC ، نصّف الزاوية A بالمنصف $\overline{AD}$
2. ارسم شعاع من c وهو $\overline{CM}$ يوازي $\overline{AD}$ ويقطع $\overline{BA}$ في M

من هندسة الشكل :

$$m(\hat{1}) = m(\dots)$$

بالتناظر والتوازي

$$m(\hat{2}) = m(\dots)$$

بالتبادل والتوازي

$$m(\hat{1}) = m(\hat{2})$$

من تنصيف $(\hat{A})$

$$m(\dots) = m(\dots)$$

$$\therefore \dots = \dots \quad (1)$$

من نظرية المستقيم الموازي

$$\therefore \frac{AB}{AM} = \frac{BD}{DC} \quad (2)$$

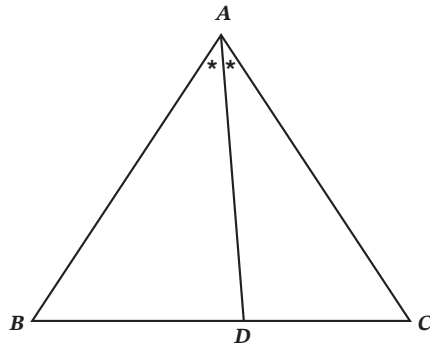
من (1)، (2) ينتج أن

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

والاستكشاف السابق يقودنا إلى النظرية التالية :

نظرية (3) : « نظرية منصف الزاوية في مثلث »

إذا نصّفت زاوية رأس مثلث الداخلة أو الزاوية الخارجة عند هذا الرأس، قسم المُنصف قاعدة المثلث من الداخل أو من الخارج إلى جزئين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين للمثلث .



أي أن

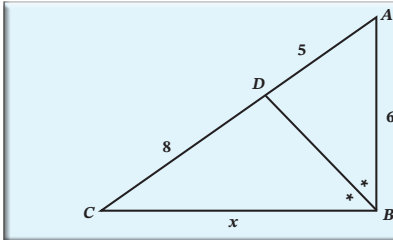
إذا كان $\overline{AD}$ مُنصف $(\hat{A})$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \quad \text{فإن :}$$

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC} \quad \text{أو :}$$

ملحوظة:

سنكتفي بدراسة حالة المُنصف الداخلي للزاوية في المثلث .



أوجد قيمة x في الشكل المبين حيث

مثال (4)

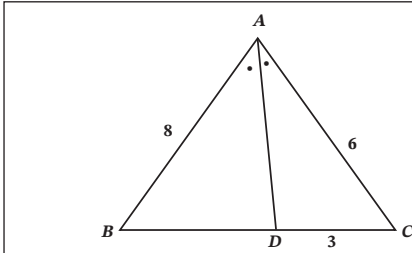
$\overline{BD}$ يُنصف $\hat{A}BC$

الحل: في المثلث ABC ، $\overline{BD}$ مُنصف $(\hat{A}BC)$
 $\therefore \frac{6}{x} = \frac{5}{8}$ $\therefore$ نظرية مُنصف الزاوية

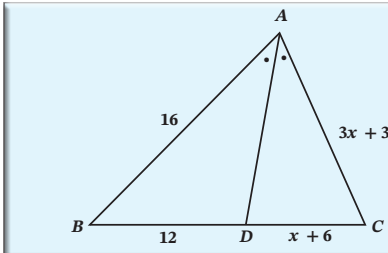
$$5x = (6)(8)$$

$$x = \frac{(6)(8)}{5} \rightarrow x = 9.6$$

تحقق من فهمك (4)



المثلث ABC فيه $AC = 6$ ،
 $AB = 8$ ، $\overline{AD}$ يُنصف $(\hat{B}AC)$
 ويقطع $\overline{BC}$ في D إذا كان $BD = 3$
 أوجد CD



أوجد قيمة x في الشكل المبين حيث

مثال (5)

$\overline{AD}$ يُنصف $(\hat{C}AB)$

الحل: في المثلث CAB ، $\overline{AD}$ مُنصف $(\hat{C}AB)$
 $\therefore$ نظرية مُنصف الزاوية

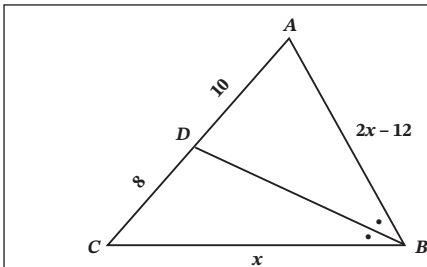
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \rightarrow \frac{16}{3x+3} = \frac{12}{x+6}$$

$$12(3x+3) = 16(x+6)$$

$$36x + 36 = 16x + 96 \rightarrow 36x - 16x = 96 - 36$$

$$20x = 60 \rightarrow x = 3$$

تحقق من فهمك (5)



المثلث ABC فيه $AD = 10$ ، $DC = 8$

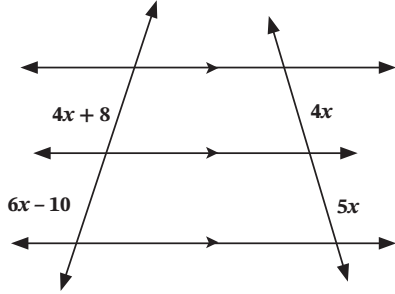
$\overline{BD}$ يُنصف الزاوية $(\hat{A}BC)$ ويقطع $\overline{AC}$

في D ، أوجد x

أولاً - البنود الموضوعية :

■ في البنود (1-2) اختر الإجابة الصحيحة :

(1) في الشكل المرسوم قيمة x تساوي :



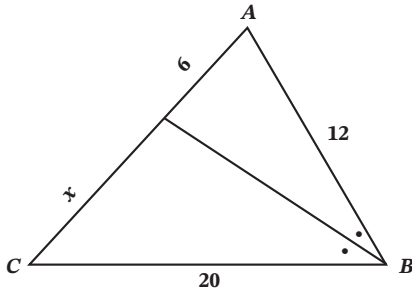
(a) 10

(b) 20

(c) 8

(d) 5

(2) في الشكل المرسوم قيمة x تساوي :



(a) 8

(b) 10

(c) 12

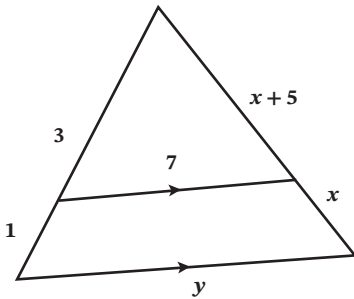
(d) 20

ثانياً - أسئلة المقال :

■ أجب عن الأسئلة التالية :

(1) في الشكل المقابل :

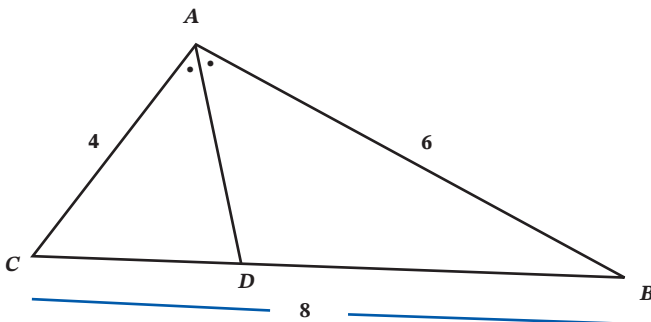
أوجد قيمة كل من x, y :



(2) في المثلث ABC ، $\overline{AD}$ نَصَفُ A

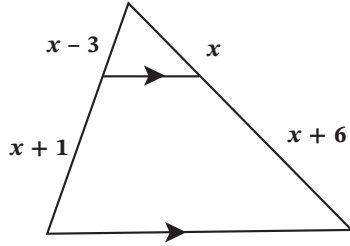
إذا كان $BC = 8$ ، $AC = 4$ ، $AB = 6$

فأوجد DB ، DC



(3) في البنود (3-10) أوجد قيمة x :

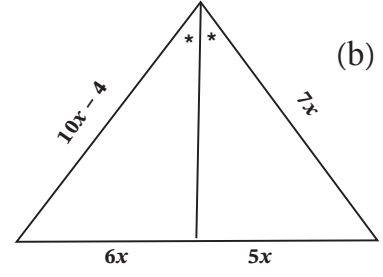
(a)



3 (a)

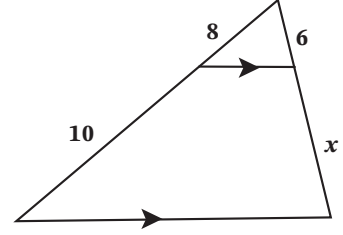
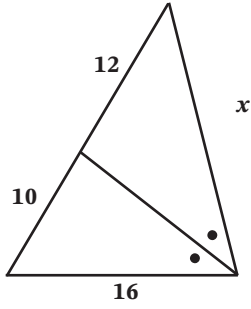


3 (b)



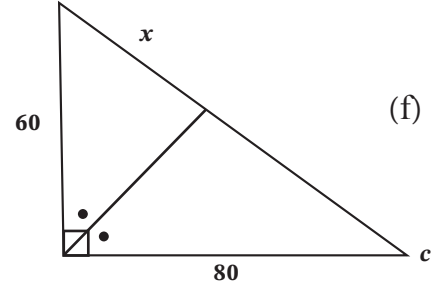
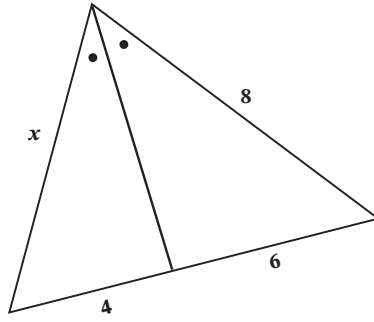
(b)

(c)



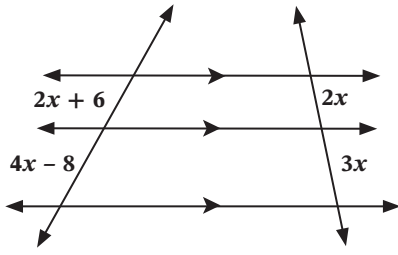
(d)

(e)

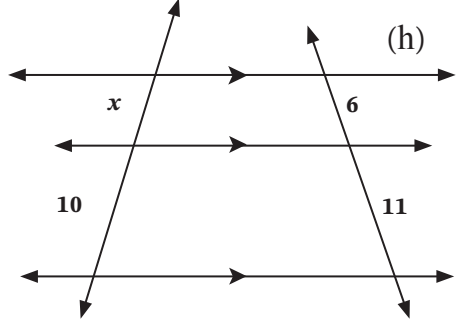


(f)

(g)



3 (h)



(h)

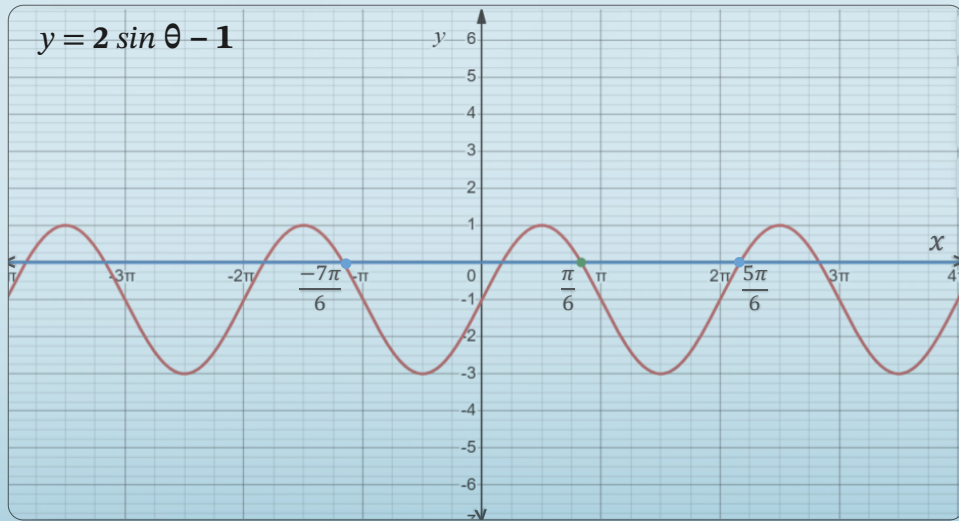


استعد للاختبار

2

عزيزي المعلم ، عزيزي المتعلم :

يحتوي رمز الـ (QR) الخاص باختبار الوحدة على أسئلة مهمة، يجب الاستفادة منها في التقييم البنائي والنهائي وتدريب المتعلم عليها جيداً.



قيّم مناهجنا



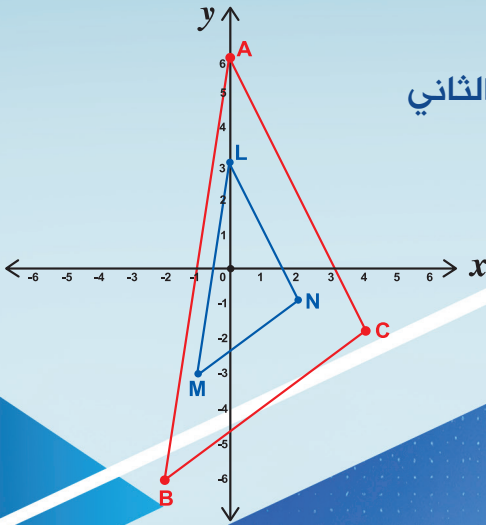
الكتاب كاملاً



الرياضيات

الصف العاشر

الفصل الدراسي الأول - القسم الثاني



IXI



فكرة
الدرس



مسألة
الدرس



لنعمل معاً
لنستكشف



استخدام
النماذج



تحقق
من فهمك



أنتدرب
وأحل المسائل



مهارات
تفكير عليا



الرياضيات

الصف العاشر

الفصل الدراسي الأول - القسم الثاني

كتاب الطالب

تأليف

أ. دلال مبارك فلاح الحجر (رئيساً)

أ. وضحي إبراهيم مزعل الدوسري

أ. محمد عبدالله الحمد المجرن

أ. حصة مضحي عبدالله الهاجري

أ. هيا محمد فالح العازمي

أ. ثريا غدير مريد الشمري

الطبعة الأولى

١٤٤٨ هـ

٢٠٢٦ - ٢٠٢٧ م

الطبعة الأولى: 2026 / 2027 م

الفريق العلمي



أ. سمير عبدالله أحمد مرسي
أ. خالد صاوي سيد شحاته

عضو الشروحات التعليمية المعززة بالذكاء الاصطناعي



أ. نهال هاشم عبدالحميد هاشم

عضو التصميم والإخراج



أ. خلود خالد مهدي الشمري

المراجعة اللغوية



أ. عبدالله محمد الذروة
أ. عباس فيصل الصراف
أ. أماني عبدالكريم العريفي



المكتبة الوطنية

24797888

أودع في مكتبة الكويت الوطنية - ردمك: 0-124-33-9921-978

أودع في مكتبة وزارة التربية تحت رقم (532) بتاريخ 9 / 8 / 2026 م





حضرة صاحب السمو الشيخ مشعل أحمد الجابر الصباح
أمير دولة الكويت

H.H. Sheikh Meshal AL-Ahmad AL-Jaber AL-Sabah
Amir Of The State Of Kuwait



سَمُو الشَّيْخِ صَبَّاحٍ كَهْدٍ الْحَمَادِ الصَّبَّاحِ
وَلِيِّ مَعْهُدِ دَوْلَةِ الْكُوَيْتِ

H. H. Sheikh Sabah Khaled Al-Hamad Al-Sabah
Crown Prince Of The State Of Kuwait

المحتوى

الوحدة الثالثة	حسابات المثلثات	الصفحة
(3-1)	النسب المثلثية الأساسية ومقلوباتها	145
(3-2)	حل المثلث القائم	161
(3-3)	زاوية الارتفاع - زاوية الانخفاض	166
(3-4)	الدوال المثلثية (الدوال الدائرية)	172
(3-5)	العلاقات بين الدوال المثلثية	192
(3-6)	حل المعادلات المثلثية	202

الوحدة الرابعة	المنطق والإحصاء	الصفحة
(4-1)	المنطق والتقارير	211
(4-2)	أدوات الربط (العمليات المنطقية)	218
(4-3)	رمز المجموع Σ	232
(4-4)	مقاييس التشتت - الانحراف المعياري	240

ما أهمية هذه الوحدة؟

الطب والعلوم الحيوية :

تُستخدم الدوال المثلثية والحركات الدورية في دراسة وتحليل كثير من الظواهر الطبية والحيوية، مثل تحليل إشارات القلب (ECG)، والتصوير الطبي بأجهزة الرنين المغناطيسي (MRI).

الهندسة المعمارية والبناء :

تسهم المفاهيم المثلثية في تصميم المباني والجسور بدقة متناهية، بما يضمن سلامتها واستقرارها وقدرتها على مواجهة القوى الطبيعية المختلفة.

التكنولوجيا والاتصالات :

تعتمد التقنيات الحديثة على الموجات الكهرومغناطيسية والأنماط الدورية في نقل المعلومات والبيانات، بما في ذلك ما يرسل أو يستقبل عبر الهواتف المحمولة.

الطبيعة والفلك :

تساعد الدوال المثلثية في تفسير العديد من الظواهر الطبيعية والفلكية، مثل حساب مواقيت شروق وغروب الشمس، ودراسة حركة الكواكب، وتحديد أوقات المد والجزر في البحار، التي تتبع أنماطاً دورية يمكن وصفها بدقة.

سأتعلمُ في هذه الوحدة:

- 1- النسب المثلثية الأساسية ومقلوباتها
- 2- حل المثلث القائم
- 3- زاوية الارتفاع - زاوية الانخفاض
- 4- الدوال المثلثية (الدوال الدائرية)
- 5- العلاقات بين الدوال المثلثية
- 6- حل المعادلات المثلثية

تعلمتُ سابقاً :

- 1- استخدام نظرية فيثاغورث
- 2- إثبات تشابه مثلثات واستنتاج أطوال الأضلاع المتناسبة والزوايا المتساوية
- 3- استخدام تشابه المثلثات في حل مسائل حياتية
- 4- تطابق المثلثات وكذلك استنتاج أطوال الأضلاع المتناظرة والزوايا المتناظرة



استعد للوحدة



عزيزي المعلم ، عزيزي المتعلم :

يحتوي رمز الـ (QR) الموجود في بداية الوحدة على مفاهيم علمية وتمارين تساعد في الاستعداد للوحدة وتعزز المفاهيم الواردة فيها.

الوحدة الثالثة

حساب المثلثات

حل المعادلات
المثلثية

النسب المثلثية
الأساسية ومقلوباتها

العلاقات بين
الدوال المثلثية

حل المثلث
القائم

الدوال المثلثية
(الدوال الدائرية)

زاوية الارتفاع
- زاوية الانخفاض

- الزاوية الموجهة
- الزاوية الموجهة في وضع قياسي
- القياس الستيني - القياس الدائري
- العلاقة بين القياس الدائري والقياس الستيني للزاوية
- دائرة الوحدة

$\sin \theta, \csc \theta$
 $\cos \theta, \sec \theta$
 $\tan \theta, \cot \theta$



تصميم المظلات الشمسية Sunshade design



تصميم مظلات مناسبة لساحة المدرسة، بناءً على زاوية ارتفاع الشمس، بهدف تثبيت مقاس مناسب للمظلة في توقيت معين بدولة الكويت.



STEAM

(M) الرياضيات



النسب المثلثية

(A) الفنون



رسم تخطيطي

(E) الهندسة



تصميم المظلة

(T) التكنولوجيا



آلة حاسبة +
تصميم رقمي
(SunCalc)

(S) العلوم



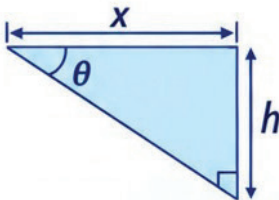
زاوية الشمس
والظل

خطوات تنفيذ المشروع

الخطوة الثالثة

3

- إذا أردنا تركيب مظلة أفقية عند قمة هذا السور لحجب أشعة الشمس تماماً، وكان عرضها 3 أمتار، نريد حساب طول المظلة x .



$$x = \frac{h}{\tan \theta}$$

$$x = \dots$$

الخطوة الثانية

2

- يتم حساب الزاوية θ من خلال مقارنة الظل.



$$\tan \theta = \frac{\text{طول المتعلم}}{\text{طول ظل المتعلم}}$$

- ثم يتم حساب ارتفاع السور (h) باستخدام قياس الزاوية θ .



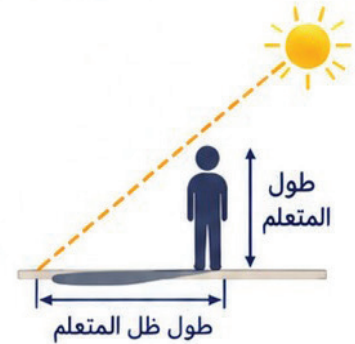
$$\tan \theta = \frac{h}{S}$$

$$h = \dots$$

الخطوة الأولى

1

- يتم قياس طول المتعلم وظله، وينفس النظام يتم قياس طول ظل سور المدرسة (S) .
- من خلال موقع (SunCalc) يتم تحديد زاوية الشمس الحالية.



الموارد والأدوات

الرياضيات



- النسب المثلثية
- الحسابات والمعادلات

الفنون



- رسم تخطيطي
- تصميم لمظهر المظلة

الهندسة



- تصميم المظلة
- القياسات والرسم الهندسي

التكنولوجيا



- موقع SunCalc
- آلة حاسبة

العلوم



- دراسة زاوية الشمس والظل وأثرها

النسب المثلثية الأساسية ومقلوباتها Trigonometric Ratios and their Reciprocals

فكرة الدرس:



استكشاف النسب المثلثية للمثلث القائم.

المصطلحات:



4. قاطع الزاوية $\sec \theta$
5. قاطع تمام الزاوية $\csc \theta$
6. ظل تمام الزاوية $\cot \theta$

1. جيب الزاوية $\sin \theta$
2. جيب تمام الزاوية $\cos \theta$
3. ظل الزاوية $\tan \theta$

مسألة الدرس:



نعلم بأن نظرية فيثاغورث تتعامل مع أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية، ومسلمة اقليدس في الهندسة والتي تنص على أن «مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلية تساوي 180° » تتعامل مع زوايا المثلث الداخلية، والآن سوف نتعلم كيفية الربط بين أطوال أضلاع المثلث وقياس الزوايا وهذا العلم يسمى «علم حساب المثلثات» وسوف نقوم بدراسة حساب المثلثات من خلال مسارين:

المسار الأول: يعتمد على خصائص المثلث القائم الزاوية

المسار الثاني: يعتمد على مفهوم دائرة الوحدة

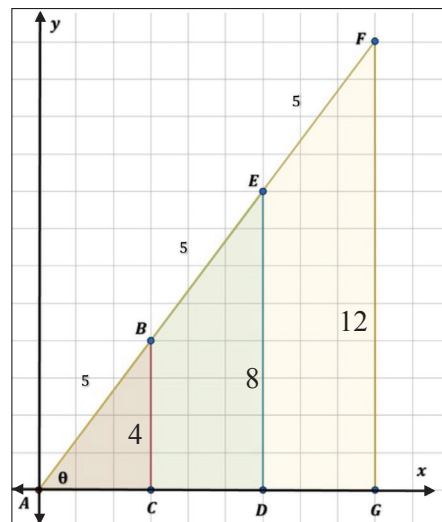


نظرة تاريخية:



فيثاغورث

أسس فيثاغورث مدرسته الشهيرة التي قدمت برهاناً للنظرية المعروفة باسمه (نظرية فيثاغورث) التي مازالت تُدرس في مدارسنا حتى اليوم؛ حيث تربط بين أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية، وقد أنشئت مدرسة فيثاغورث في جنوب إيطاليا عام (572 - 492) ق.م



لنعمل معاً لنستكشف



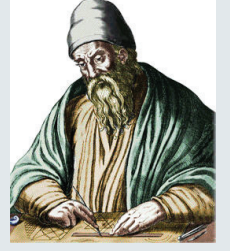
1. كل من المثلثات ABC , AED , AFG

مثلثات قائمة..... لماذا؟

2. كل من المثلثات ABC , AED , AFG

مثلثات متشابهة..... لماذا؟

نظرة تاريخية:



إقليدس

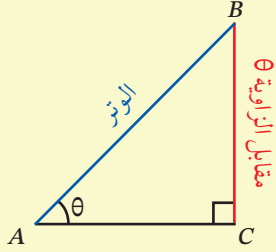
يعتبر إقليدس الأب المؤسس (للهندسة) وكانت لأعماله أهمية كبيرة في تاريخ الرياضيات وأهم مؤلفاته (كتاب أصول الهندسة)، وضع نظام البديهيات (المسلّمات) في الهندسة سميت الهندسة باسمه (الهندسة الإقليدية)، ومن البديهيات التي أسسها (مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلية = 180°)

$$\frac{BC}{AB} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{ED}{AE} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{FG}{AF} = \dots\dots\dots$$

من الرسم البياني السابق أكمل :
3.



نلاحظ أن : هذه النسب الثلاث متساوية في المثلثات الثلاثة وسوف نسمي هذه النسبة جيب الزاوية θ وتكتب $(\sin \theta)$

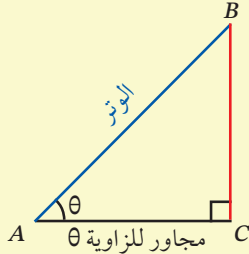
$$\sin \theta = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } \theta}{\text{طول الوتر}}$$

$$\frac{AC}{AB} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{AD}{AE} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{AG}{AF} = \dots\dots\dots$$

4.



نلاحظ أن : هذه النسب الثلاث متساوية في المثلثات الثلاثة وسوف نسمي هذه النسبة جيب تمام الزاوية θ وتكتب $(\cos \theta)$

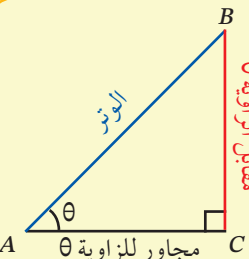
$$\cos \theta = \frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } \theta}{\text{طول الوتر}}$$

$$\frac{BC}{AC} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{ED}{AD} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{FG}{AG} = \dots\dots\dots$$

5.

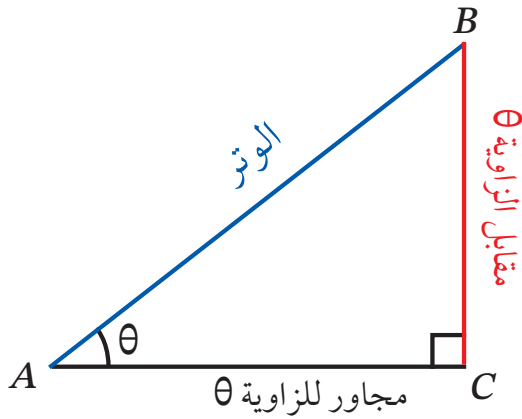


نلاحظ أن : هذه النسب الثلاث متساوية في المثلثات الثلاثة وسوف نسمي هذه النسبة ظل الزاوية θ وتكتب $(\tan \theta)$

$$\tan \theta = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } \theta}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } \theta}$$

ملخص ما سبق :

في أي مثلث قائم يكون :



$$\textcircled{1} \sin \theta = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } \theta}{\text{طول الوتر}}$$

$$\sin \theta = \frac{BC}{AB}$$

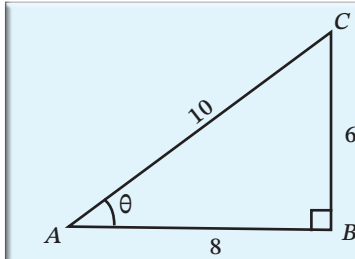
$$\textcircled{2} \cos \theta = \frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } \theta}{\text{طول الوتر}}$$

$$\cos \theta = \frac{AC}{AB}$$

$$\textcircled{3} \tan \theta = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } \theta}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } \theta}$$

$$\tan \theta = \frac{BC}{AC}$$

- هذه العلاقات الثلاث تسمى النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ
- هذه النسب تربط بين أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية وقياس الزاويتين الحادتين فيه .



في الشكل المقابل :

مثلث ABC قائم الزاوية في B
أوجد : $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$

مثال (1)

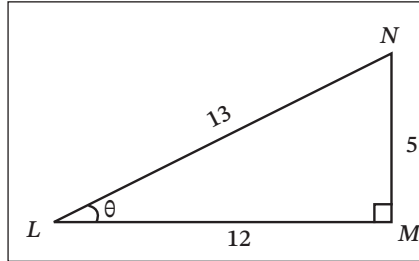
الحل :

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } \theta}{\text{طول الوتر}} \\ &= \frac{CB}{AC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } \theta}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } \theta} \\ &= \frac{CB}{AB} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } \theta}{\text{طول الوتر}} \\ &= \frac{AB}{AC} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

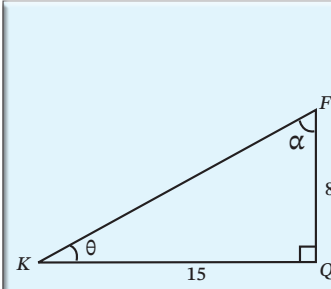
تحقق من فهمك (1)



في الشكل المقابل :

مثلث قائم الزاوية في M

أوجد : $\tan \theta$, $\cos \theta$, $\sin \theta$



في الشكل المرسوم :

المثلث FQK قائم الزاوية في Q ،

أوجد كلاً من :

- ① KF ② $\cos \theta$ ③ $\sin \alpha$
④ $\sin \theta$ ⑤ $\cos \alpha$

مثال (2)

⑥ ماذا تلاحظ بالنسبة إلى النسب المثلثية للزاويتين θ ، α

بتطبيق نظرية فيثاغورث

الحل:

① KF

$$(KF)^2 = (KQ)^2 + (QF)^2$$

$$KF = \sqrt{(15)^2 + (8)^2}$$

$$KF = 17$$

② $\cos \theta$

$$\cos \theta = \frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } \theta}{\text{طول الوتر}}$$

$$\cos \theta = \frac{15}{17}$$

④ $\sin \theta$

$$\sin \theta = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } \theta}{\text{طول الوتر}}$$

$$\sin \theta = \frac{8}{17}$$

③ $\sin \alpha$

$$\sin \alpha = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } \alpha}{\text{طول الوتر}}$$

$$\sin \alpha = \frac{15}{17}$$

⑤ $\cos \alpha$

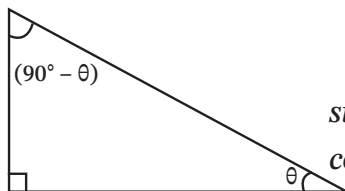
$$\cos \alpha = \frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } \alpha}{\text{طول الوتر}}$$

$$\cos \alpha = \frac{8}{17}$$

⑥ نلاحظ أن :

$$\sin \theta = \cos \alpha \Rightarrow \sin \theta = \cos(90^\circ - \theta)$$

$$\cos \theta = \sin \alpha \Rightarrow \cos \theta = \sin(90^\circ - \theta)$$



معلومة

α , β , γ

هي حروف لاتينية
تُستخدم للتعبير عن
الزوايا

α تُقرأ ألفا

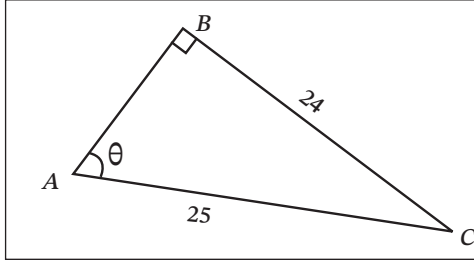
β تُقرأ بيتا

γ تُقرأ جاما

تذكروا

الزاويتان المتممتان
هما زاويتان مجموع
قياسهما يساوي 90° .

تحقق من فهمك (2)



في الشكل المقابل :

أوجد :

طول $\overline{AB}$, $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$

مقلوبات النسب المثلثية الأساسية

① مقلوب $\sin \theta$ هو $\frac{1}{\sin \theta}$ ويسمى $(\operatorname{cosecant} \theta)$ ويرمز له بالرمز $\operatorname{csc} \theta$

$$\operatorname{csc} \theta = \frac{1}{\sin \theta} : \sin \theta \neq 0 \Rightarrow \operatorname{csc} \theta = \frac{\text{طول الوتر}}{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } \theta}$$

② مقلوب $\cos \theta$ هو $\frac{1}{\cos \theta}$ ويسمى $(\operatorname{secant} \theta)$ ويرمز له بالرمز $\sec \theta$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} : \cos \theta \neq 0 \Rightarrow \sec \theta = \frac{\text{طول الوتر}}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } \theta}$$

③ مقلوب $\tan \theta$ هو $\frac{1}{\tan \theta}$ ويسمى $(\operatorname{cotangent} \theta)$ ويرمز له بالرمز $\cot \theta$

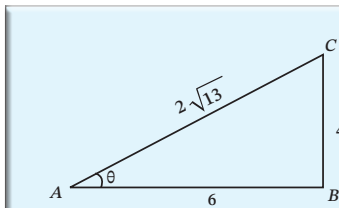
$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} : \tan \theta \neq 0 \Rightarrow \cot \theta = \frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } \theta}{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } \theta}$$

لاحظ أن : حاصل ضرب النسبة المثلثية الأساسية في مقلوبها يساوي 1

$$\textcircled{1} (\sin \theta)(\operatorname{csc} \theta) = 1 : \sin \theta \neq 0$$

$$\textcircled{2} (\cos \theta)(\sec \theta) = 1 : \cos \theta \neq 0$$

$$\textcircled{3} (\tan \theta)(\cot \theta) = 1 : \tan \theta \neq 0$$



في الشكل المرسوم :

① أثبت أن المثلث ABC قائم الزاوية في B

② أوجد : $\operatorname{csc} \theta$, $\sec \theta$, $\cot \theta$

مثال (3)

الحل: باستخدام عكس نظرية فيثاغورث

$$(1) (AB)^2 + (CB)^2 = (6)^2 + (4)^2 = 52$$

$$(AC)^2 = (2\sqrt{13})^2 = 52$$

$$\therefore (AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$$

∴ المثلث ABC قائم الزاوية في B

$$(2) \csc \theta = \frac{\text{طول الوتر}}{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } \theta}$$

$$\frac{2\sqrt{13}}{4} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

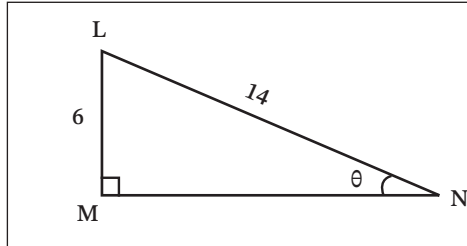
$$\sec \theta = \frac{\text{طول الوتر}}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } \theta}$$

$$= \frac{2\sqrt{13}}{6} = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

$$\cot \theta = \frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } \theta}{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } \theta}$$

$$= \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

تحقق من فهمك (3)



في الشكل المقابل أوجد :

(1) طول $\overline{MN}$

(2) $\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$

(3) $\sec \theta, \csc \theta, \cot \theta$

استخدام الآلة الحاسبة في إيجاد النسب المثلثية الأساسية ومقلوباتها

استخدم الآلة الحاسبة في إيجاد كل مما يلي :

(1) $\sin (53^\circ)$ (4) $\sec (30^\circ)$

(2) $\cos (58^\circ)$ (5) $\cot (75^\circ)$

(3) $\tan (68^\circ)$ (6) $\csc (42^\circ)$

(1) $\sin (53^\circ)$

$\sin (53) = 0.79863551$

(2) $\cos (58^\circ)$

$\cos (58) = 0.5299192642$

(3) $\tan (68^\circ)$

$\tan (68) = 2.475086853$

الحل:

تدرب



تذكروا

$$\sec 30^\circ = \frac{1}{\cos 30^\circ}$$

$$\cot 75^\circ = \frac{1}{\tan 75^\circ}$$

$$\csc 42^\circ = \frac{1}{\sin 42^\circ}$$

$$(4) \sec(30^\circ)$$

$$(\cos(30))^{x^{-1}} = 1.154700538$$

$$(5) \cot(75^\circ)$$

$$(\tan(75))^{x^{-1}} = 0.2679491924$$

$$(6) \csc(42^\circ)$$

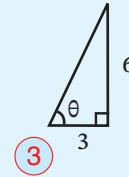
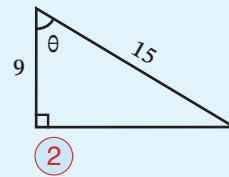
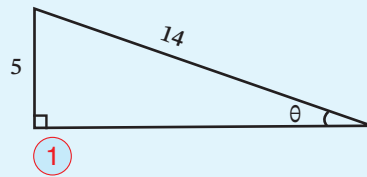
$$(\sin(42))^{x^{-1}} = 1.49447655$$

(7) للتعبير عن الزاوية 37.45° بالدرجة والدقيقة والثانية نتبع التالي :

$$37.45^\circ = 37.45^\circ = 37^\circ 27' 0''$$

إيجاد قياس زاوية باستخدام النسب المثلثية

أوجد قياس الزاوية θ في كل مما يلي :



مثال (4)

الحل:

لإيجاد قياس الزاوية θ نبحث عن العلاقة بين طولي الضلعين المعطيين من خلال النسب المثلثية الأساسية

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \sin \theta &= \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } \theta}{\text{طول الوتر}} \\ \sin \theta &= \frac{5}{14} \end{aligned}$$

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{5}{14}\right) \Rightarrow \theta = \text{shift} \sin^{-1} \left(\frac{5}{14} \right) = 20.92483243^\circ$$

$$\theta = 20.92483243^\circ \rightarrow \theta = 20^\circ 55' 29.4''$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \cos \theta &= \frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } \theta}{\text{طول الوتر}} \\ \cos \theta &= \frac{9}{15} \end{aligned}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{9}{15}\right) \Rightarrow \theta = \text{shift} \cos^{-1} \left(\frac{9}{15} \right) = 53.13010235^\circ$$

$$\theta = 53^\circ 7' 48.37''$$

تذكروا

$\sin^{-1}, \cos^{-1}, \tan^{-1}$

لا تمثل معكوس
 $\sin, \cos, \tan$.

$$\textcircled{3} \quad \tan \theta = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } \theta}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } \theta}$$

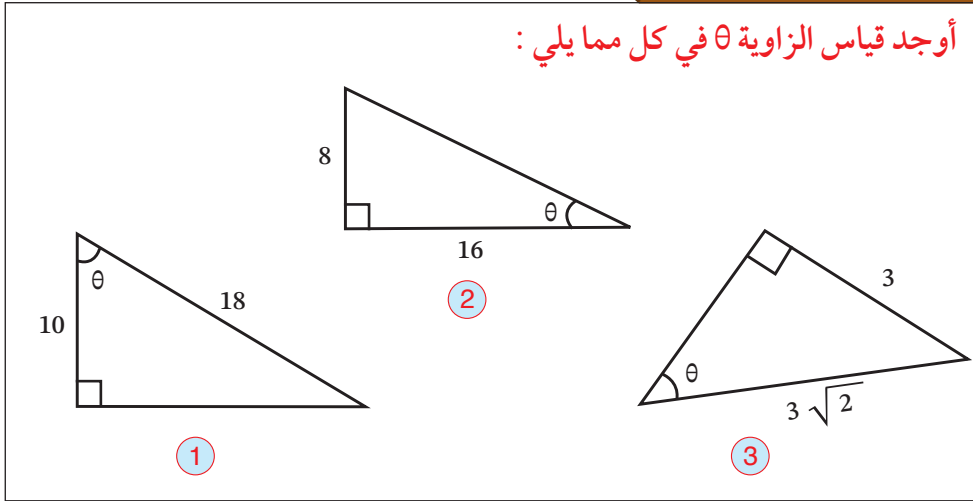
$$\tan \theta = \frac{6}{3}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{6}{3}\right), \theta = 63.43494882^\circ$$

$$\theta = 63^\circ 26' 5.82''$$

تحقق من فهمك (4)

أوجد قياس الزاوية θ في كل مما يلي :

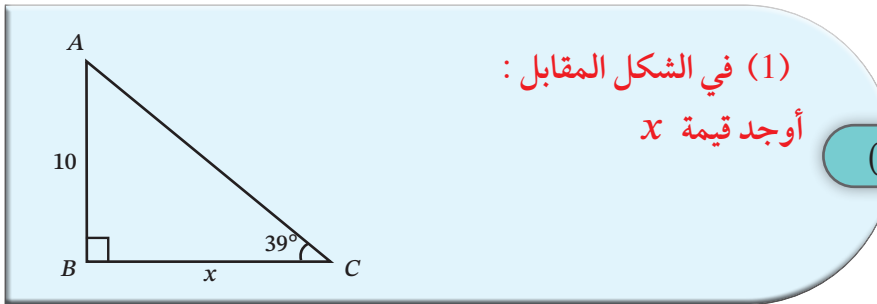


إيجاد طول ضلع في مثلث قائم باستخدام النسب المثلثية

(1) في الشكل المقابل :

أوجد قيمة x

مثال (5)



الحل:

$$\tan(39^\circ) = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } 39^\circ}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } 39^\circ} \quad \text{اختيار النسبة المثلثية الأساسية المناسبة}$$

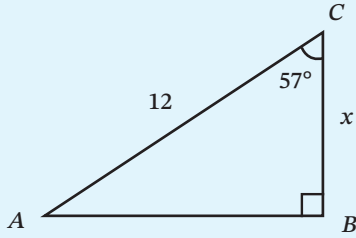
$$\tan(39^\circ) = \frac{10}{x} \quad \text{استخدام خواص التناسب}$$

$$x = \frac{10}{\tan(39^\circ)} \quad \text{استخدم الآلة الحاسبة في إيجاد العنصر المجهول } x$$

$$x \approx 12.35$$

(2) في الشكل المقابل :

أوجد قيمة x



الحل:

- اختيار النسبة المثلثية الأساسية المناسبة
 $\cos(57^\circ) = \frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } 57^\circ}{\text{طول الوتر}}$

$$\cos(57^\circ) = \frac{x}{12}$$

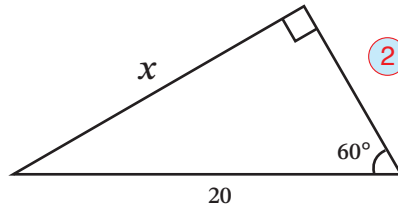
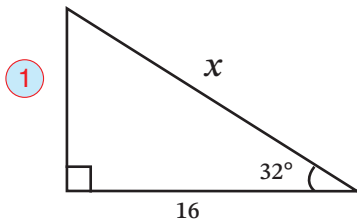
- استخدام خواص التناسب

$$x = (12) \cos(57^\circ)$$

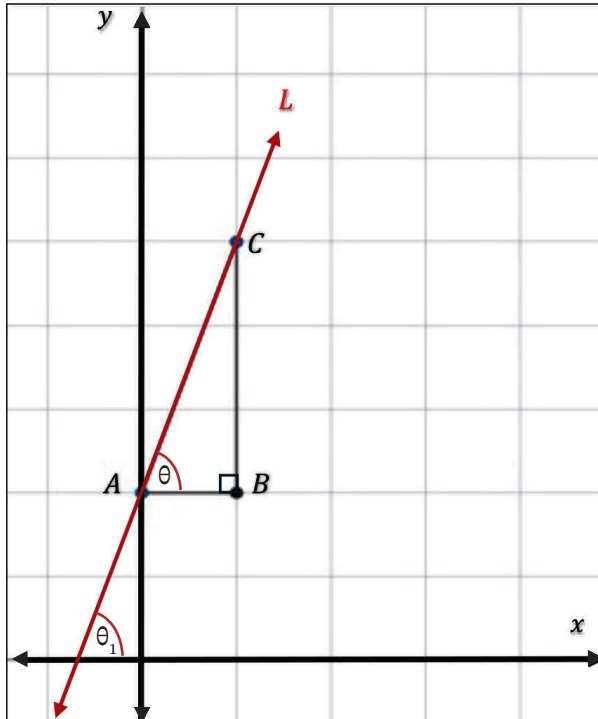
$$x \approx 6.54$$

- استخدم الآلة الحاسبة في إيجاد العنصر المجهول x

تحقق من فهمك (5)



استخدم النسب المثلثية في إيجاد قيمة x فيما يلي :



لنعمل معًا لنستكشف

عزيزي المتعلم :

التمثيل البياني للمستقيم L حيث $L: y=3x+2$ وحيث θ_1 هي الزاوية التي يصنعها المستقيم L مع الاتجاه الموجب لمحور السينات والنقطة A هي نقطة تقاطع المستقيم L مع محور الصادات.

رسم $\overline{AB} //$ محور السينات

فتكون $\theta_1 = \theta$ لماذا ؟

في المثلث ABC القائم الزاوية في B

$$\tan \theta = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan \theta = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan \theta = 3$$

$$L : y = m x + 2$$

$$L : y = 3 x + 2$$

وحيث إن معادلة المستقيم

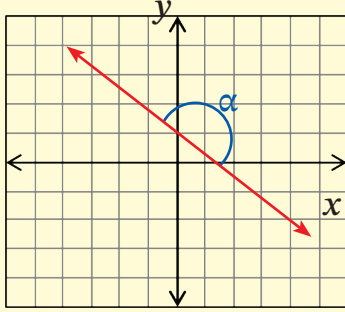
مما سبق نستطيع استنتاج أن : $m = \tan \theta$

أي إن ميل المستقيم يساوي ظل الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

معلومة:

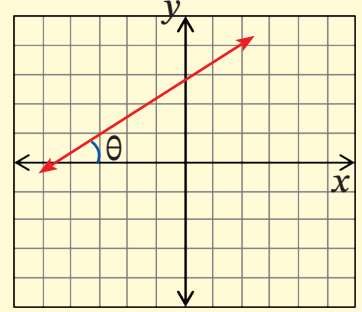
زاوية منفرجة (ميل سالب)

إذا كان المستقيم يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن ميل المستقيم يكون (سالباً).



زاوية حادة (ميل موجب)

إذا كان المستقيم يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن ميل المستقيم يكون (موجباً).



احسب قياس الزاوية الحادة الموجبة التي يصنعها المستقيم $L : y = \frac{1}{4} x + 6$ مع الاتجاه الموجب للمحور السيني .

مثال (6)

الحل:

$$\therefore L : y = \frac{1}{4} x + 6$$

$$\therefore m = \frac{1}{4}$$

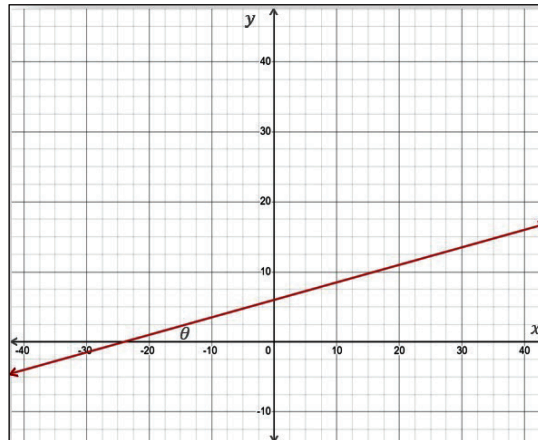
$$\therefore \tan \theta = m$$

$$\tan \theta = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1} \left(\frac{1}{4} \right)$$

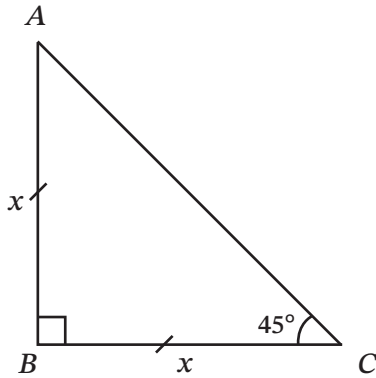
$$\theta = 14.03624347^\circ$$

$$\theta = 14^\circ 2' 10.48''$$



احسب قياس الزاوية الحادة الموجبة التي يصنعها المستقيم $L : y = x + 3$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة



لنستكشف

إذا كان المثلث ABC قائم الزاوية في B ، حيث $x = BC = AB$ ،

من متطابقة فيثاغورث $AC = \sqrt{(x)^2 + (x)^2}$

$$AC = \sqrt{2x^2}$$

$$AC = \sqrt{2} x$$

أكمل ما يلي :

$$\therefore \sin(45^\circ) = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } 45^\circ}{\text{طول الوتر}}$$

$$\therefore \sin(45^\circ) = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

$$\therefore \cos(45^\circ) = \frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } 45^\circ}{\text{طول الوتر}}$$

$$\therefore \cos(45^\circ) = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

$$\therefore \tan(45^\circ) = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } 45^\circ}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } 45^\circ}$$

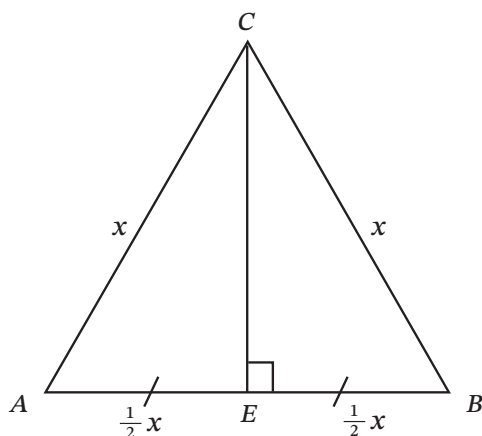
$$\therefore \tan(45^\circ) = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

مما سبق نستنتج النسب المثلثية للزاوية 45°

$$\sin(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \csc(45^\circ) = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sec(45^\circ) = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\tan(45^\circ) = 1 \Rightarrow \cot(45^\circ) = 1$$



$$CE = \sqrt{(x)^2 - \left(\frac{1}{2}x\right)^2}$$

$$CE = \sqrt{\frac{3}{4}x^2}$$

$$CE = \frac{\sqrt{3}}{2} x$$

$$\sin(60^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sin(60^\circ) = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos(60^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos(60^\circ) = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan(60^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan(60^\circ) = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} =$$

لنستكشف

إذا كان المثلث ABC متطابق الأضلاع

ورسم $\overline{CE} \perp \overline{AB}$ فإذا كان

$$AC = CB = AB = x$$

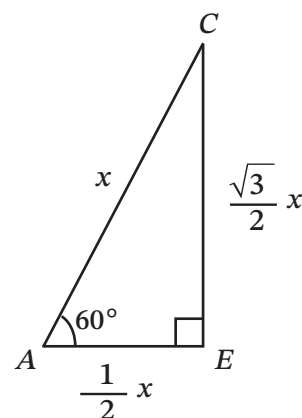
$$AE = EB = \frac{1}{2} x$$

من متطابقة فيثاغورث

في المثلث AEC قائم الزاوية في E

ومن هندسة الشكل $(m(\hat{A}) = 60^\circ)$

أكمل ما يلي :



مما سبق نستنتج النسب المثلثية للزاوية 60°

$$\sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \csc(60^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$$

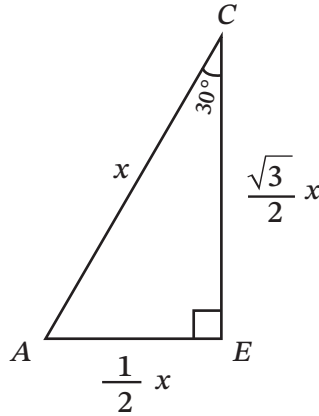
$$\cos(60^\circ) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sec(60^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan(60^\circ) = \sqrt{3} \Rightarrow \cot(60^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$$

هل تعلم :

وضعت جداول للنسب المثلثية منذ أكثر من 1500 عام وكانت هذه الجداول تستخدم في الفلك وكان أول من استخدم حساب المثلثات في علم الفلك هو مينلاوس عام 100 ميلادية ، وبعد ذلك اخترعت الآلة الحاسبة التي أنهت استخدام هذه الجداول.

لنستكشف



من خلال استكشف السابق نستطيع استنتاج التالي :

$$\sin(30^\circ) = \frac{\frac{1}{2}x}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\cos(30^\circ) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

مما سبق نستنتج النسب المثلثية للزاوية 30°

$$\sin(30^\circ) = \frac{1}{2} \Rightarrow \csc(30^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sec(30^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan(30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cot(30^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$$

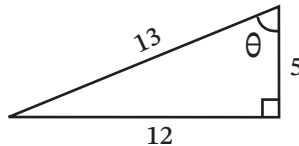
أتدرب وأحل المسائل

أولاً - البنود الموضوعية :

■ في البنود من (1-8) اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة:

(1) في المثلث ABC القائم الزاوية في B يكون $\sec(\hat{A}) \cos(\hat{A}) = 1$ حيث $\cos(\hat{A}) \neq 0$ (a) (b)

(2) في الشكل المرسوم :



$\sin(90^\circ - \theta)$ يساوي $\frac{5}{13}$

(a) (b)

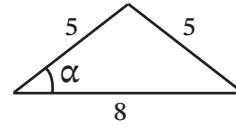
(3) في المثلث ABC القائم الزاوية في B يكون $\sin(\hat{C}) \cdot \cot(\hat{C}) = \cos(\hat{C})$ حيث $\sin(\hat{C}) \neq 0$ (a) (b)

(4) في المثلث ABC القائم الزاوية في B يكون $AC = (AB) \cos(\hat{C})$ (a) (b)

(5) إذا كان ABC مثلث قائم الزاوية في B فإن $\cos(\hat{C}) \cdot \tan(\hat{C}) = \sin(\hat{C})$ حيث $\cos(\hat{C}) \neq 0$ (a) (b)

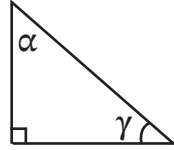
(6) قياس الزاوية التي يصنعها المستقيم $y-x=6$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هي 45° (a) (b)

(a) (b)



(7) في المثلث المرسوم :

$$\sin(\alpha) = \frac{5}{8}$$



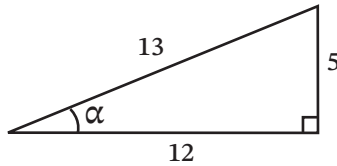
(8) في المثلث المرسوم :

$$\sin(\gamma) = \cos(\alpha)$$

(a) (b)

■ في البنود من (1-6) ظلل دائرة الإجابة الصحيحة :

(1) في الشكل المرسوم $\sin(\alpha)$ تساوي :



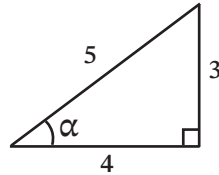
(a) $\frac{5}{12}$

(b) $\frac{5}{13}$

(c) $\frac{12}{13}$

(d) $\frac{12}{5}$

(2) في الشكل المرسوم قيمة $\frac{\sin(\alpha) + \cos(\alpha)}{\sin(\alpha) - \cos(\alpha)}$ تساوي :



(a) 7

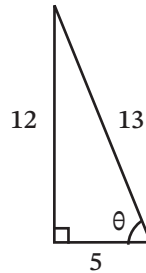
(b) -7

(c) 2

(d) -1

(3) في المثلث المرسوم :

$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta$ يساوي :



(a) -1

(b) 0

(c) 1

(d) $\frac{17}{13}$

(4) قيمة $\sin(30^\circ) \cos(60^\circ) + \cos(30^\circ) \sin(60^\circ)$ تساوي :

(a) 1

(b) -1

(c) 0

(d) $\frac{1}{2}$

(5) قياس الزاوية التي يصنعها المستقيم $L: y=5+\sqrt{3}x$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هي :

(a) 30°

(b) 60°

(c) 45°

(d) 135°

(6) إذا كان ABC مثلث قائم الزاوية في B فإن قيمة $\cos(90^\circ - A)$ هي :

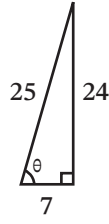
(a) $\frac{BC}{AC}$

(b) $\frac{BC}{AB}$

(c) $\frac{AB}{BC}$

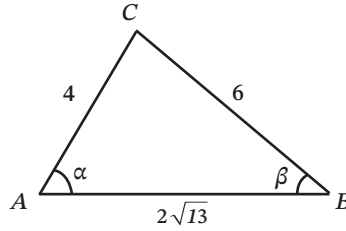
(d) $\frac{AB}{AC}$

ثانياً - أسئلة المقال:



- (1) في الشكل المرسوم :
أوجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية (θ)

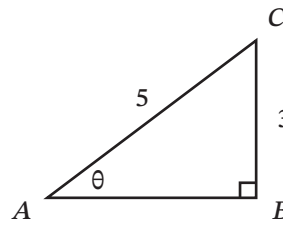
- (2) في الشكل المرسوم :



- (1) أثبت أن المثلث ACB قائم الزاوية في C

- (2) أوجد : $\cos(\alpha)$, $\sin(\beta)$

- (3) ماذا تلاحظ ؟

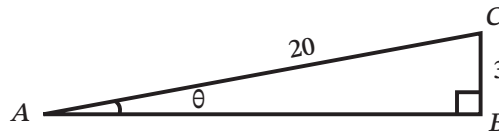


- (3) في الشكل المرسوم :

- (1) أوجد طول $(\overline{AB})$

- (2) $\sec \theta$

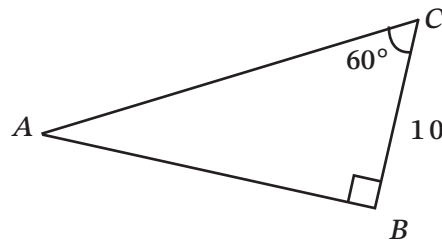
- (3) $\csc \theta$



- (4) في الشكل المرسوم :

- (1) أوجد $m(\theta)$

- (2) AB



- (5) في الشكل المرسوم :

- (1) أوجد $m(\hat{A})$

- (2) طول $(\overline{AC})$

- (3) طول $(\overline{AB})$

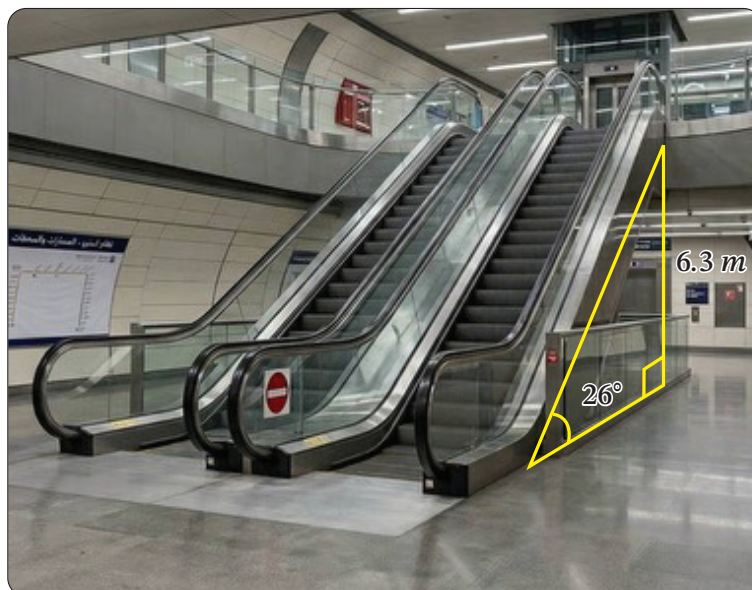
- (6) منحدر التزلج المائي يشكل زاوية مع سطح الماء قياسها 15° وأعلى نقطة على المنحدر على ارتفاع يساوي $1.524m$ ما طول منحدر التزلج المائي ؟

- (7) أوجد قيمة $\cos(45^\circ) \cos(45^\circ) - \sin(45^\circ) \sin(45^\circ)$

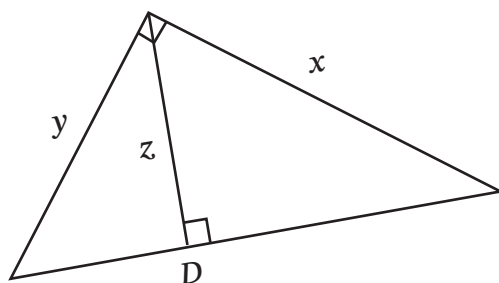
- (8) أوجد قيمة $\sec^2(45^\circ) + \tan(45^\circ) + \sin(30^\circ)$



(9) سلم كهربائي متحرك موجود في إحدى محطات مترو الانفاق إذا كان ارتفاع قمة السلم عن قاعدته 6.3 m وكان يميل على الأفق بزاوية قياسها 26° . أوجد طول السلم الكهربائي.



مهارات تفكير عليا



(1) في الشكل المقابل :
استخدم النسب المثلثية لإثبات أن :

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{z^2}$$

(2) إذا كان ACB مثلث قائم الزاوية أطوال أضلاعه a ، $a + 7$ ، $a + 8$ حيث $a \geq 5$ أوجد قياس أكبر زواياه الحادة .

(3) بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد : $\tan(15^\circ)$

فكرة الدرس:



حل المثلث بإيجاد :

- قياسات زوايا المثلث القائم
- أطوال أضلاع المثلث القائم

المصطلحات:



Solving Triangles

حل المثلث

مسألة الدرس:

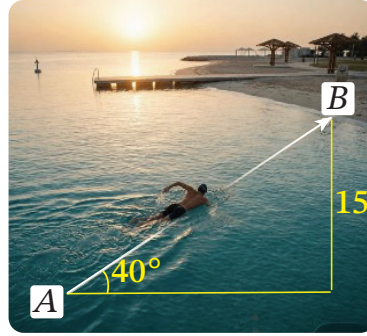


تعلمنا
فيما سبق

النسبة المثلثية الأساسية
ومقلوباتها

ملحوظة

غالبًا ما تعطى ثلاثة
عناصر في المثلث
أحدهما على الأقل طول
أحد الأضلاع.



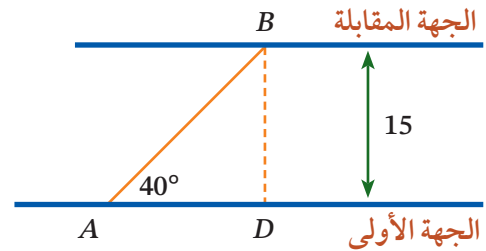
حاول أحد السباحين في منطقة الخيران الانتقال من النقطة A إلى النقطة B كما في الشكل. حيث جرفه التيار، ما المسافة التي قطعها السباح؟
يمكننا الإجابة عن هذا السؤال باستخدام النسب المثلثية التي سبق دراستها.



$$\sin(40^\circ) = \frac{15}{AB}$$

$$AB = \frac{15}{\sin(40^\circ)} \approx 23.336$$

أي قطع حوالي 23 مترًا



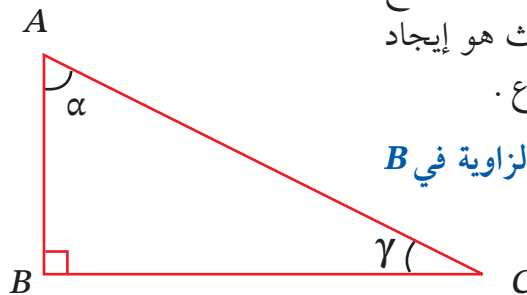
حل المثلث القائم الزاوية

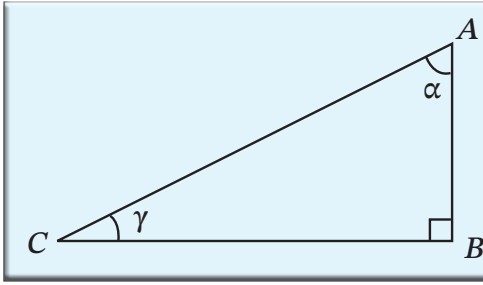
نعلم أن للمثلث ستة عناصر وهي ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا ، والمقصود بحل المثلث هو إيجاد العناصر المجهولة من الزوايا والأضلاع .

في الشكل المقابل المثلث ABC قائم الزاوية في B

الأضلاع: AB, BC, AC

الزوايا: α, β, γ





حل المثلث ABC القائم الزاوية في B
إذا علم أن : $AB=3cm$, $BC=4cm$

مثال (1)

الحل:

سوف نقوم بإيجاد جميع العناصر المجهولة وهي : AC, α, γ

∴ المثلث ABC قائم الزاوية في B
من نظرية فيثاغورث نوجد طول (AC)

$$\therefore (AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

$$AC = \sqrt{(3)^2 + (4)^2}$$

$$= 5$$

$$\tan \gamma = \frac{3}{4}$$

$$\gamma \approx 36.87^\circ$$

$$\alpha = 90^\circ - 36.87^\circ$$

$$= 53.13^\circ$$

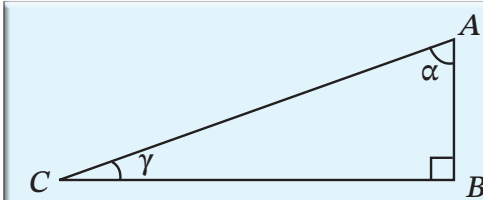
من خلال النسب المثلثية

$$\gamma = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$

لماذا ؟

تحقق من فهمك (1)

حل المثلث ABC القائم الزاوية في C حيث : $BC=15cm$, $AC=12cm$



حل المثلث ABC القائم الزاوية في B
إذا علم أن : $AB=8cm$, $\alpha=71^\circ$

مثال (2)

الحل:

سوف نقوم بإيجاد جميع العناصر المجهولة وهي : CA, CB, γ

$$\gamma = 90^\circ - 71^\circ$$

$$= 19^\circ$$

$$\tan(71^\circ) = \frac{CB}{AB}$$

$$\tan(71^\circ) = \frac{CB}{8}$$

$$CB = 8 \tan(71^\circ)$$

$$CB \approx 23.23 \text{ cm}$$

استخدام النسب المثلثية للزاوية

$$\cos(71^\circ) = \frac{AB}{CA}$$

$$\cos(71^\circ) = \frac{8}{CA}$$

$$CA = \frac{8}{\cos(71^\circ)}$$

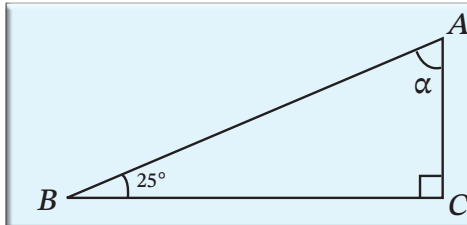
$$\therefore CA \approx 24.57 \text{ cm}$$

من خلال التناسب

هل يمكن إيجاد طول $\overline{CA}$ بطريقة أخرى ؟

تحقق من فهمك (2)

حل المثلث ABC القائم الزاوية في B حيث : $AB=12\text{cm}$, $m(\hat{A})=42^\circ$



حل المثلث ABC القائم الزاوية في C

إذا علم أن : $BA=40\text{cm}$, $m(\hat{B})=25^\circ$

مثال (3)

الحل:

سوف نقوم بإيجاد جميع العناصر المجهولة وهي : AC, BC, α

$$\alpha = 90^\circ - 25^\circ$$

$$= 65^\circ$$

$$\cos(25^\circ) = \frac{BC}{BA}$$

$$\cos(25^\circ) = \frac{BC}{40}$$

$$BC = 40 \cos(25^\circ)$$

$$\therefore BC \approx 36.25 \text{ cm}$$

$$\sin(25^\circ) = \frac{AC}{BA}$$

$$\sin(25^\circ) = \frac{AC}{40}$$

$$AC = 40 \sin(25^\circ)$$

$$\therefore AC \approx 16.90 \text{ cm}$$

تحقق من فهمك (3)

حل المثلث ABC القائم الزاوية في C إذا علم أن : $AC=20\text{cm}$, $m(\hat{B})=75^\circ$

فكر معي

في الشكل المقابل :

حل المثلث ABC

قام فهد وإبراهيم بالتفكير بحل السؤال

طريقة (فهد)

$$\alpha = 90^\circ - 35^\circ$$

$$= 55^\circ$$

$$\tan(35^\circ) = \frac{7}{BC}$$

$$BC = \frac{7}{\tan(35^\circ)}$$

$$BC \approx 10$$

هل تؤيد تفكير فهد أم تفكير إبراهيم ؟

دلل على إجابتك .

طريقة (إبراهيم)

في حال وجود طولي ضلعين في المثلث القائم وزاوية يجب التأكد أولاً من صحة قياس الزاوية بمعلومية الضلعين :

$$\sin(35^\circ) = 0.5735764364$$

$$\frac{7}{10} = 0.7$$

$$\sin(35^\circ) \neq \frac{7}{10}$$

∴ لا يمكن حل السؤال

أولاً - البنود الموضوعية :

أندرب وأحل المسائل

■ في البنود من (1-5) ظلل دائرة الإجابة الصحيحة :

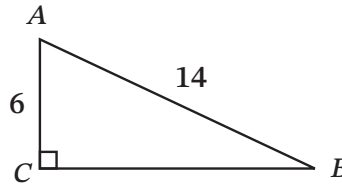
(1) في الشكل المرسوم $m(\hat{B})$ تساوي تقريباً :

(a) 31°

(b) 20°

(c) 27°

(d) 25°



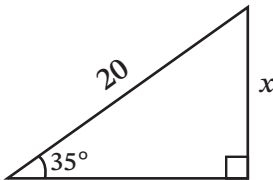
(2) في الشكل المقابل قيمة x تساوي تقريباً :

(a) 13

(b) 11.5

(c) 14

(d) 15



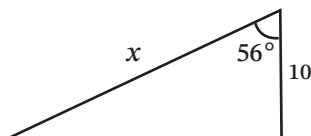
(3) في الشكل المقابل قيمة x تساوي تقريباً :

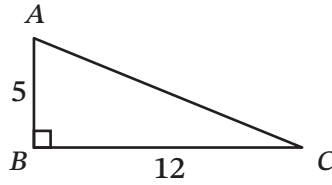
(a) 15

(b) 16

(c) 18

(d) 14





(4) في الشكل المقابل $m(\hat{C})$ تساوي:

- (a) 22.6° (b) 25°
(c) 32° (d) 26.4°

(5) في الشكل المقابل:

ABC مثلث قائم الزاوية في B ، إذا كان:

$AB = 8 \text{ cm}$ ، $\sin(\hat{C}) = 0.4$ ، فإن AC يساوي:

- (a) 9 cm (b) 10 cm (c) 12 cm (d) 20 cm

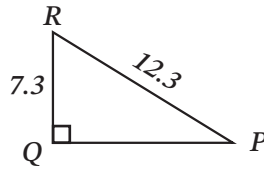
ثانياً - أسئلة المقال:

(1) حل المثلث ABC القائم الزاوية في B ، إذا كان $m(\hat{C}) = 60^\circ$ ، $AC = 15 \text{ cm}$

(2) حل المثلث ABC القائم الزاوية في A ، إذا كان $m(\hat{B}) = 32^\circ$ ، $CB = 12 \text{ cm}$

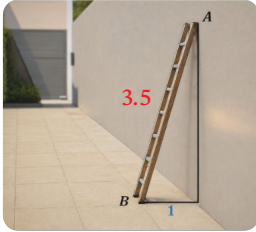
(3) حل المثلث RQP القائم الزاوية في Q ، إذا كان $QR = 12 \text{ cm}$ ، $PQ = 5 \text{ cm}$

(4)



(4) في الشكل المقابل حل المثلث RQP

(5) يستند سلم AB طوله 3.5 مترًا بطرفه A على حائط عمودي وبطرفه B على الأرض أفقية ويبعد مترًا واحدًا عن الحائط فأوجد:



(1) بعد الطرف A عن الأرض

(2) قياس زاوية ميل السلم على الأرض

(3) قياس زاوية ميل السلم على الحائط

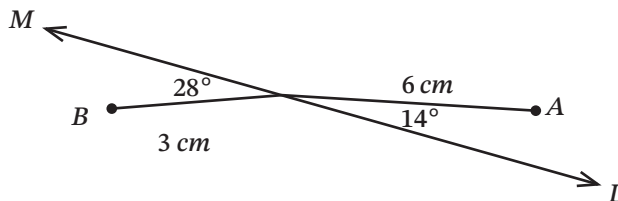
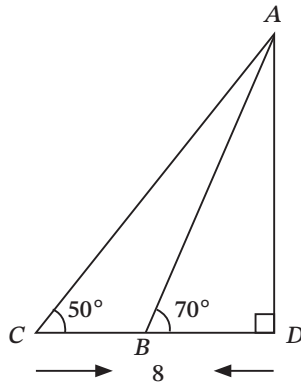
مهارات تفكير عليا



■ في الشكل المقابل:

أوجد مساحة المثلث ABC إلى أقرب جزء

من عشرة علمًا بأن $CD = 8 \text{ cm}$



تحدي الأذكياء



■ أيهما الأقرب إلى المستقيم (LM) ؟

هل النقطة A أم النقطة B ؟

زاوية الارتفاع - زاوية الانخفاض Angle of Elevation and Depression

فكرة الدرس:



توظيف حل المثلث القائم في دراسة زاوية الارتفاع - زاوية الانخفاض.

المصطلحات:



Angle of Elevation

زاوية الارتفاع

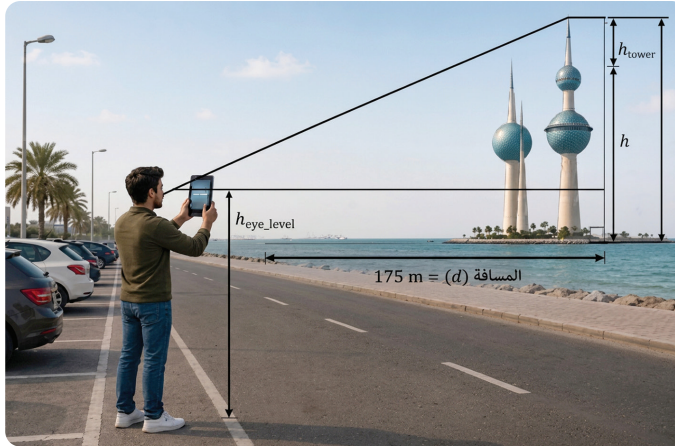
Angle of Depression

زاوية الانخفاض

مسألة الدرس:



قياس زاوية شموخ أبراج الكويت



تخيل أنك تقف على شاطئ الخليج العربي ، وتحديدًا على مسافة 175m من قاعدة البرج الرئيسي (الأكبر) ، ورفعت رأسك لتنظر إلى قمة البرج ، فاستخدمت تطبيق قياس الزوايا من الهاتف وجدت أن قياس الزاوية من مستوى الخط الأفقي وخط النظر المتجه إلى قمة البرج هي 62° .

كيف نحسب ارتفاع البرج ؟

ماذا لو كان شخصًا آخر في أعلى البرج ينظر إليك هل يوجد زاوية أخرى هناك ؟

زاوية الارتفاع Angle of Elevation

هي الزاوية المحصورة بين الخط الأفقي وبين خط النظر المتجه إلى الأعلى نحو الشيء المراد رصده .

تعلّمنا فيما سبق

- نظرية فيثاغورث
- النسب المثلثية
- الأساسية ومقلوباتها

معلومة

أبراج الكويت



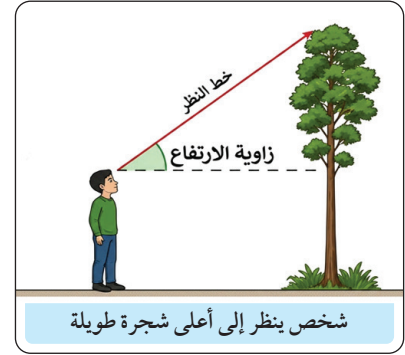
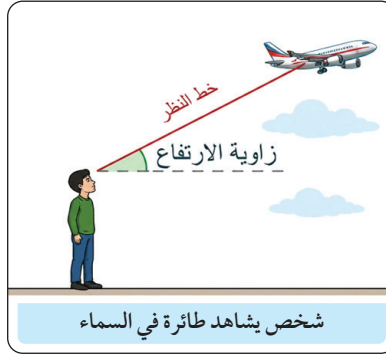
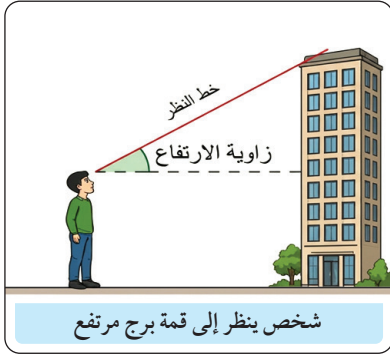
أبراج الكويت هي من أبرز المعالم السياحية والحضارية في دولة الكويت وتتميز بتصميمها المعماري الفريد الذي يدمج بين العمارة الإسلامية التقليدية والتقنيات الحديثة، لتعبر عن النهضة والتطور.

افتتحت رسميًا في 1 مارس 1979 نالت الأبراج تقديرًا عالميًا وحصلت على جائزة آغا خان عام 1980 نظرًا للدمج الإبداعي بين الهندسة الحديثة والقيم الثقافية.

ملحوظة

يهمل طول الشخص الراصد في جميع الأسئلة.

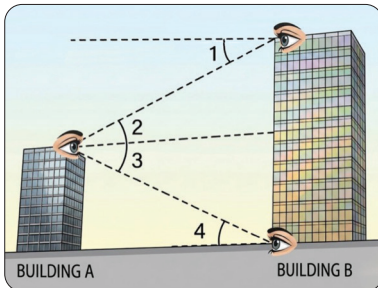
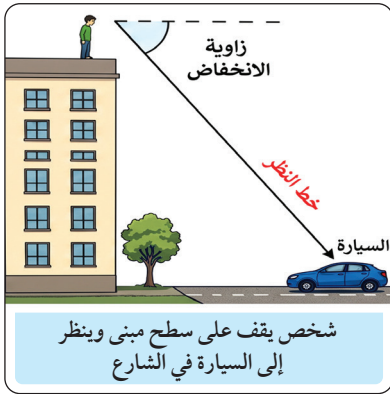
أمثلة حياتية:



زاوية الانخفاض Angle of Depression

هي الزاوية المحصورة بين الخط الأفقي وبين خط النظر المتجه إلى الأسفل نحو الشيء المراد رصده.

أمثلة حياتية:

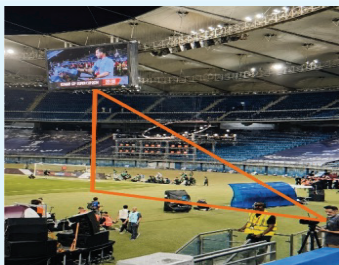


صنف الزوايا الميمنة في الشكل من حيث كونها زاوية ارتفاع أو زاوية انخفاض ...

تدرب

(a) $\hat{1}$ (b) $\hat{2}$

(c) $\hat{3}$ (d) $\hat{4}$



يقف أحد المشجعين في ساحة ملعب استاد جابر الأحمد الدولي ويشاهد شاشة الملعب المعلقة ، إذا كانت المسافة الأفقية بينه وبين نقطة بعد الشاشة عن الأرض 30 m وكانت زاوية الارتفاع إلى أعلى الشاشة 40° . أوجد إلى أقرب متر ارتفاع الشاشة عن سطح الأرض .

مثال (1)

الحل:

نفرض أن LM هو ارتفاع الشاشة عن سطح الأرض
لإيجاد ارتفاع الشاشة عن سطح الأرض نبحت عن النسبة المثلثية المناسبة التي
تجمع بين الضلع المعلوم (المجاور) والضلع المجهول (المقابل) للزاوية 40°

$$\tan(40^\circ) = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } 40^\circ}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } 40^\circ}$$

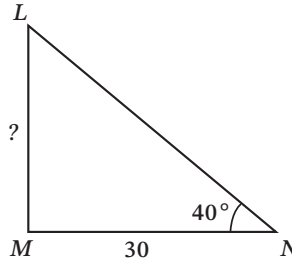
$$\tan(40^\circ) = \frac{LM}{MN}$$

$$\tan(40^\circ) = \frac{LM}{30^\circ}$$

$$LM = 30^\circ \tan(40^\circ)$$

$$= 25.17299 \quad \text{باستخدام الآلة الحاسبة}$$

ارتفاع الشاشة عن سطح الأرض في تلك النقطة تساوي $25m$



تحقق من فهمك (1)

أثناء تحية العلم ينظر فهد إلى قمة سارية العلم بزاوية ارتفاع مقدارها 85° ، فإذا كان ارتفاع سارية العلم هي $5m$ كم يبلغ بعد فهد عن قاعدة السارية ؟

يقف زائر أمام مبنى المركز العلمي ، ويبعد $25m$ عن قاعدة هيكل "البوم" الخشبي الكبير .. إذا كان ارتفاع قمة الشراع عن الأرض هو $20m$ احسب قياس زاوية الارتفاع التي يشكلها نظر الزائر إلى قمة الشراع

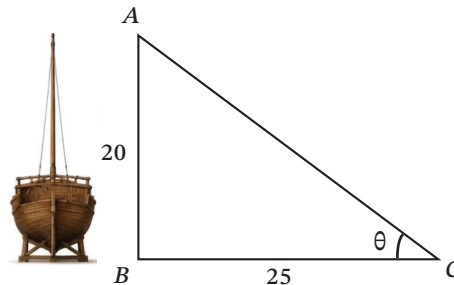
مثال (2)

لإيجاد قياس زاوية الارتفاع التي يشكلها نظر الزائر مع قمة الشراع نستخدم النسبة المثلثية التي تجمع بين الضلعين المعلومين (المقابل والمجاور) .

$$\tan(\theta) = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan(\theta) = \frac{20}{25}$$

$$\tan^{-1}(0.8) \approx 38.65980825$$



قياس زاوية الارتفاع التي يشكلها نظر الزائر تساوي $38^\circ 39' 35.31''$

معلومة i

هيكل البوم الخشبي الكبير في المركز العلمي
"فتح الخير"



معلومة i

الأرنب العربي أو أرنب الصحراء البري يتميز بجسم نحيل، وهو صغير الحجم مقارنة بالأنواع الأوروبية يمتلك أذناً طويلة جداً تساعد على تبريد حرارة جسمه وتوزيعها عبر الأوعية الدموية في حر الصيف، لونه رملي أو بني فاتح يمتزج تماماً مع طبيعة التربة الصحراوية، لتوفير تمويه مثالي ضد المفترسات، وباطن أقدامه مغطى بخصلات كثيفة من الشعر، لتسهيل ركضه السريع فوق الرمال الناعمة دون غرس .



تحقق من فهمك (2)

يقف شخص على مسافة 1000 m من قاعدة مبنى ارتفاعه 300 m ما قياس زاوية الارتفاع التي يكونها مع قمة المبنى ؟

في محمية صباح الأحمد الطبيعية يقف موظف الرصد فوق برج مراقبة خشبي ارتفاعه 12 m شاهد الموظف " أرنب عربي " يقترب من شجيرة صغيرة فوجد أن زاوية انخفاض موقع الأرنب تساوي 40° ، أوجد بعد الأرنب لأقرب متر عن قاعدة برج المراقبة في تلك اللحظة ؟

مثال (3)

$$m(\angle NQP) = m(\angle QPR) = 40^\circ$$

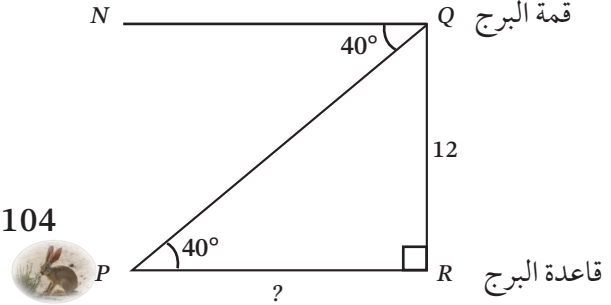
بالتبادل والتوازي

الحل:

$$\tan(40^\circ) = \frac{QR}{RP}$$

$$\tan(40^\circ) = \frac{12}{RP}$$

$$RP = \frac{12}{\tan(40^\circ)} = 14.30104$$



يبعد الأرنب عن قاعدة البرج مسافة قدرها 14 m

تحقق من فهمك (3)

من أعلى برج ارتفاعه 45 m عن سطح الأرض رصد شخص سيارة بزاوية انخفاض 55° احسب المسافة بين السيارة وقاعدة البرج لأقرب متر.



رصد قارب من قمة منارة جزيرة قاروه ارتفاعها 14 m ، فوجد أن قياس زاوية انخفاضه $34^\circ 25'$. أوجد إلى أقرب متر البعد بين القارب وقمة المنارة .

مثال (4)

$$m(\angle DMH) = m(\angle MHL) = 34^\circ 25'$$

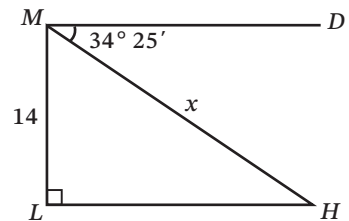
بالتبادل والتوازي

الحل:

$$\sin(34^\circ 25') = \frac{ML}{MH}$$

$$\sin(34^\circ 25') = \frac{14}{x}$$

$$x = \frac{14}{\sin(34^\circ 25')} = 24.76968636$$



بعد القارب عن قمة المنارة مسافة قدرها 25 m

قاس بحار زاوية انخفاض سفينة من أعلى نقطة على قمة منارة في جزيرة أم المرادم ارتفاعها 23 m فوجد أنها 39° ، أوجد بعد السفينة عن قمة المنارة لأقرب متر .

أدرب وأحل المسائل

أولاً - البنود الموضوعية:

في البنود من (1-4) ظلل الإجابة الصحيحة :

(1) من نقطة على سطح الأرض تبعد 40 m عن قاعدة برج قياست زاوية ارتفاع قمة برج فكانت 63° ، فإن ارتفاع البرج لأقرب متر يساوي :

- (a) 20.38 m (b) 78.5 m
(c) 31 m (d) 36 m

(2) طائرة ورقية طول خيطها 34 m وكانت زاوية ارتفاع الطائرة 70° فإن ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض لأقرب متر يساوي :

- (a) 36.18 m (b) 10 m
(c) 28 m (d) 32 m

(3) يسير شخص في طريق منحدر وعندما قطع الشخص مسافة 60 m وصل الشخص لنقطة ارتفاعها عن سطح الأرض 6 m ، فإن زاوية ارتفاع ميل الطريق على سطح الأرض تقريباً :

- (a) 5.74° (b) 89.43°
(c) 7° (d) 9°

(4) برج طوله 12 m يلقي ظلًا على الأرض طوله 8 m فإن قياس زاوية ارتفاع الشمس عندئذ لأقرب درجة تساوي :

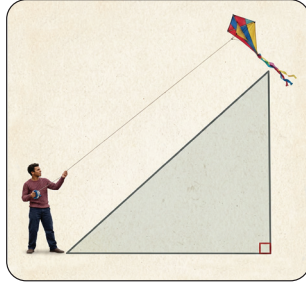
- (a) 33.69° (b) 51°
(c) 48° (d) 56.30°

ثانيًا - أسئلة المقال:

- (1) لقياس ارتفاع أحد المجمعات قام إبراهيم برصد قمة المجمع من خلال جهاز الرصد ، فوجد أن قياس زاوية الارتفاع 40° ، إذا كان الجهاز يبعد عن قاعدة المجمع مسافة 18 m احسب ارتفاع المجمع .
- (2) تحلق مروحية فوق محمية صباح الأحمد على ارتفاع 250 m ، وتواكبها على الأرض سيارة من حرس المحمية ... شاهد طيار المروحية قطيعا من الغزلان بزاوية انخفاض قياسها 48° ما المسافة بين المروحية والقطيع في تلك اللحظة ؟ علما بأن السيارة تحت المروحية مباشرة .
- (3) شخص يقف على ارتفاع 60 m في إحدى العمارات، شاهد موكبًا بزاوية انخفاض قياسها 50° ما المسافة بين قاعدة العمارة والموكب لأقرب متر ؟
- (4) من نقطة على سطح الأرض قيست زاوية ارتفاع طائرة فوجد أنها $54^\circ 12'$ إذا كان بعد النقطة عن موقع الطائرة 310 m ، فما ارتفاع الطائرة ؟



(5)



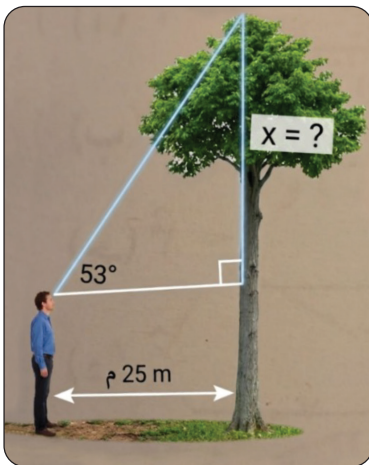
- (5) من نقطة على سطح الأرض تبعد 300 m عن قاعدة برج عمودي وجد أن قياس زاوية ارتفاعه هي 40° . أوجد ارتفاع البرج عن سطح الأرض .
- (6) من نقطة على سطح الأرض وجد أن قياس زاوية ارتفاع طائرة ورقية $48^\circ 12'$ إذا كانت مربوطة بخيط مشدود طوله 18 m أوجد ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض لأقرب متر .

مهارات تفكير عليا



في الشكل المقابل :

- أوجد قيمة x مقربا الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة
- ثم أوجد ارتفاع الشجرة إذا كان طول الرجل 170 cm



الدوال المثلثية (الدوال الدائرية) Trigonometric Functions

فكرة الدرس:



- الزاوية الموجهة
- القياس الستيني والقياس الدائري
- الوضع القياسي للزاوية الموجهة
- دائرة الوحدة
- القياس الموجب والسالب للزاوية الموجهة
- النقطة المثلثية

المصطلحات:



- | | | | |
|---|------------------|-------------------|------------------|
| 1. زاوية موجهة | Directed Angle | 2. القياس الستيني | Degree Measure |
| 3. زاوية ربعية | Quadrantal Angle | 4. القياس الدائري | Circular Measure |
| 5. النقطة المثلثية | Translated point | 6. دائرة الوحدة | Unite Circle |
| 7. وضع قياسي للزاوية الموجهة Angle in standard position | | | |

فيما سبق تعلمنا

- النسبة والتناسب
- تعريف الزاوية
- النسب المثلثية

Directed Angle (3-4-a) الزاوية الموجهة

مسألة الدرس:



باستخدام المثلث القائم والخواص الهندسية والنسب المثلثية أوجد :

① $\sin(45^\circ)$ ② $\cos(30^\circ)$

هل يمكن إيجاد : $\sin(90^\circ)$ ؟

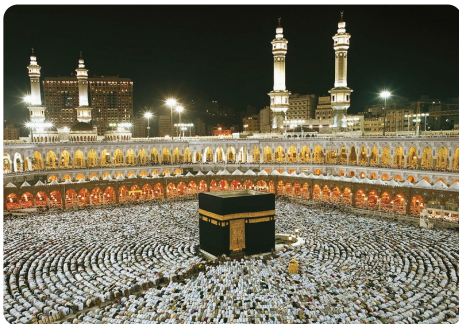
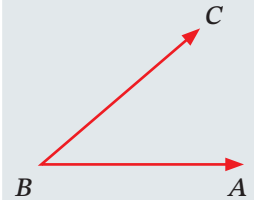


لا يمكن إيجاد $\sin(90^\circ)$ لماذا ؟

باستخدام المثلث القائم والنسب المثلثية والخواص الهندسية كما تطرقنا له في بند (3-1) وهذا يجعلنا نلجأ إلى المسار الثاني الذي يعتمد على مفهوم (دائرة الوحدة)

تذكروا

الزاوية: هي اتحاد شعاعين
لهما نقطة بداية واحدة



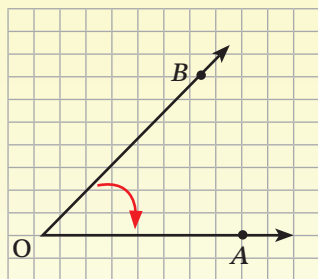
قال تعالى: ﴿وَمِنْ حَيْثُ خَرَجْتَ فَوَلِّ وَجْهَكَ
شَطْرَ الْمَسْجِدِ الْحَرَامِ وَحَيْثُ مَا كُنْتُمْ ...﴾

سورة البقرة 150

يتجه المسلمون في جميع أنحاء العالم نحو
الكعبة المشرفة لأداء فريضة الصلاة .

أيضاً نَسْمَعُ في نشرة الأخبار عن حالة الطقس فيكون **اتجاه** الرياح شمالية غربية باردة أو جنوبية رطبة .
نلاحظ أنه : في كل حالة من الحالات السابقة نذكر **الاتجاه**

في الزاويتين التاليتين :



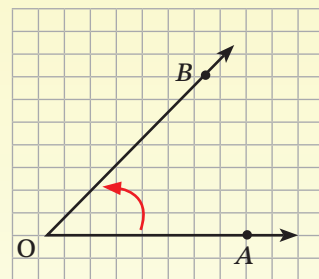
$(B\hat{O}A)$

يمثل الزوج المرتب $(\vec{OB}, \vec{OA})$ حيث :
 العنصر الأول $\vec{OB}$ الضلع الابتدائي للزاوية
 العنصر الثاني $\vec{OA}$ الضلع النهائي للزاوية



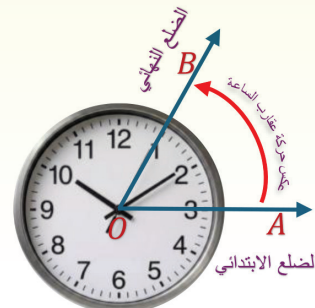
يكون قياس الزاوية الموجهة **سالباً**
 (Negative Measure)

إذا كان اتجاه الدوران من الضلع الابتدائي إلى
 الضلع النهائي **مع اتجاه عقارب الساعة**.



$(A\hat{O}B)$

يمثل الزوج المرتب $(\vec{OA}, \vec{OB})$ حيث :
 العنصر الأول $\vec{OA}$ الضلع الابتدائي للزاوية
 العنصر الثاني $\vec{OB}$ الضلع النهائي للزاوية



يكون قياس الزاوية الموجهة **موجباً**
 (Positive Measure)

إذا كان اتجاه الدوران من الضلع الابتدائي إلى
 الضلع النهائي **عكس اتجاه عقارب الساعة**.

الزاوية الموجهة The Directed Angle

هي زاوية تتكوّن من اتحاد شعاعين لهما نفس نقطة البداية يسمى الشعاع الأول بالضلع الابتدائي،
 ويسمى الشعاع الثاني بالضلع النهائي ، ويحدد قياسها واتجاهها بالدوران من الضلع الابتدائي إلى
 الضلع النهائي.

هل $(\vec{OB}, \vec{OA}) = (\vec{OA}, \vec{OB})$ فسر إجابتك .

مجموعة قياسات الزوايا المتجمعة
حول نقطة يساوي 360°

معلومة

تدرب



			$\overrightarrow{AB}$	الضلع الابتدائي
			$\overrightarrow{AC}$	الضلع النهائي
			$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$	الزوج المرتب
	مع عقارب الساعة		عكس عقارب الساعة	اتجاه الدوران
	-90°		70°	قياس الزاوية
		-300°		القياس الآخر للزاوية

نلاحظ أنه :

$$360^\circ = |\text{القياس الموجب للزاوية الموجهة } x| + |\text{القياس السالب للزاوية الموجهة } x|$$

حيث : $0^\circ \leq x < 360^\circ$

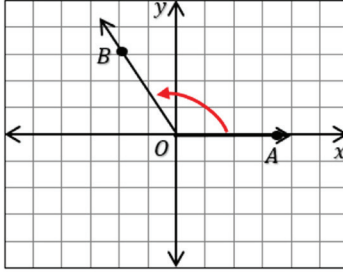
الزاوية الموجهة في الوضع القياسي :

هي زاوية رأسها نقطة الأصل وضلعها الابتدائي منطبق على الاتجاه الموجب لمحور السينات .

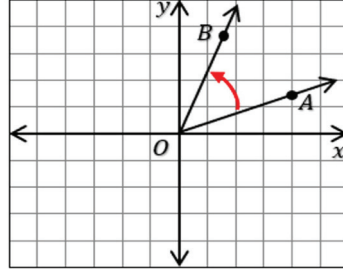
تدرب

في الأشكال من (1-6) حدّد أي من الزوايا الموجهة في وضع قياسي مع ذكر السبب .

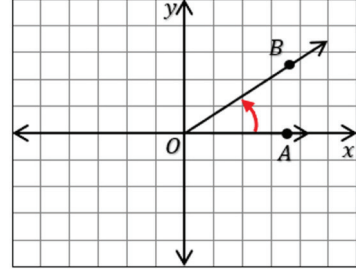
1



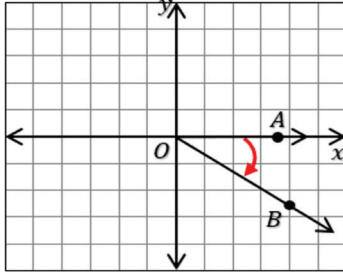
2



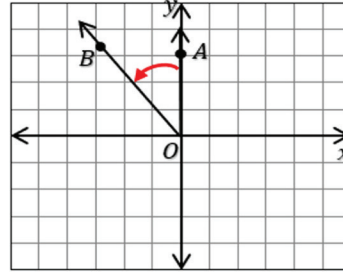
3



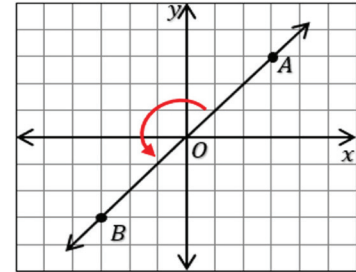
4



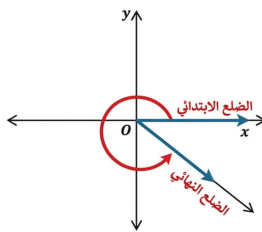
5



6

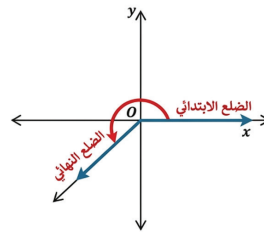


إذا رسمت الزاوية الموجهة في الوضع القياسي، بحيث لا يقع ضلعها النهائي على أحد محاور الإحداثيات، فإن وضع ضلعها النهائي يحدد الربع الذي تقع فيه الزاوية الموجهة.



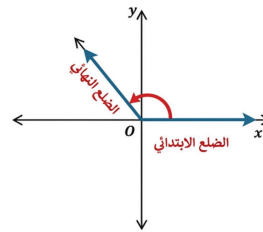
زاوية موجهة في الربع الرابع

$$270^\circ < x < 360^\circ$$



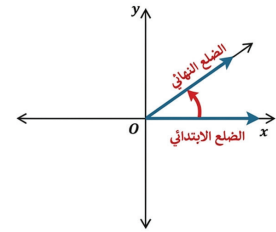
زاوية موجهة في الربع الثالث

$$180^\circ < x < 270^\circ$$



زاوية موجهة في الربع الثاني

$$90^\circ < x < 180^\circ$$

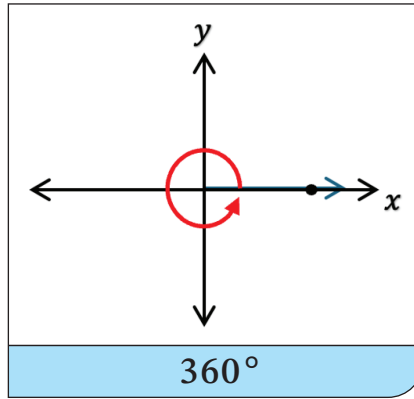
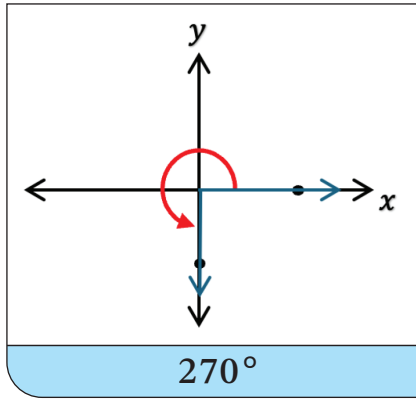
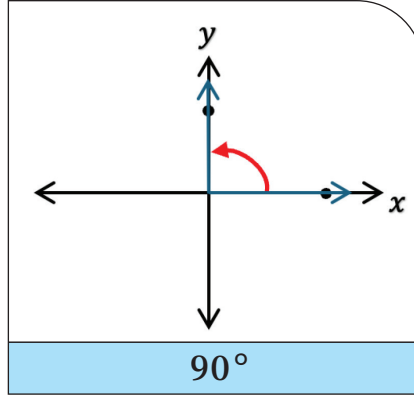
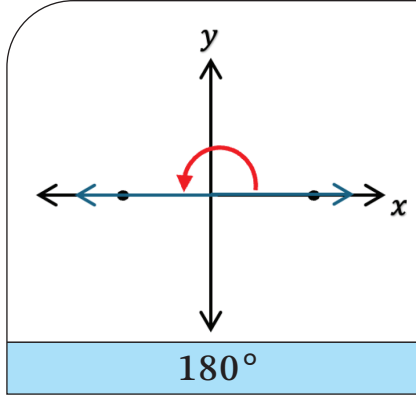


زاوية موجهة في الربع الأول

$$0^\circ < x < 90^\circ$$

الزاوية الربعية Quadrantal Angle

هي زاوية موجهة في الوضع القياسي ينطبق ضلعها النهائي على أحد محوري الإحداثيات.



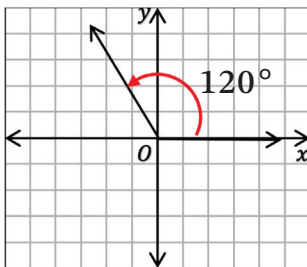
ارسم كلاً من الزوايا الموجهة في الوضع القياسي التالي ، ثم حدد الزوايا الربعية منها أو حدد الربع الذي تقع فيه الزاوية إن أمكن :

- (a) 120° (b) 450° (c) -270°
(d) 300° (e) -150° (f) 450°

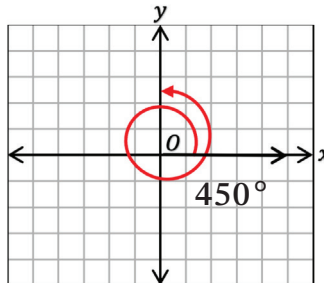
مثال (1)

الحل:

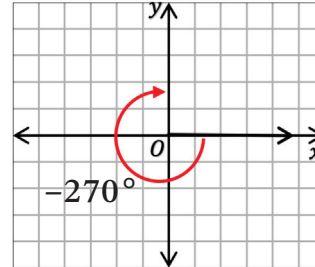
(a) الربع الثاني



(b) $450^\circ = 360^\circ + 90^\circ$
زاوية ربعية



(c) -270°
زاوية ربعية

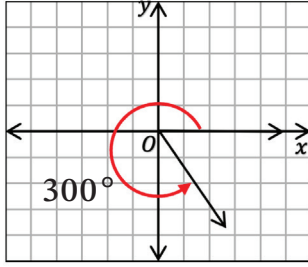


معلومة (i)

لتحديد الربع الذي تقع فيه الزاوية الموجهة يجب إيجاد أصغر قياس موجب للزاوية بإضافة دورات كاملة للزاوية أو طرح دورات كاملة للزاوية .

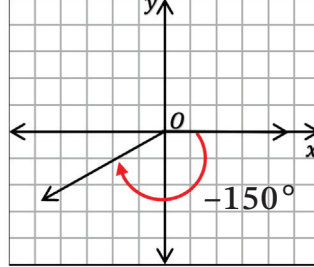
(d)

الربع الرابع

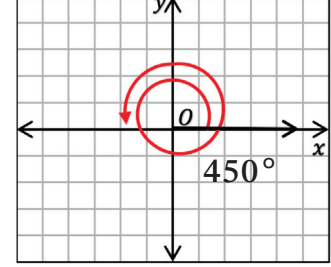


(e)

الربع الثالث



(f)

 $450^\circ = 360^\circ + 180^\circ$
زاوية ربعية


تحقق من فهمك (1)

ارسم كلاً من الزوايا الموجهة في الوضع القياسي التالي ، ثم حدد الزوايا الربعية منها
أو حدد الربع الذي تقع فيه الزاوية إن أمكن :

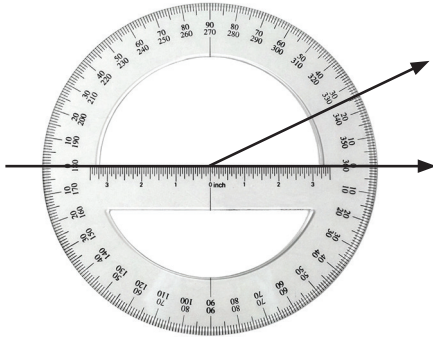
(a) 135° (b) -90° (c) 810° (d) -70° (e) 225°

(3-4-b) القياس الستيني - القياس الدائري Degree Measure - Circular Measure

يوجد أنظمة قياس مختلفة لقياس الزاوية منها القياس الستيني - القياس الدائري

أولاً: القياس الستيني

في هذا القياس تقسم الزاوية التي تمثل دورة كاملة إلى 360 قسمًا متساويًا ، قياس كل منها يسمى درجة. وقد اتخذت هذه الدرجة وحدة لقياس الزوايا .



ويرمز لها بالرمز ($^\circ$)

فمثلاً قياس الزاوية القائمة يساوي 90°

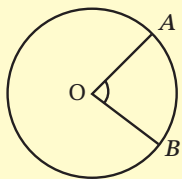
وقياس الزاوية المستقيمة يساوي 180°

أجزاء الدرجة :

1° (درجة واحدة) = $60'$ (دقيقة)

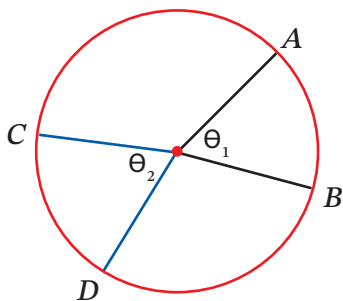
$1'$ (دقيقة واحدة) = $60''$ (ثانية)

الزاوية المركزية في دائرة :



هي زاوية يقع رأسها على مركز الدائرة (O) وضلعها يحمل نصفي قطر في الدائرة في الشكل المرسوم ($\widehat{AOB}$) تسمى زاوية مركزية.

في الشكل المرسوم في الدائرة يكون :

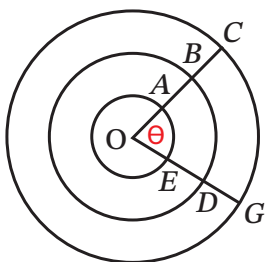


$$\begin{aligned} ① \quad & \begin{cases} m(\widehat{AB}) = m(\theta_1) \\ m(\widehat{CD}) = m(\theta_2) \end{cases} \\ ② \quad & \frac{m(\theta_1)}{m(\theta_2)} = \frac{\text{طول}(\widehat{AB})}{\text{طول}(\widehat{CD})} \end{aligned}$$

ثانيًا : القياس الدائري « التقدير الدائري »

ارسم دوائر متحدة المركز (مركزها O) بحيث يكون :

1. طول نصف قطر الدائرة الصغرى يساوي وحدة واحدة
2. طول نصف قطر الدائرة الثانية يساوي ثلاث وحدات
3. طول نصف قطر الدائرة الثالثة يساوي أربع وحدات

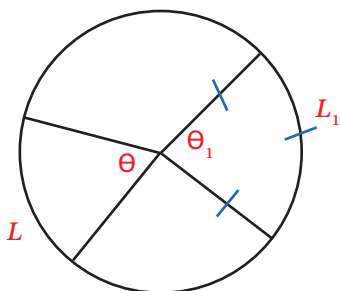


إذا كان: نصف قطر الدائرة الصغرى r_1 = طول ($\widehat{AE}$)
نصف قطر الدائرة الصغرى r_2 = طول ($\widehat{BD}$)
نصف قطر الدائرة الصغرى r_3 = طول ($\widehat{CG}$)

$$\frac{\text{طول}(\widehat{AE})}{r_1} = \frac{\text{طول}(\widehat{BD})}{r_2} = \frac{\text{طول}(\widehat{CG})}{r_3} = \text{نسبة ثابتة}$$

هذه النسبة تساوي ($Readain 1$) وهي وحدة القياس الدائري

استنتاج العلاقة بين طول نصف قطر الدائرة و طول القوس ، الزاوية المركزية بالقياس الدائري :



$$\begin{aligned} \frac{\theta_1}{\theta} &= \frac{L_1}{L} \\ \frac{1}{\theta} &= \frac{r}{L} \quad \longrightarrow \quad L = r \cdot \theta \end{aligned}$$

معلومة رياضية

- في الدائرة الواحدة النسبة بين قياسات الزوايا المركزية تساوي النسبة بين أطوال الأقواس المقابلة لها .

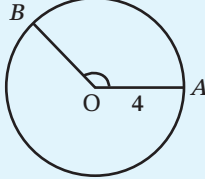
معلومة i

- قياس القوس هو قياس الزاوية المركزية التي تحصر هذا القوس في الدائرة ويقاس بالدرجات أو الراديان.
- $m(\widehat{AB})$ يمثل قياس القوس AB
- طول القوس هو المسافة الواقعة على محيط القوس.

L : طول القوس المقابل للزاوية θ
 r : طول نصف قطر الدائرة
 θ : الزاوية المركزية بالراديان

يجب مراعاة :

L, r لهما نفس وحدات قياس الطول
 θ الزاوية المركزية بالقياس الدائري



في الشكل المقابل:
 أوجد قياس الزاوية المركزية $\widehat{AOB}$ بالتقدير الدائري
 إذا كان طول القوس $\widehat{AB}$ يساوي 8 وحدة طول وطول
 نصف القطر يساوي 4 وحدة طول .

مثال (2)

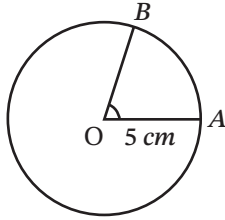
$$\theta = \frac{L}{r}$$

$$\therefore \theta = \frac{8}{4} = 2$$

$$\therefore m(\widehat{AOB}) = 2 \text{ rad}$$

الحل:

تحقق من فهمك (2)



في الشكل المقابل :
 إذا كان قياس الزاوية المركزية $\widehat{BOA}$ يساوي 1.5 rad
 أوجد طول القوس $\widehat{AB}$

العلاقة بين القياس الدائري والقياس الستيني للزاوية :

إذا كان نصف قطر الدائرة المرسومة هو r وأن الزاوية المركزية التي تساوي
 دورة واحدة تقابل قوساً طوله يساوي محيط الدائرة يساوي $2\pi r$ وحيث أن :

لنستكشف

$$L = r \cdot \theta$$

$$2\pi r = r \cdot \theta$$

$$2\pi = \theta$$

ونحن نعلم الدورة الواحدة عكس عقارب الساعة تساوي 360°
 $\therefore$ دورة واحدة = $2\pi \text{ radian}$

$$360^\circ = 2\pi \text{ radian}$$

$$180^\circ = \pi \text{ radian}$$

$$180^\circ = \pi \text{ radian}$$

بالقسمة على 180

$$1 \text{ radian} = \frac{\pi}{180^\circ}$$

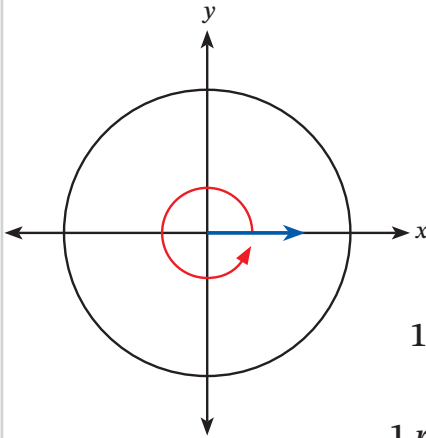
$$180^\circ = \pi \text{ radian}$$

بالقسمة على π

$$1 \text{ radian} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

ومن خواص التناسب نستطيع القول إن :

$$\frac{x^\circ}{180^\circ} = \frac{\theta}{\pi}$$



معلومة :

توجد وحدة أخرى لقياس الزاوية وهي الجراد (Grade) وتساوي $\frac{1}{200}$ من قياس الزاوية المستقيمة وعلى هذا فإنه إذا كانت $G = x^\circ = \theta$ هي قياسات ثلاث زوايا على التوالي بوحدات راديان ، درجة ، الجراد فإن :

$$\frac{Grad}{200} = \frac{Degree}{180^\circ} = \frac{Radian}{\pi}$$

مثال (3) أوجد القياس الدائري للزاوية التي قياسها 120°

الحل:

$$\begin{aligned}\frac{\theta}{\pi} &= \frac{x^\circ}{180^\circ} \\ \therefore \frac{\theta}{\pi} &= \frac{120^\circ}{180^\circ} \\ \therefore \theta &= \frac{120^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{2}{3} \pi\end{aligned}$$

تحقق من فهمك (3)

a 60°

b 330°

أوجد القياس الدائري للزاوية التي قياسها :

a $\frac{3\pi}{4}$

b $2rad$

مثال (4) أوجد القياس الستيني لكل مما يلي:

الحل:

a

$$\begin{aligned}\therefore \frac{\theta}{\pi} &= \frac{x^\circ}{180^\circ} \\ \therefore \frac{\frac{3\pi}{4}}{\pi} &= \frac{x^\circ}{180^\circ} \\ \therefore x^\circ &= \frac{3}{4} \times 180^\circ \\ &= 135^\circ\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}\therefore \frac{\theta}{\pi} &= \frac{x^\circ}{180^\circ} \\ \therefore \frac{2}{\pi} &= \frac{x^\circ}{180^\circ} \\ \therefore x^\circ &= \frac{2}{\pi} \times 180^\circ \\ &= \frac{360^\circ}{\pi}\end{aligned}$$

تحقق من فهمك (4)

a $\theta = \frac{3\pi}{4}$

b $\theta = \frac{4\pi}{3}$

c $1.6 rad$

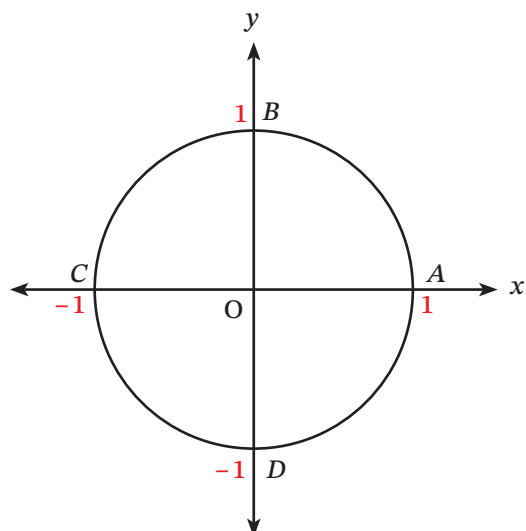
أوجد القياس الستيني للزاوية التي قياسها :

أكمل ما يلي :

x Degrees	θ Radins	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\sec \theta$	$\csc \theta$	$\cot \theta$
0°	0						
90°	$\frac{\pi}{2}$						
	π			غير معروف			
270°	$\frac{3\pi}{2}$						
	2π						
45°	$\frac{\pi}{4}$			1			
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$				2	$\sqrt{3}$
60°	$\frac{\pi}{3}$		$\frac{1}{2}$				

متى تكون $\sec \theta$ ، $\tan \theta$ غير معرفتين ؟ ومتى تكون $\csc \theta$ ، $\cot \theta$ غير معرفتين ؟

(3-4-c) دائرة الوحدة



لنستكشف

في الشكل المقابل :
أوجد إحداثيات النقاط

$O(0, 0)$
 $A(1, 0)$
 $B(.....,)$
 $C(.....,)$
 $D(.....,)$

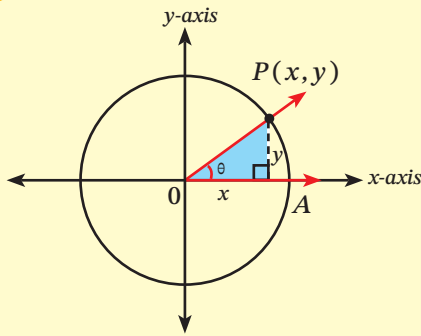
دائرة الوحدة تقطع :

- محور السينات في النقطتين $(.....,)$ ، $(.....,)$
- محور الصادات في النقطتين $(.....,)$ ، $(.....,)$

Unit Circle دائرة الوحدة

هي دائرة مركزها نقطة الأصل ، وطول نصف قطرها وحدة واحدة.

النقطة المثلثية Trigonometric Point



هي نقطة تقاطع الضلع النهائي
لزائوية موجهة في الوضع
القياسي مع دائرة الوحدة .

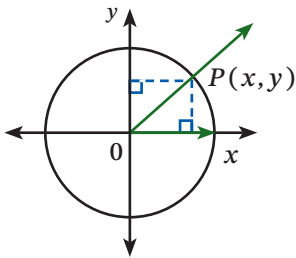
نلاحظ:

من المثلث المثلث تكون النقطة $P(x,y)$ نقطة مثلثية إذا وفقط إذا كان $x^2+y^2=1$ وسوف نستخدم الرمز θ لنرمز إلى قياس الزائوية الموجهة في الوضع القياسي .



الدوال المثلثية للزائوية التي قياسها θ :

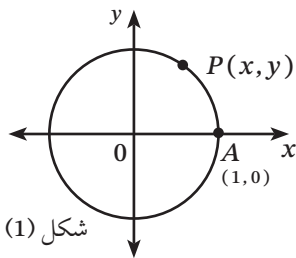
تذكر أن دائرة الوحدة هي دائرة نصف قطرها وحدة واحدة ومركزها نقطة الأصل وحيث أن محيط الدائرة هو $2\pi r$ وحيث أن $r = 1$



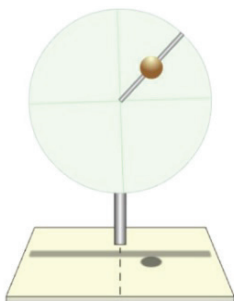
$\therefore$ محيط الدائرة $(L) = (\text{طول القوس}) = 2\pi$

وهو يمثل دورة واحدة هذا النقاش يمهد
لتعريف الدوال المثلثية من خلال دائرة الوحدة.
في الشكل المرسوم (1) :

نفرض أننا تحركنا على محيط الدائرة من النقطة $A(1,0)$ إلى النقطة $P(x,y)$ في عكس حركة عقارب الساعة.



شكل (1)



إذا فرضنا أن كل نقطة على القوس (AP) يكون لها
مسقط على محور السينات، وإذا تخيلنا أن النقطة
 $P(x,y)$ تتحرك على الدائرة دورة كاملة في عكس
اتجاه عقارب الساعة فيكون هناك مسقط للنقطة P
أثناء حركتها على الدائرة على محور السينات أي أن
هناك تناظرًا بين كل عدد والنقطة المثلثية $P(x,y)$
والتي تعبر أيضًا عن الزائوية θ الموجهة في الوضع
القياسي ومن معلوماتنا السابقة أن الإحداثي السيني
في النقطة المثلثية لزائوية θ في الوضع القياسي
يمثلها $\cos \theta$

أي أن : $f: f(\theta) = \cos \theta$

تذكر!

يرمز لمحور السينات
 x بـ x -axis
ويرمز لمحور الصادات
 y بـ y -axis

معلومة

عادة ما يستخدم
الحرف اليوناني θ
(يلفظ ثيتا)
للتعبير عن قياس زائوية .

ومن دائرة الوحدة يكون :

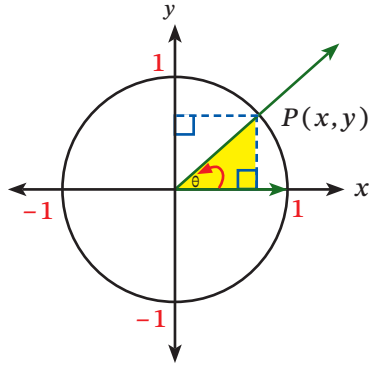
- (1) مجال $f(\theta) = \sin \theta$ هو $\mathbb{R}$
 (2) مدى $f(\theta) = \sin \theta$ هو $[-1, 1]$
 (3) $|\sin \theta| \leq 1$

وإذا تخيلنا أن النقطة $P(x, y)$ تتحرك على الدائرة دورة كاملة في عكس اتجاه عقارب الساعة وأن مسقط هذه النقطة يكون على المحور الصادي أثناء حركتها على الدائرة فيكون هناك تناظر بين كل عدد حقيقي على محور الصادات والنقطة P ومن معلوماتنا السابقة أن الإحداثي الصادي في النقطة المثلثية $\sin \theta$ أي أن $f(\theta) = \sin \theta$

وحيث أن الدالة $f(\theta) = \tan \theta$ تكون غير معرفة عندما $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$ أي أن $f(\theta) = \tan \theta$

- (1) مجال $f(\theta) = \tan \theta$ هو $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{n\pi}{2} \right\}$ ، حيث إن n عدد فردي ، $n \in \mathbb{Z}$
 (2) مدى $f(\theta) = \tan \theta$ هو $\mathbb{R}$

بفرض أن زاوية موجهة في الوضع القياسي θ ، ضلعها النهائي دائرة يقطع الوحدة في النقطة $P(x, y)$ في الشكل المقابل المثلث المظلل قائم الزاوية



$$\cos \theta = \frac{x}{1} = x$$

$$\cos \theta = x$$

$$\sin \theta = \frac{y}{1} = y$$

$$\sin \theta = y$$

النقطة المثلثية (x, y) يمكن التعبير عنها كما يلي $(\cos \theta, \sin \theta)$

$$\therefore x^2 + y^2 = 1$$

$$\therefore \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\sin \theta = y$$

$$\cos \theta = x$$

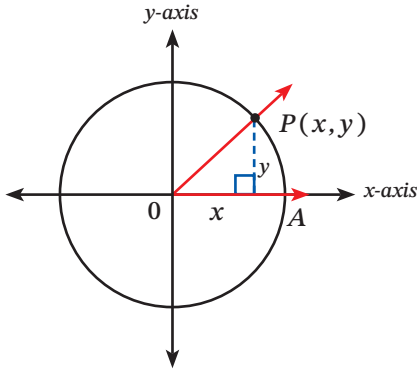
$$\tan \theta = \frac{y}{x} : x \neq 0$$

$$\csc \theta = \frac{1}{y} , y \neq 0$$

$$\sec \theta = \frac{1}{x} , x \neq 0$$

$$\cot \theta = \frac{x}{y} , y \neq 0$$

إشارة كل من دالة الجيب sine ودالة جيب التمام cosine :



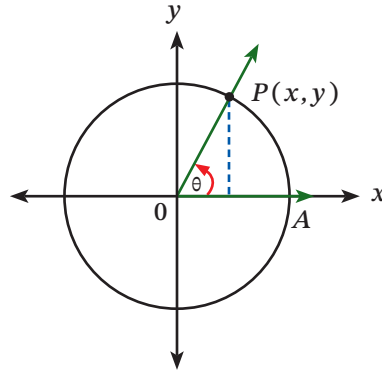
اعتبر الزاوية الموجهة AOP والمرسومة في الوضع القياسي والتي قياسها θ حيث $P(x,y)$ هي النقطة المثلثية للزاوية AOP

ستتعرف على إشارة كل من x, y في الحالات الأربع التالية :

1 إذا وقعت AOP في الربع الأول

تكون كل من x, y موجبة ويكون :

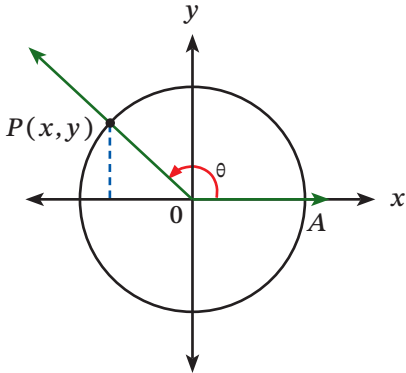
$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \begin{cases} \cos \theta \text{ موجبة} \\ \sin \theta \text{ موجبة} \\ \tan \theta \text{ موجبة} \end{cases}$$



2 إذا وقعت AOP في الربع الثاني

تكون كل من x سالبة ، y موجبة ويكون :

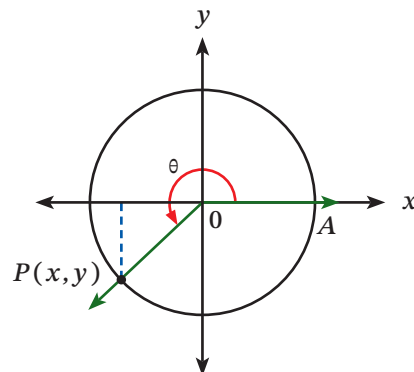
$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \begin{cases} \cos \theta \text{ سالبة} \\ \sin \theta \text{ موجبة} \\ \tan \theta \text{ سالبة} \end{cases}$$



3 إذا وقعت AOP في الربع الثالث

تكون كل من x سالبة ، y سالبة ويكون :

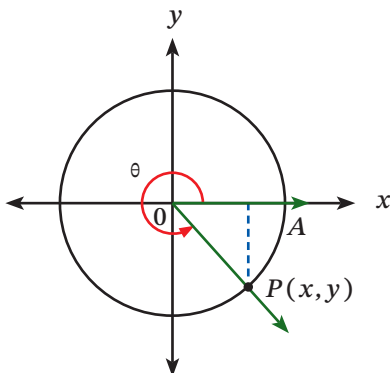
$$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2} \begin{cases} \cos \theta \text{ سالبة} \\ \sin \theta \text{ سالبة} \\ \tan \theta \text{ موجبة} \end{cases}$$



4 إذا وقعت AOP في الربع الرابع

تكون كل من x موجبة ، y سالبة ويكون :

$$\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi \begin{cases} \cos \theta \text{ موجبة} \\ \sin \theta \text{ سالبة} \\ \tan \theta \text{ سالبة} \end{cases}$$

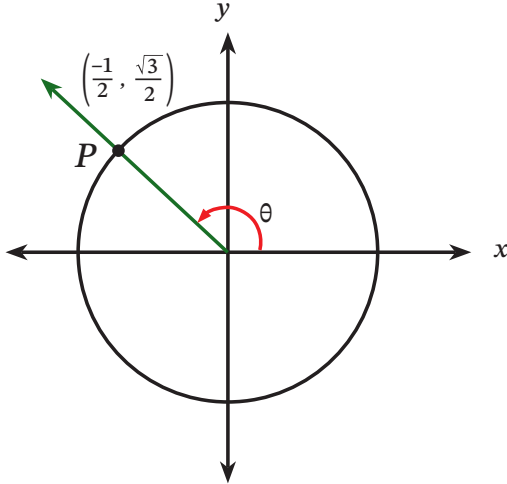


إذا كانت النقطة $P\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ، للزاوية θ في الوضع القياسي :

مثال (5)

- (a) بَيِّنْ أن النقطة P نقطة مثلثية
(b) أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ

الحل:



(a) تكون النقطة P مثلثية يجب أن تحقق: $x^2 + y^2 = 1$

$$L.H.S = x^2 + y^2$$

$$= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 = R.H.S$$

$\therefore P$ تمثل نقطة مثلثية

$$\therefore x = \cos \theta = -\frac{1}{2}$$

(b)

$$y = \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{3}}{2} \div -\frac{1}{2} = -\sqrt{3}$$

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = -2$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = -\frac{1}{2} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

تحقق من فهمك (5)

إذا كانت النقطة $P\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ للزاوية θ في الوضع القياسي :

- (a) بين أن النقطة P نقطة مثلثية
(b) أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ

مثال (6) إذا كانت النقطة $P\left(\frac{1}{2}, y\right)$ هي النقطة المثلثية للزاوية التي قياسها θ أوجد : $\sin \theta, \cos \theta$ حيث $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

الحل:

$$\therefore x = \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$\therefore (y, \frac{1}{2})$ نقطة مثلثية

$$\therefore x^2 + y^2 = 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1$$

$$\frac{1}{2} + y^2 = 1$$

$$y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \therefore$$

$\therefore \theta$ تقع في الربع الأول

$$\therefore y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

تحقق من فهمك (6) 

إذا كانت النقطة $P\left(x, -\frac{1}{2}\right)$ هي النقطة المثلثية للزاوية التي قياسها θ أوجد : $\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$ حيث $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

مثال (7)

أوجد $\cos \theta, \tan \theta$ ، حيث $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

الحل:

$$\therefore \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \cos^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \frac{1}{3}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{2}{3}$$

$$\cos \theta = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} = \pm \sqrt{\frac{6}{3}}$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \therefore$$

$\therefore \theta$ تقع في الربع الثاني

$$\therefore \cos \theta = \frac{-\sqrt{6}}{3}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \cos \theta \neq 0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \div \frac{-\sqrt{6}}{3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{-3}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}$$

$$= \frac{-3}{3\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

تحقق من فهمك (7)

إذا كانت : $\cos x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

أوجد : $\tan x, \sin x$ حيث $90^\circ < x < 180^\circ$

أولاً - البنود الموضوعية :

أدرب وأحل المسائل

■ في البنود من (1-14) اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة :

(a) (b)

(1) الزاوية الموجهة في وضعها القياسي يمكن أن ينطبق ضلعها الابتدائي

على الاتجاه السالب لمحور السينات

(a) (b)

(2) الزاوية 200° زاوية ربعية

(a) (b)

(3) الزاوية الموجهة في وضع قياسي يمكن أن يكون قياسها سالباً

(a) (b)

(a) (b)

(a) (b)

(a) (b)

(a) (b)

(4) الزاوية الموجهة التي في وضع قياسي لها أكثر من نقطة مثلثية

(5) إذا كانت (x, y) نقطة مثلثية لزاوية موجهة في وضع قياسي فإن $x > 1$

(6) $(-1, 0)$ نقطة مثلثية لزاوية موجهة في وضع قياسي

(7) $\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$ نقطة مثلثية لزاوية موجهة في وضع قياسي

(8) إذا كانت $\left(x, \frac{3}{5}\right)$ نقطة مثلثية لزاوية موجهة في وضع قياسي تقع

في الربع الثاني فإن $x = \frac{4}{5}$

(a) (b)

$$\cos(-300^\circ) = \frac{1}{2} \quad (9)$$

(a) (b)

$$\sin(120^\circ) = \frac{1}{2} \quad (10)$$

(a) (b)

$$\tan(-150^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (11)$$

(a) (b)

$$\sec(315^\circ) = \sqrt{2} \quad (12)$$

(a) (b)

(13) الزاوية التي قياسها $\frac{11\pi}{2}$ تقع في الربع الرابع

(a) (b)

(14) الزاوية المركزية ABC قياسها (0.75) في دائرة طول قطرها 8cm ،

فإن طول القوس AC الذي تحصره هذه الزاوية يساوي 3cm

■ في البنود من (16-28) اختر الإجابة الصحيحة :

(1) الزاوية التي قياسها 300° تقع في الربع :

(a) الأول

(b) الثالث

(c) الثاني

(d) الرابع

(2) الزاوية التي قياسها 730° تقع في الربع :

(a) الأول

(b) الثالث

(c) الثاني

(d) الرابع

(3) الزاوية التي تقع في الربع الثالث هي :

(a) 39°

(b) 550°

(c) 70°

(d) 650°

(4) الزاوية التي تقع في الربع الثاني هي :

(a) 200°

(b) 510°

(c) 560°

(d) 260°

(5) الزاوية التي قياسها 280° تقع في الربع :

- (a) الأول (b) الثالث
(c) الثاني (d) الرابع

(6) النقطة المثلثية للزاوية الموجهة في الوضع القياسي يمكن أن يكون :

- (a) (0,0) (b) (3,0)
(c) (-1,1) (d) (0,1)

(7) إذا كانت $\sin\theta=1$ فإن النقطة المثلثية للزاوية θ هي :

- (a) (1,1) (b) (3,0)
(c) (0,1) (d) (-1,1)

(8) إذا كانت $\left(x, \frac{5}{13}\right)$ نقطة مثلثية لزاوية حادة موجهة في وضع قياسي فإن x

- (a) $\frac{12}{13}$ (b) $\frac{8}{13}$
(c) $\frac{5}{12}$ (d) $-\frac{12}{13}$

(9) إذا كانت $\left(\frac{1}{2}, y\right)$ نقطة مثلثية للزاوية θ والتي في وضع قياسي $0^\circ < \theta < 90^\circ$ فإن y تساوي :

- (a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
(c) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (d) $-\sqrt{3}$

(10) الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها يختلف عن الزوايا الأخرى هي :

- (a) $\frac{7\pi}{4}$ (b) 135°
(c) $\frac{3\pi}{4}$ (d) 215°

(11) الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها $\frac{\pi}{3}$ هي :

- (a) $\frac{11\pi}{6}$ (b) 225°
(c) $\frac{7\pi}{8}$ (d) $\frac{5\pi}{3}$

(12) النسبة المثلثية فيما يلي التي قيمتها $\frac{1}{2}$ هي :

- (a) $\sin(-330^\circ)$ (b) $\cos(-240^\circ)$
(c) $\cot(-1500^\circ)$ (d) $\tan(765^\circ)$

(13) النسبة المثلثية فيما يلي التي قيمتها $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ هي :

- (a) $\cos \frac{31\pi}{6}$ (b) $\sin \frac{-35\pi}{3}$
(c) $\tan \frac{17\pi}{6}$ (d) $\sec \frac{13\pi}{3}$

ثانيًا - أسئلة المقال:

(1) ارسم كل زاوية من الزوايا الموجهة التالية في الوضع القياسي مع توضيح الضلع الابتدائي والضلع النهائي مع ذكر الربع الذي تقع فيه الزاوية:

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------|
| (a) $\theta_1 = \frac{-\pi}{2}$ | (b) $\theta_2 = \frac{2\pi}{3}$ |
| (c) $\theta_3 = -30^\circ$ | (d) $\theta_4 = -270^\circ$ |
| (e) $\theta_5 = -200^\circ$ | (f) $\theta_6 = -250^\circ$ |

(2) ارسم كل زاوية من الزوايا الموجهة التالية في الوضع القياسي:

- | | |
|----------------------------|---------------------------------|
| (a) $\theta_1 = 135^\circ$ | (b) $\theta_2 = \frac{2\pi}{3}$ |
|----------------------------|---------------------------------|

(3) اكتب بالقياس الدائري كل من الزوايا التالية :

- | | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| (a) 30° | (b) 60° | (c) 90° | (d) 40° |
| (e) 120° | (f) 135° | (g) 150° | (h) 240° |

(4) اكتب بالقياس الستيني قياسات الزوايا التالية :

- | | | | |
|---------------------|----------------------|-----------------------|----------------------|
| (a) $\frac{\pi}{4}$ | (b) $\frac{3\pi}{2}$ | (c) $\frac{2\pi}{3}$ | (d) $\frac{3\pi}{4}$ |
| (e) 3 | (f) $1\frac{1}{2}$ | (g) $\frac{11\pi}{6}$ | |

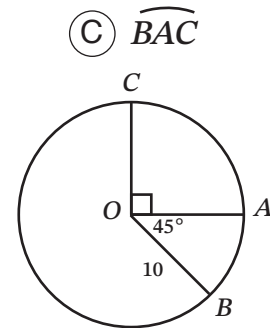
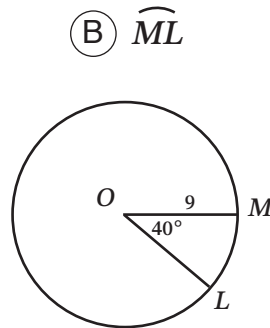
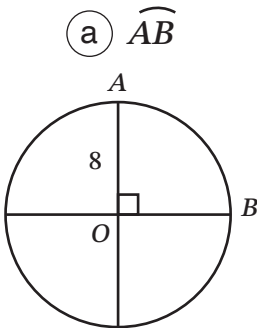
(5) زاوية قياسها (5 radian) أوجد القياس الستيني لهذه الزاوية لأقرب دقيقة

(6) زاوية قياسها $58^\circ 18' 23''$ أوجد القياس الدائري لهذه الزاوية مقرباً الناتج إلى أقرب رقمين عشريين

(7) أوجد القياس الدائري للزاويتين التاليتين مقرباً الناتج لأقرب جزء من مئة

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| (a) $52^\circ 16' 24''$ | (b) $101^\circ 4' 13''$ |
|-------------------------|-------------------------|

(8) في كل من الأشكال التالية دائرة مركزها O أوجد طول القوس في كل منها :





(9)

(9) زاوية مركزية تقابل قوساً طوله 8cm في دائرة طول نصف قطرها 6cm ،
أوجد قياسها بالتقدير الستيني

(10) أوجد طول القوس الذي يقابل زاوية مركزية قياسها $\left(\frac{3}{4}\right)\text{rad}$ في دائرة
طول نصف قطرها 10cm

(11) افترض أن ذراع مساحة المياه على الزجاج الأمامي لإحدى السيارات يساوي تقريباً 56cm
وأثناء حركتها على الزجاج تصنع قوساً يقابل زاوية قياسها 110° ، أوجد طول القوس .

(12) إذا كانت $\left(x, \frac{-2\sqrt{6}}{2}\right)$ نقطة المثلثية للزاوية التي قياسها θ ، حيث θ تقع في الربع الثالث
أوجد : $\cot \theta, \csc \theta, \tan \theta, \cos \theta, \sin \theta$



(13)

(13) إذا كانت $\left(\frac{7}{25}, y\right)$ نقطة المثلثية للزاوية التي قياسها θ ،

حيث $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

أوجد : $\cot \theta, \csc \theta, \tan \theta, \sin \theta$

(14) إذا كانت $\sin \theta = \frac{3}{5}$ ، حيث $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

أوجد : $\csc \theta, \sec \theta, \tan \theta, \cos \theta$



(15)

(15) إذا كانت $\cos \theta = -\frac{3\sqrt{3}}{13}$ ، حيث $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

أوجد : $\csc \theta, \sec \theta, \cot \theta, \tan \theta, \sin \theta$

مهارات تفكير عليا



(1) زاويتان مجموع قياسيهما $\frac{3\pi}{5}$ والفرق بينهما 30° أوجد قياسيهما بالتقدير الستيني

(2) مثلث قياس إحدى زواياه $\frac{2\pi}{5}$ وقياس الزاوية الأخرى تساوي $\frac{\pi}{6}$ أوجد القياس الدائري للزاوية الثالثة

(3) أوجد قيم الدوال المثلثية للزاوية التي قياسها θ في الوضع القياسي وצלعهما النهائي يقطع دائرة
الوحدة في النقطة

(a) $P(x, -x)$, $x > 0$

(b) $P(-y, -y)$, $y > 0$

العلاقات بين الدوال المثلثية

Relations Between Trigonometry Functions

3-5

فكرة الدرس:



إيجاد العلاقات بين الدوال المثلثية

المصطلحات:



Reference Angle

زاوية الإسناد

مسألة الدرس:



فيما
سبق تعلمنا

- نقطة مثلثية
- تحويلات هندسية

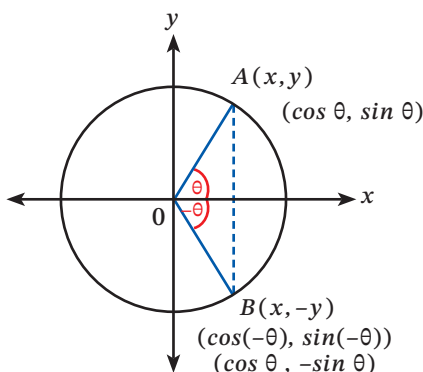
العلاقة بين الزاويتين $(\theta, -\theta)$

استكشف



على دائرة الوحدة :

1. ارسم زاوية موجبة موجهة θ في الوضع القياسي ضلعها النهائي في الربع الأول
ثم اذكر إحداثي النقطة A



2. ارسم زاوية موجبة موجهة في الوضع القياسي $(-\theta)$
ثم اذكر إحداثي النقطة B

تذكروا

إذا كانت θ تقع في الربع الأول، فإن $-\theta$ تقع في الربع الرابع

من هندسة الشكل :

نجد أن النقطة المثلثية B هي صورة للنقطة المثلثية A بالانعكاس في محور السينات

انعكاس في محور السينات
 $A(x, y) \rightarrow B(x, -y)$

① $\cos(-\theta) = \cos\theta$

لأي زاوية θ :

② $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

③ $\tan(-\theta) = -\tan\theta$: (معرفه $\tan\theta$)

استنتج : $\sec(-\theta)$, $\csc(-\theta)$, $\cot(-\theta)$

تدرب

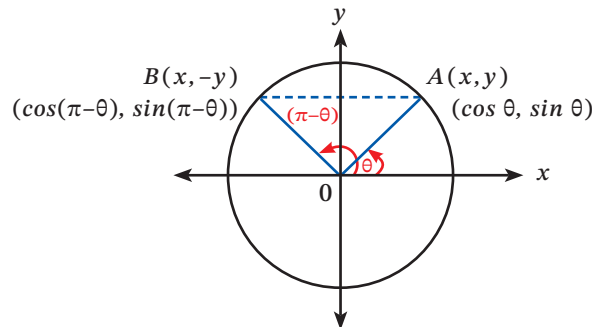
أكمل ما يلي :

(1) إذا كان $\cos \theta = 0.7$ فإن $\cos(-\theta) = \dots\dots\dots$

(2) إذا كان $\sin \theta = \frac{3}{5}$ فإن $\sin(-\theta) = \dots\dots\dots$

(3) إذا كان $\tan \theta = 3$ فإن $\tan(-\theta) = \dots\dots\dots$

العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين $(\theta, (\pi - \theta))$



من هندسة الشكل :

نجد أن النقطة المثلثية B هي صورة للنقطة المثلثية A بالانعكاس في محور الصادات

انعكاس في محور الصادات
A(x, y) → B(-x, y)

① $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$

② $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$

③ $\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$: (معرفه $\tan \theta$)

لأي زاوية θ :

استنتج : $\sec(\pi - \theta)$, $\csc(\pi - \theta)$, $\cot(\pi - \theta)$

1. اكتب النسب المثلثية بدلالة إحدى النسب المثلثية الأساسية :

① $\cos(\pi - \theta)$ ② $\tan(180^\circ - x)$ ③ $\sin(180^\circ - x)$

2. إذا كان $\sec \theta = 2$ أو جد $\cos(\pi - \theta)$

مثال (1)

الحل:

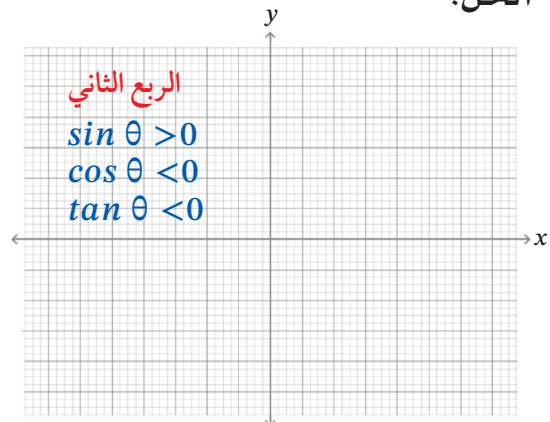
1. ① $\cos(\pi - x) = -\cos x$

② $\tan(180^\circ - x) = -\tan x$

③ $\sin(180^\circ - x) = \sin x$

2. $\because \sec \theta = 2 \therefore \cos \theta = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \cos(\pi - \theta) &= -\cos \theta \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$



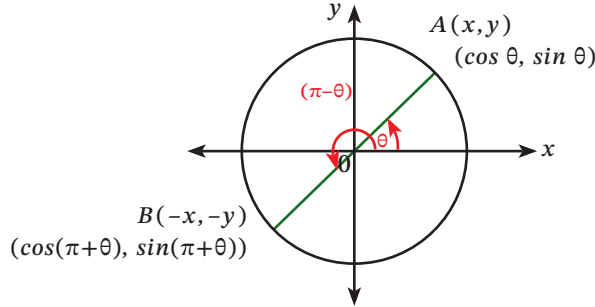
معلومة

إذا كانت θ تقع
في الربع الأول ، فإن
 $(\pi - \theta)$ تقع
في الربع الثاني

تحقق من فهمك (1)

إذا كان $\sin \theta = 0.2$ أوجد $\sin(\pi - \theta)$
 إذا كان $\cos \theta = 0.6$ أوجد $\cos(\pi - \theta)$
 إذا كان $\tan \theta = \frac{1}{3}$ أوجد $\cot(\pi - \theta)$

العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين $(\theta, (\pi + \theta))$



من هندسة الشكل :

نجد أن النقطة المثلثية B هي صورة للنقطة المثلثية A بالانعكاس في نقطة الأصل

انعكاس في نقطة الأصل
 $A(x, y) \rightarrow B(-x, -y)$

- ① $\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$
- ② $\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$
- ③ $\tan(\pi + \theta) = \tan \theta$: (معرفه $\tan \theta$)

لأي زاوية θ :

استنتج : $\sec(\pi + \theta)$, $\csc(\pi + \theta)$, $\cot(\pi + \theta)$

- ① إذا كان $\tan \theta = 3$ أوجد $\tan(\pi + \theta)$
- ② إذا كان $\cos \theta = \frac{1}{2}$ أوجد $\sec(\pi + \theta)$
- ③ إذا كان $\sin \theta = \frac{1}{5}$ أوجد $\csc(\pi + \theta)$

مثال (2)

الحل:

① $\tan(\pi + \theta) = \tan \theta$

$\therefore \tan(\pi + \theta) = 3$

② $\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$

$\therefore \sin(\pi + \theta) = -\frac{1}{2}$

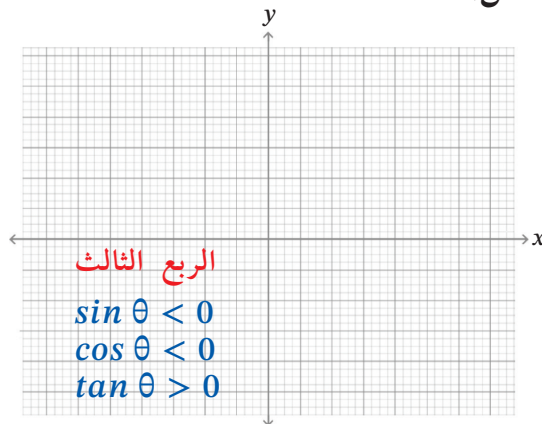
$\therefore \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$

$\therefore \sec(\pi + \theta) = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$

③ $\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$

$\therefore \sin(\pi + \theta) = -\frac{1}{5}$

$\therefore \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} \Rightarrow \therefore \csc(\pi + \theta) = -\csc \theta = \frac{1}{-\frac{1}{5}} = -5$



معلومة i

إذا كانت θ تقع في الربع الأول، فإن $(\pi + \theta)$ تقع في الربع الثالث

تحقق من فهمك (2)

أوجد $\sin(\pi+\theta)$

① إذا كان $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

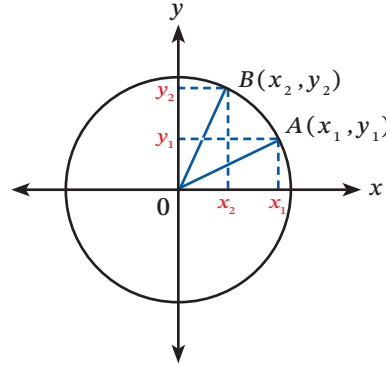
أوجد $\tan(\pi+\theta)$

② إذا كان $\tan \theta = 3.2$

أوجد $\sec(\pi+\theta)$

③ إذا كان $\cos \theta = \frac{2}{3}$

العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين $(\theta, (\frac{\pi}{2} - \theta))$



من هندسة الشكل :

$\Delta Ox_1A \cong \Delta Oy_2B$ لماذا ؟

① $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin \theta$

لأي زاوية θ :

② $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos \theta$

③ $\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cot \theta$: (معرفه $\tan \theta$)

مثال (3) إذا كان $\cos \theta = \frac{7}{25}$ أوجد $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$, $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$

الحل :

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin \theta$$

$$\therefore \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\therefore \sin^2 \theta + (\frac{7}{25})^2 = 1$$

$$\sin^2 \theta = 1 - (\frac{7}{25})^2$$

$$\sin^2 \theta = \frac{576}{625}$$

$$\sin \theta = \pm \frac{24}{25}$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{24}{25}$$

$\therefore \theta$ تقع في الربع الأول

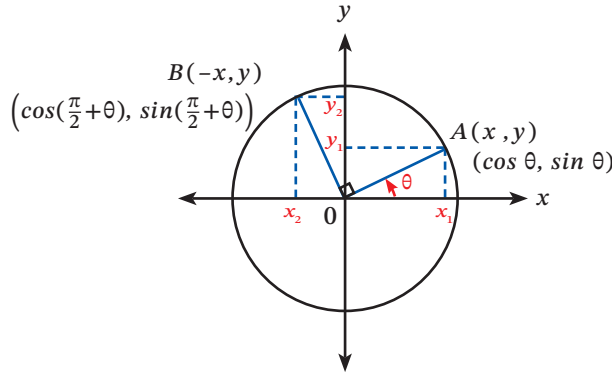
معلومة

إذا كانت θ تقع
في الربع الأول ،
فإن $(\frac{\pi}{2} - \theta)$ تقع في
الربع الأول

تحقق من فهمك (3)

إذا كان $\sin \theta = \frac{1}{2}$ أوجد $\sin \theta (\frac{\pi}{2} - \theta)$ ، $\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi$

العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين $(\theta, (\frac{\pi}{2} + \theta))$



من هندسة الشكل :

$\Delta Ox_1A \cong \Delta Oy_2B$ لماذا ؟

- لأي زاوية θ :
- ① $\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\sin \theta$
 - ② $\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = \cos \theta$
 - ③ $\tan(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\cot \theta$: (معرفه $\tan \theta$)

معلومة

إذا كانت θ تقع في الربع الأول ، فإن $(\frac{\pi}{2} + \theta)$ تقع في الربع الثاني

مثال (4) إذا كان $\tan \theta = \sqrt{3}$ أوجد $\tan(\frac{\pi}{2} + \theta)$ ، $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$

الحل :

$$\tan(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\cot \theta$$

$$\therefore \tan \theta = \sqrt{3}$$

$$\therefore -\cot \theta = -\frac{1}{\tan \theta}$$

$$-\cot \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

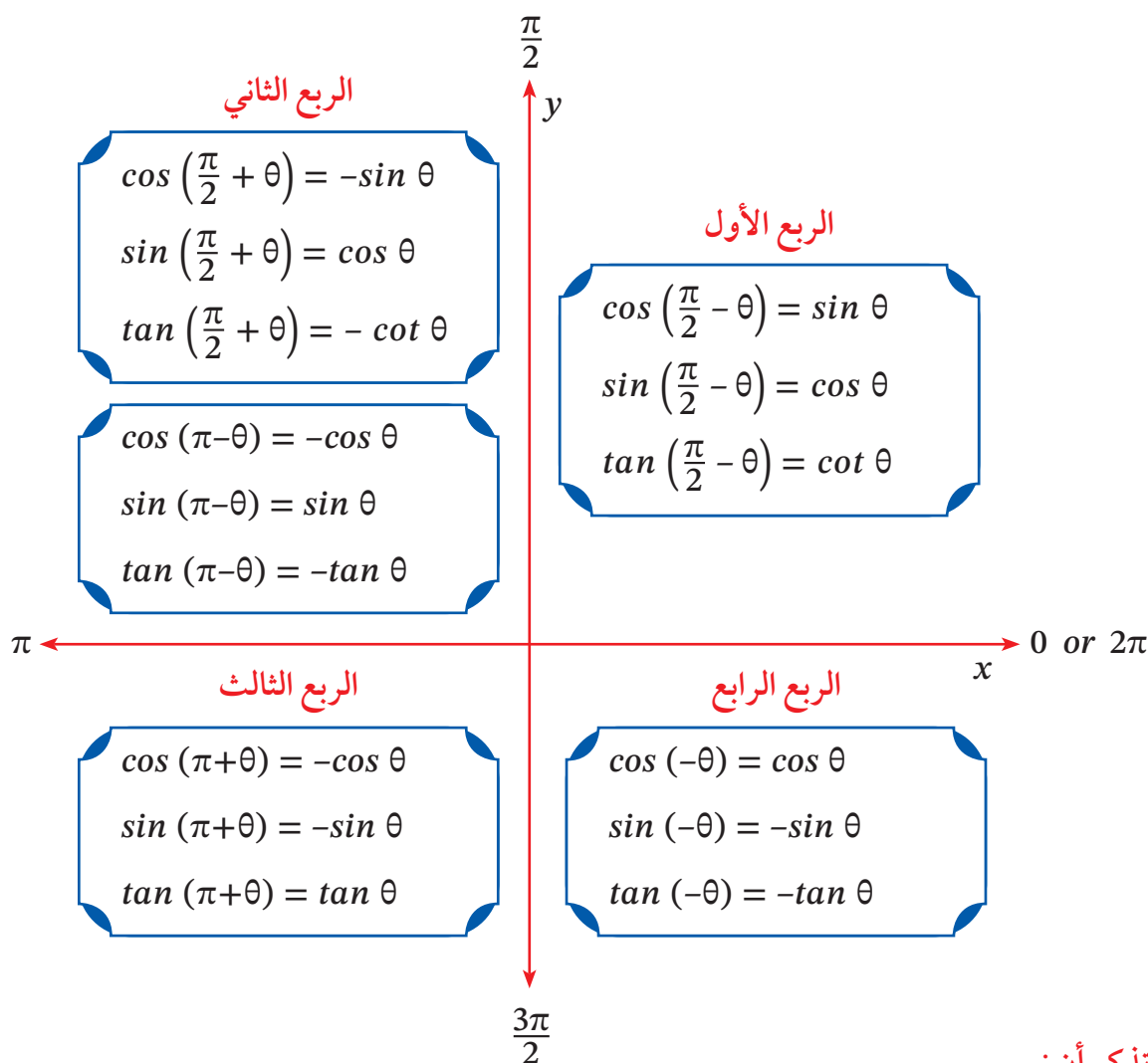
$$\therefore \tan(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

تحقق من فهمك (4)

إذا كان $\cos \theta = \frac{1}{5}$ أوجد $\cos(\frac{\pi}{2} + \theta)$ ، $\frac{3\pi}{2} \leq \theta < 2\pi$

ملخص

العلاقات بين الدوال المثلثية



تذكر أن :

1. دراسة العلاقات بين الدوال المثلثية يجب اتباع التالي :
2. تحديد الربع الذي تقع فيه الزاوية الموجهة في الوضع القياسي
2. تحديد الإشارة الخاصة بالدالة المثلثية خلال هذا الربع

هل يمكن استنتاج الدوال المثلثية للزاويا: $(\frac{3\pi}{2} - \theta)$ ، $(\frac{3\pi}{2} + \theta)$ ؟

بسط التعبيرات التالية :

- a $\cos(\pi - \theta) - \cos(\theta) + \sin(\pi + \theta) + \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$
- b $\sin x + \sin(90^\circ + x) + \sin(180^\circ + x) + \sin(90^\circ - x)$
- c $\cos(\pi + \theta) + \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) + \sin(\theta - \pi) - \cos(\theta + \frac{\pi}{2})$

مثال (5)

الحل:

$$\textcircled{a} \cos(\pi-\theta)-\cos(\theta) + \sin(\pi+\theta)+\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)$$

$$= -\cos\theta-\cos\theta+(-\sin\theta)+\sin\theta$$

$$= -2\cos\theta+(-\sin\theta) + \sin\theta$$

$$= -2\cos\theta$$

$$\textcircled{b} \sin x + \sin(90^\circ + x) + \sin(180^\circ + x) + \sin(90^\circ - x)$$

$$= \sin x + \cos x + (-\sin x) + \cos x$$

$$= 2\cos x + (-\sin x) + \sin x$$

$$= 2\cos x$$

$$\textcircled{c} \cos(\pi+\theta) + \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) + \sin(\theta - \pi) - \cos(\theta + \frac{\pi}{2})$$

$$= -\cos\theta + \cos\theta + \sin(-(\pi - \theta)) + \sin\theta$$

$$= 0 - \sin\theta + \sin\theta$$

$$= 0$$

تحقق من فهمك (5)

$$\textcircled{1} \sin(\pi + \theta) - \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) + \cos(\theta - \pi) + \sin(\theta + \frac{\pi}{2})$$

بسط التعبيرات التالية :

$$\textcircled{2} \cos(-\theta) + \cos(\pi - \theta) - \sin(\pi + \theta)$$

$$\textcircled{3} \cos x - \sin(90^\circ - x) + \sin(180^\circ - x) + \cos(90^\circ + x)$$

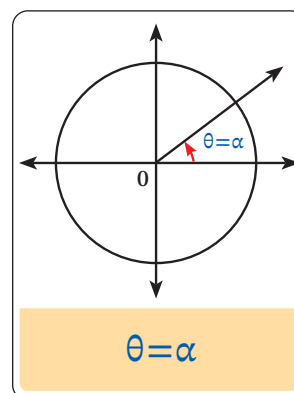
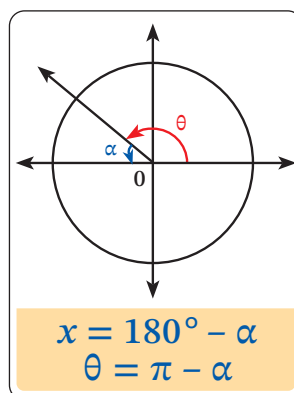
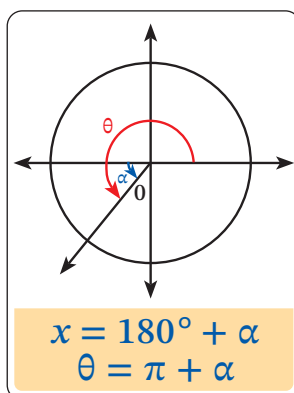
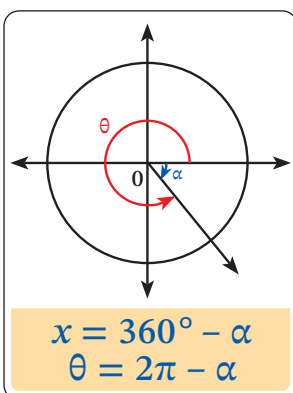
زاوية الإسناد Reference Angle

نحتاج أحياناً إلى معرفة النسب المثلثية للزاوية θ ، θ قد تقع في أي ربع من الأرباع الأربعة ولتسهيل إيجاد القيم المثلثية للزوايا المختلفة نستخدم زاوية الإسناد.

زاوية الإسناد Reference Angle

زاوية الإسناد للزاوية الموجهة θ التي في الوضع القياسي هي الزاوية الحادة α التي يصنعها الضلع النهائي للزاوية الموجهة مع محور السينات حيث $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

وتكون العلاقة بين الزاوية θ وزاوية الإسناد α كالتالي :



أوجد زاوية الإسناد للزوايا التالية :

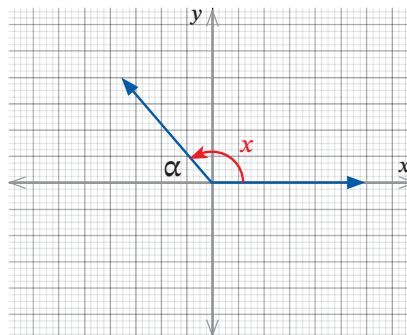
مثال (6)

- (a) $x = 125^\circ$ (b) $x = 215^\circ$ (c) $x = \frac{11\pi}{6}$

الحل:

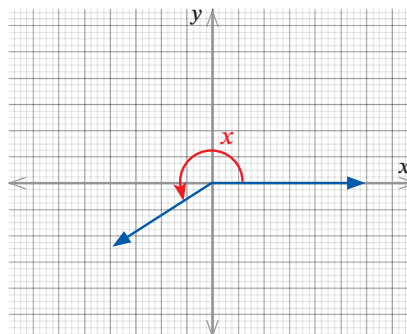
- (a) $x = 125^\circ$ نفرض أن α هي زاوية الإسناد
 x تقع في الربع الثاني

$$\begin{aligned} x &= 180^\circ - \alpha \\ 125^\circ &= 180^\circ - \alpha \\ \alpha &= 55^\circ \end{aligned}$$



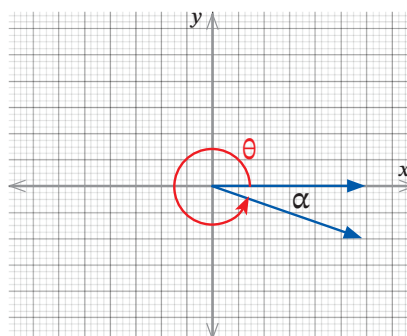
- (b) $x = 215^\circ$ نفرض أن α هي زاوية الإسناد
 x تقع في الربع الثالث

$$\begin{aligned} x &= 180^\circ + \alpha \\ 215^\circ &= 180^\circ + \alpha \\ \alpha &= 35^\circ \end{aligned}$$



- (c) $\theta = \frac{11\pi}{6}$ نفرض أن α هي زاوية الإسناد
 θ تقع في الربع الرابع

$$\begin{aligned} \theta &= 2\pi - \alpha \\ \frac{11\pi}{6} &= 2\pi - \alpha \\ \alpha &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$



تحقق من فهمك (6)

- أوجد زاوية الإسناد للزوايا التالية :
- (a) $x = 215^\circ$ (b) $\theta = \frac{2\pi}{3}$ (c) $x = 300^\circ$

بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد :

مثال (7)

- (a) $\sin \frac{5\pi}{6}$ (b) $\cos 225^\circ$ (c) $\tan 315^\circ$

الحل:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin \frac{5\pi}{6} &= \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos 225^\circ &= \cos (180^\circ + 45^\circ) \\ &= -\cos 45^\circ \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \tan 315^\circ &= \tan (360^\circ - 45^\circ) \\ &= -\tan 45^\circ \\ &= -1 \end{aligned}$$

تحقق من فهمك (7)

a) $\cos(-150^\circ)$

b) $\sin \frac{7\pi}{6}$

c) $\tan 330^\circ$

بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد :

أتدرب وأحل المسائل

أولاً - البنود الموضوعية :

■ في البنود من (1-6) اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة :

(a) (b)

(1) إذا كانت $\sin \theta = 0.2$ فإن $\sin(\pi + \theta) = 0.2$

(a) (b)

(2) إذا كانت $\cos \theta = \frac{2}{3}$ فإن $\sec(\pi + \theta) = \frac{3}{2}$

(a) (b)

(3) إذا كانت $\tan \theta = 3$ فإن $\cot(\pi + \theta) = 3$

(a) (b)

(4) إذا كانت $\sin \theta = \frac{1}{5}$ فإن $\csc(\pi + \theta) = -5$

(a) (b)

(5) إذا كانت $\cos x = \frac{1}{2}$ فإن $x = \frac{\pi}{3}$

(a) (b)

(6) إذا كانت $x = \frac{\pi}{6}$ فإن $\sin x = \frac{1}{2}$

■ في البنود من (1-3) اختر الإجابة الصحيحة:

(1) الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها تختلف عن الزوايا التالية هي :

(a) 315°

(b) 60°

(c) 45°

(d) 135°

(2) الزاوية التي في الوضع القياسي وضلعها النهائي يمر بالنقطة المثلثية $M(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ هي :

(a) 45°

(b) 225°

(c) 135°

(d) 330°

(2) إذا كانت $\cos x$ سالبة و $\sin x$ موجبة . فإن الضلع النهائي للزاوية x يقع في الربع :

(a) الأول

(b) الثاني

(c) الثالث

(d) الرابع

ثانيًا - أسئلة المقال:

(1) أوجد قيمة النسب المثلثية التالية بدون استخدام الآلة الحاسبة :

(a) $\sin 150^\circ$

(b) $\tan(-225^\circ)$

(c) $\cos(-135^\circ)$

(d) $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

(e) $\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)$

(f) $\tan\left(\frac{11\pi}{6}\right)$

(g) $\sin 330^\circ$

(h) $\csc 135^\circ$

(i) $\sec\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

(2) بسط التعبيرات التالية لأبسط صورة :

(a) $\cos(\pi-\theta)-\cos(-\theta)+\sin(\pi+\theta)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

(b) $\cos(\pi+\theta)+\cos\theta-\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$

(c) $\sec(\pi-\theta)-\csc\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\sin\theta$



2 (a)

مهارات تفكير عليا



■ أثبت صحة المتطابقة :

(a)
$$\frac{\sin^2(-\theta)-\cos^2(-\theta)}{\sin(-\theta)-\cos(-\theta)} = \cos\theta-\sin\theta$$

(b)
$$\frac{(1-\sin\theta)}{\cos\theta} = \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$$

حل المعادلات المثلثية Solving Trigonometric Equation

3-6

فكرة الدرس:



حل المعادلات المثلثية

المصطلحات:



Trigonometric Equation معادلة مثلثية

مسألة الدرس:



فيما
سبق تعلمنا

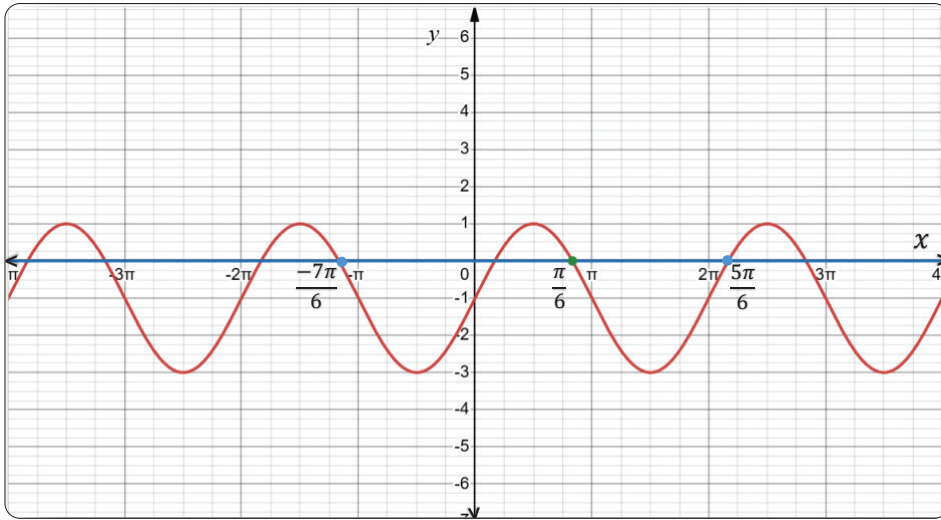
- زاوية الإسناد
- تحديد إشارة الدوال
المثلثية طبقاً لأي ربع



استخدم أحد البرامج الخاصة بالرسم لرسم بيان دالة كل من :

$$y_1 = 2 \sin \theta - 1$$

$$y_2 = 0 \text{ (محور السينات)}$$



- المقصود بحل المعادلة المثلثية هندسيًا:
هو إيجاد نقاط تقاطع منحنى الدالة $y_1 = 2 \sin \theta - 1$ مع محور السينات .
- المقصود بحل المعادلة المثلثية جبريًا:
هو البحث عن الأعداد الحقيقية (قيم θ) التي تجعل $2 \sin \theta - 1 = 0$
في هذا البند سوف نقوم بحل المعادلة المثلثية على الصورة:
 $\sin \theta = a$, $\cos \theta = a$, $\tan \theta = a$
وسوف نكتفي بحل المعادلات المثلثية خلال الفترة $[0, 2\pi)$.

والآن هل يمكن إيجاد الحل للمعادلة $2\sin \theta - 1 = 0$ جبرياً ؟

أوجد مجموعة حل المعادلة : $2\sin \theta - 1 = 0$

حيث $\theta \in [0, 2\pi)$

مثال (1)

الحل:

1. نضع المعادلة على الصورة $\sin \theta = a$

$$2\sin \theta - 1 = 0$$

$$2\sin \theta = 1$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2} > 0$$

(θ تقع في الربع الأول أو الربع الثاني)

2. نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$$\sin \alpha = \left| \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6}$$

3. $\therefore \sin \theta > 0$

θ تقع في الربع الثاني

$$\theta = \pi - \alpha$$

$$= \pi - \frac{\pi}{6}$$

$$\theta = \frac{5\pi}{6} \in [0, 2\pi)$$

أو

$\therefore \theta$ تقع في الربع الأول

$$\theta = \alpha$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} \in [0, 2\pi)$$

$$S.S. = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$$

ملحوظة

$$|\sin \theta| = |\sin \alpha|$$

$$|\cos \theta| = |\cos \alpha|$$

$$|\tan \theta| = |\tan \alpha|$$

تذكر!

إذا كان α هي زاوية الإسناد للزاوية θ فإن :

الربع الأول $\theta = \alpha$	الربع الثاني $\theta = \pi - \alpha$
الربع الثالث $\theta = \pi + \alpha$	الربع الرابع $\theta = 2\pi - \alpha$

تحقق من فهمك (1)

أوجد مجموعة حل المعادلة : $2\cos \theta - \sqrt{2} = 0$

حيث : $\theta \in [0, 2\pi)$ $2\sin \theta + \sqrt{3} = 0$

أوجد حل المعادلة : $2\cos \theta + \sqrt{3} = 0$

حيث : $0 \leq \theta < 2\pi$

مثال (2)

تذكروا

عند حل المعادلة
المثلثية يجب تحويل
الآلة الحاسبة إلى
نظام الراديان
(radian)

الحل:

1. نضع المعادلة على الصورة $\cos \theta = a$

$$2\cos \theta + \sqrt{3} = 0$$

$$2\cos \theta = -\sqrt{3}$$

$$\cos \theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} < 0$$

(θ تقع في الربع الثاني أو الربع الثالث)

2. نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$$\cos \alpha = \left| \frac{-\sqrt{3}}{2} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6}$$

3. $\therefore \cos \theta < 0$

θ تقع في الربع الثالث

$$\theta = \pi + \alpha$$

$$= \pi + \frac{\pi}{6}$$

$$\theta = \frac{7\pi}{6}$$

أو

$\therefore \theta$ تقع في الربع الثاني

$$\theta = \pi - \alpha$$

$$= \pi - \frac{\pi}{6}$$

$$\theta = \frac{5\pi}{6}$$

حل المعادلة: $\frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

تحقق من فهمك (2)

أوجد حل المعادلة: $2\cos \theta + 1 = 0$

حيث: $\theta \in [0, 2\pi)$

أوجد حل المعادلة: $\sqrt{2} \csc \theta + 2 = 0$

حيث: $0 \leq \theta < 2\pi$

مثال (3)

الحل:

1. نضع المعادلة على الصورة $\csc \theta = a$

$$\sqrt{2} \csc \theta + 2 = 0$$

$$\sqrt{2} \csc \theta = -2$$

$$\csc \theta = -\sqrt{2} < 0$$

$$\therefore \sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0$$



$$-1 \leq \sin \theta \leq 1$$

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1$$

2. نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$$\alpha = \sin^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \csc \theta < 0 \quad .3$$

θ تقع في الربع الرابع $\theta = 2\pi - \alpha$ $= 2\pi - \frac{\pi}{4}$ $\theta = \frac{7\pi}{4}$	أو	θ تقع في الربع الثالث $\theta = \pi - \alpha$ $= \pi - \frac{\pi}{4}$ $\theta = \frac{3\pi}{4}$
$\frac{7\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ حل المعادلة:		

تحقق من فهمك (3)

أوجد حل المعادلة: $\sec \theta - 2 = 0$
 حيث: $0 \leq \theta < 2\pi$

أوجد مجموعة حل المعادلة: $\tan \theta + \sqrt{3} = 0$
 حيث: $\theta \in [0, 2\pi)$

مثال (4)

الحل: 1. نضع المعادلة على الصورة $\tan \theta = a$

$$\tan \theta + \sqrt{3} = 0$$

$$\tan \theta = -\sqrt{3} < 0$$

2. نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$$\tan \alpha = |-\sqrt{3}| = \sqrt{3}$$

$$\alpha = \tan^{-1}(\sqrt{3})$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \tan \theta < 0 \quad .3$$

θ تقع في الربع الرابع $\theta = 2\pi - \alpha$ $= 2\pi - \frac{\pi}{3}$ $\theta = \frac{5\pi}{3}$	أو	θ تقع في الربع الثاني $\theta = \pi - \alpha$ $= \pi - \frac{\pi}{3}$ $\theta = \frac{2\pi}{3}$
$S.S. = \left\{ \frac{5\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right\}$		

تحقق من فهمك (4)

- أوجد مجموعة حل المعادلة :
 (1) $\sqrt{3} \tan \theta + 1 = 0$
 (2) $\cot \theta - 1 = 0$

حيث : $\theta \in [0, 2\pi)$

- هل يمكن إيجاد حل المعادلات المثلثية التالية ؟
 (1) $\sin \theta = \frac{3}{2}$
 (2) $\cos \theta = -3$
 (3) $\sec \theta = 0.5$

ملخص حل المعادلة المثلثية جبرياً

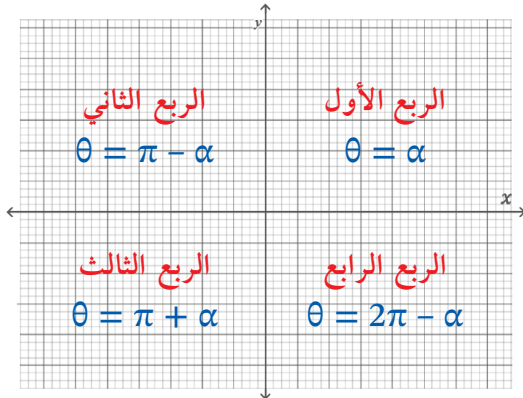
لإيجاد حل المعادلة المثلثية

$$\sin \theta = a, \quad \cos \theta = a, \quad \tan \theta = a$$

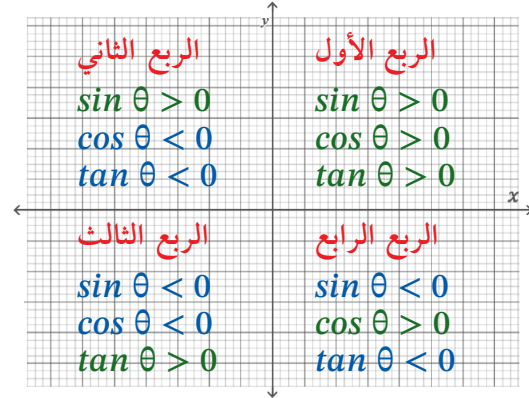
تتبع التالي :

1. نوجد قياس الزاوية α وهي زاوية الإسناد للزاوية θ التي تحقق أن :
 $\sin \alpha = |a|$
 $\cos \alpha = |a|$
 $\tan \alpha = |a|$

3. نوجد قيمة الزاوية θ حيث العلاقة بين θ, α كما هو موضح بالشكل :



2. نحدد الربع الذي تقع فيه الزاوية θ حسب إشارة الدالة المثلثية من خلال الأرباع الموضحة :



أولاً - البنود الموضوعية :

أتدرب وأحل المسائل

- في البنود من (1-3) اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة :

(a) (b)

- (1) إذا كانت $\sin x = \sqrt{3}$ فإن حل المعادلة يساوي $\emptyset$

(a) (b)

- (2) إذا كانت $\cos x = \frac{1}{2}$ فإن $x = \frac{\pi}{3}$

(a) (b)

- (3) إذا كانت $\sin x = \frac{1}{2}$ فإن $x = \frac{\pi}{6}$

■ في البنود من (1-3) اختر الإجابة الصحيحة :

(1) إذا كانت $\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi$ ، وكانت $\sin \theta = 1$ ، فإن قياس الزاوية θ بالقياس الستيني تساوي :

- (a) 30° (b) 120° (c) 135° (d) 150°

(2) إذا كانت $\pi \leq \theta < 2\pi$ ، وكانت $2\cos\theta - 1 = 0$ فإن قياس الزاوية θ بالقياس الستيني تساوي :

- (a) 60° (b) 120° (c) 330° (d) 315°

(3) حل المعادلة $\sqrt{3}\tan\theta - 1 = 0$ حيث $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ بالقياس الستيني تساوي :

- (a) 30° (b) 150° (c) 240° (d) 45°

ثانيًا - أسئلة المقال:

■ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات المثلثية التالية خلال دورة :



(1) $\cos\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

(2) $2\sin x + \sqrt{3} = 0$

(3) $\tan\theta = -1$

(4) $\cot\theta = \sqrt{3}$

(5) $2\sin\theta + \sqrt{2} = 0$

(6) $\csc\theta + 2 = 2$



مهارات تفكير عليا



■ أوجد مجموعة حل المعادلات المثلثية التالية : $\theta \in [0, 2\pi)$

(1) $2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 = 0$

(2) $2\cos\theta \sin\theta - \cos\theta = 0$

(3) $\sin 4\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(4) $\sin^2\theta - \sin\theta + 1 = 0$

(5) $\sin^2\theta - 2\sin\theta + 1 = 0$

■ في البنود من (1-2) اختر الإجابة الصحيحة :

(1) إذا كان $\sin\theta - \cos\theta = 0.8$ حيث θ زاوية حادة فإن قيمة $\sin\theta \cos\theta$ تساوي :

- (a) 0.8 (b) 1.8 (c) 0.18 (d) 1.6

(2) إذا كانت $\theta \in [0, 2\pi)$ فإن مجموعة حل المعادلة $(2\cos\theta - 1)(2\sin\theta - \sqrt{3}) = 0$ بالقياس الستيني :

- (a) $\{120^\circ, 240^\circ\}$ (b) $\{60^\circ, 300^\circ\}$ (c) $\{60^\circ, 300^\circ, 120^\circ\}$ (d) $\{60^\circ, 120^\circ\}$



استعد للاختبار

3

عزيزي المعلم ، عزيزي المتعلم :

يحتوي رمز الـ (QR) الخاص باختبار الوحدة على أسئلة مهمة، يجب الاستفادة منها في التقييم البنائي والنهائي وتدريب المتعلم عليها جيداً.

ما أهمية هذه الوحدة؟

أهمية المنطق في الرياضيات

المنطق هو أساس الرياضيات ولغتها؛ إذ يُعتمد عليه في بناء القواعد الرياضية، وتكوين البراهين من خلال الاستنتاج والاستدلال، مما يساعد على فهم الرياضيات بطريقة صحيحة ومنظمة.

أهمية المنطق في الهندسة

يساعد على بناء البراهين وفهم العلاقات بين الأشكال بدقة.

أهمية المنطق في العلوم

يُستخدم في تفسير الظواهر وبناء الفرضيات والاستنتاج العلمي.

أهمية المنطق في الحاسوب

يُستخدم في تصميم الخوارزميات والبرمجة واتخاذ القرارات المنطقية.

أهمية المنطق في الاقتصاد

يُساعد في تحليل البيانات واتخاذ القرارات المبنية على نماذج دقيقة.

سأتعلمُ في هذه الوحدة:

- المنطق الرياضي.
- التقارير.
- أدوات الربط.
- رمز المجموع.
- مقاييس التشتت (المدى-التباين-الانحراف المعياري).

تعلمتُ سابقاً:

- المجموعات والعمليات عليها.
- الأنماط والدوال.
- مقاييس النزعة المركزية.
- المتوسط الحسابي، والوسيط، والمعدل.



استعد للوحدة



عزيزي المعلم ، عزيزي المتعلم :

يحتوي رمز الـ (QR) الموجود في بداية الوحدة على مفاهيم علمية وتمارين تساعد في الاستعداد للوحدة وتعزز المفاهيم الواردة فيها.

الوحدة الرابعة

المنطق والإحصاء

CBC (Complete Blood Count)			
Test	Result	Unit	Reference Range
WBC	6.45	$10^3/\mu\text{L}$	4.00 - 10.00
RBC	4.71	$10^3/\mu\text{L}$	4.20 - 5.40
Hb	13.8	g/dL	12.0 - 16.0
Hct	41.2		36.0 - 46.0
MCH	87.5		80 - 100.0
MCHC	29.3		20 - 33.0
PLT	33.5	$10^3/\mu\text{L}$	2.0 - 36.0
RDW-CV	256		150 - 450
Differential	13.2		11.5 - 14.5
Neutrophils	59.1		40 - 70
Lymphocytes	30.4	%	20 - 40
Monocytes	6.7	%	2 - 10
	2.8	%	1 - 6
	1.0	%	0 - 1
Triglycerides	88	mg/dL	70 - 99
HDL Cholesterol	94	mg/dL	15 - 40
LDL Cholesterol	18	mg/dL	0 - 1.20
		mg/dL	0.5 - 7.0
		mg/dL	< 200
		mg/dL	< 150
		mg/dL	> 40
		mg/dL	< 130
		U/L	10 - 40
		U/L	7 - 40

مقاييس التشتت
- الانحراف المعياري

المنطق
والتقارير

رمز
المجموع Σ

أدوات
الربط

• المدى
• التباين - الانحراف
المعياري (للقيم -
جدول تكراري بسيط
- جدول تكراري
ذوفئات)

نفي العبارة
و
أو
→
↔

تعريف المنطق
تعريف التقارير



تحديد معدلات السكر في الدم لدى الأطفال Determining blood sugar levels in children



هل تعلم؟



إن الإفراط في تناول السكريات والحلويات يؤثر في صحة الأطفال، وقد يؤدي إلى زيادة الوزن، تسوس الأسنان، وضعف المناعة لديهم. كما أن تناول الأطعمة غير الصحية بكثرة قد يسبب ارتفاعاً في معدل السكر في الدم ويؤثر في صحة الجسم مع مرور الوقت. ينصح الأطباء بالاعتدال في تناول السكريات والاهتمام بالغذاء الصحي المتوازن.



تشخيص ارتفاع السكر



يمكن أن يشير ارتفاع معدل السكر في الدم إلى وجود مشكلة صحية تحتاج إلى متابعة، خاصة إذا تكرر الارتفاع بشكل مستمر. لذلك يوصي الأطباء بإجراء الفحوصات الدورية والحرص على اتباع نظام غذائي صحي وممارسة النشاط البدني.



مهمتك. تحديد معدلات السكر في الدم واستخلاص النتائج

سيقوم المتعلمون بعمل دراسة مبسطة لجمع بيانات عن معدلات السكر لدى الأطفال باستخدام بيانات افتراضية أو نتائج من جهاز قياس السكر تحت إشراف المعلم أو ولي الأمر.

يقوم المتعلمون بتسجيل النتائج في الجداول التالية.

تقسيم الفئات.



الفئة الثانية

الأطفال من 6 - 12 سنة



الفئة الأولى

الأطفال أقل من 6 سنوات



- المتوسط الحسابي
- الوسيط
- المنوال

بعد ذلك تتم مقارنة النتائج بين الفئتين لمعرفة أي الفئات تمتلك معدلات سكر أقرب إلى المعدل الطبيعي، مع تقديم نصائح للتوعية الغذائية وتقليل الإفراط في تناول السكريات.

جدول تسجيل النتائج



الفئة الثانية: الأطفال من 6 - 12 سنة	
رقم الطفل	معدل السكر (mg/dl)
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

الفئة الأولى: الأطفال أقل من 6 سنوات	
رقم الطفل	معدل السكر (mg/dl)
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	



الاستنتاج والتوصيات

بعد الانتهاء من تسجيل البيانات وتحليلها، يناقش المتعلمون النتائج ويقارنون بين الفئتين، ثم يقدمون توصيات للحفاظ على الصحة.



شرب كميات كافية من الماء



ممارسة الرياضة بانتظام



تناول الخضروات والفواكه



التقليل من تناول الحلويات والمشروبات الغازية

تحليل النتائج



الفئة	المتوسط الحسابي	الوسيط	المنوال
أقل من 6 سنوات			
من 6 - 12 سنة			

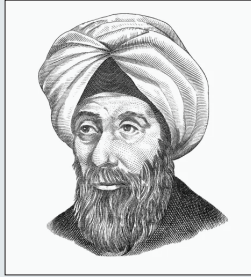


*قارن النتائج بين الفئتين وحدد أي الفئات معدلات سكرها أقرب إلى المعدل الطبيعي.

الاعتدال في تناول الطعام الصحي ومتابعة معدل السكر في الدم يضمن لنا حياة صحية ونشاطاً أفضل.

فيما
سبق تعلمنا- تعلمت قراءة الجمل
وفهم معانيها

تاريخ الرياضيات:

أبو علي الحسن بن الهيثم
430 - 354 هـعالم موسوعي من
أعظم علماء الرياضيات
والفيزياء، اعتمد في
بحوثه على منهجين هما:
الاستقراء، الاستنباط،
وفي الحالتين كان يعتمد
على التجربة والملاحظة.

فكرة الدرس:



التعرف على العبارات المنطقية وتمييزها، وفهم طرق التفكير المنطقي، مثل:
الاستقراء، والاستنتاج.

المصطلحات:



1. العبارة المنطقية Logical Statement
2. التقرير Statement
3. الاستقراء Inductive Reasoning
4. الاستنتاج Deductive Reasoning
5. الجملة الخبرية Declarative Sentence
6. الجملة غير الخبرية Non-Declarative Sentence
7. صواب True
8. خطأ False



مسألة الدرس:



1 - عند قياس الزوايا الداخلة لعدة مثلثات أطوال أضلاعها مختلفة،
نجد أن مجموع قياسات كل منها 180° .

نلاحظ أن مجموع قياسات الزوايا الداخلة لأي مثلث

2 - الأعداد الزوجية تقبل القسمة على 2، والعدد 20 هو عدد زوجي.

نستنتج أن العدد 20 يقبل القسمة على

نلاحظ من مسألة الدرس (1):

أننا من خلال الأمثلة والملاحظات توصلنا بالتنبؤ (التخمين) إلى أن مجموع قياسات
زوايا المثلث يساوي 180° ، وهذا ما نسميه: **استقراء رياضي** (منطق رياضي).

ونلاحظ من مسألة الدرس (2):

بدأنا من قاعدة عامة وتوصلنا إلى حالة خاصة مؤكدة وهذا ما نسميه: **الاستنتاج**

الفرق بين الاستقراء والاستنتاج:

الاستقراء	الاستنتاج
يبدأ بأمثلة	يبدأ بقاعدة عامة
النتيجة متوقعة أو ممكنة	النتيجة مؤكدة منطقية
من الخاص إلى العام	من العام إلى الخاص

في المواقع التالية حدد أيًا منها استقراء وأيًا منها استنتاج

مثال (1)

م	الموقف
1	الحديد والنحاس والألمنيوم تتمدد بالحرارة إذا المعادن تتمدد بالحرارة.
2	جميع الطيور لها أجنحة والعصفور طائر إذا للعصفور أجنحة.
3	جميع الأعداد التي رقم خانة الآحاد لها 0 أو 5 تقبل القسمة على 5 والعدد 75 عدد آحاده 5 إذا العدد 75 يقبل القسمة على 5
4	الأعداد 2,4,6,8 كل منها يقبل القسمة على 2 إذا الأعداد 2,4,6,8 هي أعداد زوجية.
5	كل من يلتزم بقوانين المرور يقل تعرضه للحوادث وأحمد يلتزم بقوانين المرور إذا أحمد أقل عرضة للحوادث.

الحل:

1. استقراء 2. استنتاج 3. استنتاج 4. استقراء 5. استنتاج

تعميم:

كُلُّ من الاستقراء والاستنتاج يساعد الإنسان على التفكير المنظم واتخاذ القرارات الصحيحة في حياته اليومية، حل المشكلات وفهم العلاقات بين الأشياء، والذي يساعدنا في التمييز بين البرهان الصحيح والبرهان الخاطئ وهذا ما نسميه بالمنطق الرياضي .

- الاستقراء الرياضي : يكون من الخاص إلى العام.
- الاستنتاج الرياضي : يكون من العام إلى الخاص.

تحقق من فهمك (1)

في المواقع التالية حدد أيًا منها استقراء وأيًا منها استنتاج

م	الموقف
1	جميع الأعداد الفردية لا تقبل القسمة على 2 والعدد 39 هو عدد فردي إذا العدد 39 لا يقبل القسمة على 2.
2	إذا كان مجموع قياسات زوايا المثلث 180° وقياس زاويتين فيه 30° و 60° إذا قياس الزاوية الثالثة تساوي 90°
3	إذا كانت السماء مليئة بالغيوم السوداء فإن المطر يتساقط والسماء اليوم مليئة بالغيوم السوداء فإننا نتوقع سقوط الأمطار .
4	إذا علمت أن $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$ إذا مربع أي عدد هو ضرب العدد في نفسه.

أهمية المنطق الرياضي :

- يساعد المنطق على :
- ترتيب الأفكار .
- حل المشكلات .
- التحقق من صحة الحل .
- تفسير النتائج .
- بناء البراهين الرياضية .

معلومة

تضم الكويت 9 جزر أهمها جزيرة بوبيان وهي أكبر جزيرة كويتية ، وجزيرة فيلكا ذات الطابع التاريخي والسياحي وتعد من أقدم المناطق المأهولة في دولة الكويت ، ويُطلق عليها قديماً اسم "إيكاروس"

م	الموقف
5	جميع المتعلمين المجتهدين نجحوا وأنور مجتهد إذا أنور ناجح.
6	لدراسة حالة الطقس يعتمد المختصون على أمور كثيرة وهي: (سرعة الرياح، اتجاهها، مقدار ومناطق الضغط الجوي) إذا يمكننا توقع حالة الطقس في أي يوم من الأيام.

المنطق : هو أسلوب منظم للتفكير يساعد على الوصول إلى نتائج صحيحة اعتماداً على معلومات واضحة.

العبارة المنطقية : هي التقرير وهي أيضاً القضية المنطقية.



بالنظر إلى خريطة دولة الكويت اقرأ الجمل التالية، ثم حدد نوع هذه الجمل أيًا منها يمكن الحكم عليها بأنها جملة خبرية (صحيحة - خاطئة)، وأيها استفهامية أو تعجب أو أمر .

مثال (2)

م	الجملة
1	مدينة الكويت هي عاصمة دولة الكويت .
2	نهر النيل يمر بأرض الكويت .
3	ما أجمل الكويت !
4	هل زرت جزيرة فيلكا ؟
5	اذهب إلى البحر مساءً .

الحل:

- عبارة خبرية صحيحة
- عبارة خبرية خاطئة
- تعجب
- استفهام
- أمر

تعميم :

الجُمْل التي يمكن تحديد صحتها أو خطئها تسمى جملة خبرية، والتي لا يمكن الحكم عليها تسمى جملة غير خبرية.

نعلم أن الجمل في اللغة العربية تختلف في أنواعها فنجد الجملة الفعلية والاسمية والاستفهامية والتعجبية والأمر .

أما في المنطق الرياضي تُقسَّم الجمل إلى قسمين هما:

- جملة خبرية: هي الجملة التي تحمل لنا خبراً ما .
- جملة غير خبرية: هي الجملة التي لا تحمل لنا خبراً ما .

تحقق من فهمك (2)

حدد نوع كل جملة أيها خبرية وأيها غير خبرية

م	الجملة
1	الشتاء فصل من فصول السنة.
2	الفروانية عاصمة الكويت.
3	ما أجمل السماء!
4	اكتب الواجب يا أحمد.
5	هل المثلث متطابق الأضلاع متطابق الزوايا؟

العبارة البسيطة (التقرير)

هي جملة خبرية ذات معنى تحمل خبراً ويمكن الحكم بأنها صائبة (True) أو خاطئة (False) وليس كلاهما معاً.

العبارة الصائبة والعبارة الخاطئة

إذا كانت العبارة تحمل خبراً صادقاً فإنها تُسمى عبارة صائبة. وإذا كانت العبارة تحمل خبراً غير صادقاً فإنها تُسمى عبارة خاطئة.

قيم الصحة (قيم الحقيقة)

م العبارة (التقرير)		
صحيح	T	True
خطأ	F	False

إذا رمزنا للعبارة بالرمز p فإما أن تكون صحيحة T أو خاطئة F

مثال (3) وضع قيمة الصحة لكل من العبارات (التقارير) التالية:

م	العبارة
1	العدد 32 يقبل القسمة على 4
2	$\sqrt{16} = -4$
3	العدد 18 من مضاعفات العدد 3.
4	الشكل الرباعي يُسمى مربعاً.
5	5 عدد فردي.
6	$2 \times 10 \neq 20$

الحل:

1. T 2. F 3. T 4. F 5. T 6. F

وضح قيمة الصحة لكل من العبارات (التقارير) التالية:

م	العبرة
1	$3 + 4 > 5$
2	العدد 5 من مضاعفات العدد 10
3	للمعادلة $x^2 - 3x + 2 = 0$ جذران حقيقيان مختلفان.
4	تونس دولة آسيوية.
5	مجموع قياسات زوايا الشكل الخماسي 180°
6	عدد حروف كلمة ثريا هو أربعة حروف.
7	استاد جابر يقع في منطقة جابر الأحمد.

أدرب وأحل المسائل



أولاً - البنود الموضوعية :

■ في البنود من (1-10) اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة:

- (1) الجملة خبرية يمكن الحكم عليها بالصواب أو الخطأ. (a) (b)
- (2) الجملة الاستفهامية تُعد عبارة منطقية. (a) (b)
- (3) الاستنتاج يبدأ بأمثلة متعددة. (a) (b)
- (4) (اكتب الدرس) جملة خبرية. (a) (b)
- (5) (لا تذهب إلى الصحراء مساءً) هي جملة خبرية. (a) (b)
- (6) (دولة الكويت تقع على الخليج العربي) هي جملة خبرية. (a) (b)
- (7) (هبة درست جيداً) هي جملة خبرية. (a) (b)
- (8) (هل المثلث المتطابق الضلعين متطابق الزوايا؟) هي جملة خبرية. (a) (b)
- (9) $7 = 4 + 3$ هي عبارة صحيحة. (a) (b)
- (10) (ما الدول التي تشترك في الحدود مع المملكة العربية السعودية؟) هي جملة خبرية. (a) (b)

■ في البنود من (1-7) ظلل اختر الإجابة الصحيحة :

(1) أي مما يلي تُعتبر عبارة منطقية:

- (a) ما أجمل السماء!
(b) هل حضرت الدرس؟
(c) 7 عدد أولي
(d) افتح الباب

(2) أي من الجمل التالية ليست عبارة منطقية:

- (a) الكويت دولة عربية
(b) ادرس جيداً
(c) $2 + 2 = 4$
(d) $5 > 9$

(3) أي مما يلي يُمثل استقراء:

- (a) استخدام قانون لإيجاد نتيجة
(b) ملاحظة نمط والوصول إلى قاعدة
(c) حل معادلة
(d) رسم شكل هندسي

(4) أي مما يلي يُمثل استنتاجاً:

- (a) توقع نتيجة إحدى المباريات
(b) التنبؤ بحالة الطقس
(c) تطبيق قاعدة عامة لإيجاد نتيجة
(d) تخمين الإجابة

(5) أي المواقف التالية يُمثل استقراء:

- (a) كل المربعات هي مستطيلة.
(b) العدد 64 هو مربع كامل.
(c) لاحظت أن الحديد والنحاس يتمددان بالحرارة فاستنتجت أن المعادن تتمدد بالحرارة.
(d) جميع الأعداد الفردية لا تقبل القسمة على 2 والعدد 39 عدد فردي فإن العدد 39 لا يقبل القسمة على 2

(6) أي المواقف يُمثل استنتاجاً:

- (a) لاحظ المتعلم أن كل اختبارات الرياضيات تحتاج إلى تركيزٍ عالٍ.
(b) شاهدت عدة طيور تطير فاستنتجت أن الطيور تطير.
(c) جميع المتعلمين المجتهدين ناجحون وخالد مجتهد إذًا خالد ناجح.
(d) الماء يغلي عند 100° مئوية.

ثانياً - أسئلة المقال:

(1) حدد نوع كل جملة أيها خبرية وأيها غير خبرية :

م	الجملة	نوع الجملة
1	الشمس تشرق من المشرق.	
2	هل تحب القراءة؟	
3	اجتهد في دراستك.	
4	ما أجمل البحر!	
5	$12 < 5$	
6	الربيع فصل من فصول السنة.	
7	ما اسم مدرستك؟	
8	التدخين ضار جداً بالصحة.	
9	الهندسة علم من علوم الرياضيات.	
10	اكتبي الدرس يا حصة.	
11	العدد 55 أكبر من العدد 9	
12	$3 \times 3 \times 3 = 27$	

(2) وضح قيمة الصحة لكل من العبارات (التقارير) :

م	العبارة	T	F
1	الإسلام دين محبة.		
2	$5 + 7 = 9$		
3	يتجه المسلمون في دولة الكويت إلى المشرق لأداء الصلاة.		
4	12 عدد أولي.		
5	الشمس تشرق من الغرب.		
6	العدد 10 يقبل القسمة على 2 و 5		
7	عدد حروف كلمة عبدالرحمن 9 حروف.		

أدوات الربط (العمليات المنطقية) Logic and Statements

فكرة الدرس:



- التعرف على العبارة البسيطة (التقرير الأولي) Simple Statement
- العبارة المركبة (التقرير المركب)
- أدوات الربط بين العبارات البسيطة (العمليات على التقارير).

المصطلحات:



1. العبارة (التقرير) (p) Statement
2. نفي العبارة (التقرير) $(\sim p)$
3. أداة الوصل (و) and
4. أداة الفصل (أو) or
5. أداة الربط الشرطية "إذا كان ... فإن ..." if then
6. أداة الربط الشرطية المزدوجة (.... إذا وفقط إذا كان) if and only if



مسألة الدرس:



في الجدول التالي اقرأ الجمل التالية ، ثم حدد أيها تحمل خبرًا واحدًا وأيها تحمل أكثر من خبر :

م	الجملة	خبر واحد أو أكثر من خبر
1	الصيف فصل من فصول السنة.	
2	حمد يدرس الرياضيات.	
3	عبدالله يدرس الرياضيات والحاسوب.	
4	فرح تدرس في كلية الطب أو كلية الصيدلة.	
5	إذا كان المثلث متطابق الأضلاع فإنه متطابق الزوايا.	
6	السماء تمطر أو الشمس مشرقة.	
7	يتطابق ضلعان في مثلث إذا وفقط إذا تطابقت زاويتان في المثلث.	

• •
مما سبق: لاحظنا أن بعض الجمل الخبرية تحمل خبرًا واحدًا ، والبعض يحمل أكثر من خبر بينهم بعض أدوات الربط مثل "و - أو - إذا كان ... فإن - إذا وفقط إذا" و على هذا الأساس نصل إلى التعريف التالي :

العبارة البسيطة (التقرير البسيط - القضية الأولية - القضية المستقلة)

هي جملة خبرية تحمل خبرًا واحدًا.

تذكروا

- العبارة (التقرير):
هي جملة خبرية
تقبل الصحة أو الخطأ
وليس كلاهما معاً.

العبارة المركبة (التقرير المركب)

هي جملة خبرية تشتمل على أكثر من خبر واحد

ملاحظات هامة :

1. نرمل للعبارة البسيطة (التقرير البسيط) بالحروف الصغيرة مثل :

$p, q, r, s, t, \dots$

2. العبارة المركبة (التقرير المركب) هي التي تتكوّن من عبارتين بسيطتين أو أكثر ويربط بين كل منها أداة من أدوات الربط التالية :

و - أو - إذا كان ... فإن - إذا وفقط إذا - وغيرها.

3. نرمل للعبارة المركبة (التقرير المركب) بالحروف الكبيرة A, B, C .

لنستكشف معًا

في الجدول التالي حدد أيًا من العبارات التالية : عبارة بسيطة أو عبارة مركبة.

م	العبارة	بسيطة أو مركبة
1	العدد 5 عدد فردي.	
2	العدد 2 عددٌ أولي وزوجي.	
3	مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي 180°	
4	إذا كانت $x = 5$ فإن $x + 3 = 8$	
5	إذا سقطت الأمطار فإن الخير قادم.	
6	السماء تمطر أو الشمس مشرقة.	
7	إذا كان $x > y$ و $y > z$ فإن $x > z$	

ملاحظة هامة :

عند تكوين العبارة المركبة لا يهم وجود أي نوع من العلاقة سواء في المعنى أو المحتوى بين العبارات البسيطة التي تدخل في تكوين العبارة المركبة **فمثلا :**

العبارة : الشمس ساطعة أو $3 + 5 = 8$

تمثل عبارة مركبة تتكوّن من عبارتين بسيطتين (أوليتين) هما

الأولى هي p : الشمس ساطعة

و الثانية هي q : $3 + 5 = 8$

ونلاحظ أنه لا يوجد أي نوع من العلاقة بينهما سواء في المعنى أو المحتوى تذكر دائماً أننا لا نبحث عن معنى العبارة (التقرير - القضية).

ملاحظة هامة :

من الخواص الأساسية للعبارة المركبة اعتماد قيمة الصحة الخاصة بها على

1. قيمة الصحة لكل عبارة بسيطة فيها .

2. أداة الربط المستخدمة في ربط هذه العبارات البسيطة.

! انتبه

عبارة بسيطة :

تعني التقرير البسيط.

عبارة مركبة :

تعني التقرير المركب.

! انتبه

الجملة الخبرية

تقبل الصحة $true$

أو

الخطأ $false$

وليس كلاهما معًا.

العمليات المنطقية (أدوات الربط) Logical connectives

تعلمت فيما سبق العمليات الحسابية (عملية الجمع، والطرح، والضرب، والقسمة) والتي نستخدمها عند التعامل مع الأعداد والرموز والمقادير الجبرية. وأيضا العمليات على المجموعات (التقاطع، والاتحاد، والفرق، وكذلك المتممة). وهنا توجد أيضاً:

العمليات المنطقية للربط بين العبارات البسيطة للحصول على عبارة جديدة تسمى عبارة مركبة (قضية مركبة)، مستخدمين بعض الرموز الخاصة والتي نسميها بأدوات الربط المنطقية بالإضافة إلى ذلك صحة أو خطأ العبارة البسيطة، والتي نسميها جداول الصحة والخطأ.

والآن نتعرف على أدوات الربط المنطقية:

أدوات الربط الثنائية	أدوات الربط الأحادية
تتعامل مع عبارتين أو أكثر	تتعامل مع عبارة واحدة

1. أداة نفي العبارة

العبارة "مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي 180° " هي عبارة صحيحة (T)
فإن نفي هذه العبارة:
"مجموع قياسات زوايا المثلث لا يساوي 180° " وهي عبارة خاطئة (F)

في الجدول التالي عبارات (تقارير) قد تكون صحيحة (T) وقد تكون خاطئة (F) أكتب نفي كلٍّ منها

مثال (1)

الحل:

نفي العبارة (نفي التقرير) $\sim p$	العبارة (التقرير) p
عيون أحمد ليست زرقاء.	عيون أحمد زرقاء.
العدد 7 يقبل القسمة على 2.	العدد 7 يقبل القسمة على 2.
$3 + 4 \geq 10$	$3 + 4 < 10$
$2 \times 3 = 5$	$2 \times 3 \neq 5$
$2 \notin \{3, 4, 5\}$	$2 \in \{3, 4, 5\}$

نلاحظ أن :

من أدوات النفي هي : ليس، لا، ما،

فإذا كان لدينا العبارة البسيطة هي p فإن نفي العبارة هو ليس p ونرمز لها بالرمز $\sim p$
إذا كانت العبارة المعطاة صحيحة (T) فإن نفيها يكون عبارة خاطئة (F) والعكس .

ملحوظة

عناصر علم المنطق الرياضي :

1. العبارات
2. عمليات الربط بين عبارتين أو أكثر للحصول على عبارة جديدة

! انتبه

العبارة الرمز p
صحيحة الرمز T
خاطئة الرمز F

نفي العبارة يرمز له بالرمز $(\sim)$ يعتبر من أبسط العمليات المنطقية، وهو أداة ربط أحادية، لأنها تتعامل مع عبارة واحدة (تقرير واحد أو قضية واحدة).
مما سبق نصل إلى هذا الجدول والذي نسميه جدول الصحة (جدول الحقيقة).

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
T	F	T
F	T	F

ملاحظات :

1. نفي النفي للعبارة هو العبارة نفسها.
2. ليس من الضروري أن تكون جميع القيم الواردة في الجدول صحيحة ، إنما الجدول بمكوناته الصحيحة والخاطئة يسمى **جدول الصحة**. عدد عناصر العبارة البسيطة دائماً عنصران وهما إما T أو F .

تذكروا

دائماً العبارة هي القضية وهي التقرير.

تذكروا

نفي العبارة يرمز له $(\sim)$

تذكروا

عدد عناصر العبارة:
هي نفسها عدد التركيبات الممكنة.

تحقق من فهمك (1)

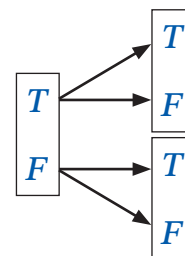
في الجدول التالي عبارات (تقارير) قد تكون صحيحة (T) وقد تكون خاطئة (F)
أكتب نفي كل منها

العبارة (التقرير) p	نفي العبارة (نفي التقرير) $\sim p$
منهج الرياضيات مُشوق في دراسته.	
العدد 2 عامل من عوامل العدد 5	
$x \in \mathbb{R}$	
خالد يدرس الطب.	

ملاحظات :

1. عدد عناصر العبارة البسيطة p (قيم الصحة) عنصران دائماً وهما إما T أو F .
2. إذا كان كل من p, q عبارتين بسيطتين فإن:
التركيبات الممكنة من قيم الصحة للتقريرين عددها $2^2 = 4$ ونمثّلها كالتالي:

العبارة (التقرير) q	العبارة (التقرير) p
T	T
F	T
T	F
F	F



2. أداة الوصل " و " :

للتعرف على أداة الربط " و " نناقش المثال التالي :

لنستكشف

قال سمير : " ذهبت إلى الحديقة و اشتريت زهوراً "
متى يكون سمير صادقاً (صائباً) في كلامه ؟ ومتى يكون غير صادق (خاطئاً) ؟

المناقشة :

نفرض أن العبارة p هي : (ذهب سمير إلى الحديقة)، والعبارة q هي : (اشترى سمير الزهور) لدينا الحالات التالية :

يكون سمير على خطأ

- في قوله إذا ثبت لنا أحد الأمور التالية:
- ذهب سمير إلى الحديقة ولم يشتري الزهور (بمعنى أن p صواب ، q خطأ)
- سمير لم يذهب إلى الحديقة، ولكنه اشترى الزهور (بمعنى أن p خطأ ، q صواب)
- سمير لم يذهب إلى الحديقة ولم يشتري الزهور (بمعنى أن p خطأ ، q خطأ)

يكون سمير على صواب

- في حالة إذا ثبت أنه
- "ذهب إلى الحديقة
- واشترى الزهور" (بمعنى
- أن p صواب ، q صواب)

مما سبق فإن :

العبارة المركبة (p و q) والتي نرمز لها بالرمز ($p \wedge q$) تكون صحيحة فقط إذا كان كل من p, q صحيحين معاً وتكون خاطئة فيما عدا ذلك

تعميم :

$p \wedge q$	(العبارة) q	(العبارة) p
T	T	T
F	F	T
F	T	F
F	F	F

إذا كانت كلٌّ من p, q عبارات بسيطة فإن جدول الصحة للعبارة المركبة $p \wedge q$ هو

أداة الوصل " و " تعتبر أداة من أدوات الربط الثنائية ، لأنها تتعامل مع عبارتين.

! انتبه

" و "

أداة عطف

دمج

خلط

مزج

ضم

تقاطع

! انتبه

p و q

p and q

ورمزها هو $p \wedge q$

بفرض العبارات البسيطة التالية :

$\rho: 4 > 3$ ، $q: 7$ عدد زوجي ، r : المنامة عاصمة البحرين

مثال (2)

اكتب العبارات المركبة التالية : $\rho \wedge q$ ، $\rho \wedge r$ ، $r \wedge q$

الحل:

ρ $4 > 3$	q 7 عدد زوجي	r المنامة عاصمة البحرين	$\rho \wedge q$	$\rho \wedge r$	$r \wedge q$
عبارة صحيحة (T)	عبارة خاطئة (F)	عبارة صحيحة (T)	F	T	F

تحقق من فهمك (2)

1. بفرض العبارات البسيطة التالية:

$\rho: 2 > 3$ ، $q: 6$ عدد زوجي ، r : الدوحة عاصمة قطر

اكتب العبارات المركبة التالية : $\rho \wedge q$ ، $\rho \wedge r$ ، $r \wedge q$

2. كوّن جدول الصحة للعبارة: $\sim(\rho \wedge \sim q)$

3. أداة الفصل "أو" :

للتعرف على أداة الربط "أو" نناقش المثال التالي :

لنستكشف

قال أنور: " ذهبت إلى الحديقة أو ذهبت إلى المسرح "

متى يكون أنور صادقاً (صائباً) في كلامه؟ ومتى يكون غير صادق (خاطئاً)؟

المناقشة :

نفرض أن العبارة ρ هو ذهب أنور إلى الحديقة ، والعبارة q ذهب إلى المسرح
لدينا الحالات التالية:

- 1 ذهب أنور إلى الحديقة وكذلك ذهب إلى المسرح. (ρ صواب ، q صواب)
- 2 ذهب أنور إلى الحديقة ولم يذهب إلى المسرح. (ρ صواب ، q خطأ)
- 3 أنور لم يذهب إلى الحديقة ولكنه ذهب إلى المسرح. (ρ خطأ ، q صواب)
- 4 أنور لم يذهب إلى الحديقة ولم يذهب إلى المسرح. (ρ خطأ ، q خطأ)

في الحالات الثلاثة الأولى نكون على صواب (صادقين)، لأن أحد العبارتين على الأقل تحقق.

في الحالة الرابعة نكون على خطأ (غير صادقين) لأن العبارتين لم تتحققا.

انتبه !

ρ	$\sim \rho$
T	F
F	T

مما سبق فإن :

العبارة المركبة (p أو q) والتي نرمز لها بالرمز ($p \vee q$) تكون صحيحة إذا كان أحد العبارتين على الأقل صحيحة، وتكون خاطئة إذا كانت كلتاها خاطئتين.

تعميم:

إذا كان كل من p, q عبارة بسيطة فإن جدول الصحة للعبارة المركبة $p \vee q$ هو

p (التقرير)	q (التقرير)	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

أداة الوصل "أو" تعتبر أداة من أدوات الربط الثنائية، لأنها تتعامل مع عبارتين أو أكثر.

كُون جدول الصحة للعبارات التالية:

- a $(p \vee \sim q)$
- b $(p \wedge q) \vee \sim q$
- c $(p \vee q) \wedge \sim q$

مثال (3)

الحل:

a $(p \vee \sim q)$

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$
T	T	F	T
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T

b $(p \wedge q) \vee \sim q$

p	q	$p \wedge q$	$\sim q$	$(p \wedge q) \vee \sim q$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	F	F	F
F	F	F	T	T

انتبه !

p	$\sim p$
T	F
F	T

c $(p \vee q) \wedge \sim q$

p	q	$p \vee q$	$\sim q$	$(p \vee q) \wedge \sim q$
T	T	T	F	F
T	F	T	T	T
F	T	T	F	F
F	F	F	T	F

تحقق من فهمك (3)

كوّن جدول الصحة لكل من العبارات التالية :

- a $(p \wedge q) \vee q$ b $(p \vee q) \wedge q$
c $(p \vee q) \wedge (p \wedge q)$ d $\sim (p \wedge q) \vee \sim q$
e $\sim p \vee (p \wedge \sim q)$ f $(p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$

* ملخص أدوات الربط المنطقية :

النفي ($\sim$) - الوصل ($\wedge$) - الفصل أو ($\vee$)

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim p$	$\sim q$
T	T	T	T	F	F
T	F	F	T	F	T
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

4. أداة الربط الشرطية "إذا كان فإن":

إذا كان كل من p, q عبارة بسيطة، فإن العبارة "إذا كان p فإن q " تكون عبارة مركبة، ونرمز لها بالرمز $p \rightarrow q$ وتسمى هذه العبارة "عبارة شرطية"

وعد عبدالله ابنه حمداً قائلاً "إذا نجحت في الامتحان فسأشتري لك هدية" متى يكون عبدالله صادقاً (صائباً) في كلامه؟ ومتى يكون غير صادقاً (خاطئاً)؟

مثال (4)

الحل:

نفرض أن العبارة p هي نجاح حمد في الامتحان.

والعبارة q اشترى عبدالله لابنه حمد هدية.

لدينا الحالات (الاحتمالات) التالية:

1. نجاح حمد في الامتحان واشترى له والده عبدالله هدية (p صواب، q صواب)

الوالد كان صادقاً في وعده وبالتالي $p \rightarrow q$ عبارة صحيحة

2. نجح حمد في الامتحان ، ووالده عبدالله لم يشتري له هدية (p صواب ، q خطأ)
 الوالد كان غير صادق في وعده وبالتالي $p \rightarrow q$ عبارة خاطئة
3. لم ينجح حمد في الامتحان، واشترى له والده عبدالله هدية (p خطأ ، q صواب)
 الوالد كان صادقاً في وعده وبالتالي $p \rightarrow q$ عبارة صحيحة
 (الوالد كان صادقاً في وعده لأنه لم يذكر شيئاً عما سيحدث إذا لم ينجح حمد)
4. لم ينجح حمد في الامتحان ، ولم يشتري والده هدية له (p خطأ ، q خطأ)
 الوالد كان صادقاً في وعده وبالتالي $p \rightarrow q$ عبارة صحيحة
 (الوالد عبدالله حدد ما سوف يحدث إذا نجح الابن، وبما أن الابن لم ينجح فالوالد غير مطالب بالهدية)

مما سبق فإن :

العبارة $p \rightarrow q$ دائماً صحيحة إلا إذا كانت العبارة الأولى صحيحة والثانية خاطئة.

تعميم :

إذا كان كل من p, q عبارة بسيطة فإن جدول الصحة للعبارة $p \rightarrow q$

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

ملاحظات :

العبارة الأولى p تسمى شرطاً
 العبارة الثاني q تسمى جواباً للشرط
 العبارة $p \rightarrow q$ تقرأ p تؤدي إلى q
 وأيضاً تقرأ إذا كان q فإن p

تحقق من فهمك (4)

وعد محمد ابنته مها قائلاً:
 "إذا حصلت على زيادة في راتبي فسأشتري لك سيارة جديدة" ناقش:
 متى يكون محمد صادقاً (صائباً) في كلامه؟ ومتى يكون غير صادق (خاطئاً)؟ ووضح ذلك في جدول الصحة.
 انتبه: لم يذكر الأب أنه في حال عدم حصوله على زيادة فإنه لن يشتري سيارة جديدة لها.

ملحوظات :

يجب أن ندرك تماماً بأننا لا نستخدم أداة الربط " $\rightarrow$ " بين عبارتين منسجمتين دوماً للوصول إلى برهان أو نتيجة معينة إنما نستخدمها للربط بين أية عبارتين مستقلتين يمكن الحكم على صحة أو خطأ العبارة المركبة.

كُون جدول الصحة لكل من العبارات التالية:

مثال (5)

a $(q \rightarrow p)$

b $(\sim q \rightarrow \sim p)$

(a)				(b)		
ρ	q	$\sim \rho$	$\sim q$	$\rho \rightarrow q$	$q \rightarrow \rho$	$\sim q \rightarrow \sim \rho$
T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	T	F
F	T	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T	T

الحل:

ملاحظات:

1. العبارة الشرطية $\rho \rightarrow q$
 2. عكس العبارة الشرطية $q \rightarrow \rho$
 3. ضد العبارة الشرطية $\sim q \rightarrow \sim \rho$
 4. قيم الصحة للعبارة الشرطية $\rho \rightarrow q$ هي نفسها قيم الصحة.
- لضد العبارة $\sim \rho \rightarrow \sim q$ (نقول العبارة $\rho \rightarrow q$ تكافئ العبارة $\sim q \rightarrow \sim \rho$).

العبارات المتكافئة: تكون العبارتان المركبتان متكافئتين إذا كان لهما قيم الصحة نفسها.

تحقق من فهمك (5)

كوّن جدول الصحة لكل من العبارات التالية:

- (a) $(\rho \wedge q) \rightarrow q$ (b) $(\rho \vee q) \rightarrow q$ (c) $(\rho \rightarrow q) \wedge (\rho \rightarrow q)$
 (d) $(\rho \rightarrow q) \vee (\rho \rightarrow q)$ (e) $\rho \rightarrow (\rho \wedge \sim q)$ (f) $(\rho \rightarrow q) \wedge (\sim \rho \rightarrow \sim q)$

* ملخص أدوات الربط المنطقية:

النفى ($\sim$) - الوصل ($\wedge$) - الفصل ($\vee$) أو -
 أداة الربط الشرطية "إذا كان فإن " ($\rightarrow$)

ρ	q	$\rho \wedge q$	$\rho \vee q$	$\sim \rho$	$\sim q$	$\rho \rightarrow q$	$q \rightarrow \rho$
T	T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	T	F	T
F	T	F	T	T	F	T	F
F	F	F	F	T	T	T	T

5. أداة الربط الشرطية المزدوجة "..... إذا فقط إذا كان":

إذا كان كل من ρ , q عبارة بسيطة، فإن العبارة " ρ إذا فقط إذا كان q " يكون عبارة مركبة، ونرمز لها بالرمز $\rho \leftrightarrow q$ ونسمى هذه العبارة "عبارة شرطية مزدوجة" وهي تعني "إذا كان ρ فإن q و إذا كان q فإن ρ ".
 فمثلاً إذا كان المثلث متطابق الأضلاع فإنه يكون متطابق الزوايا وإذا كان المثلث متطابق الزوايا فإنه متطابق الأضلاع.

مثال (6) ما قيم الصحة للتقرير المركب $p \leftrightarrow q$ ؟

الحل:

العبرة " p " إذا وفقط إذا كان q هي عمليتا شرط مركبتان معا بأداة الوصل " $\rightarrow$ " في الاتجاهين " $\rightarrow$ " و " $\leftarrow$ " ويعنى $(q \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow q)$

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(q \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow q)$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

ملاحظات :

1. يكون العبرة المركبة $p \leftrightarrow q$ صحيحة إذا كانت كلتا العبارتين صحيحتين معاً أو خاطئتين معاً، وتكون خاطئة إذا كانت إحدى العبارتين صحيحة والأخرى خاطئة.
2. العبرة المركبة $p \leftrightarrow q$ تكافئ القول (العبرة p هي الشرط الضروري والكافي للعبرة q)

أمثلة:

$$(x = -2, x = 3) \leftrightarrow (x^2 - x - 6 = 0)$$

$$(x^3 = -8) \leftrightarrow (x = -2)$$

تحقق من فهمك (6)

ما قيم الصحة للتقرير المركب $p \leftrightarrow \sim q$

مثال (7) كون جدول الصحة للعبرة التالية : $\sim (p \wedge q) \vee \sim (q \leftrightarrow p)$

الحل:

p	q	$p \wedge q$	$q \leftrightarrow p$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim (q \leftrightarrow p)$	$\sim (p \wedge q) \vee \sim (q \leftrightarrow p)$
T	T	T	T	F	F	F
T	F	F	F	T	T	T
F	T	F	F	T	T	T
F	F	F	T	T	F	T

تحقق من فهمك (7)

كون جدول الصحة للعبرة التالية : $(\sim p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$

مما سبق تعلمنا أدوات الربط للعبارات البسيطة للحصول على العبارات المركبة، ونؤكد على (التسلسل - الترتيب - الأسبقية) في إجراء العمليات المنطقية وهي:

اسم أداة الربط	أداة الربط	رمز أداة الربط
النفي	(ليس)	$\sim$
الوصل	(و)	$\wedge$
الفصل	(أو)	$\vee$
الشرط	(إذا كان ... فإن ...)	$\rightarrow$
الشرط المزدوج	(... إذا وفقط إذا)	$\leftrightarrow$
وأهمية وجود الأقواس		

أتدرب وأحل المسائل

أولاً - البنود الموضوعية :

■ في البنود من (1-19) اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة:

- (1) العبارة "العدد 3 عددٌ أولي" هي عبارة بسيطة. (a) (b)
- (2) العبارة "العدد 2 عددٌ أولي وزوجي" هي عبارة بسيطة. (a) (b)
- (3) عدد الإمكانيات الممكنة للعبارة البسيطة تساوي 2 (a) (b)
- (4) عدد الإمكانيات الممكنة للعبارة المركبة من عبارتين أوليتين يساوي 8 (a) (b)
- (5) إذا كانت p عبارة بسيطة فإن نفي p هي عبارة بسيطة أيضاً. (a) (b)
- (6) لأي عبارتين p, q يكون $(p \wedge q)$ صحيحاً إذا كان كل من p, q صحيحاً. (a) (b)
- (7) لأي عبارتين p, q يكون $(p \vee q)$ صحيحاً إذا كان كل من p, q صحيحاً. (a) (b)
- (8) لأي عبارتين p, q يكون $(p \rightarrow q)$ صحيحاً إذا كان كل من p, q خاطئاً. (a) (b)
- (9) لأي عبارتين p, q يكون $(p \leftrightarrow q)$ خاطئاً إذا كان p صحيحاً، q خاطئاً. (a) (b)
- (10) نفي العبارة " $3 + 5 < 9$ " هو " $3 + 5 \geq 9$ " (a) (b)
- (11) نفي العبارة " $2 \times 4 = 8$ " هو " $2 \times 4 \neq 8$ " (a) (b)
- (12) نفي العبارة "العدد 3 هو عدد فردي" هو "العدد 3 هو عدد أولي". (a) (b)
- (13) نفي العبارة "الرياض عاصمة المملكة العربية السعودية" هو "الرياض ليست عاصمة المملكة العربية السعودية". (a) (b)
- (14) القاهرة عاصمة جمهورية مصر العربية أو لندن عاصمة فرنسا. (a) (b)

(a) (b)

(15) الدوحة عاصمة قطر ومسقط عاصمة عمان.

(a) (b)

(16) إذا كان $2 + 3 = 5$ فإن $2^3 = 8$

(17) إذا كان المثلث قائم الزاوية فإن مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعي

(a) (b)

طولي الضلعين الآخرين.

(a) (b)

(18) يتشابه المثلثان إذا تطابقت زواياهما المتناظرة أو تناسبت أطوال أضلاعهما المتناظرة .

(a) (b)

(19) إذا كانت p صحيحة , q صحيحة , r خاطئة، فتكون العبارة $(p \rightarrow q) \vee r$ صحيحة

■ في البنود من (6-1) ظلل اختر الإجابة الصحيحة :

(1) العبارة $p \rightarrow \sim p$ تكافئ :

(a) $\sim p \wedge p$

(b) $\sim p$

(c) $\sim p \rightarrow p$

(d) $p \rightarrow p$

(2) العبارة $p \rightarrow p$

(a) صحيحة دائماً

(b) صحيحة مرة واحدة

(c) خاطئة دائماً

(d) خاطئة مرة واحدة دائماً

(3) أي من العبارات التالية صحيحة ؟

(a) الكويت في آسيا إذا وفقط إذا $35 \div 7 = 8$

(b) إذا كانت الكويت تقع في آسيا فإن $35 \div 7 = 8$

(c) $\frac{3}{2} < \frac{5}{2}$ و $\frac{2}{5} < \frac{2}{3}$

(d) ليس أيّاً مما سبق.

(4) أي من العبارات التالية صحيحة ؟

(a) لندن ليست عاصمة أوروبية أو الموز من الفاكهة.

(b) لندن عاصمة أوروبية وألمانيا في أفريقيا.

(c) ألمانيا ليست في أفريقيا ولندن ليست عاصمة أوروبية.

(d) الموز ليس من الفاكهة أو لندن ليست عاصمة أوروبية.

(5) إن العبارة الخاطئة فيما يلي هي :

(a) 16 من مضاعفات العدد 4 أو 16 عدد أولي.

(b) $0 < \pi - 3$ و $\frac{3}{8} < \frac{2}{5}$

(c) إذا كان $3 \times 3 = 9$ فإن 9 من عوامل 3

(d) $-4 = (-8)^{\frac{2}{3}}$ إذا وفقط إذا $3 \times 6 = 21$

ثانياً - أسئلة المقال:

(1) فيما يلي حدد نوع أداة الربط واكتبها رمزياً

م	العبارة المركبة	نوع أداة الربط	العبارة المركبة رمزياً
1	الجو ليس بارداً		
2	الجو بارد والسماء تمطر.		
3	الشمس مشرقة أو السماء تمطر.		
4	إذا كان الجو بارداً فإن السماء تمطر.		
5	الجو بارد إذا وفقط إذا كانت السماء تمطر.		
6	حضرت العنود مبكرة للمدرسة وحضر غانم متأخراً.		
7	إذا اجتهدت ثرياً فإنها ستنجح.		
8	عدد أيام الأسبوع 7 أو $2 + 3 = 5$		
9	يتطابق ضلعان في مثلث إذا وفقط إذا تطابقت زاويتان في المثلث.		
10	إذا كان n عدداً زوجياً فإن n^2 عدد زوجي.		
11	$\sqrt{3}$ هو عدد غير نسبي و $2 + 2 = 4$		
12	4 عدد زوجي أو $3 \times 5 = 15$		

(2) كَوّن جدول الصحة للعبارات المركبة التالية:



2 (a)

(a) $(p \wedge \sim q)$

(b) $p \vee (p \wedge q)$

(c) $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$

(d) $(\sim p \vee \sim q)$

(e) $(p \wedge \sim p)$

(f) $\sim(p \rightarrow q)$

(g) $(p \vee \sim p)$

(h) $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \rightarrow q)$

(i) $(\sim p \wedge q) \rightarrow (q \vee q)$ (j) $\sim[(p \wedge q) \leftrightarrow (q \rightarrow q)]$



2 (c)

(3) إذا حصل متعلم على الدرجة النهائية في الرياضيات فإنه سوف يسافر لعمل عمرة اكتب جدول الصحة لهذه العبارة.
(4) إذا كان ABC مثلثاً متطابق الضلعين فإن زاويتين قاعدته متطابقتان والضلعين المقابلين لهما متطابقتان.
اكتب العبارة بصوره رمزية.

مهارات تفكير عليا



■ اكتب جدول الصحة للعبارة المركبة التالية : " إذا درست كتاب رياضيات الصف العاشر ولم تقصر في حل الواجبات المنزلية لهذا الكتاب فسوف تحصل على درجة عالية في هذا المقرر ". وبين متى تكون هذه العبارة خاطئة.

رمز المجموع Summation Symbol

4-3

فكرة الدرس:



التعرف على رمز المجموع Σ وكيفية استخدامه

المصطلحات:



1. رمز المجموع "sigma" Summation Symbol
2. الحد الأدنى Lower Limit
3. الحد الأعلى Upper Limit
4. مجموع Sum

مسألة الدرس:



في إحدى المدارس قرر معلم الرياضيات إعطاء المتعلمين تمارين يومية، بحيث في اليوم الأول يحل المتعلم مسألة واحدة، وفي اليوم الثاني يحل مسألتين وفي اليوم الثالث ثلاث مسائل واستمر بهذا النمط لمدة 10 أيام.

1. كم عدد المسائل التي حلها المتعلم خلال 10 أيام؟

2. هل توجد طريقة أسهل لكتابة هذا الجمع؟

تعلم أن: $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100$

تعني مجموع الأعداد الصحيحة الموجبة من 1 إلى 100 وللتعبير عن مجموع هذه الأعداد بطريقة مختصرة ومناسبة نرمز لكلمة المجموع بالرمز " Σ " (تقرأ سيجما)، ولأي عدد صحيح موجب بالرمز k مثلاً، وبذلك يمكن التعبير عن مجموع هذه الأعداد كما يلي:

$$\sum_{k=1}^{100} k \quad (\text{وتقرأ مجموع قيم } k \text{ من } k=1 \text{ إلى } k=100)$$

$$\sum_{k=1}^{100} k = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100 \quad \text{تساوي:}$$

$$\sum_{k=1}^{100} 5^k = 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{100} \quad \text{وكذلك}$$

(وتقرأ مجموع 5^k من $k=1$ إلى $k=100$)

تعلمنا فيما سبق

- جمع الأعداد: $1+2+3+\dots$
- التعويض في القوانين
- ترتيب العمليات الحسابية

معلومة (i)

رمز Σ هو حرف يوناني كبير (سيجما) ويستخدم لتمثيل مجموع عدة حدود وفق قاعدة معينة

معلومة رياضية

أهمية رمز المجموع $\sum$ في الرياضيات:

1. يختصر العمليات الطويلة بدل كتابة جمع متكرر.
2. يساعد على تنظيم التعبيرات الرياضية بشكل واضح.
3. يستخدم في مختلف فروع الرياضيات. مثل: الجبر، والإحصاء، والتفاضل والتكامل.

تعريف

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n, n \in \mathbb{Z}^+$$

(وتقرأ مجموع a_k من $k=1$ إلى $k=n$) حيث n عدد صحيح موجب

$$\sum_{k=1}^n a_k \text{ ويسمى } a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n \text{ مفكوك}$$

نلاحظ أن:

$$\sum_{k=1}^n a_k \text{ عدد حدود مفكوك } a_k \text{ هو } n$$

مثال (1) عبّر باستخدام رمز المجموع $\sum$ عن $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{20}$

الحل:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{20} = \sum_{k=1}^{20} a_k$$

لاحظ أن عدد حدود المفكوك يساوي 20

مما سبق نستنتج القاعدة التالية:

قاعدة

$$\sum_{k=i}^n a_k = a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3} + \dots + a_n, n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$$

عدد حدود المفكوك يساوي $(n-i+1)$

مثال (2) عبّر باستخدام رمز المجموع $\sum$ عن $a_5 + a_6 + a_7 + \dots + a_{15}$

الحل: لاحظ أن الحد الأول في المفكوك a_5 والأخير a_{15}

لذلك فإن قيم k تكون من 5 إلى 15 أي أن:

$$a_5 + a_6 + a_7 + \dots + a_{15} = \sum_{k=5}^{15} a_k$$

لاحظ أن عدد الحدود $15 - 5 + 1 = 11$

تحقق من فهمك (1)

عبر باستخدام رمز المجموع $\sum$ عن $5+6+7+8+\dots+45$

مثال (3) اكتب مفكوك $\sum_{k=10}^{40} k$ ، ثم أوجد عدد حدود المفكوك

الحل: نلاحظ أن القيم k تبدأ من 10 ثم 11 ثم 12 ثم 13 إلى 40
 $\therefore \sum_{k=10}^{40} k = 10 + 11 + 12 + \dots + 40$
 عدد حدود المفكوك يساوي
 $40 - 10 + 1 = 31$

مثال (4) اكتب مفكوك $\sum_{k=1}^{50} k^2$

الحل:
 $\sum_{k=1}^{50} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 50^2$

تحقق من فهمك (2)

اكتب مفكوك $\sum_{k=1}^{10} k^3$

مثال (5) اكتب مفكوك $\sum_{k=1}^{50} (k+k^2)$

الحل:
 $\sum_{k=1}^{50} (k+k^2) = (1+1^2) + (2+2^2) + (3+3^2) + (4+4^2) + \dots + (50+50^2)$

ويمكن كتابة هذا المفكوك بطريقة أخرى

$\sum_{k=1}^{50} (k+k^2) = (1+2+3+4+5+\dots+50) + (1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\dots+50^2)$

نلاحظ أن :

$$(1+2+3+4+5+\dots+50) = \sum_{k=1}^{50} k$$

$$(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\dots+50^2) = \sum_{k=1}^{50} k^2$$

لذلك نجد أن:

$$\sum_{k=1}^{50} (k+k^2) = \sum_{k=1}^{50} k + \sum_{k=1}^{50} k^2$$

نتيجة:

$$\sum_{k=1}^n (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^n a_k \pm \sum_{k=1}^n b_k, n \in \mathbb{Z}^+$$

تحقق من فهمك (3)

اكتب مفكوك $\sum_{k=1}^8 (2k+1)$

مثال (6) أوجد قيمة $\sum_{k=1}^3 (k + \frac{1}{k})$

الحل:

$$\sum_{k=1}^3 (k + \frac{1}{k}) = (1 + \frac{1}{1}) + (2 + \frac{1}{2}) + (3 + \frac{1}{3})$$

$$= 1 + 1 + 2 + 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$= 7 \frac{5}{6}$$

حل آخر:

$$\sum_{k=1}^3 (k + \frac{1}{k}) = \sum_{k=1}^3 k + \sum_{k=1}^3 \frac{1}{k}$$

$$= (1+2+3) + (\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3})$$

$$= 6 + 1 + \frac{5}{6}$$

$$= 7 \frac{5}{6}$$

تحقق من فهمك (4)

اكتب مفكوك $\sum_{k=1}^4 (3 + \frac{1}{k})$

$$\sum_{k=1}^{10} 3k$$

أوجد قيمة $\sum_{k=1}^{10} 3k$ مثال (7)

الحل:

$$\sum_{k=1}^{10} 3k = (3 \times 1) + (3 \times 2) + (3 \times 3) + (3 \times 4) + \dots + (3 \times 10)$$

نلاحظ أن:

$$\sum_{k=1}^{10} 3k = (3 \times 1) + (3 \times 2) + (3 \times 3) + (3 \times 4) + \dots + (3 \times 10)$$

$$= 3(1+2+3+4+\dots+10) = 3 \sum_{k=1}^{10} k$$

$$\sum_{k=1}^{10} 3k = 3 \sum_{k=1}^{10} k$$

لذلك نجد أن:

تحقق من فهمك (5) 

$$\sum_{k=1}^7 2k$$

اكتب مفكوك $\sum_{k=1}^7 2k$

$$\sum_{k=1}^5 (5k-3)$$

أوجد قيمة $\sum_{k=1}^5 (5k-3)$ مثال (8)

الحل:

$$\sum_{k=1}^5 (5k-3) = \sum_{k=1}^5 5k - \sum_{k=1}^5 3$$

$$= 5 \sum_{k=1}^5 k - \sum_{k=1}^5 3$$

$$= 5(1+2+3+4+5) - (3+3+3+3+3)$$

$$= 75 - 15$$

$$= 60$$

تحقق من فهمك (6) 

$$\sum_{k=1}^8 (3k-5)$$

اكتب مفكوك $\sum_{k=1}^8 (3k-5)$

نتيجة:

$$\sum_{k=1}^n ck = c \sum_{k=1}^n k, c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}^+$$

$$3+3+3+3+3=3 \times 5$$

تعلم أن:

$$c \times n \text{ من المرات يساوي } n \quad c+c+c+\dots$$

نعبّر عن ذلك باستخدام الرمز $\sum$ كما يلي:

نتيجة:

$$\sum_{k=1}^n c = n \times c, c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}^+$$

بصفة عامة:

$$\sum_{k=i}^n c = c(n-i+1)$$

$$\sum_{k=4}^8 7$$

أوجد قيمة

مثال (9)

الحل:

$$\begin{aligned} \sum_{k=4}^8 7 &= 7(8-4+1) \\ &= 7(5) \\ &= 35 \end{aligned}$$

تحقق من فهمك (7)

$$\sum_{k=2}^6 10$$

اكتب مفكوك

$$\sum_{k=1}^{13} \frac{5}{2} k$$

أوجد قيمة

مثال (10)

الحل:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{13} \frac{5}{2} k &= \left(\frac{5}{2} \times 1 \right) + \left(\frac{5}{2} \times 2 \right) + \left(\frac{5}{2} \times 3 \right) + \dots + \left(\frac{5}{2} \times 13 \right) \\ &= \frac{5}{2} (1+2+3+\dots+13) \\ &= \frac{5}{2} \times 91 \\ &= \frac{455}{2} = 227.5 \end{aligned}$$



في الأمثلة التالية اكتب العبارة الرياضية المناسبة لها:

1. شخص يتمرّن:

في اليوم الأول 5 دقائق

في اليوم الثاني 10 دقائق

وكل يوم يزيد 5 دقائق عن اليوم السابق له، اكتب العبارة الرياضية لتمرّنه خلال 6 أيام

الحل:

$$\sum_{k=1}^6 5k$$

2. لسان حصلت على درجات متزايدة:

الحل:

60, 65, 70, 75, 80

يمكن تمثيلها بنمط: $5n+55$ حيث n عدد صحيح موجب مرتب $n \in \{1,2,3,4,5\}$

$$\therefore \text{مجموع الدرجات: } \sum_{k=1}^5 (5k+55)$$

أُتدرب وأحل المسائل

أولاً - البنود الموضوعية:

■ في البنود من (1 - 4) اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة:

(a) (b)

$$\sum_{k=0}^3 k^3 = \left(\sum_{k=0}^3 k \right)^3 \quad (1)$$

(a) (b)

$$\sum_{k=2}^5 10 = 10(10-2) \quad (2)$$

(a) (b)

$$\sum_{k=0}^5 (k^5) = 16 \quad (3)$$

(a) (b)

$$\sum_{k=1}^{10} 3k = 3 \sum_{k=1}^{10} k \quad (4)$$

■ في البنود من (1 - 4) اختر الإجابة الصحيحة:

(1) $1 + 3 + 9 + 27$ تساوي:

(a) $\sum_{k=0}^3 3k$

(b) $\sum_{k=1}^3 k^3$

(c) $\sum_{k=1}^3 3^k$

(d) $\sum_{k=0}^3 3^k$

(2) إذا كانت $\sum_{k=2}^n k = 9$ فإن n تساوي:

(a) 3

(b) 7

(c) 4

(d) 9

(3) إذا كانت $\sum_{k=m}^3 k^3 = 36$ فإن m تساوي:

(a) $\mathbb{Z}$

(b) 3

(c) 2

(d) 1

(4) $\sum_{k=1}^n k - \left(\sum_{k=1}^n (2k-1) \right)$ تساوي:

(a) $n - 1$

(b) $n - r$

(c) $n - \sum_{k=1}^n k$

(d) $1 - \sum_{k=1}^n k$

ثانيًا - أسئلة المقال:



1 (a)

(a) $\sum_{k=1}^5 (k + 1)^2$

(b) $\sum_{k=1}^4 (3k - 1)$

(c) $\sum_{k=0}^4 k(k + 2)$

(1) أوجد قيمة كل من:

(2) استخدم الرمز Σ للتعبير عن المجاميع التالية:

(a) $1 + 4 + 9 + 16 + \dots + 100$

(b) $(4 \times 2) + (4 \times 3) + (4 \times 4) + (4 \times 5) + \dots + (4 \times 20)$

(c) $(1 \times 2) + (2 \times 3) + (3 \times 4) + \dots + (24 \times 25)$

(d) $(5 + 2) + (5 + 2^2) + (5 + 2^3) + \dots + (5 + 2^{100})$

(e) $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \dots + 30$

(f) $3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \dots + 31$

مهارات تفكير عليا



■ اكتب مفكوك كل مما يلي:

$$\sum_{k=1}^4 \frac{a^k}{(k-1)!}$$

مقاييس التشتت - الانحراف المعياري Measures of Dispersion - Standard Deviation

4-4

فكرة الدرس:



إيجاد التباين والانحراف المعياري لـ :

- 1 . مجموعة من القيم
- 2 . توزيعات تكرارية

المصطلحات:



Range	1. المدى
Variance	2. التباين
Standard Deviation	3. انحراف معياري
Frequency	4. التكرار

مسألة الدرس:



ليكن لدينا مجموعتان من البيانات تمثلان أعمار أفراد أسرتين
كل منهما مكونة من ستة أفراد على الصورة :

أسرة عبدالله (A) : 32,31,24,21,18,24

أسرة محمد (B) : 60,25,24,16,1,24

أوجد :

1 . المتوسط الحسابي (A)

المتوسط الحسابي (B)

2 . الوسيط للمجموعة (A)

الوسيط للمجموعة (B)

3 . المنوال (A)

المنوال (B)

• نلاحظ أن التباعد بين قيم (B) كبير إذا ما قورن بين قيم المجموعة (A) ، وهذا

يدل على أن التباعد بين مفردات المجموعة (B) أكبر من المجموعة (A)

• من خلال الإجابة عن مسألة الدرس نجد أن :

مقاييس النزعة المركزية للمجموعتين متطابقة

فيما سبق تعلمنا

- طرق عرض بيانات
جدولياً و بيانياً
- مقاييس النزعة المركزية:
 1. المتوسط الحسابي
 2. الوسيط
 3. المنوال

تذكروا

- المتوسط الحسابي $\bar{x}$ لمجموعة من القيم هو ناتج قسمة مجموع قيم البيانات على عدد هذه القيم أي أن :

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

- المنوال لمجموعة من القيم هو القيمة الأكثر تكراراً.

! انتبه

المدى R : Range

مجموعة الأعداد الحقيقية

$\mathbb{R}$: Real Number

- بالرغم من أن مقياس النزعة المركزية الثلاثة المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال لها أهميتها، فهي تعطي معلومات مفيدة وقيمة إلا أنها غير كافية للمقارنة بين توزيعين مختلفين وبالتالي لا تعطى صورة دقيقة عن التشتت

لدراسة مقياس التشتت :

هناك عدة مقياس تسمى مقياس التشتت تحدد مدى التقارب أو التباعد بين المفردات وسندرس منها (المدى - التباين - الانحراف المعياري)

أولاً: المدى Range

تعريف: المدى Range

المدى لمجموعة من القيم هو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة ويرمز له بالرمز R
المدى = أكبر قيمة - أصغر قيمة
وفي التوزيعات التكرارية يكون المدى هو الفرق بين الحد الأعلى للفئة الأخيرة و الحد الأدنى للفئة الأولى
المدى = الحد الأعلى للفئة الأخيرة - الحد الأدنى للفئة الأولى

يعتبر المدى من أبسط مقياس التشتت لسهولة إيجاده حسابياً.

أوجد المدى لكل من :

(a) القيم 32,31,24,21,18,24

(b) القيم 60,25,24,16,1,24

(c) التوزيع التكراري :

الفئات	10 -	25 -	40 -	55 -	70 -	85 -
التكرار	4	6	8	5	3	2

مثال (1)

الحل:

(a) أكبر قيمة = 32 ، أصغر قيمة = 18

∴ المدى = أكبر قيمة - أصغر قيمة

$$\therefore R = 32 - 18 = 14$$

(b) أكبر قيمة = 60 ، أصغر قيمة = 1

∴ المدى = أكبر قيمة - أصغر قيمة

$$\therefore R = 60 - 1 = 59$$

(c) الحد الأدنى للفئة الأولى = 10 ، الحد الأعلى للفئة الأخيرة = 100

∴ المدى = الحد الأعلى للفئة الأخيرة - الحد الأدنى للفئة الأولى

$$\therefore R = 100 - 10 = 90$$

تذكروا

عند إيجاد المدى لقيم البيانات نستعمل قيمتين فقط ولكن سيكون من المفيد جداً دراسة مقياس أخرى يتطلب إيجادها استعمال جميع البيانات

ملاحظة: المدى يتأثر بالقيم المتطرفة دائماً

تحقق من فهمك (1)

يبين الجدول أدناه معدل السرعة km/h لمجموعة من السيارات على إحدى الطرق :

الفئات	60 -	70 -	80 -	90 -
التكرار	35	65	70	30

أوجد المدى لقيم هذه البيانات

ثانياً: التباين والانحراف المعياري Variance and Standard Deviation

تعريف: التباين Variance

ليكن لدينا مجموعة من القيم $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ يُعرّف التباين على أنه المتوسط الحسابي لمجموع مربعات انحرافات هذه القيم عن متوسطها الحسابي $\bar{x}$ ويرمز له بالرمز σ^2

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}{n} \quad \text{أي أن :}$$

تعريف: الانحراف المعياري Standard Deviation

يُعرّف الانحراف المعياري لمجموعة من القيم $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ على أنه الجذر التربيعي الموجب للتباين ويرمز له بالرمز σ أي أن :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}{n}}$$

أوجد التباين والانحراف المعياري لمجموعة القيم التالية:

3, 7, 5, 4, 6, 8, 2

مثال (2)

الحل:

1 - نوجد المتوسط الحسابي

عدد القيم $n=7$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} \\ &= \frac{3+7+5+4+6+8+2}{7} \\ &= \frac{35}{7} = 5 \end{aligned}$$

قانون المرور الجديد

ورفع بعض المخالفات حتى 1000%

200

• لتجاوز الإشارة الحمراء.
• استخدام الهاتف.
• الزعزعة والسرعة.
• القيادة بدون تأمين.

500

• لتجاوز الإشارة الحمراء.
• استخدام الهاتف.
• الزعزعة والسرعة.

75

• لتجاوز الإشارة الحمراء.
• استخدام الهاتف.
• الزعزعة والسرعة.

150

• لتجاوز الإشارة الحمراء.
• استخدام الهاتف.
• الزعزعة والسرعة.

• لعدم تعطيل أو إعاقة حركة المرور

معلومة رياضية :

$(x - \bar{x})$

هي انحراف x عن المتوسط الحسابي

2 - نكوّن الجدول التالي :

x	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
3	$3 - 5 = -2$	4
7	$7 - 5 = 2$	4
5	$5 - 5 = 0$	0
4	$4 - 5 = -1$	1
6	$6 - 5 = 1$	1
8	$8 - 5 = 3$	9
2	$2 - 5 = -3$	9
$\sum_{k=1}^7 x = 35$	$\sum_{k=1}^7 (x - \bar{x}) = 0$	$\sum_{k=1}^7 (x - \bar{x})^2 = 28$

ونلاحظ من الجدول أن :

$$\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x}) = 0$$

$$\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 \neq 0$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}{n}$$

$$= \frac{28}{7}$$

$$= 4$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

$$\sigma = \sqrt{4} = 2$$

3 - نوجد التباين σ^2

4 - نوجد الانحراف المعياري σ

تحقق من فهمك (2)

أوجد التباين و الانحراف المعياري لمجموعة القيم التالية :

(a) 12, 8, 10, 6, 4, 14, 2

(b) 9, 5, 7, 3, 11, 1, 6

التباين والانحراف المعياري للتوزيعات التكرارية:

(a) ذات الجدول التكراري البسيط:

نعلم أنه إذا كان لدينا توزيع تكراري بسيط ، أي مجموعة من القيم $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ وتكرارها على الترتيب $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ فإن المجموع الكلي للقيم يساوي

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + \dots + x_n f_n$$

$$= \sum_{k=1}^i (x_k \cdot f_k)$$

$$n = \sum_{k=1}^i f_k \text{ ، ويكون عددها } n$$

∴ في حالة التوزيعات التكرارية يعطي التباين والانحراف المعياري على الصورة :

التباين Variance

$$\sigma^2 = \frac{\left[\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 \cdot f \right]}{\sum_{k=1}^n f}$$

الانحراف المعياري Standard Deviation

$$\sigma = \sqrt{\frac{\left[\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 \cdot f \right]}{\sum_{k=1}^n f}}$$

حيث x_k : القيم f : تكرار القيم $\bar{x}$: المتوسط الحسابي

أوجد التباين والانحراف المعياري للتوزيع التكراري البسيط التالي :

القيمة	10	20	30	40
التكرار	6	7	6	1

مثال (3)

الحل:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k \cdot f)}{\sum_{k=1}^n f}$$

1 - نوجد المتوسط الحسابي $\bar{x}$

$$= \frac{(10 \times 6) + (20 \times 7) + (30 \times 6) + (40 \times 1)}{6 + 7 + 6 + 1}$$

$$= \frac{60 + 140 + 180 + 40}{20}$$

$$= \frac{420}{20}$$

$$= 21$$

2 - نكوّن الجدول التالي :

x	f	$x.f$	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$(x - \bar{x})^2 \cdot f$
10	6	60	-11	121	726
20	7	140	-1	1	7
30	6	180	9	81	486
40	1	40	19	361	361
المجموع	$\sum_{k=1}^n f = 20$	420			1580

4 - نوجد الانحراف المعياري σ

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

$$= \sqrt{79} \approx 8.89$$

3 - نوجد التباين σ^2

$$\sigma^2 = \frac{\left[\sum_{k=1}^n (x - \bar{x})^2 \cdot f \right]}{\sum_{k=1}^n f}$$

$$= \frac{1580}{20}$$

$$= 79$$

(b) التوزيعات التكرارية ذات الفئات:

هذه الحالة نوجد مراكز الفئات ونستعملها بدلاً من قيم x :

حيث x : مركز الفئة f : تكرار الفئة $\bar{x}$: المتوسط الحسابي

يبين الجدول أدناه أطوال 20 طفلاً حديثي الولادة إلى أقرب سنتيمتر

الفئات	34 -	36 -	38 -	40 -
التكرار	4	5	8	3

مثال (4)

أوجد التباين والانحراف المعياري لأطوال الأطفال

الحل:

$$\text{مركز الفئة} = \frac{\text{الحد الأدنى للفئة} + \text{الحد الأعلى للفئة}}{2}$$

1 - نكوّن الجدول التالي:

الفئات	x	f	$x \cdot f$	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$(x - \bar{x})^2 \cdot f$
34 -	35	4	140	- 3	9	36
36 -	37	5	185	- 1	1	5
38 -	39	8	312	1	1	8
40 -	41	3	123	3	9	27
المجموع		$\sum_{k=1}^n f = 20$	$\sum_{k=1}^n x \cdot f = 760$			76

2 - نوجد المتوسط الحسابي $\bar{x}$ لتوزيع تكراري " ذي فئات "

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k \cdot f)}{\sum_{k=1}^n f}$$

$$= \frac{760}{20} = 38$$

4 - الانحراف المعياري σ لأطوال الأطفال

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

$$\sigma = \sqrt{3.8} \approx 1.95$$

3 - نوجد التباين σ^2 لأطوال الأطفال

$$\sigma^2 = \frac{\left[\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 \cdot f \right]}{\sum_{k=1}^n f}$$

$$= \frac{76}{20}$$

$$= 3.8$$

أوجد التباين والانحراف المعياري للتوزيع التكراري البسط التالي:

القيمة	4 -	8 -	12 -	16 -	20 -	24 -	28 -
التكرار	4	5	2	7	6	10	6

مثال (5)

الحل:

1 - نكوّن الجدول التالي:

الفئات	x	f	$x \cdot f$	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$(x - \bar{x})^2 \cdot f$
4 -	6	4	24	-14	196	784
8 -	10	5	50	-10	100	500
12 -	14	2	28	-6	36	72
16 -	18	7	126	-2	4	28
20 -	22	6	132	2	4	24
24 -	26	10	260	6	36	360
28 -	30	6	180	10	100	600
المجموع		40	800			2368

$$\sigma^2 = \frac{\left[\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 \cdot f \right]}{\sum_{k=1}^n f}$$

$$= \frac{2368}{40}$$

$$= 59.2$$

3 - نوجد التباين σ^2

4 - نوجد الانحراف المعياري σ

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

$$= \sqrt{59.2} \approx 7.69$$

2 - نوجد المتوسط الحسابي $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k \cdot f)}{\sum_{k=1}^n f}$$

$$= \frac{800}{40}$$

$$= 20$$

تحقق من فهمك (3)

يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لدرجات 60 متعلماً في امتحان نهاية العام الدراسي حيث النهاية العظمى 100 درجة

الفئات	0 -	20 -	40 -	60 -	80 -
التكرار	4	6	16	24	10

أوجد المتوسط الحسابي $\bar{x}$ والتباين σ^2 والانحراف المعياري σ لقيم هذه البيانات

إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة قيم من بيانات هو $\sigma=6$ ومجموع مربعات انحرافات هذه القيم عن متوسطها الحسابي هو 540 ، فما عدد قيم هذه البيانات ؟

مثال (6)

الحل:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}{n} \Rightarrow (6)^2 = \frac{540}{n}$$

$$\therefore n = \frac{540}{36} \Rightarrow n = 15$$

$\therefore$ عدد قيم هذه البيانات هو $n = 15$

تحقق من فهمك (4)

1- الانحراف المعياري لمجموعة قيم من البيانات هو $\sigma=4$ ومجموع مربعات انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي هو 480 ، فما عدد قيم هذه البيانات ؟
2- الانحراف المعياري لمجموعة قيم من البيانات هو $\sigma=2$ ومجموع مربعات انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي هو 28 ، فما عدد قيم هذه البيانات ؟

استخدام النماذج

يمثل الجدول أدناه الزمن المستغرق بالدقائق أثناء مراقبة المكالمات التي يقوم بها مندوب مبيعات الهاتف

الفئات	0 -	4 -	8 -	12 -
التكرار	6	5	7	2

أوجد التباين σ^2 والانحراف المعياري σ لزمن هذه المكالمات.

الحل:

1 - نكوّن الجدول التالي :

الفئات	x	f	$x \cdot f$	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$(x - \bar{x})^2 \cdot f$
0 -	2	6	12	- 5	25	150
4 -	6	5	30	- 1	1	5
8 -	10	7	70	3	9	63
12 -	14	2	28	7	49	98
المجموع		20	140			316

معلومة رياضية :

إذا اقتربت قيمة الانحراف المعياري من الصفر فإن قيم البيانات تكون أكثر قرباً من بعضها إلى بعض وتتجمع أكثر حول قيمة الوسط الحسابي ، وإذا ابتعدت قيمة الانحراف المعياري عن الصفر فإن قيم البيانات تكون في حالة تشتت ومتباعدة عن قيمة الوسط الحسابي .

الحل:

2 - نوجد المتوسط الحسابي $\bar{x}$

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\sum_{k=1}^n (x_k \cdot f)}{\sum_{k=1}^n f} \\ &= \frac{140}{20} \\ &= 7\end{aligned}$$

3 - نوجد التباين σ^2

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{\left[\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 \cdot f \right]}{\sum_{k=1}^n f} \\ &= \frac{316}{20} \\ &= 15.8\end{aligned}$$

4 - نوجد الانحراف المعياري σ

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\sigma^2} \\ &= \sqrt{15.8} \approx 3.97\end{aligned}$$

أتدرب وأحل المسائل

أولاً- البنود الموضوعية:

■ في البنود من (1-6) اختر الإجابة الصحيحة :

(1) الانحراف المعياري للقيم 2, 8, 4, 6 هو:

- (a) 2 (b) 4 (c) 5 (d) $\sqrt{5}$

(2) إذا كان التباين لمجموعة من القيم يساوي 4 فإن الانحراف المعياري لها :

- (a) 16 (b) 8 (c) 4 (d) 2

(3) إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة من القيم يساوي 6 فإن التباين يساوي:

- (a) 36^2 (b) 6 (c) 36 (d) 72

(4) إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة من القيم = 5 ومجموع مربعات انحرافات

هذه القيم عن متوسطها الحسابي هو = 100 فإن عدد القيم يساوي:

- (a) 10 (b) 20 (c) 4 (d) 25

(5) إذا كان الانحراف المعياري لأربع قيم هو 5 فإن مجموع مربعات انحرافات

القيم عن متوسطها الحسابي:

- (a) 25 (b) 100 (c) 20 (d) 4

ثانيًا - أسئلة المقال :

(1) أوجد المدى والتباين والانحراف المعياري للقيم :

- (a) 12, 8, 15, 17, 14
(b) 32, 54, 46, 20, 35, 23
(c) 100, 400, 300, 500, 700

(2) أوجد التباين والانحراف المعياري للتوزيع التكراري البسيط التالي :

القيمة	30	32	34	36	38
التكرار	2	8	12	4	4

(3) الجدول التالي يوضح التوزيع التكراري لأعمار 300 عامل في أحد المصانع :

المجموع	38 -	30 -	22 -	14 -	الفئات
300	15	75	140	70	التكرار



(3)

أوجد كلاً من المدى والتباين والانحراف المعياري لهذا التوزيع

(4) يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لأوزان بعض متعلمي المرحلة الثانوية في إحدى المدارس (الوزن بالكيلوجرام)

76 -	72 -	68 -	64 -	60 -	الفئات
8	27	42	18	5	التكرار

أوجد كلاً من المدى والتباين والانحراف المعياري لهذه الأوزان

(5) يبين الجدول أدناه أطوال 20 متعلماً في مدرسة إلى أقرب سنتيمتر

176 -	168 -	160 -	الفئات
3	9	8	التكرار

أوجد التباين والانحراف المعياري لقيم هذه البيانات

(6) يبين الجدول أدناه أعمار 100 شخص ، أوجد قيمة الانحراف المعياري

60 -	40 -	20 -	0 -	الفئات
10	40	35	15	التكرار

(7) اكتشف الخطأ :

تقول نجاة إن التباين لجدول تكراري ذي فئات هو مربع الفرق بين قيم البيانات ومتوسطها الحسابي.
بين الخطأ في قول نجاة وصححه.



(1) يبين الجدول أدناه المسافات التي يجتازها 60 عاملاً للوصول إلى مركز عملهم في إحدى المؤسسات إلى أقرب كيلومتر

الفئات	0 -	10 -	20 -	30 -
التكرار	10	15	30	5

- (a) أوجد التباين والانحراف المعياري لقيم هذه البيانات
- (b) إذا أضفنا العدد 2 إلى الحدود العليا و الحدود الدنيا لفئات الجدول ، أوجد التباين و الانحراف المعياري ماذا تلاحظ ؟ فسر النتيجة التي حصلت عليها.
- (2) اختر الإجابة الصحيحة :

في توزيع تكراري منتظم يتكوّن من سبعة فئات فئته الأولى (-3) وفئته الأخيرة (-21) فإن المدى

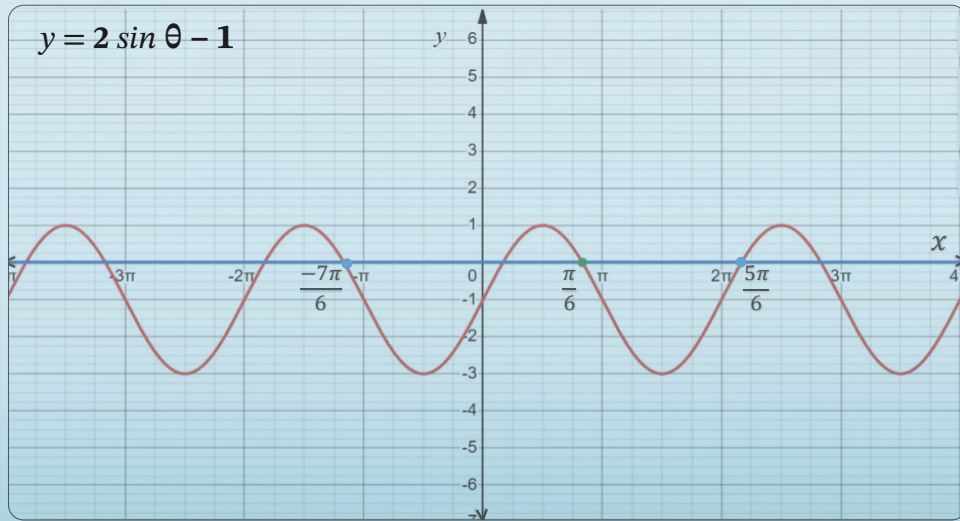
- (a) 3 (b) 21 (c) 18 (d) 24



استعد للاختبار

4

عزيزي المعلم ، عزيزي المتعلم :
يحتوي رمز الـ (QR) الخاص باختبار الوحدة على أسئلة مهمة، يجب الاستفادة منها في التقييم البنائي والنهائي وتدريب المتعلم عليها جيداً.



قيّم مناهجنا



الكتاب كاملاً