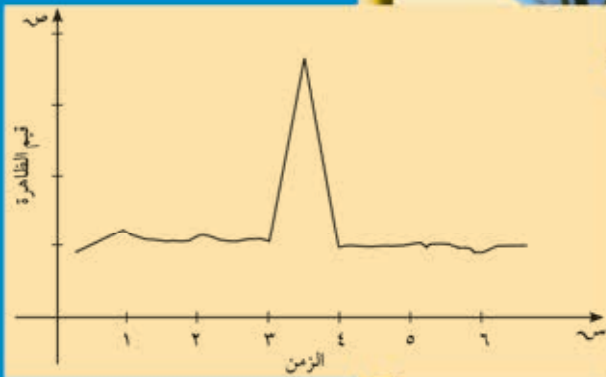
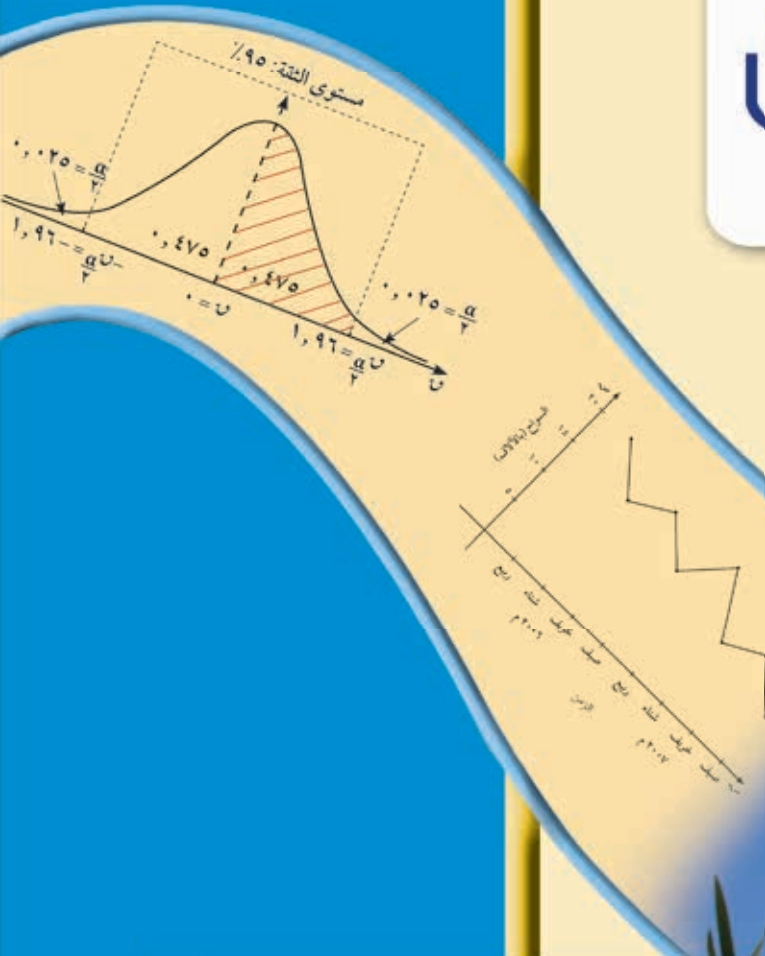




وزارة التربية

الرياضيات

كتاب المعلم



١٢

الصف الثاني عشر أدبي
الفصل الدراسي الأول

الطبعة الثانية



وزارة التربية

الرياضيات

الصف الثاني عشر أدبي
الفصل الدراسي الأول

كتاب المعلم

اللجنة الإشرافية لدراسة ومواءمة سلسلة كتب الرياضيات

أ. حسين علي عبدالله (رئيساً)

أ. فتحية محمود أبو زور

أ. حصة يونس محمد علي

الطبعة الثانية

١٤٤٦ هـ - ١٤٤٧ هـ
٢٠٢٤ م - ٢٠٢٥ م

فريق عمل دراسة ومواءمة كتب الرياضيات للصف الثاني عشر أدبي
أ. فتحي محمد عبد الفتاح (رئيسًا)

أ. محمود عبد الغني محمد أ. سعيد أحمد علي خلف

أ. يسرى شملان أحمد البحر أ. عيدة خلف عواد الشمري

أ. هنادي حباس غنيم المجول

دار التربيّون House of Education ش.م.م.م. وبيرسون إديوكيشن ٢٠١٣م

© جميع الحقوق محفوظة : لا يجوز نشر أيّ جزء من هذا الكتاب أو تصويره أو تخزينه أو تسجيله
بأيّ وسيلة دون موافقة خطيّة من الناشر.

الطبعة الثانية : ٢٠٢٣م
٢٠٢٤م



حضرة صاحب السمو الشيخ مشعل أحمد الجابر الصباح

أمير دولة الكويت

H.H. Sheikh Meshal AL-Ahmad AL-Jaber AL-Sabah
Amir Of The State Of Kuwait



سَمُو الشَّيْخِ صَبَاحٍ خَالِدٍ الْحَمَادِ الصَّبَاحِ
وَلِيِّ عَهْدِ دَوْلَةِ الْكُوَيْتِ

H. H. Sheikh Sabah Khaled Al-Hamad Al-Sabah
Crown Prince Of The State Of Kuwait

مقدمة من كتاب المعلم

توجيهات عامة للمعلم

- هذه السلسلة تعمل على تنمية أساليب التفكير، وذلك بتركيزها على بناء المفاهيم الرياضية وربطها بالواقع الحياتي من خلال:
- ١ - الأنشطة العملية في استكشاف المفاهيم ودعم إحساس الطالب بهذه المفاهيم، وذلك باستخدام عدّة طرائق مختلفة: العمل في فريق. عمل مجلّات رياضية. استخدام المحسوسات وشبه المحسوسات. التعبير الشفهي (التواصل) - التفكير الناقد.
 - ٢ - الاعتماد على المصوّرات، وذلك من خلال التمثيل البياني للمعلومات وقراءة البيانات الممثلة بيانياً.
 - ٣ - الاعتماد على المواقف والقصص الحياتية وربطها بالموضوعات، وكذلك توظيف الموضوعات الرياضية في حلّ المسائل الحياتية.
 - ٤ - التأكيد على فهم المفاهيم واستيعابها، والربط بين الرياضيات وباقي الموادّ.

تطبيق السلسلة

- لتطبيق السلسلة، يجب مراعاة ما يلي:
- وجود ملفّين لكلّ تلميذ بحيث يُخصّص أحدهما للأنشطة الصفّية واللاصفّية، أمّا الآخر فيُخصّص للاختبارات والملحوظات الميدانية على أداء الطالب، ويُدوّن فيها المعلم، وهذا أوّل ما يقوم به، مقرونة بتواريخ المتابعة. يُنوّع المعلم في طرائق التدريس، وخاصّة التي تشمل الاستكشاف وحلّ المشكلات.

نماذج المعلم لتقييم الطلاب تشمل:

- تقييم الأداء في حلّ المسائل.
- التقييم المستمرّ في حلّ المسائل والملاحظة والتعليم التعاوني.
- التقييم الفردي في الملاحظة والمراقبة.
- التقييم العام للطلاب.

تقييم الأداء في حلّ المسائل

الاسم التاريخ

تقييم الأداء في حلّ المسائل

① ضع إشارة ✓ قرب العبارة التي تصف بدقة أداء الطالب.

إفهم

- يقرأ المسألة بتأن.
- يقرأ أيّ جدول أو أيّ تمثيل بياني.
- يستطيع أن يصوغ المسألة من جديد وبطريقته وعباراته الخاصة.
- يستطيع فهم وإدراك المعلومات المعطاة.
- يستطيع فهم وإدراك السؤال الذي يجب الإجابة عليه.

خطّ

- يختار الخطّة الأنسب لحلّ المسألة.
- يقدّر الإجابة الصحيحة.

حلّ

- يعمل وفقاً لمنهجية معيّنة.
- يعرض الحلّ بطريقة منظّمة وسليمة.
- يحسب بطريقة صحيحة.
- يعطي الإجابة بجملة كاملة صحيحة، مراعيًا الوحدات.

راجع ولا حظّ

- يُلاحِظ معقولة الإجابة.
- يجرب طرقاً أخرى لحلّ المسألة.

② إتبع المواصفات التالية لتقييم أداء الطالب:

- مستوى ٤ (يتقن الطالب ١١-١٣ من المهمات السابق ذكرها). يُظهر الطالب فهماً عميقاً للمسألة ويفسّرُها بشكل موجز وواضح ويكون قادراً على ربط المسألة بعمل سبق أن أنجزه.
- مستوى ٣ (يتقن الطالب ٨-١٠ من المهمات السابق ذكرها). يفهم الطالب المسألة ويعرض الحلّ الصحيح بطريقة منظّمة وواضحة.
- مستوى ٢ (يتقن الطالب ٤-٧ من المهمات السابق ذكرها). يُظهر الطالب فهماً إجمالياً للمسألة غير أنّه قد يرتكب بعض الأخطاء في تفاصيل معيّنة.
- مستوى ١ (يتقن الطالب ٠-٣ فقط من المهمات السابق ذكرها). لا يُظهر الطالب إلا فهماً سطحيّاً أو جزئياً للمسألة وهو ليس قادراً على إتمام العمل المطلوب أو حتى اعتماد المنهجية الصحيحة، كما أنّه لا يعطي إجابة صحيحة أو تكون خطّته غير مناسبة، وفي أغلب الأحيان لا نجد حلّاً ولا تجاوباً مناسباً أو إجابة صحيحة مرفقةً بجهد ما.

التقييم المستمر: حلّ المسائل

التاريخ

قدّر كل بند بـ:	+	إذا كان ممتازاً
✓	إذا كان مقبولاً	
-	بحاجة للتطوير	
غ.ت	غير قابل للتطبيق	
١.		
٢.		
٣.		
٤.		
٥.		
٦.		
٧.		
٨.		
٩.		
١٠.		
١١.		
١٢.		
١٣.		
١٤.		
١٥.		
١٦.		
١٧.		
١٨.		
١٩.		
٢٠.		
٢١.		
٢٢.		
٢٣.		
٢٤.		
٢٥.		
٢٦.		
٢٧.		
٢٨.		

التقييم المستمر: الملاحظة

التَّارِيخُ

١. تقدير كل بند بـ:	٢. إذا كان ممتازاً +	٣. إذا كان مقبولاً ✓	٤. بحاجة للتطوير -	٥. غير قابل للتطبيق غ.
١. يخدم أوقات إيجابية				
٢. يظهر مواقف إيجابية				
٣. يعمل بنجاح مع الآخرين				
٤. يعمل بترتيب وانتظام				
٥. يدرك التفاصيل				
٦. يظهر معرفة بالمهارات				
٧. يطلب المساعدة عند الحاجة				
٨. يستخدم الوقت إنتاجية				
٩. يجرب طرقاً أخرى				
١٠. يطلب صبراً ومثابرة				
١١. يظهر أفكار الغير ويستخدمها				
١٢. يخدم أوقات إيجابية				
١٣. يظهر مواقف إيجابية				
١٤. يعمل بنجاح مع الآخرين				
١٥. يعمل بترتيب وانتظام				
١٦. يدرك التفاصيل				
١٧. يظهر معرفة بالمهارات				
١٨. يطلب المساعدة عند الحاجة				
١٩. يستخدم الوقت إنتاجية				
٢٠. يجرب طرقاً أخرى				
٢١. يطلب صبراً ومثابرة				
٢٢. يظهر أفكار الغير ويستخدمها				
٢٣. يخدم أوقات إيجابية				
٢٤. يظهر مواقف إيجابية				
٢٥. يعمل بنجاح مع الآخرين				
٢٦. يعمل بترتيب وانتظام				
٢٧. يدرك التفاصيل				
٢٨. يظهر معرفة بالمهارات				

التقييم المستمر: التعلم التعاوني

التَّارِيخُ

[illegible]

المحتويات

الوحدة الأولى: التقدير واختبارات الفروض	١٣
الوحدة الثانية: الارتباط والانحدار	٣٠
الوحدة الثالثة: السلاسل الزمنية	٤٨

الوحدة الأولى: التقدير واختبارات الفروض

Estimation and Hypotheses Testing

قُسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

١-١: التقدير

(١-١-١) التقدير بنقطة.

(١-١-ب) التقدير بفترة الثقة.

أولاً: إذا كان التباين للمجتمع σ^2 معلوم.

ثانياً: إذا كان التباين للمجتمع σ^2 غير معلوم، $n < 30$.

ثالثاً: إذا كان التباين للمجتمع σ^2 غير معلوم، $n \geq 30$.

١-٢: اختبارات الفروض الإحصائية

(١-٢-١) إذا كان الانحراف المعياري لمجتمع σ معلوم.

(١-٢-ب) إذا كان الانحراف المعياري لمجتمع σ غير معلوم، $n < 30$.

(١-٢-ج) إذا كان الانحراف المعياري لمجتمع σ غير معلوم، $n \geq 30$.

مقدمة الوحدة

الوحدة الأولى

التقدير واختبارات الفروض

Estimation and Hypotheses Testing

مشروع الوحدة: ما هي أفضل طريقة لإيجاد وظيفة؟

- 1 مقدمة المشروع: بعد التخرج يواجه الحاصلون على الإجازات والشهادات الجامعية تحد جديد هو الانخراط في سوق العمل.
- 2 الهدف: هو البحث عن فرض عمل من خلال القيام بعدة خطوات ومحاولات متنوعة واستخدام العديد من الوسائل.
- 3 اللوازم: حاسوب - شبكة الإنترنت.
- 4 أسئلة حول التطبيق:
 - 1 كيف ستختار عينة عشوائية من الموظفين للاستفسار عن الوسيلة التي استخدموها في إيجاد وظيفتهم؟
 - 2 ما الخيارات التي اكتشفتها؟ نظمها في استبانة.
 - 3 (إرشاد):
 - من خلال الأصدقاء والمعارف.
 - من خلال الإعلانات في الصحف والمجلات.
 - من خلال الوكالات المختصة في الربط بين سوق العمل وطالبي الوظائف.
 - من خلال البحث عبر شبكة الإنترنت.
 - من خلال التقدم مباشرة لطلب وظيفة من الشركة المختصة أو اعتماد وسيلة أخرى (اذكرها...).
 - 5 - حدد النسب المئوية لكل خيار مما سبق.
 - 6 التقرير: اكتب تقريراً مفصلاً يحدد النسب التي حصلت عليها من خلال العينة العشوائية التي اعتمدتها مكوّنًا جدولاً بالنسب المئوية عن كل وسيلة تم استخدامها لإيجاد وظيفة.
 - القرار: ضمّن تقريرك بعض الاقتراحات والنصائح والاستنتاجات التي نتجت عن تلك الدراسة.

دروس الوحدة

١-١ التقدير	٢-١ اختبارات الفروض الإحصائية
(١-١-١) التقدير بنقطة	(١-٢-١) σ معلومة
(١-١-١) التقدير بفترة الثقة	(١-٢-١) σ غير معلومة، $n < 30$
	(١-٢-١) σ غير معلومة، $n \geq 30$

- غالبًا ما تكون الأسئلة التي تطرح للاستفادة من شيء ما، أسئلة من نوع التقدير. على سبيل المثال:
- ما هو متوسط توفير الوقود لهذا المحرك؟
- ما هو متوسط تأثير الدواء الجديد على تأخير انتكاسة المريض؟
- ما هو متوسط عمر الجنس البشري العاقل؟
- أما في حالة اختبار الفروض فتكون الأسئلة كما يلي:
- هل متوسط العينة من المجتمع الإحصائي يتفق مع متوسط μ ؟
- هل الدواء الجديد يؤخر الانتكاسة؟

مشروع الوحدة

إن الهدف الأساسي للمتخرجين من المعاهد والجامعات هو إيجاد فرصة عمل وهنا تكمن المشكلة في الوسيلة الأفضل والأنجح لإيجاد فرصة العمل.

من هنا يعالج مشروع الوحدة بعض الوسائل المتبعة للدخول في سوق العمل.

إجابات «أسئلة حول التطبيق»

(أ) قد تختلف الإجابات بحسب كل طالب.

(ب) تتنوع الاستثمارات بحسب كل طالب.

(ج) تتنوع الإجابة بحسب كل طالب لأنه ربما قد يجد وسيلة غير تلك المذكورة سابقاً.

التقرير

إعرض تقريرك أمام الصف ليتم مناقشته وذلك من خلال مقارنة الأرقام والنسب المئوية المرتبطة بكل وسيلة، ثم استخدام هذه الأرقام والنسب في عملية البحث عن فرصة عمل ومقارنتها مع الأرقام المشابهة في تقارير زملائك في الصف ليعمل على اعتمادها أو تصحيحها أو حتى رفضها في حال كان هناك فوارق كبيرة في ما بينها.

الوحدة الأولى

أضف إلى معلوماتك

في الوسائل الإعلامية المرئية والمسموعة والمكتوبة تطالعك نتائج إحصائية تتحدث عن توقعات أحداث معينة تتناول انتخابات نيابية أو رئاسية أو مبيعات أو مباريات... وأكثر ما يستوقفك هو نسبة مئوية معينة مع هامش خطأ محدد والسؤال المهم هو: كيف يتم التقدير وكيف يحسب هامش الخطأ؟ توفر دروس هذه الوحدة فرصة أمام الطلاب للتعرف على التقدير وهامش الخطأ والفروض الإحصائية وكيفية احتسابها.

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت مقاييس النزعة المركزية: المتوسط الحسابي - الوسيط - المنوال.
- تعلمت المجتمع الإحصائي.
- تعلمت العينة واستخداماتها.

ماذا سوف تتعلم؟

- يُعرّف المعلمة والإحصاء.
- إيجاد التقدير بنقطة.
- إيجاد التقدير بفترة ثقة.
- استكشاف الفروض الإحصائية.
- يُعرّف الاختبارات الإحصائية.
- اتخاذ القرار المناسب.

المصطلحات الأساسية

المعلمة - الإحصاء - التقدير - التقدير بنقطة - فترة الثقة - الفروض الإحصائية - المقياس الإحصائي - فرض العدم - فرض البديل - القرار - مستوى المعنوية - درجات الحرية.

سلم التقييم

٤	جدول النسب المئوية صحيح بالكامل - الاقتراحات والاستنتاجات ممتازة ومفيدة - التقرير منظم وواضح ويعكس نتائج بحث مميز.
٣	بعض الأخطاء في الجدول - الاقتراحات والاستنتاجات جيدة ومفيدة - التقرير منظم وواضح ولكن ينقصه الدقة في بعض النقاط.
٢	أخطاء كثيرة في الجدول - الاقتراحات والاستنتاجات مقبولة - التقرير غير منظم وينقصه الوضوح في التفاصيل.
١	معظم عناصر المشروع بحاجة إلى إعادة لأنها ناقصة.

العمل الأساسي في هذا الدرس هو إيجاد فترة الثقة وهي تتضمن قيم تستخدم لتقدير القيمة الصحيحة لمعالم مجتمع إحصائي.

لهذا يجب البدء بفهم مكوّنات فترة الثقة:

القيمة الحرجة، المتوسط الحسابي، الانحراف المعياري، هامش الخطأ والتركيز على إيجادها.

ومن ثم التأكد من فهم الطلاب لمبدأ القيمة الحرجة واستخدام جدول التوزيع الطبيعي لإيجادها.

في المثال (٢)

شرح مفصّل عن كيفية إيجاد القيمة الحرجة المناظرة لمستوى الثقة والخطوات المتبعة لإيجادها.

أعط أمثلة بديلة للطلاب لإيجاد القيمة الحرجة على جدول التوزيع الطبيعي المعياري مستخدماً درجات ثقة متعددة مثل ٨٦٪، ٩٠٪، ٩٢٪...

عند احتساب المتوسط الحسابي، والانحراف المعياري، والقيمة الحرجة، وهامش الخطأ نوجد فترة الثقة التي هي عبارة عن القيمتين $\bar{x} - s$ ، $\bar{x} + s$ هـ اللتين تسميان طرفي فترة الثقة.

والتركيز على أنّ استخدام القيمة الحرجة $z_{\alpha/2}$ ، من جدول التوزيع الطبيعي يكون في حالة σ معلومة.

في المثال (٣)

يبين هذا المثال الخطوات المتبعة لاحتساب القيمة الحرجة $z_{\alpha/2}$ المناظرة لمستوى ثقة ٩٠٪ وذلك باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري الموجود في نهاية الوحدة. أرشد الطلاب إلى وجوب العودة إلى هذا الجدول كلما أردنا احتساب القيمة الحرجة.

في المثالين (٤)، (٥)

يبينان بالتفصيل كيف نوجد هامش الخطأ إذا كانت σ معلومة أو غير معلومة. ثم كيف نحسب فترة الثقة ($\bar{x} - s$ ، $\bar{x} + s$) وكيف نفسّر هذه الفترة.

Confidence Interval Estimation (١-١) (١-١) التقدير بفترة الثقة

علّمنا مما سبق أن لكل مجتمع معالم منها المتوسط الحسابي μ والانحراف المعياري σ ، ودرستنا كيفية إيجاد التقدير بنقطة لتلك المعالم. وعلّمنا أن التقدير بنقطة لإحدى معالم المجتمع هو قيمة وحيدة محسوبة من العينة وبالتالي فإن احتمال الخطأ في التقدير بنقطة يكون كبيراً. ولذلك فإنه من الأفضل إيجاد فترة معينة يتوقع أن تقع معلمة المجتمع داخلها بنسبة معينة أو احتمال معين. إن مثل هذه الفترة تسمى فترة الثقة.

Confidence Interval فترة الثقة

تعريف: فترة الثقة هي فترة طرفها متغيران عشوائيان (أي أنها فترة عشوائية) تستخدم لتقدير إحدى معالم المجتمع.

وهذه الفترة تحوي إحدى معالم المجتمع بنسبة معينة تسمى مستوى الثقة، فمثلاً إذا كان مستوى الثقة ٩٥٪ فإن نسبة الخطأ في التقدير تكون ٥٪. يرمز لمستوى الثقة بالرمز $1 - \alpha$ حيث α هو معامل مستوى الثقة و α هي نسبة الخطأ في التقدير.

وعلى سبيل المثال:

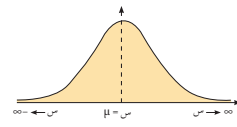
- إذا كان مستوى الثقة ٩٠٪ فإن مستوى المعنوية $\alpha = ٠,١٠$.
- وإذا كان مستوى الثقة ٩٥٪ فإن مستوى المعنوية $\alpha = ٠,٠٥$.
- أيضاً إذا كان مستوى الثقة ٩٩٪ فإن مستوى المعنوية $\alpha = ٠,٠١$.

ومن هذه الخيارات الثلاثة، يختار مستوى الثقة ٩٥٪ هو الأكثر انتشاراً لأنه يؤمن التوازن الأنسب بين الدقة الموضحة من خلال طول فترة الثقة والدقة الموضحة من خلال مستوى الثقة.

Curve of Normal Distribution منحني التوزيع الطبيعي

تعرفنا فيما سبق على بيان منحني التوزيع الطبيعي، وعلّمنا من خواص التوزيع الطبيعي ما يلي:

- المتوسط الحسابي = الوسط = μ .
- يكون بيان المنحنى على شكل ناقوس (جرس) متماثل حول محوره (μ).
- يمتد المنحنى من طرفه إلى $-\infty$ وإلى $+\infty$ (لا يقطع المحور الأفقي).
- المساحة تحت المنحنى تساوي الواحد الصحيح (وحدة مساحة).
- المستقيم الرأسي μ يقسم المساحة تحت المنحنى إلى منطقتين متماثلتين مساحة كل منهما تساوي نصف وحدة مساحة كما في الشكل.



منحني التوزيع الطبيعي المعياري

Curve of Standard Normal Distribution

إذا كان المتوسط الحسابي للتوزيع الطبيعي = صفر والانحراف المعياري $\sigma = ١$ يسمى التوزيع الطبيعي بالتوزيع الطبيعي المعياري. الشكل المرسوم يمثل بيان منحني التوزيع الطبيعي المعياري. المستقيم $z = ٠$ صفر هو محور التماثل للمنحنى. تأخذ z قيم موجبة وتزداد جهة اليمين بينما تأخذ z قيمًا سالبة وتنقص جهة اليسار.

القيمة الحرجة

الشكل المرسوم يبين منحني التوزيع الطبيعي المعياري. نعلم أن المساحة تحت المنحنى الطبيعي تساوي الواحد (وحدة المساحة) ولتمثيل $(1 - \alpha)$ من المساحة الكلية تحت منحني التوزيع الطبيعي نحصر هذه المساحة بين حدين رأسيين متساوي البعد عن المحور الرأسي كما هو موضح في الشكل. نلاحظ أن المحور الرأسي يقسم المساحة $(1 - \alpha)$ إلى نصفين كل منهما يساوي $\frac{1 - \alpha}{2}$. تكون المساحة المتبقية من المساحة الكلية هي α موزعة على طرفي المنحنى بالتساوي كل منها يساوي $\frac{\alpha}{2}$.

- نعتبر عن الحدين الرأسيين بالرمز $z = \frac{1 - \alpha}{2}$ وبالرمز $z = -\frac{1 - \alpha}{2}$ حيث z يفصل مساحة $\frac{\alpha}{2}$ من ذيل الطرف الأيمن ومساحة $\frac{1 - \alpha}{2}$ من المستقيم $z = ٠$ صفر، بينما $-z$ يفصل مساحة $\frac{\alpha}{2}$ من ذيل الطرف الأيسر ومساحة $\frac{1 - \alpha}{2}$ من المستقيم $z = ٠$ صفر.
- تسمى القيمة الموجبة z بالقيمة الحرجة (Critical Value).

إيجاد القيمة الحرجة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري: لإيجاد قيمة z المناظرة للمساحة تحت المنحنى نحسب المساحة $\frac{1 - \alpha}{2}$ التي تقع على يسار z وبين الصفر أي في الفترة $[0, z]$ ثم نكشف عنها في الجدول الفرق في نهاية الوحدة حيث العمود الأول قيم z ابتداءً من ٠,٠ وحتى ٣,١٠ وأكثر. والصف الأول يمثل الأجزاء من المئة لقيم z ، ومنه يمكن تحديد قيمة z .



في المثال (٦)

يوضح هذا المثال كيفية إيجاد فترة الثقة إذا كان التباين σ^2 غير معلوم وحجم العينة $n < 30$ فنستخدم الجدول التوزيع الطبيعي والانحراف المعياري للعينة مع فنوجد قيمة هامش الخطأ.

في المثال (٧)

يجب تركيز انتباه الطلاب إلى أن حجم العينة $n = 23 < 30$ ، وأن التباين σ^2 للمجتمع الإحصائي غير معلوم لذا يجب إيجاد درجات الحرية أولاً واستخدام جدول التوزيع لمعرفة القيمة الحرجة t_{α} . ساعد الطلاب في التعامل مع جدول التوزيع وكيفية إيجاد القيمة الحرجة.

في المثالين (٨)، (٩)

يبين هذان المثالان كيف نحسب هامش الخطأ وكيف نوجد فترة الثقة لمجتمع إحصائي إذا كان حجم العينة $n \geq 30$ (مثال ٨) أو $n < 30$ (مثال ٩) مستخدمين مستوى ثقة ٩٥٪. ألفت انتباه الطلاب إلى استخدام جدول التوزيع في حالة $n \geq 30$ وفي كل مرة إيجاد درجة الحرية $(n - 1)$ والقيمة الحرجة t_{α} .

Margin of Error

هامش الخطأ

Point Estimation Error

أولاً: الخطأ بالتقدير بنقطة

علماً فيما سبق أنه يمكن استخدام المتوسط الحسابي للعينة $\bar{x}$ كتقدير بنقطة للمتوسط الحسابي للمجتمع μ .

ومن المتوقع أن تكون قيمة المتوسط الحسابي للعينة $\bar{x}$ غير مساوية لقيمة المتوسط الحسابي للمجتمع μ . تسمى القيمة المطلقة للفرق بين القيمتين السابقتين بالخطأ المعياري

وتساوي $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ حيث σ الانحراف المعياري للمجتمع، n عدد قيم العينة (أو حجم العينة).

Interval Estimation Error

ثانياً: الخطأ بالتقدير بفترة

والآن نعرض للخطأ بالتقدير بفترة فعندما نستخدم عينة لتقدير المتوسط الحسابي لمجتمع μ يكون الخطأ في التقدير هو القيمة المطلقة للفرق بين المتوسط الحسابي للعينة $\bar{x}$ والمتوسط الحسابي للمجتمع μ ويعرف هامش الخطأ h :

$$h = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times t_{\alpha} \quad \text{باحتمال } (1 - \alpha), \text{ حيث } \alpha \text{ تعبر عن نسبة الخطأ في التقدير.}$$

وحتى يكون هامش الخطأ أقل ما يمكن يجب أن نتحقق المتباينة:

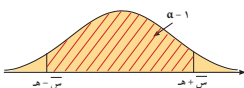
$$|\bar{x} - \mu| > h$$

$$\text{أي أن: } |\bar{x} - \mu| > h$$

$$-h < \bar{x} - \mu < h$$

$$\bar{x} - h < \mu < \bar{x} + h$$

وعليه تكون فترة الثقة هي $(\bar{x} - h, \bar{x} + h)$



Confidence Interval Estimation for the Mean Value μ of Statistical Population

أولاً: إذا كان التباين للمجتمع σ^2 معلوم

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي μ, σ^2 وتباينه σ^2 معلوم فإن تقدير فترة الثقة $100(1 - \alpha)\%$ للمتوسط الحسابي μ هي: $(\bar{x} - h, \bar{x} + h)$

حيث $\bar{x}$ المتوسط الحسابي للعينة، h هامش الخطأ.

وتسمى القيمتان $\bar{x} - h$ و $\bar{x} + h$ طرفي فترة الثقة.

ملاحظة: عند إيجاد فترة الثقة $100(1 - \alpha)\%$ سنكتفي بمستوى الثقة $1 - \alpha$ والتي تناظرها القيمة الحرجة t_{α} (من جدول التوزيع الطبيعي المعياري).

تفسير فترة الثقة

عند اختيار عينات عشوائية مختلفة متساوية في الحجم (n) وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن 95% من فترات الثقة هذه تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي للمجتمع (μ) .

فمثلاً عند اختيار ١٠٠ عينة عشوائية ذات الحجم نفسه (n) وفي كل مرة نحسب $\bar{x}$ وفترة الثقة فإننا نتوقع أن ٩٥ فترة تحوي μ الحقيقية و ٥ فترات لا تحويها.

الخطوات المتبعة لإيجاد فترة الثقة للمتوسط الحسابي μ

إذا كانت σ^2 معلومة حيث $n < 30$ أو $n \geq 30$

١. نوجد القيمة الحرجة t_{α} المناظرة لمستوى ثقة $1 - \alpha$ وهي ١,٩٦.

٢. نوجد هامش الخطأ $h = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times t_{\alpha}$

٣. نوجد فترة الثقة $(\bar{x} - h, \bar{x} + h)$.

مثال (٢)

أوجد القيمة الحرجة t_{α} المناظرة لمستوى ثقة 95% باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

الحل:

$$\therefore \text{مستوى الثقة هو } 95\%$$

$$\therefore 1 - \alpha = 0,95$$

$$\therefore \alpha = 0,05$$

$$\therefore \frac{\alpha}{2} = 0,025$$

نبحث في جدول التوزيع الطبيعي المعياري عن قيمة n المناظرة للعدد ٠,٤٧٥ فنجد $t_{\alpha} = 1,96$

حاول أن تحل

أوجد القيمة الحرجة t_{α} المناظرة لمستوى ثقة 97% باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

مثال (٣)

أوجد القيمة الحرجة t_{α} المناظرة لمستوى ثقة 90% باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

الحل:

$$\therefore \text{مستوى الثقة هو } 90\%$$

$$\therefore 1 - \alpha = 0,90$$

$$\therefore \alpha = 0,10$$

$$\therefore \frac{\alpha}{2} = 0,05$$

نبحث في الجدول عن القيمة ٠,٤٥٠ فنجدها تقع بين القيمتين ٠,٤٤٩٥ و ٠,٤٥٠٥

أي أن t_{α} تقع بين ١,٦٤ و ١,٦٥

لذا نأخذ المتوسط الحسابي للقيمتين ١,٦٤ و ١,٦٥ كتقدير لقيمة t_{α}

$$\therefore t_{\alpha} = \frac{1,64 + 1,65}{2} = 1,645$$

حاول أن تحل

أوجد القيمة الحرجة t_{α} المناظرة لمستوى ثقة 99% باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

٦ الربط

توفر الأمثلة (١)، (٤)، (٥)، فرصة للطلاب للتعرف على كيفية استخدام التقدير في مواقف حياتية.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في استخدام جدول التوزيع الطبيعي، و جدول التوزيع ت لإيجاد القيم الحرجة، لهذا أعطهم أمثلة أخرى لتخطي هذه المشكلة.

٨ التقييم

من المهم جداً متابعة عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» لمعرفة مدى قدرتهم على فهم واستيعاب المطلوب منهم وحلّه.

اختبار سريع

١ أقيمت دراسة على ١٠٠ شخص فتيّن أن معدّل استهلاك العصير هو ٦ لترات في الشهر الواحد. أوجد التقدير بنقطة لمعدل استهلاك العصير للمجتمع.

$$\mu = \bar{س} = ٦ \text{ لترات}$$

٢ أوجد فترة ثقة بدرجة ثقة ٩٥٪ للمعلمة المجهولة μ إذا كان لدينا: $n = ٤٠$ ، أخذت من مجتمع حيث المتوسط الحسابي μ ، والتباين ٢٠، وعلم أن $\bar{س} = ١٥$.

$$\text{فترة الثقة: } (١٦, ٣٨٦, ١٣, ٦١٤)$$

مثال (٤)



أجريت دراسة لعينة من الإناث حول معدل النبض لديهم فإذا كان حجم عينة الإناث $n = ٤٠$ والانحراف المعياري لمجتمع الإناث $\sigma = ١٢,٥$ والمتوسط الحسابي للعينة $\bar{س} = ٧٦,٣$ باستخدام مستوى ثقة ٩٥٪.

- أوجد هامش الخطأ.
- أوجد فترة الثقة للمجتمع الحسابي للمجتمع الإحصائي μ .
- فسّر فترة الثقة.

الحل:

$$\begin{aligned} \text{١} \quad \therefore \text{مستوى الثقة } ٩٥\% \quad \therefore \text{القيمة الحرجة } z_{\frac{\alpha}{2}} &= ١,٩٦ \\ \text{بأن } \sigma \text{ معلومة} \quad \therefore \text{هامش الخطأ } h &= z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ \therefore n = ٤٠, \sigma = ١٢,٥, \bar{س} = ٧٦,٣ \quad \therefore h &= \frac{12,5}{\sqrt{40}} \times 1,96 = ٣,٨٧٣٨ \end{aligned}$$

٢ فترة الثقة هي $(\bar{س} - h, \bar{س} + h)$

$$(3,8738 - 76,3, 3,8738 + 76,3) = (80,1262, 80,1738)$$

٣ عند اختيار ١٠٠ عينة عشوائية ذات الحجم نفسه ($n = ٤٠$) وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن ٩٥ فترة تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي للمجتمع μ .

حاول أن تحل

٤ من المثال (٤)، إذا أجريت الدراسة على عينة أخرى من الإناث حجمها ١٠٠ والانحراف المعياري لمجتمع الإناث $\sigma = ٣,٦$ والمتوسط الحسابي للعينة $\bar{س} = ١٨,٤$ باستخدام مستوى ثقة ٩٥٪.

- أوجد هامش الخطأ.
- أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ .
- فسّر فترة الثقة.

مثال (٥)

أجريت دراسة لعينة من ١٨ طالباً حول متوسط عدداً ساعات استخدام الأجهزة الذكية (TABLETS) أسبوعياً. فإذا كان الانحراف المعياري $\sigma = ١,٨$ والمتوسط الحسابي للعينة $\bar{س} = ١٥$ ، باستخدام مستوى ثقة ٩٥٪.

- أوجد هامش الخطأ.
- أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ .
- فسّر فترة الثقة.

الحل:

$$\begin{aligned} \text{١} \quad \therefore \text{مستوى الثقة } ٩٥\% \quad \therefore \text{القيمة الحرجة } z_{\frac{\alpha}{2}} &= ١,٩٦ \\ \therefore \sigma \text{ معلومة} \quad \therefore \text{هامش الخطأ } h &= z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ \therefore n = ١٨, \sigma = ١,٨, \bar{س} = ١٥ \quad \therefore h &= \frac{1,8}{\sqrt{18}} \times 1,96 = ٠,٨٣١٦ \end{aligned}$$

٢ فترة الثقة هي $(\bar{س} - h, \bar{س} + h)$

$$(0,8316 - 15, 0,8316 + 15) = (14,1684, 15,8316)$$

٣ عند اختيار ١٠٠ عينة عشوائية ذات الحجم نفسه ($n = ١٨$) وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن ٩٥ فترة تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي للمجتمع μ .

حاول أن تحل

٥ أجريت دراسة لعينة من ٢٤ طالباً حول متوسط عدد ساعات مشاهدة التلفزيون أسبوعياً. فإذا كان الانحراف المعياري $\sigma = ٢$ والمتوسط الحسابي للعينة $\bar{س} = ٢١$ باستخدام مستوى ثقة ٩٥٪.

- أوجد هامش الخطأ.
- أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ .
- فسّر فترة الثقة.

«دعنا نفكر وتناقش»

- كلا، لا يمكن استخدام هذه العينة لأن نسبة الخطأ كبيرة ولأن العينة صغيرة بالنسبة إلى مجموع مدارس الكويت.
- أفضل وسيلة هي تكبير العينة أو اختيار أكثر من عينة لها نفس الحجم.

«حاول أن تحل»

١ س = ٩، ١٣ هو تقدير بنقطة للمتوسط الحسابي μ .

٢
$$u = \frac{a}{2}, 17, 2$$

٣
$$u = \frac{a}{2} = \frac{2,58 + 2,57}{2} = 2,575$$

٤ (١) هـ = ٠,٧٠٥٦

(٢) فترة الثقة: (١٩, ١٠٥٦, ١٧, ٦٩٤٤)

(٣) عند اختيار ١٠٠ عينة عشوائية ذات الحجم نفسه

(ن = ١٠٠) وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة

فإننا نتوقع أن ٩٥ فترة تحوي القيمة الحقيقية

للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي

حاول أن تحل

- أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها $n = 81$ ومتوسطها الحسابي $\bar{x} = 50$ ، وانحرافها المعياري $s = 9$ ، باستخدام مستوى ثقة ٩٥٪.
- أوجد هامش الخطأ.
- أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ .
- فسّر فترة الثقة.

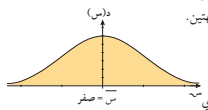
نائباً: إذا كان التباين للمجتمع σ^2 غير معلوم وحجم العينة $n \geq 30$.

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي تباينه σ^2 غير معلوم وحجم العينة $n \geq 30$ فإن توزيع العينة لا يؤول إلى التوزيع الطبيعي وفي هذه الحالة يلزمنا استخدام توزيع آخر هو توزيع ت للعينات الصغيرة التي حجمها $n \geq 30$ ويكون تقدير فترة الثقة $(\alpha - 1) \%$ للمتوسط الحسابي μ هي $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$ حيث s المتوسط الحسابي للعينة، ه هامش الخطأ.

Properties of t Distribution

خواص التوزيع ت

- توزيع متماثل حول متوسطه الحسابي والذي يساوي صفراً، ويمتد إلى ∞ من جهة اليمين وإلى $-\infty$ من جهة اليسار ويزداد قريباً من الصفر في الجهتين.
- انحرافه المعياري أكبر من الواحد.
- يعتمد هذا التوزيع على درجات الحرية والتي تساوي (حجم العينة - ١) أي $(n - 1)$.
- التوزيع ت يشبه التوزيع الطبيعي إلا أن قمته أكثر انخفاً من التوزيع الطبيعي.
- كلما زادت درجات الحرية اقترب هذا التوزيع من التوزيع الطبيعي ويقترب انحرافه المعياري إلى الواحد الصحيح.



٢٢

إيجاد القيمة الحرجة من جدول توزيع ت.

- لإيجاد القيمة الحرجة من جدول توزيع ت حيث يبين العمود الأول قيم درجات الحرية $(n - 1)$ وتبدأ من ١ إلى ٣٠ وأكثر والصف الأول يمثل قيم $\frac{\alpha}{2}$ ومنه يمكن تحديد $t = t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$.

مثال (٧)

أخذت عينة عشوائية بسيطة حجمها $n = 23$ من مجتمع طبيعي. أوجد القيمة الحرجة ت t المناظرة لمستوى الثقة ٩٥٪ باستخدام جدول التوزيع ت.

الحل:

$$n = 23$$

$$\therefore \text{درجات الحرية } (n - 1) = 23 - 1$$

$$22 =$$

$$\therefore \text{مستوى الثقة هو } 95\%$$

$$\therefore 1 - \alpha = 95\%$$

$$0,05 = \alpha$$

$$0,025 = \frac{\alpha}{2}$$

ومن جدول التوزيع ت

$$\text{تكون قيمة } t = 2,074$$

حاول أن تحل

أخذت عينة عشوائية بسيطة حجمها $n = 20$ من مجتمع طبيعي.أوجد القيمة الحرجة ت t المناظرة لمستوى الثقة ٩٥٪ باستخدام جدول التوزيع ت.

٢٣

نائباً: إذا كان التباين للمجتمع σ^2 غير معلوم وحجم العينة $n < 30$ الخطوات المتبعة لإيجاد فترة الثقة للمتوسط الحسابي μ

- إذا كانت σ^2 غير معلومة حيث $n < 30$
- توجد القيمة الحرجة ت t المناظرة لمستوى ثقة ٩٥٪ وهي ١,٩٦
- توجد هامش الخطأ $h = t \times \frac{s}{\sqrt{n}}$
- توجد فترة الثقة $(\bar{x} - h, \bar{x} + h)$.

مثال (٦)

عينة عشوائية حجمها ٣٦، فإذا كان المتوسط الحسابي للعينة ٦٠ وتباينها ١٦، باستخدام مستوى ثقة ٩٥٪.

- أوجد هامش الخطأ.
- أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ .
- فسّر فترة الثقة.

الحل:

١
$$\therefore \text{مستوى الثقة } 95\%$$

$$\therefore \sigma^2 \text{ غير معلوم، } n < 30$$

$$\therefore \text{التباين } s^2 = 16$$

$$\therefore \text{الانحراف المعياري } s = 4$$

$$\therefore \bar{x} = 60, n = 36$$

$$\therefore h = 1,96 \times \frac{4}{\sqrt{36}}$$

$$1,3066 =$$

٢
$$\text{فترة الثقة هي } (\bar{x} - h, \bar{x} + h)$$

$$(60 - 1,3066, 60 + 1,3066) =$$

$$(58,6934, 61,3066) =$$

٣ عند اختيار ١٠٠ عينة عشوائية ذات الحجم نفسه (ن = ٣٦) وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن ٩٥ فترة تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي للمجتمع μ .

٢٤

٥ (١) هـ $\approx 1,0002$

(٢) فترة الثقة: (١٩,٩٩٩٨ ، ٢٢,٠٠٠٢)

(٣) عند اختيار ١٠٠ عينة عشوائية ذات الحجم نفسه

(ن = ٢٤) وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة

فإننا نتوقع أن ٩٥ فترة تحوي القيمة الحقيقية

للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي.

٦ (١) هـ $= 1,96$

(٢) فترة الثقة: (٥١,٩٦ ، ٤٨,٠٤)

(٣) عند اختيار ١٠٠ عينة عشوائية ذات الحجم نفسه

(ن = ٨١) وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة

فإننا نتوقع أن ٩٥ فترة تحوي القيمة الحقيقية

للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي.

٧ ت $\frac{\alpha}{2} = 2,093$

٨ (١) هـ $\approx 1,39$

(٢) فترة الثقة: (٩,٧٩ ، ٧,٠١)

٩ (١) هـ $\approx 2,1028$

(٢) فترة الثقة: (٣٨,١٥٢٨ ، ٣٣,٨٤٧٢)

مثال (٨)

أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها $n = 25$ ، فإذا كان الانحراف المعياري للعينة (ع) يساوي ١٠ ومتوسطها الحسابي (س) يساوي ١٥، استخدم مستوى ثقة ٩٥٪ لإيجاد:

١ هامش الخطأ.

٢ فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ .

الحل:

١ σ^2 غير معلوم، $n \geq 30$

$\therefore$ نستخدم توزيع ت.

$25 = n$

$24 = 1 - 25 = (1 - n)$ درجات الحرية

$95\% = \alpha = 1 - \alpha$ مستوى الثقة

$0,050 = \alpha = 1 - \alpha$

$0,025 = \frac{\alpha}{2}$

من جدول توزيع ت تكون قيمة $t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} = 2,064$

هامش الخطأ هـ = $t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \times \frac{s}{\sqrt{n}}$

$\frac{10}{\sqrt{25}} \times 2,064 =$ هـ

$4,128 =$

٢ فترة الثقة = (س - هـ ، س + هـ)

$(15 - 4,128 , 15 + 4,128) =$

$(10,872 , 19,128) =$

حاول أن تحل

٨ أوجد فترة ثقة ٩٥٪ للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ علماً أن العينة أخذت من مجتمع طبيعي.

إذا كان لدينا س = ٤ ، ع = ٨ ، $n = 3$ ، $n = 13$

٢٥

ويمكن تلخيص الحالات الثلاث السابقة كما في الجدول التالي:

الانحراف المعياري (ع)	حجم العينة (ن)	هامش الخطأ (هـ)	فترة الثقة (س - هـ ، س + هـ)
معلوم	$30 < n$ أو $n \geq 30$	$\frac{s}{\sqrt{n}} \times t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$	$(\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \times \frac{s}{\sqrt{n}} , \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \times \frac{s}{\sqrt{n}})$
غير معلوم (تستبدل بـ ع)	$30 < n$	$\frac{s}{\sqrt{n}} \times t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$	$(\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \times \frac{s}{\sqrt{n}} , \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \times \frac{s}{\sqrt{n}})$
	$30 \geq n$	$\frac{s}{\sqrt{n}} \times z_{\frac{\alpha}{2}}$	$(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{s}{\sqrt{n}} , \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{s}{\sqrt{n}})$

مثال (٩)

أخذت عينة عشوائية حجمها $n = 60$ ، فإذا كان الانحراف المعياري للعينة (ع) يساوي ١٨ ومتوسطها الحسابي (س) يساوي ٣٦، استخدم مستوى ثقة ٩٥٪ لإيجاد:

١ هامش الخطأ.

٢ فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ .

الحل:

١ σ^2 غير معلوم، $n \geq 30$

$\therefore$ القيمة الحرجة $t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$ في المناظرة لمستوى ثقة ٩٥٪ $= 1,96$

$60 = n$ ، $18 = ع$

$\therefore$ هـ = $t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \times \frac{ع}{\sqrt{n}}$

$\frac{18}{\sqrt{60}} \times 1,96 =$ هـ

$4,0546 =$

٢ فترة الثقة = (س - هـ ، س + هـ)

$(36 - 4,0546 , 36 + 4,0546) =$

$(31,9454 , 40,0546) =$

حاول أن تحل

٩ أخذت عينة عشوائية من ٢٠ نيتة لدراسة نموها. فإذا كان متوسط النمو = ٣٦ سم خلال عام والانحراف المعياري للعينة ٤,٦ سم، استخدم مستوى ثقة ٩٥٪ لإيجاد:

١ هامش الخطأ.

٢ فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ .

٢٦

والآن، بعد أن علمنا كيف نوجد القيم الحرجة ت، يمكننا أن نوجد هامش الخطأ هـ وفترة الثقة.

هامش الخطأ للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ (في حالة σ^2 غير معلوم، $n \geq 30$)

Margin of Error for Mean Value of Statistical Population
Where σ^2 is not known and $n \geq 30$

هـ = ت $\times \frac{ع}{\sqrt{n}}$ حيث ع: الانحراف المعياري للعينة

فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ (في حالة σ^2 غير معلوم، $n \geq 30$)

Confidence Interval for Mean Value of Statistical
Population where σ^2 is not known and $n \geq 30$

(س - هـ ، س + هـ)

الخطوات المتبعة لإيجاد فترة الثقة للمتوسط الحسابي μ

١ إذا كانت σ^2 غير معلومة، $n \geq 30$

٢ نوجد درجات الحرية (ن - ١).

٣ نوجد القيمة الحرجة ت في المناظرة لدرجة ثقة ٩٥٪ من جدول توزيع ت.

٤ نوجد هامش الخطأ هـ = ت $\times \frac{ع}{\sqrt{n}}$

٥ نوجد فترة الثقة (س - هـ ، س + هـ).

٢٤

٢-١: اختبارات الفروض الإحصائية

١ الأهداف

- يوجد القيمة الحرجة، مستوى المعنوية، درجة الحرية.
- يضع فرض العدم والفرض البديل.
- يتخذ القرارات المناسبة بالقبول أو الرفض.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

الفرض - الفرض الإحصائي - المقياس الإحصائي - اختبارات الفروض الإحصائية - فرض العدم - الفرض البديل.

٣ الأدوات والوسائل

آلة حاسبة - حاسوب - جهاز إسقاط (Data Show).

٤ التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(أ) ما القيمة الحرجة α لمستويات الثقة: ٩٥٪، ٩٠٪، ٨٠٪؟

(ب) ما الفرق بين مستوى الثقة ومستوى المعنوية؟

(ج) متى يستخدم التوزيع t ومتى يستخدم التوزيع الطبيعي؟

(د) ما هي درجات الحرية؟

٢-١

اختبارات الفروض الإحصائية

Statistical Hypotheses Testing



دعنا نفكر ونتناقش

يتمتع مصنع نوعاً معيناً من المعلبات مسجل على العبوة أن الوزن الصافي ٢٠٠ جرام. فإذا تم أخذ عينة حجمها ١٠٠ عتبة وتم حساب المتوسط الحسابي لأوزان هذه العينة فوجد أنه ١٩٧,٣ جراماً، فهل يمكن الحكم على هذا المصنع بأنه يقوم بغش تجاري؟ ما هي حثيات هذا الحكم؟

نحن نعلم أنه في كثير من الأحيان وفي مواقف معينة نحتاج إلى اتخاذ قرار بناء على معلومات محددة وحثيات معقولة لها مبررها، لذلك دعت الضرورة إلى دراسة ما يسمى بالفرض الإحصائي واختبارات الفروض الإحصائية.

Statistic Hypothesis

تعريف: الفرض الإحصائي

هو ادعاء معين مبني على حثيات معقولة حول معلمة من معالم المجتمع مثل المتوسط الحسابي μ أو الانحراف المعياري σ .

تعريف: المقياس الإحصائي

هو قيمة وحيدة محسوبة من العينة تحت شروط معينة.

تعريف: اختبارات الفروض الإحصائية (اختبار المعنوية)

هي طريقة معيارية لاختبار ادعاء ما حول معلمة من معالم المجتمع.

ملاحظة: سنكتفي في هذا الموضوع بدراسة معلمة واحدة من معالم المجتمع وهي المتوسط الحسابي μ . إليك بعض الأمثلة عن الفروض التي يمكن اختبارها من خلال الطرق التي سنتطرقها في هذا الدرس. على سبيل المثال:

■ في إدارة الأعمال: تدعي إحدى الصحف في مقال لها أن معظم الموظفين يجدون عملاً عن طريق وكالات التوظيف.

■ في الطب: يدعي باحثون أن متوسط درجة حرارة جسم أي بالغ معافى ليست ٣٧ سيليزية.

■ في سلامة الطيران المدني: تدعي إدارة الطيران المدني في الكويت أن متوسط وزن المسافرين (مع حقائبه) يتعدى الوزن المسموح منذ عشرين سنة والبالغ ٨٤ كجم.

٢٧

سوف نتعلم

- القيمة الحرجة.
- مستوى المعنوية.
- درجات الحرية.
- الفروض.
- اختبار الفرض العدم.
- الفرض البديل.

Null and Alternative Hypotheses

فرض العدم والفرض البديل

- فرض العدم (H_0): يفيد بأن قيمة معلمة المجتمع (مثل المتوسط الحسابي μ) تساوي قيمة مزعومة. نختبر فرض العدم مباشرة أي نفرض بأنه صحيح وننتقل إلى خلاصة برفض أو عدم رفض H_0 .
- الفرض البديل (H_1): يفيد بأن للمعلمة قيمة تختلف نوعاً ما عن فرض العدم (H_0).
- يضم الشكل الرمزي للفرض البديل أحد هذه الرموز: $>$ أو $<$ أو $\neq$.

وستقتصر دراستنا على الحالة ($\neq$). فمثلاً: $\mu = 98$ ، $\mu \neq 98$ ، $\mu < 98$ ، $\mu > 98$.

الخطوات المتبعة لإجراء اختبار الفروض الإحصائية:

- ١ صياغة الفروض الإحصائية (فرض العدم H_0 ، والفرض البديل H_1).
- ٢ التحقق من الانحراف المعياري للمجتمع σ (معلوم أم غير معلوم) وتحديد حجم العينة (n) ومن ثم إيجاد المقياس الإحصائي للاختبار (t أو z)، (مسترشداً بالجدول التالي):

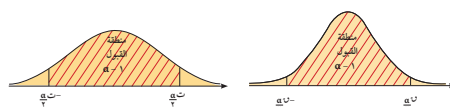
الانحراف المعياري (σ)	المقياس الإحصائي (t أو z)	حجم العينة (n)
معلوم	$\frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = z$	لا يشترط حجم معين للعينة
غير معلوم (تقدير σ)	$\frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = t$	$30 < n$
	$\frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = t$	$30 \geq n$

٣ تحديد مستوى المعنوية α وحساب القيمة الجدولية t_{α} من جدول التوزيع الطبيعي المعياري أو القيمة الجدولية t_{α} من جدول t ذي درجات حرية.

٤ تحديد منطقة القبول ($-t_{\alpha}$ ، t_{α}) أو ($-t_{\alpha}$ ، t_{α}) كما هو موضح بالشكل.

٥ اتخاذ القرار الإحصائي (قبول فرض العدم) أو (رفض فرض العدم وقبول الفرض البديل).

ملاحظة: ستقتصر دراستنا على مستوى ثقة ٩٥٪.



٢٨

٥ التدريس

في هذا الدرس يتعلّم الطالب كيفية وضع فروض واتخاذ القرارات المناسبة على ضوء نتائج الحسابات التي سيقوم بها. ابدأ بتفسير أنّ في الإحصاء، الفرض هو ادّعاء أو تصريح حول خاصيّة ما للمجتمع. لاختبار صوابيّة هذا الادّعاء علينا القيام بعدّة خطوات متسلسلة:

- وضع الفروض H_0 ، H_1 المناسبة.
- احتساب القيمة U أو T (الاختبار الإحصائي).
- إيجاد الفترة المناسبة.
- اتخاذ قرار:
 - رفض فرض العدم
 - قبول فرض العدم

في المثال (١)

في هذا المثال يدرك الطالب متى عليه استخدام المقياس U أو المقياس T (عند معرفة الانحراف المعياري σ نستخدم U)، وأن القيمة الجدوليّة U_{α} تستخرج من الجدول للتوزيع الطبيعي المعياري كما في الدرس السابق. شدّد للطلاب على ضرورة الانتباه ما إذا كانت القيمة المعطاة هي تباين أو انحراف معياري. ذكّرهم بأن الانحراف المعياري $\sqrt{v}$ التباين.

في الأمثلة (٢)، (٣)، (٤)

ترتكز هذه الأمثلة على قبول فرض العدم أو الفرض البديل. يطبّق الطلاب فيها الخطوات اللازمة بالتسلسل. شدّد لهم على ضرورة الانتباه إلى الفرق بين مستوى المعنويّة ومستوى الثقة، وأن حدّي الفترة ما هما إلا القيمة الجدولية (القيمة الحرجة) ومعكوسها الجمعي، وأن القيمة T أو U يمكن أن تكون سالبة، عندما يكون المتوسط الحسابي للعينة أصغر من قيمة الفرض.

شدّد على أن صياغة الإجابة النهائية يمكن أن تتم بعدّة طرق، مع ضرورة ذكر: رفض فرض العدم أو عدم رفض فرض العدم.

نبّه الطلاب إلى ضرورة استخدام المقياس الإحصائي T في المثال (٤) لأن حجم العينة $n = 10 > 30$ والانحراف المعياري σ للمجتمع الإحصائي غير معلوم.

(١-٢) إذا كان الانحراف المعياري للمجتمع σ معلوم

مثال (١)

تزعم شركة أن متوسط رواتب موظفيها يساوي ٤٠٠٠ دينار كويتي. إذا أخذت عينة من ٢٥ موظفًا، ووجد أن متوسط رواتب العينة هو ٣٩٥٠ دينارًا كويتيًّا فإذا علمت أن الانحراف المعياري للمجتمع $\sigma = 120$ دينارًا، وضّح كيفية إجراء الاختبار الإحصائي بمستوى ثقة ٩٥٪.

الحل:

١ صياغة الفروض

ف: $\mu = 4000$ مقابل $H_0: \mu \neq 4000$

٢ (معلومة)

$\sigma = 120$ (معلومة)

نستخدم المقياس الإحصائي U : $U = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

$\bar{X} = 3950$, $n = 25$

$U = \frac{3950 - 4000}{\frac{120}{\sqrt{25}}} = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

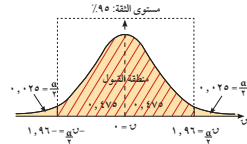
$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$

$U = -2$



حاول أن تحل

١ يزعم صانع إطارات أن متوسط عمر الإطارات التي يصنعها $\mu = 25000$ كم. إذا أخذت عينة عشوائية من ١٥ إطارًا وأظهرت أن متوسطها الحسابي $\bar{x} = 27000$ كم. إذا علمت أن الانحراف المعياري للمجتمع $\sigma = 5000$ كم فوضّح كيفية إجراء الاختبار الإحصائي لمستوى ثقة ٩٥٪.

مثال (٢)

بيّنت الدراسة أن قوة تحمل أسلاك معدنية لها متوسط حساوي $\mu = 1800$ كجم مع انحراف معياري $\sigma = 150$ كجم. ويؤكد الأخصائيون في المصنع المنتج لهذه الأسلاك أن بإمكانهم زيادة قوة تحمل هذه الأسلاك، وتأكيدًا على ذلك تمّ اختبار عينة من ٤٠ سلكًا فتمّ أن متوسط تحمل هذه الأسلاك يساوي ١٨٤٠ كجم.

هل يمكن قبول مثل هذا الفرض بمستوى معنويّة $\alpha = 0,05$ ؟

الحل:

١ صياغة الفروض

ف: $\mu = 1800$ مقابل $H_0: \mu \neq 1800$

٢ (معلومة)

$\sigma = 150$ (معلومة)

نستخدم المقياس الإحصائي U : $U = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

$\bar{X} = 1840$, $n = 40$

$U = \frac{1840 - 1800}{\frac{150}{\sqrt{40}}} = 1,6865$

$U = 1,6865$

$U = 1,6865$

$U = 1,6865$

$U = 1,6865$

$U = 1,6865$

$U = 1,6865$

$U = 1,6865$

$U = 1,6865$

$U = 1,6865$

$U = 1,6865$

$U = 1,6865$

$U = 1,6865$

$U = 1,6865$

$U = 1,6865$

$U = 1,6865$

$U = 1,6865$

$U = 1,6865$

$U = 1,6865$

$U = 1,6865$

$U = 1,6865$

$U = 1,6865$

$U = 1,6865$

$U = 1,6865$

$U = 1,6865$

$U = 1,6865$



حاول أن تحل

٢ متوسط العمر لعينة من ١٥٠ مصباحًا كهربائيًا مصنعة في أحد المصانع هو $\bar{x} = 1580$ ساعة بالانحراف المعياري $\sigma = 120$ ساعة. يقول صاحب المصنع أن متوسط العمر $\mu = 1620$ ساعة. اختبر الفرض $H_0: \mu = 1620$ ساعة مقابل الفرض $H_1: \mu \neq 1620$ ساعة باختبار مستوى معنويّة $\alpha = 0,05$.

٦ الربط

الأمثلة (١-٤)، تسمح للطلاب التعرف على مجالات استخدام اختبارات الفروض الإحصائية في المواقف الحياتية.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

من الأخطاء الشائعة جدًا التي يقع فيها الطلاب في اتخاذ القرار إن كان من جهة رفض أو عدم رفض فرض العدم. شدد للطلاب على ضرورة الانتباه دائمًا إلى هذه الفروض والعودة إلى فقرة «معياري القرار» وفقرة «ملخص الخطوات» في كتاب الطالب لتجنب الوقوع بها وارتكابها.

٨ التقسيم

تابع عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل»، للتأكد من أنهم يتبعون الخطوات جميعها وبالتسلسل الصحيح للوصول إلى النتيجة النهائية.

(١-٢-٣) إذا كان الانحراف المعياري للمجتمع σ غير معلوم، $n < 30$

مثال (٣)

إذا كانت $n = 80$ ، $\bar{x} = 37$ ، $s = 1.79$ ،
اختبر الفرض بأن $\mu = 37$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

الحل:

١ صياغة الفروض

ف: $\mu = 37$ مقابل ف: $\mu \neq 37$

٢ σ غير معلومة، $n < 30$

٣ نستخدم المقياس الإحصائي t : $t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$

٤ $n = 80$ ، $\bar{x} = 37$ ، $s = 1.79$

٥ $t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$

٦ $t = \frac{37 - 37}{\frac{1.79}{\sqrt{80}}} = 0$

٧ $\alpha = 0.05$ ، $\alpha/2 = 0.025$

٨ $t_{\alpha/2, n-1} = t_{0.025, 79} = 1.96$

٩ منطقة القبول هي $(-1.96, 1.96)$

١٠ $t = 0 > -1.96$ ، $t = 0 < 1.96$

١١ القرار بقبول فرض العدم $\mu = 37$

حاول أن تحل

١ متوسط العمر لعينة من ١٠٠ مصباح كهربائي مصنعة في أحد المصانع $\bar{x} = ١٥٧٠$ ساعة
بانحراف معياري $s = ١٢٠$ ساعة. يقول صاحب المصنع إن متوسط العمر
 $\mu = ١٦٠٠$ ساعة للمصابيح المصنعة في المصنع.
اختبر صحة الفرض $\mu = ١٦٠٠$ ساعة مقابل الفرض $\mu \neq ١٦٠٠$ ساعة وباختيار مستوى
معنوية $\alpha = 0.05$.
(إرشاد: ف: $\mu \neq ١٦٠٠$ ، ف: $\mu = ١٦٠٠$).

اختبار سريع

لدينا: $n = 400$ ، $\bar{x} = ١٨$ ، $s = ٣٦$ ، $\mu = ١٦,٦$

١ ما قيمة t ؟

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{١٨ - ١٦,٦}{\frac{٣٦}{\sqrt{400}}} = ٤,٦$$

٢ لمستوى ثقة ٩٥٪، ضع فرض العدم، والفرض البديل، واتخذ القرار المناسب.

ف: $\mu = ١٦,٦$ مقابل ف: $\mu \neq ١٦,٦$

$t_{\alpha/2, n-1} = t_{0.025, 399} = ١,٩٦$ لا تقع على الفترة
(-١,٩٦، ١,٩٦)

إذا نرفض فرض العدم، $\mu = ١٦,٦$

ونقبل الفرض البديل $\mu \neq ١٦,٦$

(١-٢-٣) إذا كان الانحراف المعياري للمجتمع σ غير معلوم، $n \geq 30$

مثال (٤)



يعتقد مدير شركة دراسات إحصائية أن متوسط
الإنفاق الشهري على الطعام في منازل مدينة
معينة يساوي ٢٩٠ دينارًا كويتيًّا.
فإذا أخذت عينة عشوائية من ١٠ منازل تبين أن
متوسطها الحسابي $\bar{x} = ٢٨٣$ دينارًا وانحرافها
المعياري $s = ٣٢$ دينارًا.

فهل يمكن الاعتماد على هذه العينة لتأكيد ما افترضه؟
استخدم مستوى ثقة ٩٥٪ (علمًا بأن المجتمع يتبع توزيعًا طبيعيًّا).

الحل:

١ صياغة الفروض: ف: $\mu = 290$ مقابل ف: $\mu \neq 290$

٢ σ غير معلومة، $n = 10$ ($n \geq 30$)

٣ نستخدم المقياس الإحصائي t : $t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$

٤ $n = 10$ ، $\bar{x} = 283$ ، $s = 32$

٥ $t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$

٦ $t = \frac{283 - 290}{\frac{32}{\sqrt{10}}} = -٦,٩١٧$

٧ مستوى الثقة ٩٥٪، درجات الحرية $(n-1) = 9$

٨ $\alpha = 0.05$ ، $\alpha/2 = 0.025$

٩ $t_{\alpha/2, n-1} = t_{0.025, 9} = ٢,٢٦٢$

١٠ منطقة القبول هي $(-٢,٢٦٢, ٢,٢٦٢)$

١١ $t = -٦,٩١٧ < -٢,٢٦٢$

١٢ القرار بقبول فرض العدم $\mu = 290$

١٣ يمكن الاعتماد على هذه العينة.

حاول أن تحل

١ في المثال (٤)، إذا أجريت دراسة إحصائية أخرى على المدينة ذاتها وتبين أن
 $\bar{x} = ٢٩٦$ ، $s = ٥$ لعينة من ١٠ منازل مع استخدام درجة الثقة نفسها.
فهل يبقى افتراض المدير عند الشركة صحيحًا أم لا؟ وضح إجابتك.

٩ إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

لا يمكن الحكم لعدم كفاية المعطيات.

«حاول أن تحل»

١ ف. $\mu = 25000$

ف. $\mu \neq 25000$

$$u = \frac{27000 - 25000}{1500} = 1,33$$

فترة الثقة هي: $(-1,96, 1,96)$ و $1,5492$ تقع

داخل الفترة، إذًا نقبل فرض العدم

ف. $\mu = 25000$

٢ ف. $\mu = 1620$ مقابل ف. $\mu \neq 1620$

$u = -3,9192$

فترة الثقة: $(-1,96, 1,96)$

$-3,9192$ لا تقع على الفترة $(-1,96, 1,96)$

إذًا نرفض فرض العدم ف. $\mu = 1620$

٣ ف. $\mu = 1600$

ف. $\mu \neq 1600$

$u = -2,5$

فترة الثقة: $(-1,96, 1,96)$

$-2,5$ لا تقع على الفترة $(-1,96, 1,96)$

إذًا نرفض فرض العدم ف. $\mu = 1600$

٤ ف. $\mu = 290$ مقابل ف. $\mu \neq 290$

$t = 3,7948$

فترة القبول: $(-2,262, 2,262)$

$3,7948$ فترة القبول

∴ القرار برفض فرض العدم $\mu = 290$

مُزَن

١-١

التقدير

Estimation

المجموعة ١ تمارين أساسية

(١) أوجد القيمة الحرجة $z_{\alpha/2}$ المناظرة لكل مستويات الثقة التالية ، وذلك باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري،

(أ) 297 (ب) 294

(ج) 298 (د) 292

(٢) عينة عشوائية حجمها $n = 64$ أخذت من مجتمع إحصائي تباينه $\sigma^2 = 16$ ، فإذا علم أن المتوسط الحسابي للعينة $\bar{x} = 13$ ، باستخدام مستوى ثقة 95%

(أ) أوجد هامش الخطأ.

(ب) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ .

(ج) فسر فترة الثقة.

(٣) قامت شركة عالمية بدراسة لمعرفة كفاءة أداء سيارتها، فأخذت عينة من 1000 سيارة. استنتجت أن السيارة تبقى في حالة جيدة عند متوسط حسابي $\bar{x} = 5$ سنوات، علمًا بأن الانحراف المعياري للمجتمع $\sigma = 0,5$ ، باستخدام مستوى ثقة 95%

(أ) أوجد هامش الخطأ.

(ب) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ .

(ج) فسر فترة الثقة.

(٤) أخذت عينة عشوائية حجمها $n = 25$ ، ومتوسطها الحسابي $\bar{x} = 8$ ، فإذا علمت أن التباين للمجتمع $\sigma^2 = 1,25$ ، باستخدام مستوى ثقة 95%

(أ) أوجد هامش الخطأ.

(ب) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ .

(ج) فسر فترة الثقة.

(٥) في دراسة للمدة الزمنية المطلوبة من طلاب جامعيين لإنهاء دراستهم، اختير عشوائيًا 80 طالبًا، فكان متوسط السنوات لهذه العينة $\bar{x} = 4,8$ سنوات ، والانحراف المعياري لهذه العينة $\bar{s} = 2,2$ ، باستخدام مستوى ثقة 95%

(أ) أوجد هامش الخطأ.

(ب) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ .

(ج) فسر فترة الثقة.

٨

(٦) عينة عشوائية حجمها $n = 13$ ، ومتوسطها الحسابي $\bar{x} = 30$ ، وانحرافها المعياري $\bar{s} = 3,5$ ، باستخدام مستوى ثقة 95%

(أ) أوجد هامش الخطأ.

(ب) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ .

المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) أخذت عينة عشوائية حجمها $n = 64$ ، فوجد أن متوسط العينة $\bar{x} = 160$ ، والانحراف المعياري للمجتمع $\sigma = 50$ ، باستخدام مستوى ثقة 95%

(أ) أوجد هامش الخطأ.

(ب) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ .

(ج) فسر فترة الثقة.

(٢) أخذت عينة عشوائية حجمها $n = 11$ من مجتمع تباينه $\sigma^2 = 44$ ، فوجد أن $\bar{x} = 30,5$ ، عند مستوى ثقة 95% أوجد ،

(أ) هامش الخطأ.

(ب) فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ .

(٣) أخذت عينة عشوائية حجمها $n = 32$ فإذا كان متوسطها الحسابي $\bar{x} = 14,3$ وانحرافها المعياري $\bar{s} = 0,8$ ، عند مستوى ثقة 95%

(أ) أوجد هامش الخطأ.

(ب) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ .

(ج) فسر فترة الثقة.

(٤) يعتبر الخفافاش الطئان من أصغر الثدييات في العالم ويبلغ حجمه تقريبًا حجم نحلة طئانة كبيرة. أخذت عينة عشوائية حجمها $n = 15$ فإذا كان متوسطها الحسابي $\bar{x} = 1,7$ ، والانحراف المعياري $\bar{s} = 0,2$ ، عند مستوى ثقة 95% أوجد ،

(أ) هامش الخطأ.

(ب) فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ .

(٥) أثناء التدخين ، يتحوّل النيكوتين إلى كوتينين، وهي مادة من السهل قياسها. إذا كان المتوسط الحسابي لعينة من 40 مدخنًا تغطي مستوى كوتينين قدره $\bar{x} = 172,5$ ، فإذا علمت أن $\bar{s} = 119,5$ ، عند مستوى ثقة 95%

(أ) أوجد هامش الخطأ.

(ب) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ لمستوى الكوتينين لدى جميع المدخنين.

(ج) فسر فترة الثقة.

٩

المرشد لحل المسائل

إجابة «مسألة إضافية»

الفروض: $F: \mu = 2000$ مقابل $F: \mu \neq 2000$

$$u = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{1900 - 2000}{\frac{800}{\sqrt{100}}} = -1.25$$

فترة الثقة: $(-1.96, 1.96)$

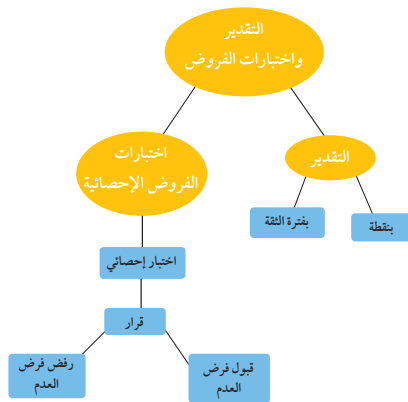
1.25 تقع على الفترة

إذاً نقبل فرض العدم

$F: \mu = 2000$

إذاً كانت حملة هذه المؤسسة ناجحة.

مخطط تنظيمي للوحدة الأولى



٣٤

المرشد لحل المسائل

نظراً لأهمية المياه بالنسبة إلى صحة الإنسان وحياته، قررت مؤسسة تعنى بذلك، القيام بحملة تهدف إلى التأكد من أن كل شخص يستهلك متوسط قدره 2000 مللي يومياً من مياه الشرب. في دراسة سابقة لعينة من 100 شخص، لاحظت المؤسسة أن المتوسط الحسابي للاستهلاك: $\bar{x} = 1850$ مللي مع انحراف معياري $s = 900$ مللي. وفي دراسة جديدة لعينة من 100 شخص، وبعد القيام بحملتها، لاحظت أن المتوسط الحسابي للاستهلاك: $\bar{x} = 1900$ مللي مع انحراف معياري $s = 800$ مللي. اعتقدت المؤسسة أن حملتها قد نجحت بما أن المتوسط الحسابي للاستهلاك قد ازداد 50 مللي وقد اقترح كثيراً من هدفها وهو 2000 مللي يومياً للشخص الواحد. هل المؤسسة على حق؟ اشرح.

الحل:
وضع يوسف جدولاً ليختبر فرضية الشركة من خلال اختبارات إحصائية مع:

$F: \mu = 2000$ مقابل $F: \mu \neq 2000$ ، ومستوى الثقة 0.95 .

المعايير	الدراسة السابقة	الدراسة الجديدة
القيمة الجدولية	$\bar{x} = 1850$ ، $n = 100$ ، $s = 900$ ، $u = 1.96$	$\bar{x} = 1900$ ، $n = 100$ ، $s = 800$ ، $u = 1.96$
قيمة الاختبار الإحصائي	$u = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{1850 - 2000}{\frac{900}{\sqrt{100}}} = -1.67$	$u = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{1900 - 2000}{\frac{800}{\sqrt{100}}} = -1.25$
الفترة	$(-1.96, 1.96)$	$(-1.96, 1.96)$
القرار	$1.67 \geq 1.96$ ، $\therefore$ قبول $F: \mu = 2000$ مللي يومياً	$1.25 \geq 1.96$ ، $\therefore$ رفض $F: \mu = 2000$ مللي يومياً

الاستنتاج:

لم تكن الحملة ضرورية، والحصول على قيمة متوسطة أكبر لا يعني الاقتراب من الهدف المنشود.

مسألة إضافية

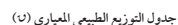
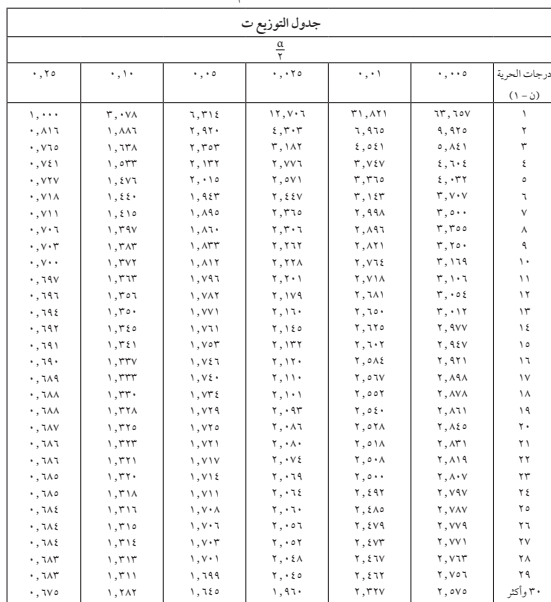
قامت مؤسسة أخرى بحملة على عينة من 100 شخص تهدف إلى التأكد من أن المتوسط الحسابي لاستهلاك كل شخص لمياه الشرب $\mu = 2000$ مللي يومياً. فأنت النتائج على الشكل التالي:
 $\bar{x} = 1900$ مللي، $s = 800$ مللي. برأيك، هل كانت حملة هذه المؤسسة ناجحة؟

ملخص

- المعلمة هي ثابت يصف المجتمع أو يصف توزيع المجتمع كالتوسط الحسابي μ أو الانحراف المعياري σ .
- الإحصاءة هي اقران تتعزّن قيمته من العينة كالتوسط الحسابي $\bar{x}$ أو الانحراف المعياري s .
- التقدير بنقطة هي قيمة وحيدة محسوبة من العينة تستخدم لتقدير معلمة مجهولة من معالم المجتمع.
- فترة الثقة هي فترة طرفاها متغيران عشوائيان (أي أنها فترة عشوائية) تحوي إحدى معالم المجتمع بنسبة معينة تسمى درجة الثقة (مستوى الثقة).
- α هي درجة (نسبة) الخطأ في التقدير.
- مستوى الثقة $100(1 - \alpha)\%$ ويسمى $(1 - \alpha)$ معامل مستوى الثقة.
- u هي القيمة الحرجة المستخرجة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري.
- $\bar{x}$ هو المتوسط الحسابي للعينة.
- s هو الانحراف المعياري للعينة.
- t هي القيمة الحرجة المستخرجة من جدول التوزيع t .
- هامش الخطأ $h = t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$ في حالة الانحراف المعياري σ معلوم والتوزيع الطبيعي.
- هامش الخطأ $h = t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$ في حالة الانحراف المعياري σ غير معلوم و $n < 30$ والتوزيع الطبيعي.
- هامش الخطأ $h = t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$ إذا كانت σ غير معلوم و $n \geq 30$ والتوزيع طبيعي.
- الفرض الإحصائي: هو ادعاء معين مبني على حثيات معقولة حول معلمة من معالم المجتمع مثل المتوسط الحسابي μ أو الانحراف المعياري σ .
- المقياس الإحصائي هو قيمة وحيدة محسوبة من العينة تحت شروط معينة.
- اختبارات الفروض الإحصائية (اختبار المعنوية) هي طريقة معيارية لاختبار ادعاء ما حول معلمة من معالم المجتمع.

٣٥

٣٣

[illegible]

ملاحظة: استخدم ٤٩٩٩, ٠ عندما تزيد قيمة ν عن ٣,٠٩

Hypotheses Testing

المجموعة ١ تمارين أساسية

(٦) يزعم معلم مادة الرياضيات أن المتوسط الحسابي لدرجات الطلاب في مادته هو ١٦ درجة حيث النهاية العظمى ٢٠ درجة. إذا أخذت عينة من ١٠ طلاب فوجد أن المتوسط الحسابي $\bar{X} = ١٥$ درجة، والانحراف المعياري $\sigma = ١,٤$ درجة، فاختر فرضية المعلم عند مستوى المعنوية $\alpha = ٠,٠٥$.

المجموعة ب تمارين تعزيزية

- (١) تملك شركة عالمية فروعاً لها في عدة بلدان كبيرة. هدفها هو ربح صاف متوسطه الحسابي $\mu = 200.000$ دينار لكل فرع. عند دراسة عينة من ١٠٠ فرع، كان المتوسط الحسابي $\bar{x} = 195.000$ دينار وانحرافها المعياري $\sigma = 80.000$ دينار.
- تأكد من خلال الاختبار ما إذا كانت الشركة تحقق هدفها عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$.
- (٢) مجتمع إحصائي قيد الدراسة، حجمه $n = 200$ ، ومتوسطه الحسابي $\bar{x} = 3.3$ ، فإذا كان الانحراف المعياري $\sigma = 0.7$.
- اختر الفرض μ مقابل الفرض البديل $\mu \neq 3.5$ مع مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$.
- (٣) (أ) إذا كانت قيمة $\bar{x} = 11$ ، $\sigma = 3.1$ ، $n = 10$ ، فاختبر الفرض $\mu = 12$ مقابل الفرض البديل $\mu \neq 12$ عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$.
- (ب) كثر الاختبار نفسه أخذاً $n = 25$ ، σ بدل σ تساوي ١.١.
- (٤) افترض أحد خبراء التغذية أن المتوسط الحسابي لاستهلاك الشخص الواحد للحم هو ٤٢.١ كجم سنوياً في دول منطقة الخليج العربي. وقد أعطت عينة من ٨٠ شخصاً من منطقة الخليج العربي أن المتوسط الحسابي لاستهلاك اللحم السنوي للشخص الواحد هو $\bar{x} = 45.2$ كجم مع انحراف معياري $\sigma = 12$ كجم. هل قرارك سيكون رفضاً أم عدم رفض لما افترضه خبير التغذية عند استخدامك مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ لإجراء اختبار الفرضية الإحصائية؟

(٣) المعلمة هي ثابت يصف العينة أو يصف توزيع العينة كالوسط الحسابي

أو الانحراف المعياري لها.

(٤) التقدير بنقطة هي قيمة وحيدة محسوبة من العينة تستخدم لتقدير معلمة من معالم المجتمع المجهولة.

(٥) إذا كان توزيع المجتمع طبيعي و σ غير معلومة وكان حجم العينة $n < 30$ فإن المقياس الإحصائي

المستخدم لقبول أو رفض فرض العدم للمعلمة μ هو $t = \frac{(\bar{x} - \mu)}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$

(٦) $(\alpha - 1)$ هي معامل مستوى الثقة.

(٧) نعين فترة ثقة للمعلمة μ إذا كان المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي وتباينه σ^2 غير معلوم وكان حجم العينة العشوائية $n = 16$ فإن درجة الحرية للتوزيع t تساوي ١٥

(٨) إذا كانت فترة الثقة للوسط الحسابي للمجتمع (μ) هي:

$(37.8, 36.6, 38.9, 37.8)$ فإن $\bar{x}$ =

(٩) إذا كانت درجات الحرية هي ٣٠ فإن حجم العينة هو ٢٩

(١٠) الإحصاء هو اقران تعين قيمته من العينة كالمتوسط الحسابي

$\bar{x}$ أو الانحراف المعياري σ .

الاختبار من متعدد

في البود (١١-٣٠) لكل بند ٤ اختيارات واحد فقط منها صحيح. ظلل دائرة الرمز الدال على الاختيار الصحيح.

استخدم المعطيات التالية للإجابة عن البود (١١-١٣).

أخذت عينة من مجتمع طبيعي حجمها $n = 49$ ومتوسطها الحسابي $\bar{x} = 30$ وانحرافها المعياري $\sigma = 14$ باستخدام مستوى ثقة ٩٥٪ فإن:

(١١) القيمة الحرجة $t_{\alpha/2}$ تساوي:

(أ) ١.٦٩ (ب) ١.٩٦

(ج) ١.٦٦ (د) ليس أي مما سبق

(١٢) هامش الخطأ يساوي:

(أ) ١.٩٦ (ب) ٣.٩٢

(ج) ١.٦٩ (د) ليس أي مما سبق

(١٣) فترة الثقة للمتوسط الحسابي هي:

(أ) (٣٣.٩٢ ، ٢٦.٠٨) (ب) (٣٣ ، ٢٦)

(ج) (٣١.٩٦ ، ٢٨.٠٤) (د) ليس أي مما سبق

اختبار الوحدة الأولى

أسئلة المقال

- (١) عينة عشوائية حجمها $n = 25$ ، أخذت من مجتمع إحصائي حيث تباينه $\sigma^2 = 16$ علماً أن المتوسط الحسابي للعينة $\bar{x} = 8$
- أوجد فترة الثقة عند مستوى ثقة ٩٥٪ للمعلمة المجهولة μ .
- (٢) أخذت عينة عشوائية حجمها $n = 150$ فإذا كان $\bar{x} = 7.5$ وانحرافها المعياري $\sigma = 1.1$ أوجد فترة الثقة عند درجة ثقة ٩٥٪ للمعلمة μ .
- (٣) أخذت عينة عشوائية حجمها $n = 160$ شخصاً إذا كان تباين المجتمع هو $\sigma^2 = 4$ ، والمتوسط الحسابي $\bar{x} = 9.3$ ، فأوجد فترة الثقة عند درجة ثقة ٩٥٪ للمعلمة μ .
- (٤) يريد رجل افتتاح متجر خاص به في الوسط التجاري، فإذا تم أخذ عينة من المتاجر عددها ٥٠ متجرًا، وكان المتوسط الحسابي لربح هذه المتاجر $\bar{x} = 95.000$ دينار وإذا علمت أن التباين $\sigma^2 = 10.000$ اختبر الفرض $\mu = 100.000$ مقابل الفرض البديل $\mu \neq 100.000$ مع مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$.
- (٥) يساعد بنك الدم بفروعه المختلفة المستشفيات على تأمين كمية الدم المطلوبة للمرضى. فإذا أخذت عينة من ١٠ فروع، وكان المتوسط الحسابي لكمية الدم هي $\bar{x} = 20$ ليترًا مع انحراف معياري $\sigma = 4$ اختبر الفرض $\mu = 22$ مقابل الفرض البديل $\mu \neq 22$ مع مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$.
- (٦) أخذت عينة عشوائية من مجتمع قيد الدراسة حجمها $n = 35$ ، فإذا كان المتوسط الحسابي $\bar{x} = 47$ وتباين المجتمع $\sigma^2 = 9$ اختبر الفرض $\mu = 50$ مقابل الفرض البديل $\mu \neq 50$ عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$.
- (٧) (أ) في عينة عشوائية، إذا كان $\bar{x} = 40$ ، $\sigma = 3$ ، $n = 35$ ، فاختبر الفرض $\mu = 42$ مقابل الفرض البديل $\mu \neq 42$ عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$.
- (ب) كثر الاختبار نفسه أخذاً $n = 25$

الصحيح والخطأ

في البود (١٠-١١) عبارات ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة و(ب) إذا كانت خاطئة.

- (١) إذا سحبت عينة عشوائية حجمها $n = 9$ من مجتمع طبيعي متباينة $\sigma^2 = 9$ وكان $\bar{x} = 7.96$ فإن فترة الثقة للمعلمة μ بمستوى ثقة ٩٥٪ هي (٦ ، ٩.٩٢)
- (٢) إذا كانت μ تقع في الفترة (٢٥.٦٤١ ، ٣٤.٣٥٩) فإن $\mu = 30$

استخدم المعطيات التالية للإجابة عن البود (١٤-١٦).

أخذت عينة من مجتمع طبيعي حيث $n = 25$ ، $\sigma = 50$ ، $\bar{x} = 15$ ، بمستوى ثقة ٩٥٪ فإن:

(١٤) القيمة الحرجة هي:

(أ) $t_{\alpha/2} = 1.96$ (ب) $t_{\alpha/2} = 2.064$

(ج) $t_{\alpha/2} = 1.96$ (د) $t_{\alpha/2} = 2.064$

(١٥) هامش الخطأ يساوي:

(أ) ٢.٠٦٤ (ب) ٢.١٢٨

(ج) ٦.١٩٢ (د) ٥.٨٨

(١٦) فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع (μ) هي:

(أ) (٥٢.٠٦٤ ، ٤٧.٩٣٢) (ب) (٥٦.١٩٢ ، ٤٣.٨٠٨)

(ج) (٥٦.١٢٨ ، ٤٥.٨٧٢) (د) ليس أي مما سبق

(١٧) أخذت عينة من مجتمع طبيعي حجمها $n = 36$ فإذا علم أن $\bar{x} = 10$ ، $\sigma = 2$ فإن عند مستوى ثقة ٩٠٪ تكون القيمة الحرجة هي:

(أ) ١.٦٤ (ب) ١.٦٥

(ج) ٢.٧٤٦ (د) ١.٦٥

استخدم المعطيات التالية للإجابة عن البود (١٨-١٩).

أخذت عينة من مجتمع طبيعي حجمها $n = 100$ ومتوسطها الحسابي $\bar{x} = 40$ وانحرافها المعياري $\sigma = 10$ باستخدام جدول التوزيع الطبيعي عند مستوى ثقة ٩٧٪ تكون:

(١٨) القيمة الحرجة $t_{\alpha/2}$ هي:

(أ) ٢.١٦ (ب) ٢.١٨

(ج) ٢.١٧ (د) ليس أي مما سبق

(١٩) هامش الخطأ يساوي:

(أ) ٢.١٧ (ب) ٢.١٦

(ج) ٤.٣٤٦ (د) ٦.٥١

(٢٠) القيمة الحرجة $t_{\alpha/2}$ المناظرة لمستوى ثقة ٩٩٪ تساوي:

(أ) ٢.٥٨ (ب) ٢.٥٧

(ج) ٢.٥٧٥ (د) ٢.٥

تمارين إثرائية

- (١) أخذت عينة عشوائية من مجتمع إحصائي حجمها $n = 130$ ، وكان المتوسط الحسابي $\bar{x} = 28$ ، إذا كان تباين المجتمع $\sigma^2 = 9$ ، فأوجد فترة الثقة عند مستوى ثقة 95% للمعلمة المجهولة μ .
- (٢) ينتظر زبائن شركة التأمين على السيارات مدة طويلة قبل التمكن من التواصل مع مندوب خدمة الزبائن حين يتصلون ليتقدموا بشكاوى مختلفة. تعطي عينة عشوائية من 25 اتصالاً مماثلاً متوسطاً حسابياً $\bar{x} = 22$ دقيقة وانحرافاً معيارياً من 6 دقائق.
- أوجد فترة الثقة عند مستوى ثقة 95% للمتوسط الحسابي الإحصائي μ لأوقات الانتظار.
- (٣) تم بيع عينة من 1500 منزل مؤخراً حيث إن المتوسط الحسابي لسعر المنزل الواحد 300.000 دينار. الانحراف المعياري σ معلوم وهو 70.000 دينار. اختبر الفرض القائل إن متوسط الأسعار 290.000 مع مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.
- (٤) تزعم وزارة التربية أن متوسط سنوات الخبرة للمعلمين في كل المدارس هو 10 سنوات. تأكد من هذا الفرض عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ ، علماً بأن العينة من 40 معلماً وكان متوسطها الحسابي $\bar{x} = 9$ سنوات والانحراف المعياري $\sigma = 4$.
- (٥) (أ) إذا كانت قيمة $\bar{x} = 143$ ، $n = 10$ ، $\sigma = 40$ ، فاختبر الفرض $\mu = 150$ مقابل الفرض البديل $\mu \neq 150$ عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$.
- (ب) اختبر الفرض نفسه مع عينة حجمها $n = 8$ ، عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$.
- (٦) إذا كانت الدرجة العظمى في اختبار مادة الرياضيات هي 20 درجة، فأوجد فترة ثقة عند مستوى ثقة 95% للمتوسط الحسابي μ ، بناءً على نتائج عينة من 36 طالباً خضعوا للاختبار حيث المتوسط الحسابي للعينة هو $\bar{x} = 11.6$ وانحراف معياري $\sigma = 2.5$.
- (٧) في مجتمع الزائرين لمجمع تجاري كبير إذا كان الانحراف المعياري $\sigma = 20$ ديناراً مما يتفق كل زائر على مشترياته في الزيارة الواحدة. أوجد حجم العينة n اللازم أخذها من مجتمع الزائرين للمجمع التجاري عند مستوى ثقة 95% بحيث يكون هامش الخطأ ± 3.92 دينار.
- (٨) يزعم مدرب فريق كرة سلة أن المتوسط الحسابي لنقاط لاعبيه هو 15 نقطة في المباراة الواحدة. إذا كان الفريق مؤلفاً من 5 لاعبين أساسيين و 10 بدلاء، والنتائج عند 5 لاعبين منهم قد أعطت القيم التالية: المتوسط الحسابي $\bar{x} = 9$ والانحراف المعياري $\sigma = 11$ ، فاختبر فرضية المدرب عند مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$.
- (٩) لدى مزارع أرض واسعة مزروعة بمختلف أنواع الأشجار. يقول هذا المزارع إن المتوسط الحسابي لعدد الأشجار في كل 10 أمتار مربعة هو $\mu = 4$ أشجار. أخذت عينة من 10 قطع أرض، كل واحدة مساحتها 10 أمتار مربعة، فأعطت متوسطاً حسابياً $\bar{x} = 3.5$ أشجار وانحرافاً معيارياً $\sigma = 1.2$ ، تأكد من صحة كلام المزارع مع مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$.

١٧

(٢١) القيمة الحرجة $t_{\alpha/2}$ المناظرة لمستوى ثقة 94% تساوي:

- (أ) 1.885 (ب) 1.88
(ج) 1.890 (د) 3.29

(٢٢) إذا كانت فترة الثقة عند مستوى ثقة 95% لعينة أخذت من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي هي $(17.8, 3.2)$ فإن $\bar{x}$:

- (أ) 21 (ب) 10.5
(ج) 1.96 (د) 0.475

(٢٣) إذا كانت فترة الثقة عند مستوى ثقة 95% لعينة عشوائية أخذت من مجتمع طبيعي هي $(12, 38)$ فإن التقدير بنقطة لمعلمة المجتمع المجهولة μ يساوي:

- (أ) 12 (ب) 38
(ج) 25 (د) 50

(٢٤) أخذت عينة حجمها $n = 9$ ، $\bar{x} = 30$ من مجتمع طبيعي تباينه $\sigma^2 = 9$ فإن الحد الأدنى لفترة الثقة عند مستوى ثقة 95% هو:

- (أ) 30 (ب) $30 - 1.96 \times 3$
(ج) $30 + 1.96$ (د) $30 - 1.96$

(٢٥) أخذت عينة عشوائية من مجتمع إحصائي حجمها $n = 30$ ، وتباين المجتمع $\sigma^2 = 9$ فإذا كان الحد الأعلى لفترة الثقة عند مستوى ثقة 95% يساوي 31.96 فإن n :

- (أ) 16 (ب) 9
(ج) 30 (د) 15

(٢٦) من جدول التوزيع الطبيعي المعياري $N(0, 1)$:

- (أ) 2.3 (ب) 2.32
(ج) 2.31 (د) 2.33

استخدم المعطيات التالية للإجابة عن البندين (٢٧-٢٨).

إذا كانت $n = 16$ ، $\bar{x} = 35$ ، $\sigma = 8$ عند اختبار الفرض بأن $\mu = 30$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

(٢٧) فإن المقياس الإحصائي هو:

- (أ) $t = 2.5$ (ب) $t = -2.5$
(ج) $t = 2.5$ (د) $t = -2.5$

١٥

(٢٨) منطقة القبول هي:

- (أ) $(-1.96, 1.96)$ (ب) $(-2.5, 2.5)$
(ج) $(-2.132, 2.132)$ (د) ليس أي مما سبق

استخدم المعطيات التالية للإجابة عن البندين (٢٩-٣٠).

إذا كانت $n = 16$ ، $\bar{x} = 70$ ، $\sigma = 5$ عند اختبار الفرض بأن $\mu = 72$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ فإن المقياس الإحصائي هو:

- (أ) $t = 1.6$ (ب) $t = -1.6$
(ج) $t = 1.6$ (د) $t = -1.6$

(٣٠) منطقة القبول هي:

- (أ) $(-1.96, 1.96)$ (ب) $(-2.132, 2.132)$
(ج) $(-2.120, 2.120)$ (د) $(-1.753, 1.753)$

١٦

الوحدة الثانية: الارتباط والانحدار

(١-٢): الارتباط

(٢-١-٢) المخطط الانتشاري

(٢-١-٢ ب) مُعامل الارتباط الخطي.

(٢-٢): الانحدار

مقدمة الوحدة

الوحدة الثانية

الارتباط والانحدار

Correlation and Regression

مشروع الوحدة: ضغط الدم

1 **مقدمة المشروع:** يعتبر ضغط الدم عند الإنسان من أهم العوامل المؤثرة في حياة كل شخص. إن قياس ضغط الدم لجهة ارتفاعه أو انخفاضه عن معدلته العام يساعد على المعالجة المبكرة وبالتالي التخفيف قدر الإمكان من حدوث التويات القلبية المفاجئة. علمًا أن وزارة الصحة في دولة الكويت قد نهت إلى عوارض ارتفاع ضغط الدم وخصوصًا لدى المسنين وأصحاب السمنة.

٢ الهدف: دراسة العلاقة بين وزن عدد من الأفراد (بالكيلوجرام) ومعدل ضغط الدم لديهم وذلك بتنفيذ ما يلي:

1 زيارة إحدى العيادات الطبية لتكوين جدول يبين وزن عدد من الأشخاص (ذكور) ومعدل ضغط الدم المقابل لكل وزن.

ب. زيارة إحدى المستشفيات لتكوين جدول يبين وزن عدد من الأشخاص (إناث) ومعدل ضغط الدم المقابل لكل وزن.

٣ اللوازم: آلة حاسبة - ورق رسم بياني.

٤ أسئلة حول التطبيق:

١ كم عدد الأشخاص في العينة التي سوف تختارها في العيادة أو في المستشفى؟ احرص على أن يكون العدد نفسه في الحالتين.

ب مثل على ورق رسم بياني مخطط انتشار لتتائج جدول العبادة وعلى ورق رسم بياني آخر مخطط انتشار لتتائج جدول المستشفى.

جـ هل يوجد لكل مخطط انتشار علاقة تصاعدية أو تنازلية بين الوزن ومعدل ضغط الدم؟ اشرح.

د من كل جدول لناخذن (عدد الأشخاص)، س (الوزن)، ص (معدل ضغط الدم).

أوجد: س، ز، ص، ح، ط، ك، م، ن، هـ، و، ي.

هـ لكل جدول استنتج قيمة ما يلي:

$$\sqrt[n]{n^3 - 3} - \sqrt[n]{n^3 - 3} = \sqrt[n]{(n^3 - 3) - (n^3 - 3)}$$

❖ ماذا تلاحظ لكل قيمة وجدتها؟ اشرح.

❖ **التقرير:** اكتب تقريراً مفصلاً يوضح النتائج التي توصلت إليها عارضاً اقتراحاتك ونصائحك عن علاقة الوزن بمعدل ضغط الدم. هل ترى أي ارتباط بين كل مخطط انتشار والقيمة المقابلة التي وجدتها؟

دروس الوحدة

١-٢ الارتباط	٢-١٢ الانحدار
(٢-١-٢) المخطط الانتشاري	
(٢-١-٢) معامل الارتباط الخطي	

في هذه الوحدة سوف نحدّد العلاقات التي تربط بين المتغيرات، على سبيل المثال:

- كيف تعتمد مبيعات منتج ما على السعر الذي يدفعه المستهلك؟
 - كيف يمكن لمادة ما أن تتأثر بدرجات الحرارة المعرضة لها؟
 - إلى أي مدى تتضرر المعادن من جراء التلوث؟
 - ما مدى قوّة العلاقة بين التضخم ومعدلات التوظيف؟
 - كيف يمكننا توقع المحاصيل الزراعية من خلال كمية الأسمدة المستخدمة؟
- وبالتالي، نجد نوعين من المسائل التي سوف نعالجها في هذه الوحدة:

- الارتباط حيث المسائل تتضمن قياس قوة العلاقة.

- الانحدار حيث المسائل تعنى بشكل العلاقة وطبيعتها.

مشروع الوحدة

شجّع الطلاب للقيام بدراسة عن عوارض ضغط الدم عند المسنين وأصحاب السمّة المرتفعة. اطلب إليهم قبل البدء بالمشروع الاجتماع مع معلم علم الأحياء لمناقشة وإستيضاح نقاط تتعلق بضغط الدم.

إجابات «أسئلة حول التطبيق»

تتنوع الإجابات وذلك بحسب حجم العينة التي سيختارها الطلاب.

التقرير

يجب أن يتضمن التقرير تفاصيل واضحة عن أوزان الأشخاص ومعدلات ضغط الدم لكل واحد والحسابات المتعلقة بالقوانين الموضوعة ومخططات الانتشار مع الإقتراحات والنصائح.

الوحدة الثانية

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- التقدير بنقطة.
- التقدير بفترة ثقة.
- الفروض الإحصائية.
- الاختبارات الإحصائية.

ماذا سيوف تتعلم؟

- الارتباط.
- مخطط الانتشار.
- مُعامل الارتباط (بيرسون).
- تحليل مُعامل الارتباط.
- الانحدار ومعادلته.
- توقع قيمة أحد المتغيرين.

المصطلحات الأساسية

الارتباط - مخطط الانتشار - مُعامل ارتباط بيرسون - ارتباط طردي (موجب) تام - ارتباط عكسي (سالب) تام - ارتباط منعدم - ارتباط طردي (موجب) قوي - ارتباط طردي (موجب) متوسط - ارتباط طردي (موجب) ضعيف - ارتباط عكسي (سالب) ضعيف - ارتباط عكسي (سالب) متوسط - ارتباط عكسي (سالب) قوي - الانحدار - معادلة خط الانحدار.

أصف إلي معلوماتك

يعتقد بعض الناس أنه بإمكانهم توقع طول العمر ومعرفة بالنظر إلى طول خط الحياة في كف يدهم. لكن إحدى الدراسات الطّبيّة أثبتت أنه لا وجود لارتباط أو علاقة بين طول خط الحياة في كف الإنسان وطول عمره، وأن ما اعتقده وما زال يعتقد البعض عارٍ عن الصحة.

سَلَمُ التَّقْيِيمِ

٤	مخططات الانتشار واضحة وسليمة بالكامل الحسابات دقيقة - التقرير مفصل وموضوعي.
٣	مخططات الانتشار بمعظمها واضحة قليل من الأخطاء في الحسابات - معظم التقرير مفصل ومعبر.
٢	معظم مخططات الانتشار غير سليمة أخطاء كثيرة في الحسابات - التقرير غير مفصل وبحاجة إلى إعادة صياغة.
١	معظم عناصر المشروع ناقصة ويجب إعادةتها.

١-٢: الارتباط

١ الأهداف

- يعرف الارتباط.
- يرسم مخطط الانتشار.
- يوجد مُعامل ارتباط بيرسون.
- يحلل قيمة مُعامل الارتباط.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

الارتباط - مخطط الانتشار - مُعامل الارتباط - مُعامل ارتباط بيرسون - نزعات الاتجاه.

٣ الأدوات والوسائل

آلة حاسبة - حاسوب - جهاز إسقاط (Data Show).

٤ التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

ارسم مخطط الانتشار الذي يوضح البيانات التالية:

(أ)

س	٣	٤	٥	٦	٧	٨
ص	١,١	١,٥	٢	٢,٢	٢,٣	٢,٨

(ب)

س	١٥	١٤	١٥	١٣	١٤	١٥
ص	١	٦	٤	٢	٣	٥

ماذا تلاحظ في العلاقة بين س، ص على كل مخطط انتشار؟

الارتباط

Correlation

دعنا نفكر ونتناقش

هل تساءلت يوماً: كيف تحسب العلاقة بين الطول والوزن؟
ما الذي يربط بين التدخين والإصابة بمرض السرطان؟
كيف نجد رابطاً بين وزن سيارة واستهلاكها للوقود؟
كيف يتغير سعر الذهب مع تغير قيمة الدولار الأمريكي؟
وما هي أفضل وسيلة للتقدير لتقرب من الحقيقة؟

سوف نتعلم

- مفهوم الارتباط.
- رسم مخطط الانتشار.
- إيجاد مُعامل ارتباط بيرسون.
- تحليل قيمة مُعامل الارتباط.
- توقع قيمة أحد المتغيرين.

Correlation

الارتباط

من دراستنا السابقة تمّ عرض بعض المقاييس الإحصائية، مثل: مقاييس النزعة المركزية (المتوسط الحسابي - الوسيط - المنوال) ومقاييس التشتت (المدى - التباين - الانحراف المعياري). نلاحظ أن هذه المقاييس كانت تصف شكل البيانات التي تمّ جمعها من ظاهرة إحصائية واحدة أي من متغير واحد والذي يمكن الحصول عليه من العينة. بينما يقابلنا في حياتنا العملية مواقف كثيرة تتضمن متغيرين (ظاهريين) أو أكثر ويكون تساؤلنا: هل هناك علاقة بين هذه المتغيرات؟ وما هو شكل هذه العلاقة؟ وأيضاً كيف يمكن التنبؤ بقيمة أحد هذين المتغيرين إذا علم قيمة المتغير الآخر؟ وكثيراً ما يرى الباحثون ضرورة دراسة العلاقة بين متغيرين (ظاهريين) كما يتضح من الأمثلة التالية:

- الطول والوزن.
- التدخين والإصابة بمرض السرطان.
- وزن سيارة واستهلاكها للوقود.
- الإنفاق والدخل.
- سعر السلعة والكمية المعروضة منها.
- العمر وضغط الدم.

والأمثلة في هذا المجال كثيرة ومتعددة، ولدراسة العلاقة بين هذه الظواهر ندرس ما يسمى الارتباط.

تعريف: الارتباط

هو العلاقة بين متغيرين.

الارتباط

Correlation

المجموعة ١ تمارين أساسية

(١) ارسم مخطط الانتشار الذي يوضح البيانات التالية، ثم حدّد نوع العلاقة.

(س) عدد ساعات العمل في الأسبوع	٢٠	٢٥	٣٠	٣٥	٣٨	٤٢	٤٥
(ص) عدد ساعات مشاهدة التلفاز في اليوم	٤	٤	٢,٥	٣	٣	٢	٠,٥

(٢) أوجد قيمة مُعامل الارتباط r بين المتغيرين مستخدماً الجدول التالي،

العمر (س) بالأشهر	٤	٥	٦	٧	٨
الوزن (ص) بالكيلوجرام	٧,٥	٨	٨,٨	٩,٢	٩,٥

(س) تمثّل عمر الطفل بالأشهر، ص وزن الطفل بالكيلوجرام.

(٣) أوجد قيمة مُعامل الارتباط r للبيانات التالية، ثم حدّد نوع وقوة العلاقة بين س، ص.

س	١,٥	٢,٣	٣,٤	٤	٤,٨
ص	٢٠	١٧	١٥	١١	١٠

(٤) أوجد مُعامل الارتباط r وحدّد نوعه وقوته للمتغيرين س، ص حيث:

س	١	٢	٣	٤	٥
ص	٦٠	٥٥	٤٥	٣٥	٢٥

(٥) أوجد مُعامل الارتباط r وحدّد نوعه وقوته للمتغيرين س، ص حيث:

س	٨	١٠	١٢	١٤	١٦
ص	١٧	٣٢	٢٤	١٦	٢٠

(٦) أوجد مُعامل الارتباط r وحدّد نوعه وقوته للمتغيرين س، ص حيث:

س	٢	٤	٦	٨	١٠	١٢	١٤
ص	٩	١٣	١٧	٢١	٢٥	٢٩	٣٣

(٧) أوجد مُعامل الارتباط r وحدّد نوعه وقوته للمتغيرين س، ص حيث:

س	٧	٩	١١	١٣	١٥	١٧
ص	١٢	١٥	٩	١٧	١٥	١٦

يجب البدء بتعريف الارتباط على أنه نوع العلاقة بين متغيرين إن وجدت والتوضيح للطلاب أنه لا يجب الاكتفاء بالقول إنه يوجد ارتباط بل يجب قياسه ورؤيته باستخدام قواعد موضحة في هذا الدرس. ذكر الطلاب بأنهم في هذا الدرس سوف يتعلمون فقط الارتباط الخطي.

في الأمثلة (٢)، (٣)

تبيّن مخططات الانتشار المختلفة كيف يكون توزيع البيانات عندما تكون العلاقة خطية، طردية، غير خطية أو غير موجودة.

في الأمثلة من (٤) إلى (٩)

توضح هذه الأمثلة عملية إيجاد مُعامل ارتباط بين متغيرين من خلال احتساب جميع مكُونات المُعامل، ومن ثمّ استبدال قيمها في القانون. نبّه الطلاب أنه لا يكفي فقط رسم مخطط الانتشار، بل عليهم قياس مُعامل الارتباط r (مُعامل ارتباط بيرسون) وبأنه يجب الانتباه جيّدًا إلى الفرق بين r^2 و (r^2) .

يجب على المعلم أن يفسّر للطلاب قيمة مُعامل الارتباط r ، حيث: $-1 \leq r \leq 1$ ويدعوهم لقراءة خواص مُعامل الارتباط الخطي r في صفحة ٤٥ من كتاب الطالب.

سرمز للمتغير الأول بالرمز «س»، وهو المتغير الذي يتم تحديده من قبل الباحث القائم بالدراسة ويسمى «بالتغير المستقل».

وسرمز للمتغير الثاني بالرمز «ص»، وهذا المتغير غير مستقل بذاته لأن نتيجته مرتبطة بالتغير المستقل ولذلك يسمى «بالتغير التابع».

Scatter Plot (١-٢) المخطط الانتشاري

تعريف: المخطط الانتشاري

هو عبارة عن تمثيل بياني لعدد من الأزواج المرتبة (س، ص) تستخدم لوصف العلاقة بين المتغيرين.

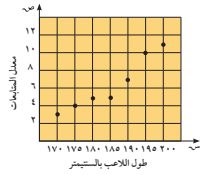
مثال (١)

الجدول التالي يوضح العلاقة بين طول اللاعب (س) ومعدل المتابعات (ص)، لسبعة لاعبين في مباراة كرة السلة.

طول اللاعب (بالستيمتر) (س)	١٧٠	١٧٥	١٨٠	١٨٥	١٩٠	١٩٥	٢٠٠
معدل المتابعات (ص)	٣	٤	٥	٥	٧	١٠	١١

المطلوب: ارسم المخطط الانتشاري.

الحل:



حاول أن نحل

١ ارسم مخطط الانتشار الذي يوضح البيانات التالية:

س	١٩٠	١٨٠	١٧٠	١٦٠	١٤٠	١٣٠	١٢٠	١١٠	١٠٠
ص	٢٢	٢٠	٢٠	١٩	١٨	١٧	١٥	١٦	١٤

أنواع الارتباط

١ ارتباط طردي (موجب):

هو علاقة بين متغيرين س، ص بحيث إذا تغير المتغير المستقل (س) فإن المتغير التابع (ص) يتبعه في نفس الاتجاه.

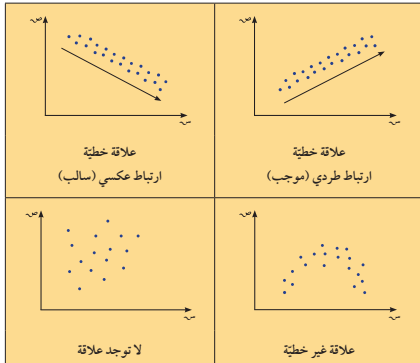
أي أنه كلما زادت قيمة س تزداد قيمة ص.

٢ ارتباط عكسي (سالب):

هو علاقة بين متغيرين س، ص بحيث إذا تغير المتغير المستقل (س) فإن المتغير التابع (ص) يتبعه في الاتجاه المضاد.

أي أنه كلما زادت قيمة س تنقص قيمة ص.

بعض الأشكال التي توضح أنواع الارتباط



في المثال (١٠)

يوضح هذا المثال بعد احتساب قيمة $r = -0.884$ ، كيف يمكن القول بأن العلاقة بين درجات مادة الإحصاء ودرجات مادة التاريخ هي علاقة عكسية قوية.

٦ الربط

الأمثلة (١)، (٣)، (٧)، (١٠) وفقرات «حاول أن تحل» تبين المواقف الحياتية التي يمكن أن يستخدم فيها الارتباط وقياسه.

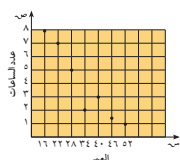
٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

من المهم ألا يخلط الطلاب بين r و (r^2) ، لذا يجب إعطاء الطلاب أمثلة حسابية متعددة لتخطي هذه المشكلة.

٨ التقييم

تابع الطلاب وهم يحلون فقرات «حاول أن تحل»، وركّز على تفسيرهم للإجابات.

الحل:



من مخطط الانتشار نلاحظ أنه إذا زادت قيمة x تنخفض قيمة y ،
∴ الارتباط عكسي (سالب)
العلاقة خطية

حاول أن تحل

ارسم مخطط الانتشار للبيانات التالية وحدد نوع العلاقة التي تعبر عنها:

س	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١
ص	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧

(٢-١) معامل الارتباط الخطي Linear Correlation Coefficient

تعلم أن الاستنتاجات المبنيّة على المعايير البصريّة لمخطط الانتشار هي نسبيّة بامتياز، لذا فتنحى بحاجة إلى قياسات أكثر دقة وموضوعية بالتالي نستخدم لمعامل الارتباط الخطي (r).

تعريف: لمعامل الارتباط الخطي (r)

هو عبارة عن مقياس عددي لقوة العلاقة بين متغيرين يمثلان بيانات كمية،
حيث $-1 \leq r \leq 1$.

خواص لمعامل الارتباط (r)



- $-1 \leq r \leq 1$ أو $r \in [-1, 1]$.
- إذا كانت $r = 1$ يكون الارتباط طردي (موجب) تام.
- إذا كانت $r = -1$ يكون الارتباط عكسي (سالب) تام.
- إذا كانت $r = 0$ نعدم الارتباط.
- إذا كانت $r \in (0, 1]$ يكون الارتباط طردي (موجب) قوي.
- إذا كانت $r \in (0, 0.5]$ يكون الارتباط طردي (موجب) متوسط.
- إذا كانت $r \in (0.5, 1]$ يكون الارتباط طردي (موجب) ضعيف.
- إذا كانت $r \in (-0.5, 0)$ يكون الارتباط عكسي (سالب) ضعيف.
- إذا كانت $r \in (-1, -0.5]$ يكون الارتباط عكسي (سالب) متوسط.
- إذا كانت $r \in (-1, -0.5]$ يكون الارتباط عكسي (سالب) قوي.

معامل ارتباط بيرسون Pearson Correlation Coefficient

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}}$$

$$r = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{(\sum x_i^2 - n \bar{x}^2)(\sum y_i^2 - n \bar{y}^2)}}$$

$$r = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{(\sum x_i^2 - n \bar{x}^2)(\sum y_i^2 - n \bar{y}^2)}}$$

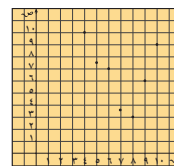
$$r = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{(\sum x_i^2 - n \bar{x}^2)(\sum y_i^2 - n \bar{y}^2)}}$$

مثال (٢)

ارسم مخطط الانتشار للبيانات التالية وحدد نوع العلاقة التي تعبر عنها.

س	١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤
ص	٩	٦	٣	٣.٥	٧	٧.٥	١٠

الحل:



لا توجد علاقة.

حاول أن تحل

ارسم مخطط الانتشار للبيانات التالية وحدد نوع العلاقة التي تعبر عنها.

س	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١
ص	١٤	١٢	١٠	٨	٦	٤	٢

مثال (٣)

البيانات التالية تبين العلاقة بين عمر الشخص وعدد ساعات التمرينات الرياضية التي يقوم بها:

العمر (س)	٥٢	٤٦	٤٠	٣٤	٢٨	٢٢	١٦
عدد ساعات التمرينات (ص)	١	١.٥	٣	٢	٥	٧	٨

ارسم مخطط الانتشار.

حدد نوع العلاقة.

ادرس العلاقة بين المتغيرين س، ص التالين:

$$۱۰۳۷,۲۵ = ۲ \text{ س } \quad , ۷۸,۵ = ۳ \text{ س}$$

$$6162, 25 = {}^2(3)$$

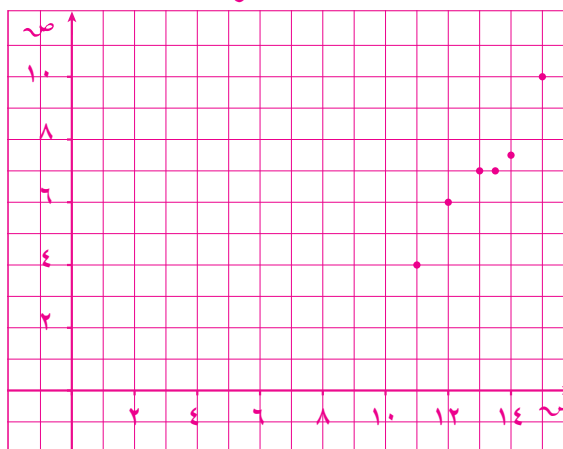
$$306,25 = 3ص^2, \quad 41,5 = 3ص$$

١٧٢٢, ٢٥ = ٢ (٣ ص)

3 س ص = ۵۵۶,۵ ، ن = ۶

$$r \approx 0,9673 \quad \text{الارتباط طردی موجب قوی.}$$

مخطط الانتشار



1 أو حد مُعامل. إلا، تباطر.

١) مُعامل الارتباط:

$$r = \frac{[(\bar{m} - \bar{s})(\bar{v} - \bar{v})]}{\sqrt{[(\bar{m} - \bar{s})^2] \sqrt{[(\bar{v} - \bar{v})^2]}}$$
$$11 = \frac{55}{5} = \frac{3ص}{5} = \overline{ص} \quad , \quad 3 = \frac{15}{5} = \frac{3س}{5} = \overline{س} \quad \therefore$$

$$\therefore \text{معامل الارتباط} = \frac{11}{\sqrt{254} \times \sqrt{27}} = 0.9968$$

ب نوع الارتباط: طردی موجب قوی.

٤ يبين الجدول التالي العلاقة بين وزن مولود جديد وطوله خلال فترة محددة من الزمن.

أ) أوحد مُعامل، الارتباط.

ب حدّد نوع وقوة الارتباط.

(١) توضح البيانات في الجدول التالي درجات مادة الرياضيات، ودرجات مادة الفلسفة لستة طلاب في إحدى المدارس، حيث النهاية العظمى ١٠ درجات لكل مادة.

(أ) ارسم مخطط الانتشار المناسب.

(ب) احسب مُعامل الارتباط r ، ثم حدّد نوع العلاقة.

(٢) عندما تمّ تخدير عيّنة من ثمانية دبة ذكور، قام الباحثون بقياس محيط الصدر بالسنتيمتر ووزن الدبة بالكيلو جرام. فجاءت النتائج كما هو موضح في الجدول أدناه:

بناءً على هذه النتائج، هل وزن الدببة متعلق بمحيط الصدر؟

(٣) يوضح الجدول أدناه أوزان السيارات الجديدة (بمئات الكيلوجرامات، ومعدلات استهلاكها للوقود على الطرقات السريعة (بالكيلومتر/لتر).

استنادًا إلى النتائج، هل كمية استهلاك الوقود مرتبطة بثقل السيارة؟

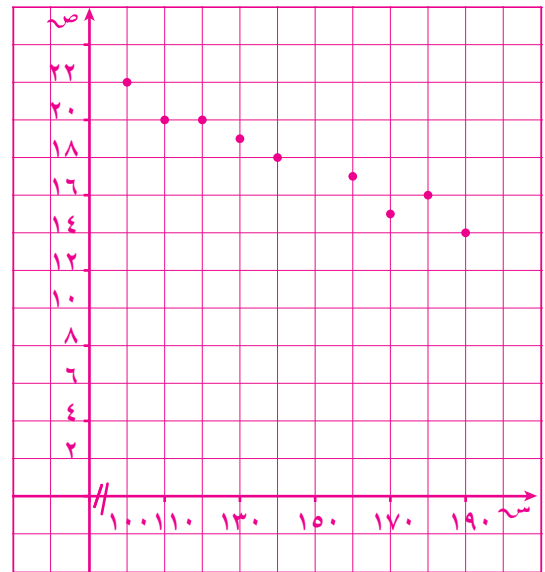
(٤) حدّد نوع العلاقة بين المتغيرين التاليين مستخدماً الطريقة التي تريدها.

(٥) أوجد قيمة معامل الارتباط r ، ثم حدد نوعه وقوته.

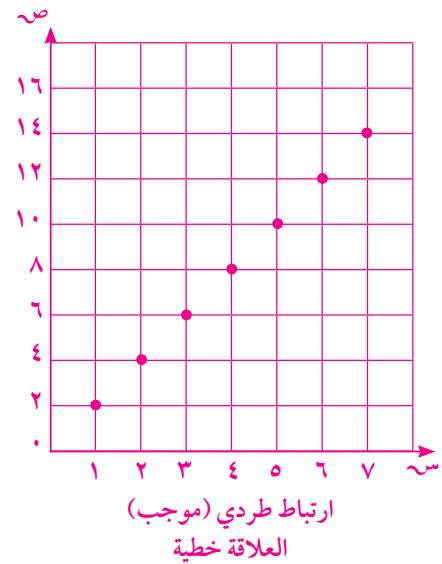
21

«حاول أن تحل»

١



٢ علينا رسم مخطط الانتشار.



نلاحظ من خلال شكل المخطط الانتشاري أن العلاقة
خطية والارتباط طردي (موجب).

مثال (٥)

أوجد معامل الارتباط r وحدد نوعه وقوته للمتغيرين S ، V حيث:

S	٥	٤	٣	٢	١	V
V	٥	٦	٤	١	١	

الحل:

$$\text{معامل الارتباط: } r = \frac{\sum (S - \bar{S})(V - \bar{V})}{\sqrt{\sum (S - \bar{S})^2 \sum (V - \bar{V})^2}}$$

S	V	$S - \bar{S}$	$V - \bar{V}$	$(S - \bar{S})^2$	$(V - \bar{V})^2$	$(S - \bar{S})(V - \bar{V})$
٥	٥	١	١	١	١	١
٤	٦	٠	٢	٠	٤	٠
٣	٤	-١	٠	١	٠	٠
٢	١	-٢	-١	٤	١	٢
١	١	-٣	-١	٩	١	٣
المجموع	١٥	١٥	١٥	١٥	١٥	١٥

$$\therefore \bar{S} = \frac{\sum S}{n} = \frac{15}{5} = 3, \bar{V} = \frac{\sum V}{n} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\therefore \text{معامل الارتباط: } r = \frac{17}{34 \times 10\sqrt{}} \approx 0,9220$$

نوع الارتباط: عكسي سالب قوي.

حاول أن تحل

١ أوجد معامل الارتباط r وحدد نوعه وقوته للمتغيرين S ، V حيث:

S	٩	١١	٥	١٣	١٥	٤	٦	١٠	٨	V
V	١٥٠	١٦٠	١٢٠	١٨٠	١٦٠	١٣٠	١٥٠	١٦٠	١٥٠	

(٦) أوجد معامل الارتباط وحدد نوعه وقوته، للمتغيرين S ، V حيث:

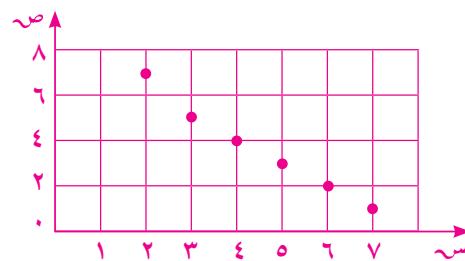
S	٣٠	٢٦	٢٢	١٨	١٤	١٠	٦	٢	V
V	٣١	٢٧	٢٣	١٩	١٥	١١	٧	٣	

(٧) أوجد معامل الارتباط r وحدد نوعه وقوته، للمتغيرين S ، V حيث:

S	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	V
V	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	

(٨) أوجد معامل الارتباط r وحدد نوعه وقوته، للمتغيرين S ، V حيث:

S	١٤	١٢	١٢	١٠	١٠	٤	V
V	١٠	١٦	٤	١٨	٢	٥	



ارتباط عكسي (سالب)
العلاقة خطية

نلاحظ من خلال شكل المخطط الانتشاري أن العلاقة
خطية والارتباط عكسي (سالب).

مثال (٦)

احسب مُعامل الارتباط الخطي للبيانات التالية وحدد نوعه وقوته.

س	١	٢	٣	٤	٥
ص	٣	٥	٧	٩	١١

الحل:

$$\text{مُعامل الارتباط} = r = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sqrt{\sum (س - \bar{س})^2 \sum (ص - \bar{ص})^2}}$$

س	ص	س - $\bar{س}$	ص - $\bar{ص}$	(س - $\bar{س}$) ^٢	(ص - $\bar{ص}$) ^٢	(س - $\bar{س}$)(ص - $\bar{ص}$)
١	٣	-٢	-٤	٤	١٦	-٨
٢	٥	-١	-٢	١	٤	-٢
٣	٧	٠	٠	٠	٠	٠
٤	٩	١	٢	١	٤	٢
٥	١١	٢	٤	٤	١٦	٨
المجموع	٣٥	٠	٠	١٠	٤٠	٢٠

$$\bar{س} = \frac{\sum س}{n} = \frac{٣}{٥} = ٣, \quad \bar{ص} = \frac{\sum ص}{n} = \frac{٣٥}{٥} = ٧$$

$$\therefore r = \frac{٢٠}{\sqrt{١٠ \times ٤٠}} = ١$$

نوع الارتباط: طردي (موجب) تام.

حاول أن تفعل

٦ احسب مُعامل الارتباط الخطي للبيانات التالية وحدد نوعه وقوته.

س	١	٢	٣	٤	٥
ص	٤	٣	٢	١	٠

صيغة أخرى لمعامل ارتباط بيرسون

$$r = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sqrt{\sum (س - \bar{س})^2 \sum (ص - \bar{ص})^2}}$$

مثال (٧)

يبين الجدول التالي العلاقة بين أطوال عدد من الدببة وأوزانها، وذلك ضمن فترة محددة من أعمارها.

الطول (سم)	١٣٥	١٧٠	١٨٠	١٨٢	١٨٧	١٧٤	١٨٥	٩٤
الوزن (كجم)	٣٦	١٥٦	١٨٨	١٥٨	١١٩	١٦٣	١٥٠	١٥

استخدم الجدول أعلاه لإيجاد مُعامل الارتباط الخطي r والذي يحدد العلاقة بين أطوال الدببة وأوزانها ثم بين نوعه وقوته.

الحل:

$$r = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sqrt{\sum (س - \bar{س})^2 \sum (ص - \bar{ص})^2}}$$

س (الطول)	ص (الوزن)	س - $\bar{س}$	ص - $\bar{ص}$	(س - $\bar{س}$) ^٢	(ص - $\bar{ص}$) ^٢	(س - $\bar{س}$)(ص - $\bar{ص}$)
١٣٥	٣٦	-٢٩	-٤٨	٨٤١	٢٣٠٤	-١٣٩٢
١٧٠	١٥٦	٦	١٠٨	٣٦	١١٦٦٤	٦٤٨
١٨٠	١٨٨	١٦	١٤٠	٢٥٦	١٩٦٠٠	٢٢٤٠
١٨٢	١٥٨	١٨	١١٠	٣٢٤	١٢١٠٠	١٩٨٠
١٨٧	١١٩	٢٣	٦١	٥٢٩	٣٧٢١	١٤١٣
١٧٤	١٦٣	١٠	١٠٥	١٠٠	١١٠٢٥	١٠٥٠
١٨٥	١٥٠	٢١	٩٠	٤٤١	٨١٠٠	١٨٩٠
٩٤	١٥	-٣١	-٤٨	٩٦١	٢٣٠٤	-١٣٩٢
المجموع	١٣٠٧	٩٨٠	١٧٣٧٥١	٢٢٠٩٥٥	١٤٩٣٩٥	٢٢٠٩٥٥

$$\frac{20,06}{165,2\sqrt{\times} 2,468\sqrt{}} = r \quad (أ)$$

$$r \approx 0,9935$$

(ب) نوع الارتباط: طردي (موجب) قوي

$$\frac{430}{2489\sqrt{\times} 108\sqrt{}} = r \quad (٥)$$

$$r \approx \frac{430}{518,47}$$

$$r \approx 0,82936$$

نوع الارتباط: طردي (موجب) قوي

$$r = \frac{10-}{10} = \frac{10-}{10\sqrt{\times} 10\sqrt{}} = 1- \quad (٦)$$

نوع الارتباط: عكسي (سالب) تام

$$\frac{\text{ن (كس ص) - (كس ص)}}{\sqrt{\text{ن (كس ص) - (كس ص)}^2 \times \text{ن (كس ص) - (كس ص)}^2}} = r \quad (٧)$$

$$r = \frac{36}{2960\sqrt{\times} 105\sqrt{}}$$

$$r \approx \frac{36}{557,4944} \approx 0,0645$$

نوع الارتباط: طردي (موجب) ضعيف.

$$r = \frac{(985)(1307) - (173751)8}{\sqrt{(985)^2 - (149395)8\sqrt{}} \sqrt{(1307)^2 - (220955)8\sqrt{}}}$$

$$r = \frac{102613}{115582}$$

$$r \approx 0,8878$$

نوع الارتباط: طردي (موجب) قوي.

حاول أن تحل

٧ من الجدول التالي احسب مُعامل الارتباط الخطي وبين نوع وقوته.

س	١	٢	٣	٤	٥	٦
ص	٥٩	٦٥	٧٠	٧٢	٨٠	٥٢

مثال (٨)

احسب مُعامل الارتباط الخطي للمتغيرين التاليين وبين نوع وقوته.

س	١	٢	٣	٤	٥	٦
ص	٤	٧	٨	٣	٥	٥

الحل:

$$r = \frac{\text{ن (كس ص) - (كس ص)}}{\sqrt{\text{ن (كس ص) - (كس ص)}^2 \times \text{ن (كس ص) - (كس ص)}^2}}$$

س	١	٢	٣	٤	٥	٦
ص	١	٢	٣	٤	٥	٦
س	١٦	٤٩	٦٤	٩	٢٥	٢٥
ص	١	٢	٣	٤	٥	٦
س	١٦	٤٩	٦٤	٩	٢٥	٢٥
ص	١٨٨	٩١	٣٦	٣٠	٣٢	٢١

٥٠

$$r = \frac{32 \times 21 - 109 \times 6}{\sqrt{(32)^2 - 188 \times 6\sqrt{}} \sqrt{(21)^2 - 91 \times 6\sqrt{}}}$$

$$r = \frac{18-}{104\sqrt{\times} 105\sqrt{}}$$

$$r \approx 0,1723$$

نوع الارتباط: عكسي (سالب) ضعيف.

حاول أن تحل

٨ احسب مُعامل الارتباط الخطي للبيانات التالية وبين نوع وقوته:

٦	٥	٤	٤	٣	٢	س
١٥٠	١٠٠	٤٠	٧٥	٩٩	٩٨	ص

مثال (٩)

احسب مُعامل الارتباط الخطي للبيانات التالية وبين نوع وقوته.

س	٨	١٥	١٠	١٤	٩	١٢	١٣	١١
ص	٨	١	٦	٢	٧	٤	٣	٥

الحل:

$$r = \frac{\text{ن (كس ص) - (كس ص)}}{\sqrt{\text{ن (كس ص) - (كس ص)}^2 \times \text{ن (كس ص) - (كس ص)}^2}}$$

س	٨	١٥	١٠	١٤	٩	١٢	١٣	١١
ص	٨	١	٦	٢	٧	٤	٣	٥
س	٦٤	١	٣٦	٤	٤٩	١٦	٩	٢٥
ص	٦٤	١٥	٦٠	٢٨	٨١	١٤٤	١٦٩	١٢١
س	٢٠٤	٩٢	٣٦	٣٧٢	١١٠٠	١١٠٠	١١٠٠	١١٠٠

٥١

٨ ر ≈ ٤١٢٢,٠

نوع الارتباط: طردي (موجب) ضعيف

٩ ر = ١

نوع الارتباط: طردي (موجب) تام

١٠ ر ≈ -٥١٠٧,٠

نوع الارتباط: عكسي (سالِب) متوسط

$$\frac{36 \times 92 - 372 \times 8}{\sqrt{(36-1) \times (92-1)}} = \frac{336}{336} = 1$$

نوع الارتباط: عكسي (سالِب) تام

حاول أن تحل

١ احسب مُعامل الارتباط الخطي للبيانات التالية وبين نوعه وقوته.

س	٨	٥	١١	٧	٩	١٢	٦
ص	٤	١	٧	٣	٥	٨	٢

مثال (١٠)

في ما يلي درجات عدد من الطلاب في مادتي الإحصاء (س) والتاريخ (ص)

الإحصاء (س)	٥	١٠	٦	١٥	١١	١٣	١٧	١٢
التاريخ (ص)	١٧	١٧	١٥	٩	١٠	١٠	٦	١٢

١ أوجد مُعامل الارتباط س.

٢ حدّد نوع وقوة الارتباط.

٥٢

الحل:

$$r = \frac{n(\sum s \cdot v) - (\sum s)(\sum v)}{\sqrt{[n(\sum s^2) - (\sum s)^2][n(\sum v^2) - (\sum v)^2]}}$$

س	٥	١٠	٦	١٥	١١	١٣	١٧	٢٨٩
ص	١٧	١٧	١٥	٩	١٠	١٠	٦	٢٨٩
س	٨	٥	٦	٧	٥	٧	٣	١
ص	١٩	١٦	١٦	١٩	١٨	١٧	١١	٩

$$r = \frac{(96)(89) - (966)(8)}{\sqrt{[(96) - (1264) \times 8] \times [(89) - (1109) \times 8]}} = \frac{8544 - 7728}{896 \times 951} = 0,884$$

نوع الارتباط: عكسي (سالِب) قوي.

حاول أن تحل

١ أوجد مُعامل الارتباط الخطي للبيانات التالية وحدّد نوعه وقوته.

س	١	٣	٨	٧	٦	٥	٧	٨
ص	١٩	١٦	١٦	١٩	١٨	١٧	١١	٩

٥٣

٢-٢: الانحدار

١ الأهداف

- يوجد معادلة خط الانحدار.
- يتنبأ باستخدام معادلة خط الانحدار.
- يوجد مقدار الخطأ.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

الانحدار - معادلة خط الانحدار - هامش الخطأ - التنبؤ.

٣ الأدوات والوسائل

آلة حاسبة - حاسوب - جهاز إسقاط (Data Show).

٤ التمهيد

اطلب من الطلاب احتساب مُعامل الارتباط للبيانات التالية:

(أ)

س	١٢	١٠	١١	٤٠	٣٣	٢٣
ص	٢٤	٢٠	٢٢	٨٠	٦٦	٤٦

(ب)

س	٣-	٢-	١-	٠	١	٢	٣
ص	٩	٤	١	٠	١	٤	٩

اسألهم: هل كان بالإمكان تنبؤ هذه القيم للمُعامل؟

٢-٢

الانحدار Regression

دعنا نفكر ونتناقش

في الجدول التالي قيم لمتغيرين: طول الأم (س) وطول ابنتها (ص) بالستيمتر.

طول الأم (س)	١٦٠	١٦٨	١٦٩	١٦٤	١٧٤	١٦١	١٦٦	١٥٨
طول الابنة (ص)	١٥٨	١٦٧	١٧٠	١٦٣	١٧١	١٦٥	١٧٢	١٥٧

لدينا $r \approx ٨٤٤$ ، إذاً يوجد علاقة طردية قوية بين طول الأم وطول ابنتها. أخفنا زوج المتغيرين (س، ص) = (١٦٥، ٣٧٥) إلى الجدول حيث $\bar{س} = ١٦٥$ هو المتوسط الحسابي لأطوال الأمهات، $\bar{ص} = ١٦٥$ هو المتوسط الحسابي لأطوال البنات فلاحظنا أن قيمة r لم تتغير.

نريد أن نقدر طول الابنة من خلال العلاقة مع طول أمها، لذا افترضنا زوج المتغيرين (١٧٠، ١٥٠) وأضافناه إلى الجدول.

- هل يتوافق زوج المتغيرين الذي أضفناه مع الجدول علماً أنَّ قيمة r تصبح ٢١٦، ٩٠؟
- هل يمكن التنبؤ بقيمة إحدى الظاهرتين إذا علمت قيمة الظاهرة الأخرى؟ وكيف؟

Regression

الانحدار

لقد تعلمنا في الدرس السابق مفهوم الارتباط والارتباط الخطي، وعرفنا كيف يمكن حساب قيمة مُعامل الارتباط الخطي بين متغيرين، وعليه تمَّ تحديد قوة العلاقة الخطية بين المتغيرين ونوع هذه العلاقة فيما إذا كانت طردية أم عكسية.

وفي هذا الدرس سوف نتعلم وصف العلاقة بين متغيرين بإيجاد معادلة الخط المستقيم الممثل لهذه العلاقة.

يسمى هذا الخط المستقيم بخط الانحدار، وتسمى معادلته بمعادلة خط الانحدار.

تعريف: الانحدار

هو وصف العلاقة بين متغيرين.

٥٤

تمرّن

٢-٢

الانحدار

Regression

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) أجرت شركة دراسة لقياس العلاقة بين القوة المبدولة على عبوة منتج ما وقدرة تحملها. فأنت النتائج كما هو موضح في الجدول التالي.

س (س) القوة المبدولة	٠,١	٠,٣	٠,٥	٠,٨	١	١,٢	١,٥
ص (ص) قدرة التحمل	١	٤	٦	٨	١٠	١١	١٧

أوجد معادلة خط الانحدار.

(٢) تمثّل البيانات في الجدول التالي العدد ص من السلع المنتجة وفق ساعات العمل س.

س	٨٠	٧٩	٨٣	٨٤	٧٨	٦٠	٧٢	٨٥
ص	٣٠٠	٣٠٢	٣١٥	٣٣٠	٣٠٠	٢٥٠	٣٠٠	٣٤٠

(أ) أوجد معادلة خط الانحدار.

(ب) قدر عدد السلع المنتجة (ص)، بفرض أن عدد ساعات العمل س = ٩٠.

(٣) يوضّح الجدول التالي نتائج اختبار الكفاءة لمسؤولي المبيعات (س) في متجر معيّن وقيمة المبيعات (ص) بالدينار لكل موظّف.

س	٢٥	٤٢	٣٣	٥٤	٢٩	٣٦
ص	٤٢	٧٢	٥٠	٩٠	٤٥	٤٨

(أ) أوجد معادلة خط الانحدار.

(ب) قدر قيمة مبيعات موظّف قد حصل على س = ٥٠.

(ج) أوجد مقدار الخطأ في قيمة المبيعات، عند س = ٤٢.

٢٣

وضّح للطلاب أن في الدراسات الإحصائية، لا يكفي تبيان العلاقة بين متغير وآخر، لأن الأهم هو إمكانية تنبؤ قيم لا نعرفها لمتغير، من خلال البيانات المعطاة.

والمعادلة التي تسمح تنبؤ هذه القيم تسمى معادلة الانحدار وتتمثل بـ $\hat{y} = a + bx$.

تستخدم فقط هذه المعادلة إذا ما كانت العلاقة الخطية موجودة بين المتغيرين.

ذكر الطلاب بأن الميل ب يعطى بـ:

$$b = \frac{n(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)}{n(\sum x^2) - (\sum x)^2}$$

والجزء المقطوع من المحور الصادي

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \text{ حيث } \bar{x} = \frac{\sum x}{n}, \bar{y} = \frac{\sum y}{n}$$

مقدار خطأ بين القيمة المتوقعة والقيمة الجدولية:

$$\text{مقدار الخطأ} = |y - \hat{y}|$$

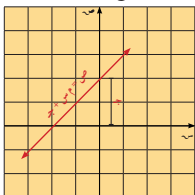
Equation of Linear Regression

معادلة خط الانحدار

تعريف: معادلة خط الانحدار

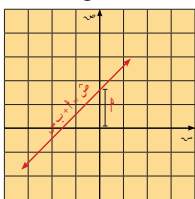
هي المعادلة الخطية التي يمكن من خلالها التنبؤ بقيمة أحد المتغيرين إذا علمت قيمة المتغير الآخر.

سبق لنا دراسة معادلة الخط المستقيم على الصورة: $y = a + bx$ ، حيث b ترمز إلى ميل هذا المستقيم، a ترمز إلى طول الجزء المقطوع من محور الصادات.



شكل (١)

أما في الإحصاء معادلة خط انحدار مستقيم تكتب على الصورة: $\hat{y} = a + bx$ ، حيث b ترمز إلى طول الجزء المقطوع من محور الصادات، b ترمز إلى ميل المستقيم.



شكل (٢)

$$b = \frac{n(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)}{n(\sum x^2) - (\sum x)^2}$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$\text{حيث: } \bar{x} = \frac{\sum x}{n}, \bar{y} = \frac{\sum y}{n}$$

المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) يقاس نجاح مجتمع تجاري بالمسافة التي يقطعها رواده للوصول إليه. يبين الجدول التالي عدد ص من الرواد والمسافة س بالكيلومتر التي قطعوها للوصول إليه.

س المسافة (بالكيلومتر)	٨	٧	٦	٤	٢	١
ص عدد الرواد	١٥	١٩	٢٥	٢٣	٣٤	٤٠

(أ) أوجد معادلة خط الانحدار.

(ب) إذا كان المجتمع على بعد ٣ كم من مكان السكن، فكم عدد الرواد المتوقع أن يقصده؟

(٢) يوضح الجدول التالي الطول (س) والوزن (ص) لعشرة لاعبي كرة سلة.

س	١٨٦	١٨٩	١٩٠	١٩٢	١٩٣	١٩٨	٢٠١	٢٠٣	٢٠٥
ص	٨٥	٨٥	٨٦	٩٠	٨٧	٩١	٩٣	١٠٣	١٠١

(أ) أوجد معادلة خط الانحدار.

(ب) قتر قيمة ص إذا كان س = ١٩٥

(ج) أوجد مقدار الخطأ إذا كان س = ٢٠١ ثم إذا كان س = ١٩٠

في التمرين (٣-٤)، استخدم البيانات المعطاة لإيجاد المعادلة الخاصة بخط الانحدار.

س	٢	٣	٥	٥	١٠
ص	٦	٩	١٤	١٦	٣٠

س	٢	٣	٥	٥	١٠
ص	٦	١٥	٥	٥	٢

(٥) يبين الجدول أدناه وزن النفايات (س) بالكيلوجرام الذي تتخلص منه أسرة وعدد أفرادها (ص).

وزن النفايات س (كجم)	٤,٩	٩	١٢,٥	١٣	١٠	٩,٩	٢٢	١٥	١٦
عدد أفراد الأسرة ص	٢	٣	٣	٦	٤	٢	١	٥	٤

(أ) أوجد معادلة خط الانحدار، وليكن المتغير الأول المتغير المستقل (س).

(ب) ما هو أفضل توقع لعدد أفراد أسرة تتخلص من ٢٣ كجم من النفايات؟

في المثال (١)

يوضح هذا المثال أنه لإيجاد معادلة الانحدار الخطي نبدأ باحتساب جميع عناصر المعادلة $\hat{p}$ ، b ونعوّض في $\hat{y} = \hat{p} + b \cdot x$ فالقيمة $\hat{y}$ تعطي مسافة أكبر من ٥٠ مترًا لهذا تكون الكرة قد وصلت إلى الأرض.

ومقدار الخطأ $\approx 0,2845$ عند القيمة $x = 2,5$ ، بين القيمة الجدولية والقيمة التي تحقق معادلة خط الانحدار.

في المثالين (٢)، (٣)

تطبيق مباشر لخطوات إيجاد معادلة خط الانحدار، والتنبؤ بقيمة y بمعلومية x ، وتحديد مقدار الخطأ في التنبؤ.

٦ الربط

يبين المثال (١) أهمية الحساب والانحدار في مجال الفيزياء.

خطوات إيجاد معادلة خط الانحدار: $\hat{y} = \hat{p} + b \cdot x$

١. تعيين قيمة b

٢. تعيين قيمة $\hat{p}$

٣. تكتب معادلة خط الانحدار: $\hat{y} = \hat{p} + b \cdot x$

٤. التنبؤ بقيمة y إذا علمت قيمة x

٥. تحديد مقدار الخطأ في التنبؤ.

مقدار الخطأ = [القيمة الجدولية - القيمة التي تحقق معادلة الانحدار]

= | y - $\hat{y}$ |

مثال (١)

سقطت كرة من ارتفاع ٥٠ مترًا، وتم تسجيل المسافات (بالمتر) التي قطعها هذه الكرة كل ٠,٥ ثانية لمدة ثلاث ثوان.

فأنت النتائج كما يوضح الجدول التالي:

الوقت (س)	٠	٠,٥	١	١,٥	٢	٢,٥	٣
المسافة (ص)	٠	١,٢	٤,٩	١١	١٩,٥	٣٠,٥	٤٤

١. أوجد معادلة خط الانحدار.

٢. قُدّر قيمة المسافة y عندما $x = 4$

٣. أوجد مقدار الخطأ في المسافة عندما $x = 2,5$ ثانية.

اختبار الوحدة الثانية

أسئلة المقال

(١) يبين الجدول التالي درجات بعض الطلاب في مادة اللغة العربية (س) وفي اللغة الفرنسية (ص) حيث النهاية العظمى ١٠ درجات لكل مادة.

مادة اللغة العربية (س)	٧	٦	٨	٧,٥	٥	٩
مادة اللغة الفرنسية (ص)	٧	٥	٧	٥	٥	٥

(أ) ارسم مخطط الانتشار للبيانات. ماذا تلاحظ؟

(ب) احسب معامل الارتباط r للتأكد من صحة إجابتك.

(٢) يبين الجدول التالي عدد الكيلومترات التي تقطعها كل سيارة لكل جالون من الوقود (س) وثمان السيارة (ص).

عدد الكيلومترات لكل جالون (س)	١٠٠	١١٠	١٣٠	١٣٥	١٥٠	١٧٠
ثمان السيارة (ص)	١٠٠٠٠	١٠٦٠٠	١١٥٠٠	١٢٤٠٠	١٢٩٠٠	١٣٥٠٠

(أ) احسب معامل الارتباط r .

(ب) أوجد معادلة خط الانحدار.

(ج) كم سيكون ثمن السيارة المتوقع إذا قطعت ١٤٠ كيلومتر/جالون؟

(د) أوجد مقدار الخطأ عندما $x = 135$

(٣) من الجدول التالي:

س	٢٥	٢٧	٣١	٣٢	٥٠	٦٥
ص	٥٠	٥٥	٥٥	٥٥	٦٠	٧٠

(أ) ارسم مخطط الانتشار للبيانات. ماذا تلاحظ؟

(ب) احسب معامل الارتباط r .

(ج) قُدّر y عندما $x = 40$

(د) أوجد مقدار الخطأ عند $x = 50$

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

ذَكَرَ الطلاب ضرورة الانتباه عند اختيار المتغير المستقل س والمتغير التابع ص. مثال على ذلك الطول لا يتأثر بالوزن، بل الوزن ص يتأثر بالطول س.

٨ التقييم

تابع الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» لمعرفة مدى قدرتهم وسرعتهم في حساب المُعامل، والمعادلات، وشرح الإجابات.

اختبار سريع

أوجد، إذا ممكناً، معادلة الانحدار الخطي للبيانات التالية واحسب مقدار الخطأ عند $s = 10$

س	ص
٩	٢٥
١٠	٢٥
١٤	٣٣
١٥,٥	٣٥
١٥	٣٣
١٢	٣

أولاً نوجد r لتتأكد من وجود ارتباط خطي بين s, v .

$$r = -0,4534$$

إذاً يوجد ارتباط خطي عكسي (سالِب) ضعيف

$$\hat{v} = b + s$$

$$\hat{v} = -2,007 + s - 0,412$$

$$\hat{v}_{10} = -30,517$$

$$\text{مقدار الخطأ} = |30,517 + 33 - 30,517| = 2,483$$

٩ إجابات وحلول

«دعنا نفكر وتناقش»

• زوج المتغيرين (١٥٠، ١٧٠) لا يتناسب مع قيم الجدول، لأنَّ قيمة مُعامل الارتباط الخطي r شهدت تغييراً ملحوظاً.

• إذا وجدنا العلاقة الخطية بين طول الأم وطول ابنتها يمكننا التنبؤ بقيمة إحدى الظاهرتين إذا علمت قيمة الظاهرة الأخرى.

الحل: ب $\frac{(s-v) - (s-v)}{(s-v) - (s-v)}$

س	ص	ص	س
٠	٠	٠	٠
٠,٢٥	٠,٦	١,٢	٠,٥
١	٤,٩	٤,٩	١
٢,٢٥	١٦,٥	١١	١,٥
٤	٣٩	١٩,٥	٢
٦,٢٥	٧٦,٢٥	٣٠,٥	٢,٥
٩	١٣٢	٤٤	٣
٢٢,٧٥	٣٦٩,٢٥	١١١,١	١٠,٥

$$n = 7, \bar{s} = \frac{10,5}{7} = 1,5, \bar{v} = \frac{111,1}{7} = 15,8714$$

$$b = \frac{111,1 \times 10,5 - 269,25 \times 7}{(10,5)^2 - 22,75 \times 7} = \frac{718,2}{49}$$

$$b = 14,6571$$

$$\hat{v} = b + s$$

$$1,5 \times 14,6571 - 15,8714 =$$

$$6,1143 \approx$$

$$\text{معادلة خط الانحدار هي: } \hat{v} = -6,1143 + 14,6571s$$

$$\therefore \hat{v}_{10} = -6,1143 + 14,6571 \times 10$$

$$\therefore \text{المسافة ص عندما } s = 10 \text{ هي:}$$

$$\hat{v}_{10} = -6,1143 + 14,6571 \times 10$$

$$\approx 141,52 \text{ مترًا.}$$

عند $s = 2,5$ ثانية من المعادلة $\hat{v} = -6,1143 + 14,6571s$ س

$$\hat{v}_{2,5} = -6,1143 + 14,6571 \times 2,5$$

$$\approx 30,5285$$

من الجدول عند $s = 2,5$ ثانية نجد أن $v = 30,5$

$\therefore$ مقدار الخطأ = $|v - \hat{v}|$

$$= |30,5285 - 30,5| =$$

$$0,0285$$

حاول أن تحل

١ في الجدول التالي: المتغير s هو تكلفة إنتاج فيلم سينمائي (بملايين الدولارات) والمتغير v هو مردود هذا الفيلم.

التكلفة (س)	٩٥	١٠٠	٢٠٠	٣٥	٥٠	٩٠	٦٢
المردود (ص)	٤٧	١٤٦	٦٠١	٥٧	٤٨	٦٤	٦٥

١ أوجد معادلة خط الانحدار.

٢ قَدِّر مردود فيلم بلغت تكلفته ٥٥ مليون دولار.

٣ أوجد مقدار الخطأ لفيلم بلغت تكلفته ٩٠ مليون دولار.

مثال (٢)

من الجدول التالي:

س	٤٣	٤٨	٥٦	٦١	٦٧	٧٠
ص	١٢٨	١٢٠	١٣٥	١٤٣	١٤١	١٥٢

أوجد:

١ معادلة خط الانحدار.

٢ قيمة v عندما $s = ٥٢$

٣ مقدار الخطأ عندما $s = ٦٧$

«حاول أن تحل»

١ (أ) $\hat{ص} = - ٦٠٨٣, ١٦٣ + ٤٣٨٧, ٣$ س

(ب) يبلغ المردود حوالي ٢٥,٥ مليون دولار

(ج) مقدار الخطأ = $٦٤ - ٨٧٤٧, ١٤٥$

$٨١, ٨٧٤٧ =$

٢ (أ) $\hat{ص} = ٩٤, ٦٩٠٧ + ٠, ١٧٨$ س

(ب) $\hat{ص} = ٩٨, ٢٥٠٧$

(ج) مقدار الخطأ عند س = ١٩٢

$|٩٧ - ١٠٨٣, ٩٨| =$

$١, ١٠٨٣ =$

٣ (أ) $\hat{ص} = - \frac{٣٨}{٢٣} + \frac{٢٢}{٢٣}$ س

أو $\hat{ص} = - ١, ٦٥٢٢ + ٠, ٩٥٦٥$ س

(ب) $\hat{ص} = ٧, ٩١٣٠$ أو $\frac{٢١}{٢٣}$

(ج) مقدار الخطأ = $٦ - ٧, ٩١٣٠$

$١, ٩١٣٠ =$

الحل:

ب = $\frac{ن(٣س - ص) - (٣س)(٣ص)}{ن(٣س) - (٣س)^2}$

س	ص	س	س
٤٣	١٢٨	٥٥٠٤	١٨٤٩
٤٨	١٢٠	٥٧٦٠	٢٣٠٤
٥٦	١٣٥	٧٥٦٠	٣١٣٦
٦١	١٤٣	٨٧٢٣	٣٧٢١
٦٧	١٤١	٩٤٤٧	٤٤٨٩
٧٠	١٥٢	١٠٦٤٠	٤٩٠٠
المجموع	٣٤٥ = ٣س	٨١٩ = ٣ص	٤٧٦٣٤ = ٣س × ٣ص

$٦ = ن, ٣٤٥ = ٣س, ٥٧, ٥ = ٣ص$

$ب = \frac{٨١٩ \times ٣٤٥ - ٤٧٦٣٤ \times ٦}{٣(٣٤٥) - ٢٠٣٩٩ \times ٦}$

$\approx ٠, ٩٦٤٤$

$\hat{ص} = ب - \hat{ص}$

$٥٧, ٥ \times ٠, ٩٦٤٤ - ١٣٦, ٥ =$

$٨١, ٠٤٧٠ =$

∴ معادلة خط الانحدار هي: $\hat{ص} = ٨١, ٠٤٧٠ + ٠, ٩٦٤٤ س$

عندما س = ٥٢

$\hat{ص} = ٨١, ٠٤٧٠ + ٥٢ \times ٠, ٩٦٤٤$

$\approx ١٣١, ١٩٥٨$

من الجدول عند س = ٦٧ توجد ص = ١٤١

$\hat{ص} = ٨١, ٠٤٧٠ + ٦٧ \times ٠, ٩٦٤٤$

$\approx ١٤٥, ٦٦١٨$

٥٩

∴ مقدار الخطأ = |ص - $\hat{ص}$ |

$٤, ٦٦١٨ = |١٤٥, ٦٦١٨ - ١٤١| =$

حاول أن تحل

من الجدول التالي:

س	ص
١٨٠	٨٥
٢٠٥	٨٢
١٩٧	٩٧
١٩٢	٩٢
١٨٩	٨٠
٢٠٣	١١٠
١٩٧	١٢٢

أوجد:

١ معادلة خط الانحدار.

٢ قيمة ص عندما س = ٢٠٠

٣ مقدار الخطأ عندما س = ١٩٢

مثال (٣)

باستخدام البيانات التالية لقيم س، ص.

س	ص
١	٣
٥	٩
١٠	١٤
٧	١٠
٩	١٥

أوجد:

١ معادلة خط الانحدار.

٢ قيمة ص عندما س = ١٠

٣ مقدار الخطأ عندما س = ٥

ب = $\frac{ن(٣س - ص) - (٣س)(٣ص)}{ن(٣س) - (٣س)^2}$

الحل:

س	ص	س	س
١	٣	٢	١
٣	٥	١٥	٩
٥	٩	٤٥	٢٥
٧	١٠	٧٠	٤٩
٩	١٤	١٢٦	٨١
المجموع	٢٥ = ٣س	٤٠ = ٣ص	٢٥٨ = ٣س × ٣ص

٦٠

المرشد لحل المسائل

إجابة «مسألة إضافية»

سيتميّز مخطط الانتشار فقط في قيم المحور الصادي.

الجدول الجديد:

س	٥	٨	١٠	١٤	١٦	١٨
ص	٢١,٢٥	٢٩,٧٥	٤٢,٥	٧٢,٢٥	١٠٢	١١٩

$$\hat{ص} = ٢٨,٢٦٨٦ + ٧,٨٣٦١ س$$

ص. ٢. $\hat{ص} \approx ١٢٨,٤٥٣٤$ ، وهو قريب جدًا من التقدير في

المسألة إذا أجري عليه تخفيض بقيمة ١٥٪.

$$١٢٨,٣٥ = ((١٥ - ١) \times ١٥١)$$

المرشد لحل المسائل

في متجر للأدوات الكهربائية، تختلف أسعار آلات التصوير الرقمية بحسب نقاوة صورتها التي تقاس بالميجابكسل. يوضح الجدول التالي أسعار إحدى هذه الآلات ومدى نقاوة صورتها:

(س) نقاوة الصورة بالميجابكسل	٥	٨	١٠	١٤	١٦	١٨
(ص) السعر بالدينار الكويتي	٢٥	٣٥	٥٠	٨٥	١٢٠	١٤٠

أراد جاسم تقدير سعر آلة نقاوتها ٢٠ ميغابكسل، علمًا أنه سمع من صاحب المتجر أنه يوجد علاقة بين السعر والنقاوة. ففكر جاسم:

إذا رسمت مخطط الانتشار للأسعار والنقاوة، أتعرف على طبيعة هذه العلاقة. فلاحظ أن هذه العلاقة هي خطية طردية، لذا أراد إيجاد قيمة معامل الارتباط الخطي ومعادلة خط الانحدار. أوجد القيم التالية التي ستساعده على ذلك:

$$\begin{aligned} \bar{ن} &= \frac{٥ + ٨ + ١٠ + ١٤ + ١٦ + ١٨}{٦} = ١١,٨ \\ \bar{ص} &= \frac{٢٥ + ٣٥ + ٥٠ + ٨٥ + ١٢٠ + ١٤٠}{٦} = ٧٥,٨ \end{aligned}$$

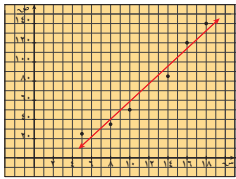
قيمة معامل الارتباط الخطي $r \approx ٠,٩٧٨٨$ ، وهذا يدل على علاقة

خطية قوية بين السعر والنقاوة.

معادلة خط الانحدار: $\hat{ص} = ٩,٢٢ + ٣٣ س$

لتقدير سعر آلة مع ٢٠ ميغابكسل، نعوض $س = ٢٠$

ونحصل على $\hat{ص} \approx ١٥١$ دينارًا كويتيًّا.



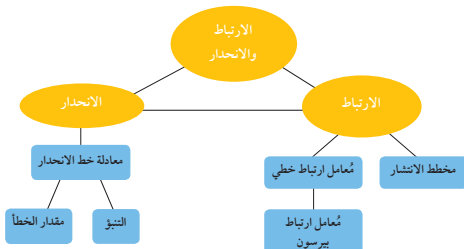
مسألة إضافية

أجري في المتجر نفسه تخفيض على الأسعار بنسبة ١٥٪.

برأيك، كيف يتغير تقدير جاسم؟ أعد الحل مستخدمًا السعر المخفّض للتأكد من إجابتك.

(ملاحظة: استخدم الجدول نفسه من المسألة السابقة إنمّا بتخفيض قدره ١٥٪ على الأسعار)

مخطط تنظيمي للوحدة الثانية



ملخص

- الارتباط هو طريقة إحصائية يمكن من خلالها تحديد العلاقة بين متغيرين.
- مخطط الانتشار هو شكل بياني لعدد من الأزواج المرتبة (س، ص) يستخدم لوصف العلاقة الموجودة بين متغيرين.
- العلاقة بين متغيرين تكون:
 - علاقة خطية طردية: تنتشر النقاط على جانبي خط مستقيم تصاعدي.
 - علاقة خطية عكسية: تنتشر النقاط على جانبي خط مستقيم تنازلي.
 - علاقة غير خطية: تنتشر النقاط على جانبي خط منحني.
 - لا توجد علاقة: لا يوجد نمط محدد لانتشار النقاط في الشكل البياني.
- معامل الارتباط الخطي يقيس قوة العلاقة الخطية بين متغيرين متصلين ونوعها،

$$r = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sqrt{\sum (س - \bar{س})^2 \sum (ص - \bar{ص})^2}} \quad \text{أو} \quad r = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sqrt{\sum (س - \bar{س})^2 \sum (ص - \bar{ص})^2}}$$

- الانحدار هو طريقة إحصائية تستخدم لوصف طبيعة العلاقة بين متغيرين س، ص من حيث كونها خطية أو غير خطية.
- معادلة خط الانحدار $\hat{ص} = ب + س$ ، حيث:

$$ب = \frac{\sum (ص - \bar{ص}) - (\sum س)(\bar{ص})}{\sum (س - \bar{س})}$$

$$\hat{ص} = ب + س$$

- التقدير يتم بالتعويض لقيمة س في معادلة خط الانحدار.
- مقدار الخطأ = |القيمة الجدولية - القيمة من معادلة الانحدار| = |ص - \hat{ص}|

$$\begin{aligned} \bar{ن} &= \frac{٥ + ٨ + ١٠ + ١٤ + ١٦ + ١٨}{٦} = ١١,٨ \\ \bar{ص} &= \frac{٢٥ + ٣٥ + ٥٠ + ٨٥ + ١٢٠ + ١٤٠}{٦} = ٧٥,٨ \\ \bar{ب} &= \frac{٤٠ \times ٢٥ - ٢٥٨ \times ٥}{٢٥ \times ٢٥ - ١٦٥ \times ٥} = ١,٤٥ \\ \bar{ب} &= \frac{٤٠ \times ٢٥ - ٢٥٨ \times ٥}{٢٥ \times ٢٥ - ١٦٥ \times ٥} = ١,٤٥ \\ \bar{ب} &= \frac{٤٠ \times ٢٥ - ٢٥٨ \times ٥}{٢٥ \times ٢٥ - ١٦٥ \times ٥} = ١,٤٥ \end{aligned}$$

∴ معادلة خط الانحدار هي: $\hat{ص} = ب + س$

عندما $س = ١٠$ فإن:

$$\hat{ص} = ١٠ \times ١,٤٥ + ٠,٧٥ = ١٥,٢٥$$

من الجدول $ص = ٩$

$$\text{من المعادلة } \hat{ص} = ١٠ \times ١,٤٥ + ٠,٧٥ = ١٥,٢٥$$

∴ مقدار الخطأ = |ص - \hat{ص}|

$$١ = |٩ - ١٥,٢٥|$$

حاول أن تحل

من الجدول التالي:

س	٤	٥	٨	٩	١٠	١٢
ص	٢	٤	٥	٨	٦	١١

أوجد:

١. معادلة خط الانحدار.

٢. قيمة ص عندما $س = ١٠$

٣. أوجد مقدار الخطأ عندما $س = ١٠$

(٤) توضح البيانات المزدوجة في الجدول أدناه وزن الأوراق المستهلكة (س) بالكيلوجرام وعدد أفراد الأسرة (ص) في فترة محددة.

وزن الأوراق المستهلكة (س) (كجم)	١,١	٣,٤	٤,٣	٤	٣,٩	٣	٣,١	٥,٢
عدد أفراد الأسرة ص	٢	٣	٣	٦	٤	٢	١	٥

(أ) أوجد معادلة خط الانحدار.

(ب) ما هو عدد أفراد أسرة استهلكت ٨ كجم من الورق؟

في التمرين (٥-٦)، استخدم البيانات المعطاة لإيجاد المعادلة الخاصة بخط الانحدار.

س	١	٢	٤	٥
ص	٣	٥	٩	١١

بنود الصح والخطأ

في البنود (١-٥) عبارات ظلل الرمز (أ) إذا كانت العبارة صحيحة و(ب) إذا كانت خاطئة.

- (١) الارتباط هو علاقة بين متغيرين. ☐ (أ) ☐ (ب)
- (٢) إذا كان س معامل الارتباط بين متغيرين فإن $-1 < r < 1$. ☐ (أ) ☐ (ب)
- (٣) إذا كان معامل الارتباط بين متغيرين $r = 1$ كان الارتباط تاماً. ☐ (أ) ☐ (ب)
- (٤) الانحدار هو وصف العلاقة بين متغيرين. ☐ (أ) ☐ (ب)
- (٥) إذا كان معامل الارتباط $r = 0$ صفر فإن الارتباط منعدم. ☐ (أ) ☐ (ب)

بنود الاختيار من متعدد

في البنود (٦-١٥) لكل بند ٤ خيارات واحد فقط منها صحيح. ظلل دائرة الرمز الدال على الإجابة الصحيحة.

(٦) قيمة معامل الارتباط (r) التي تجعل الارتباط طردي تام بين المتغيرين س، ص هي:

- (أ) ١ - ☐ (ب) ٠,٥ - ☐ (ج) ٠,٥ - ☐ (د) ١ - ☐

(٧) إذا كانت قيمة معامل الارتباط (r) بين متغيرين حيث $r \in (-1, 0, 7, 1]$ فإن العلاقة:

- (أ) عكسية تامة ☐ (ب) عكسية قوية ☐ (ج) طردية تامة ☐ (د) طردية قوية ☐

تمارين إثرائية

لكل من الجدولين ١ و ٢ التاليين:

س	٢	٣	٤	٥	٦	٧
ص	١	١,٥	٢	٢,٥	٣	٣,٥

س	١-٠	١	٢	٣	٤
ص	٩	٨	٧	٦	٥

(أ) أوجد مُعامل الارتباط r .

(ب) ارسم مخطط الانتشار للبيانات.

(ج) أوجد معادلة خط الانحدار.

(د) قَدِّر في الجدول (١) قيمة ص إذا كانت س = ٦,٥.

(هـ) قَدِّر في الجدول (٢) قيمة ص إذا كانت س = ٢,٥.

(و) أوجد مقدار الخطأ في نقطتين مختلفتين لكل من المعادلتين.

(ز) يبين الجدول التالي قيم المتغيرين (س) و(ص)

س	١	١	٢	٣	٤	٤	٥	٦	٧	٨	٨
ص	٦	٧	٦	٥	٤	٤	٤	٣	٤	٥	٨

(أ) ارسم مخطط الانتشار للبيانات.

(ب) احسب مُعامل الارتباط r ، ثم أوجد معادلة خط الانحدار.

(ج) أوجد مقدار الخطأ عند س = ٣.

(د) إذا قسمنا الجدول إلى قسمين حيث كل منهما حجمه $n = 8$ ، ارسم مخطط الانتشار لكل منهما. ماذا تلاحظ؟

(هـ) أوجد مُعامل الارتباط r لكل من الجدولين.

(و) أوجد معادلة خط الانحدار، ثم قَدِّر في أول معادلة قيمة ص عند س = ٣، وأوجد مقدار الخطأ.

(ز) أوجد مقدار الخطأ في الجدول الثاني عند س = ٦.

(٨) إذا كانت معادلة خط الانحدار للمتغيرين س، ص هي $\hat{ص} = ٥,٥ + ٣,٤س$ فإن قيمة ص المتوقعة عندما س = ٦ هي:

- (أ) ٠,٥ ☐ (ب) ٦,٨ ☐ (ج) ٢٩,٩٨ ☐ (د) ٢٥,٩ ☐

(٩) إذا كان مُعامل الارتباط بين متغيرين $r = ٠,٨٥$ فإن الارتباط يكون:

- (أ) طردي قوي ☐ (ب) طردي ضعيف ☐ (ج) طردي متوسط ☐ (د) طردي تام ☐

(١٠) إذا كانت معادلة خط الانحدار للمتغيرين س، ص هي $\hat{ص} = ١ + ١,٤س$ فإن مقدار الخطأ عند س = ٥ علمًا بأن القيمة الجدولية هي ص = ٩ يساوي:

- (أ) ١ - ☐ (ب) ١ ☐ (ج) ١٧ ☐ (د) ٨ ☐

(١١) الشكل المقابل يمثل علاقة بين متغيرين س، ص نوع هذه العلاقة هو:

- (أ) علاقة خطية طردية ☐ (ب) علاقة خطية عكسية ☐ (ج) علاقة غير خطية ☐ (د) ليس أي مما سبق ☐

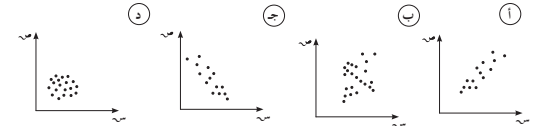
(١٢) من الجدول التالي:

س	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
ص	٢٣	١٨	١٧	١٤	١٠	٦	٥	١

فإذا كانت معادلة خط الانحدار هي $\hat{ص} = -٣,٠٥س + ٢٥,٥$ فإن مقدار الخطأ عندما س = ٥ يساوي:

- (أ) ٠,٢٥ ☐ (ب) ٠,٢٥ - ☐ (ج) ٢٠,٢٥ ☐ (د) ١٠,٢٥ ☐

(١٣) الشكل الذي يمثل ارتباط عكسي قوي بين متغيرين س، ص هو:



(١٤) قيمة مُعامل الارتباط لا يمكن أن تساوي:

- (أ) صفر ☐ (ب) ١ ☐ (ج) ٠,٥ - ☐ (د) ١,٥ ☐

(١٥) إذا كان مُعامل الارتباط بين المتغيرين س، ص يساوي صفر فإن الارتباط يكون:

- (أ) قوي ☐ (ب) ضعيف ☐ (ج) منعدم ☐ (د) تام ☐

(٤) قرر صاحب أحد متاجر الأجهزة الكهربائية إقامة تجربة لمدة خمسة أشهر لمعرفة مدى تأثير الإنفاق الإعلاني على حجم المبيعات فكانت النتائج كما في الجدول التالي:

الأشهر	١	٢	٣	٤	٥
الإنفاق الإعلاني (س) بالآلاف الدنانير لكل شهر	١	٢	٣	٤	٥
حجم المبيعات (ص) بعشرات آلاف الدنانير لكل شهر	١	٢	٢	٢	٤

(أ) أوجد معادلة خط الانحدار.

(ب) أنفق صاحب المتجر في أحد الأشهر ٥٠٠ دينار على الإعلانات، فما حجم مبيعاته المتوقعة في هذا الشهر؟

(ج) أوجد مُعامل الارتباط r وحدد نوعه وقوته، للمتغيرين س، ص حيث:

س	٤	٥	٧	١٠	٨
ص	٨	٥	٢	٦	١٤

(د) أوجد مُعامل الارتباط r وحدد نوعه وقوته، للمتغيرين س، ص حيث:

س	٤	٥	٨	٩	١٠	٣
ص	٣	٤	٦	١٠	٨	٥

(هـ) أوجد مُعامل الارتباط r وحدد نوعه وقوته، للمتغيرين س، ص حيث:

س	٧	٤	٢	٥	٦	٨	٣
ص	١٠	٨	٦	٩	١١	٦	١٢

(و) أوجد مُعامل الارتباط r وحدد نوعه وقوته، للمتغيرين س، ص حيث:

س	٤	٧	١٠	٦	٨	٩
ص	٦	٧	٨	٩	٥	١١

Time Series

الوحدة الثالثة: السلاسل الزمنية

(١-٣) السلسلة الزمنية

(٢-٣) عناصر السلسلة الزمنية

(٣-٣) تحليل السلاسل الزمنية

معادلة الاتجاه العام للسلسلة الزمنية.

مقدمة الوحدة

الوحدة الثالثة

السلاسل الزمنية Time Series

مشروع الوحدة: المياه واستهلاكها

- 1 مقدمة المشروع: تعتبر المياه وطريقة استهلاكها من أهم المشاكل في دولة الكويت وأكثرها تعقيداً، نظراً لمحدودية مواردها والمصادر المتجددة، ونظراً لارتفاع معدلات استهلاكها مع مرور الوقت.
- 2 الهدف: تحديد مصادر المياه ومحاولة توقع الكميات المطلوبة خلال الـ ٢٠ سنة القادمة بناء على عدة عوامل.
- 3 الموازم: شبكة الإنترنت، ورق رسم بياني، حاسوب.
- 4 أسئلة حول التطبيق:
 - 1 كيف كانت تؤمن دولة الكويت حاجتها من المياه قبل تدفق عائدات النفط؟
 - 2 ما كلفة إنتاج المياه العذبة المقطرة المحلاة؟ قارنها بكلفة الإنتاج في السنوات الماضية أي منذ ستينيات القرن الماضي. ارسم المضلع التكراري لكلفة تحلية المتر المكعب الواحد خلال الخمسين سنة الماضية آخذين بالاعتبار معدل الكلفة كل ٥ سنوات.
 - 3 ما المعدل اليومي لاستهلاك الفرد من المياه خلال الخمسين سنة الماضية. ارسم مضلعاً تكرارياً يحدد معدل الاستهلاك مع مرور الوقت آخذين بالاعتبار معدل الاستهلاك اليومي للفرد كل ٥ سنوات.
 - 4 قارن معدلات الاستهلاك بين عدة بلدان كقطر، والسعودية، وسلطنة عُمان في الفترات الزمنية ذاتها.
 - 5 ما معدل الزيادة السكانية في الكويت؟ وما تأثيره في السنوات القادمة على كمية المياه المستهلكة؟
 - 6 التقرير: قَدِّم تقريراً مفصلاً عن هذا المشروع محاولاً توقع كميات الاستهلاك المطلوبة خلال الـ ٢٠ سنة القادمة، ومحددًا الموارد والمصادر التي يمكن اعتمادها لتأمين الحاجات مراعيًا الزيادة السكانية ليكون التقرير أكثر دقة وموضوعية.

دروس الوحدة

١-٣ السلسلة الزمنية	٢-٣ عناصر السلسلة الزمنية	٣-٣ تحليل السلاسل الزمنية
		معادلة الاتجاه العام للسلسلة الزمنية

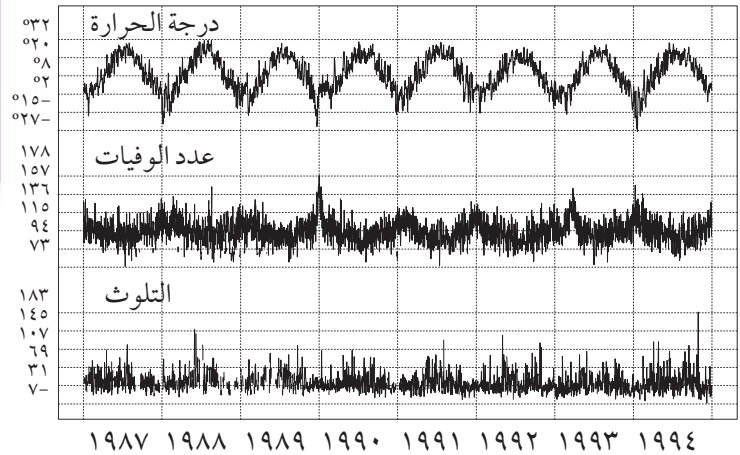
٦٤

السلاسل الزمنية هي عبارة عن مجموعة من الملاحظات تم تسجيلها بحسب تسلسلها الزمني.

مثال على ذلك:

- عدد الوفيات اليومية.
- قياس جسيمات التلوث في الهواء.
- بيانات درجات الحرارة.

يوضح الرسم التالي هذه البيانات لإحدى المدن الصناعية الكبرى بين عام ١٩٨٧ وعام ١٩٩٤:



نمثل قياسات السلاسل الزمنية بالمتغيرات التالية:

س١، ...، س٢٠، حيث ن يساوي العدد الإجمالي للقياسات. في حين أن معظم المسائل الإحصائية تعنى بخصائص تقدير مجتمع إحصائي ما من خلال عينة، ففي تحليل السلاسل الزمنية يختلف الوضع بالرغم من إمكانية تغيير حجم العينة التي يتم دراستها.

عادة ما يكون من المستحيل إجراء ملاحظات متعددة في الوقت نفسه (على سبيل المثال، لا يمكن للمرء مراقبة وفيات يوم ما أكثر من مرة واحدة) مما يجعل من الإجراءات الإحصائية التقليدية المستندة على تقديرات عينة كبيرة غير مناسبة.

أما السكون فهو افتراض مناسب يسمح لنا بوصف الخصائص الإحصائية للسلاسل الزمنية.

مشروع الوحدة

أوجه استخدام المياه كثيرة ومتنوعة، كالأستخدامات الزراعية، المنزلية، الصناعية.

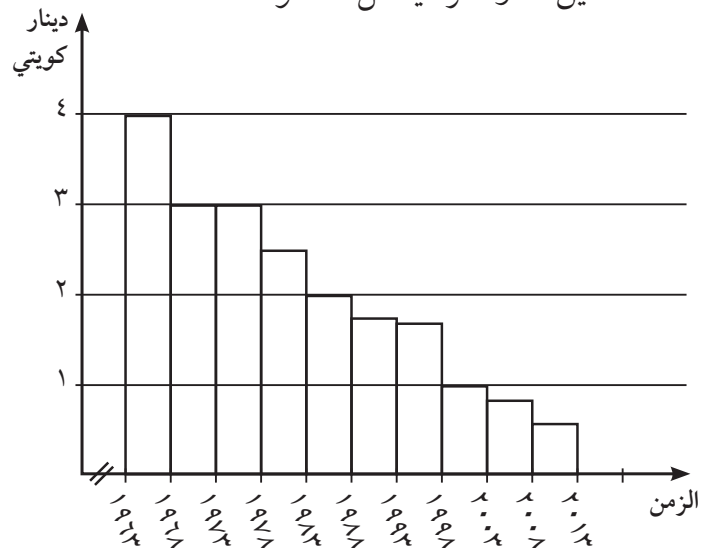
وقد أثرت هذه الأستخدامات في تغيير الأنظمة الإيكولوجية المحيطة مثل الصرف الصحي، وتحويل المياه للري، والأستخدامات الصناعية والمنزلية مما زاد من تلوث المياه وذلك نتيجة الأسمدة الزراعية، والنفايات الصناعية، وبناء السدود، إلخ...

إجابات «أسئلة حول التطبيق»

(أ) قد تتنوع الإجابات بين الطلاب.

(ب) قد تتنوع الإجابات بحسب المراجع التي اعتمدها الطلاب في بحثهم.

على سبيل المثال شكل المضلع التكراري لكلفة تحلية المتر المكعب الواحد خلال الخمسين سنة الماضية آخذين الفترة الزمنية كل ٥ سنوات.



(ج) قد تتنوع الإجابات بين الطلاب كذلك بالنسبة إلى المضلع التكراري.

(د) قد تتنوع الإجابات بين الطلاب.

(هـ) قد تتنوع الإجابات بين الطلاب.

التقرير

اعرض تقريرك أمام زملائك في غرفة الصف، وناقش معهم النتائج التي توصلت إليها. إذا وجدت أنك كنت على خطأ في مكان ما فأعد صياغة تقريرك بما يتناسب مع أهداف المشروع.

الوحدة الثالثة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- غطط الانتشار.
- الارتباط وتطبيقاته.
- تعامل ارتباط بيرسون.
- الانحدار وتطبيقاته.
- التقدير بمعادلة الانحدار.

ماذا سوف تعلم؟

- السلسلة الزمنية.
- عناصر السلسلة الزمنية.
- تحليل السلاسل الزمنية.

المصطلحات الأساسية

السلسلة الزمنية - عناصر السلسلة الزمنية - المتحنى التاريخي للسلسلة الزمنية - الاتجاه العام - التغيرات الموسمية - التغيرات الدورية - التغيرات العرضية (الفجائية).

أضف إلى معلوماتك

تطور عمر الإنسان وزادت معدلاته، وذلك يعود إلى عدة عوامل أبرزها نوعية التغذية والرعاية الطبية، بحيث كان معدل عمر الإنسان عام ١٩٠٠ في الولايات المتحدة الأمريكية حوالي ٤٧,٣ سنة ليصبح عام ٢٠٠٧ ٧٧,٩ سنة.

أما بالنسبة إلى الدول التي تعتبر فيها معدلات عمر الإنسان الأعلى في العالم، فتحتل اليابان في المركز الثاني حيث إن معدل العمر فيها هو ٨٢ سنة، ودولة أندورا، التي تقع في جبال الپيرينيه بين فرنسا وإسبانيا، تحتل في المركز الأول حيث يبلغ عدد سكانها ٧٢,٠٠٠ نسمة ومعدل أعمار أبنائها ٨٣,٥ سنة. وبالتالي، فإن معدل عمر الإنسان في ارتفاع دائم مع مرور الزمن.

سَلَمُ التقييم

٤	العرض في المشروع بكامله واضح - جداول البيانات واضحة ومتناسكة بحيث تخلو من الأخطاء - الرسوم البيانية دقيقة وصحيحة - التقرير مفصل ومنظم ويعكس دقة وجهداً في العمل.
٣	معظم العرض في المشروع واضح - بعض الأخطاء في جداول البيانات - أخطاء طفيفة في الرسوم البيانية - التقرير مفصل ومنظم إنما ينقصه بعض التفاصيل الصغيرة.
٢	بعض العروض في المشروع واضحة - أخطاء متكررة في جداول البيانات وفي الرسوم البيانية - التقرير غير مفصل ويفتقر إلى التنظيم.
١	معظم عناصر هذا المشروع ناقصة وبحاجة إلى إعادة.

٣-١: السلسلة الزمنية

١ الأهداف

- يتعرف السلسلة الزمنية.
- يرسم المنحنى التاريخي للسلسلة الزمنية.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

السلسلة الزمنية - المنحنى التاريخي للسلسلة الزمنية.

٣ الأدوات والوسائل

حاسوب - جهاز إسقاط (Data Show).

٤ التمهيد

اطلب إلى الطلاب رسم مخطط الانتشار للبيانات التالية:

س	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦
ص	١,١	١,٥	٢	٢,٢	٢,٣	٢,٨

اطلب إليهم ربط النقاط ببعضها بعضاً.

٥ التدريس

السلسلة الزمنية هي متتالية منتهية لمعطيات بدلالة الزمن (دقيقة، ساعة، أيام...).

المنحنى التاريخي للسلسلة الزمنية هو الرسم البياني على مخطط الانتشار للبيانات في الجدول مع ربط النقاط ببعضها بعضاً.

في المثال (١)

تطبيق مباشر للسلاسل الزمنية. لاحظ تزايد متوسط العمر مع الزمن.

في المثال (٢)

يشكل مثالاً لسلسلة زمنية في تناقص مع الزمن.

٦ الربط

المثالان (١) و (٢) هما من المجالات الحياتية حيث تستخدم السلسلة الزمنية.

السلسلة الزمنية

Time Series



دعنا نفكر ونناقش

تعلمت سابقاً كيف ترسم مخطط الانتشار لمتغيرين وكيفية إيجاد نوع العلاقة بينهما. في الجدول التالي:

س تمثل السنوات ، ص تمثل معدل النمو

س	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦
ص	٢,٧	٢,٧	٢,٧	٢,٧	٢,٧	٢,٧

١ مقل البيانات بالمخطط المنكسر.

٢ كيف كان معدل النمو بين سنة ٢٠٠٠ وسنة ٢٠٠٦ وبعد سنة ٢٠٠٦؟

٣ ما نوع العلاقة بين الزمن ومعدل النمو في هذه الفترات (ثابتة، متناقصة، متزايدة)؟

سبق لنا أن درسنا في الوحدة السابقة العلاقة بين متغيرين (متغيرين) من خلال موضوع الارتباط وفي هذه الوحدة سنتعرض لحالة خاصة من الارتباط يثبت قيم إحدى الظاهرتين (المتغيرين) وهو الزمن باعتبارها المتغير المستقل ودراسة قيم الظاهرة الأخرى عبر الزمن وهو ما يسمى بالسلسلة الزمنية.

تعريف: السلسلة الزمنية

هي مجموعة القيم التي تأخذها ظاهرة ما في فترات زمنية غالباً ما تكون متساوية ومتعاقبة.

أي أنها علاقة تربط بين متغيرين أحدهما هو قيم الظاهرة المطلوب دراستها والآخر هو الزمن. أي أننا نتتبع سلوك الظاهرة في أزمنة متعاقبة (سنة - نصف سنة - ربع سنة - شهر - يوم ...) ويسمى التتبع لقيم الظاهرة خلال هذه الأزمنة بالسلسلة الزمنية.

السلسلة الزمنية تحتوي على متغيرين أحدهما هو الزمن (المتغير المستقل) وسوف نرسم له بالرمز (س)، والآخر هو قيمة الظاهرة (المتغير التابع) وسنرمز له بالرمز (ص).

وتقاس قيم هذه الظواهر بنفس الوحدات ونفس طريقة القياس حتى يمكن المقارنة بين قيم الظاهرة خلال فترة الدراسة. وبعض السلاسل الزمنية تكون تصاعدياً بصورة مطردة، وفي هذا النوع تزداد قيم الظاهرة محل الدراسة بمرور الزمن مثل إنتاج تحلية المياه في دولة الكويت، وبعض السلاسل الزمنية تكون تنازلية حيث تكون قيم مشاهداتها تتناقص بمرور الزمن مثل عدد الإصابات بشلل الأطفال في السنوات الأخيرة، والبعض الآخر من السلاسل الزمنية لا تخضع لنظام ثابت فهي متذبذبة بين التصاعدي والتنازلي وتكون قيم الظاهرة موزعة بين الصعود والتحول مثل إنتاج المشروبات الغازية على مدار السنة.

٦٦

تمرّن
١-٣

السلسلة الزمنية

Time Series

المجموعة ١ تمارين أساسية

(١) يبين الجدول التالي متغيرين: الزمن بالأسابيع (س) وعدد الطلاب الذين تغيبوا عن المدرسة بداعي المرض (ص).

الزمن (س)	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
عدد الطلاب (ص)	١	١	٣	٣	١	٢	٢	٨

(أ) مقل البيانات أعلاه بالسلسلة الزمنية.

(ب) بين الاتجاه العام للسلسلة الزمنية.

(٢) يبين الجدول التالي النسبة المئوية للعاطلين عن العمل من سنة ١٩٩٧ حتى سنة ٢٠٠٤

الزمن (س)	١٩٩٧	١٩٩٨	١٩٩٩	٢٠٠٠	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤
النسبة المئوية للعاطلين عن العمل (ص)	٠,٦	٠,٦	٠,٦٥	٠,٧	٠,٧	٠,٨	٠,٨	٠,٩

(أ) مقل البيانات أعلاه بالسلسلة الزمنية.

(ب) بين الاتجاه العام للسلسلة الزمنية مقللاً إيجابتك.

(٣) يبين الجدول التالي مساحة الأراضي الصالحة للزراعة بالآلاف الأقدنة من سنة ١٩٩٨ حتى سنة ٢٠٠٥

الزمن (س)	١٩٩٨	١٩٩٩	٢٠٠٠	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥
مساحة الأرض (ص)	٦	٧	١٠	١٣	١٥	١٥	١٥	١٥

(أ) مقل البيانات أعلاه بالسلسلة الزمنية.

(ب) بين الاتجاه العام للسلسلة الزمنية مقللاً إيجابتك.

٣٠

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

من المهم لفت انتباه الطلاب إلى أن الزمن يتمثل على محور السينات وإعطائهم جدولاً أو اثنين مع س تمثل زمن ما ليتقنوا رسم المنحنى التاريخي.

٨ التقييم

تابع الطلاب وهم يحلون فقرات «حاول أن تحل» وأعطهم الوقت اللازم لذلك.

سوف يتم تمثيل السلسلة الزمنية بيانياً بخط متكسر ويسمى بالمنحنى التاريخي للسلسلة الزمنية، حيث يتم تمثيل الزمن على المحور الأفقي والظاهرة على المحور الرأسي.

مثال (١)

يبين الجدول التالي متوسط العمر (ص) في إحدى الدول خلال السنوات (س) من سنة ٢٠٠٤ إلى سنة ٢٠١١.

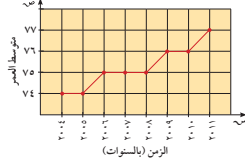
الزمن (س)	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٢٠٠٩	٢٠١٠	٢٠١١
العمر (ص)	٧٤	٧٤	٧٥	٧٥	٧٥	٧٦	٧٦	٧٧

١ مثل بيانياً السلسلة الزمنية للبيانات الموجودة في الجدول أعلاه.

٢ ما نوع العلاقة بين متوسط العمر والزمن؟

الحل:

١ مثل الزمن على المحور الأفقي، ومتوسط العمر على المحور الرأسي.



٢ نلاحظ أن متوسط العمر في تزايد مع الزمن.

حاول أن تحل

١ في الجدول التالي متغيرين: الزمن (س) بالسنوات، وعدد الولادات (ص) بالآلاف.

الزمن (س)	٢٠٠٠	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨
عدد الولادات (ص) بالآلاف	٤٢	٤٢	٤٣	٤٥	٤٧	٥١	٥٣	٥٥	٥٥

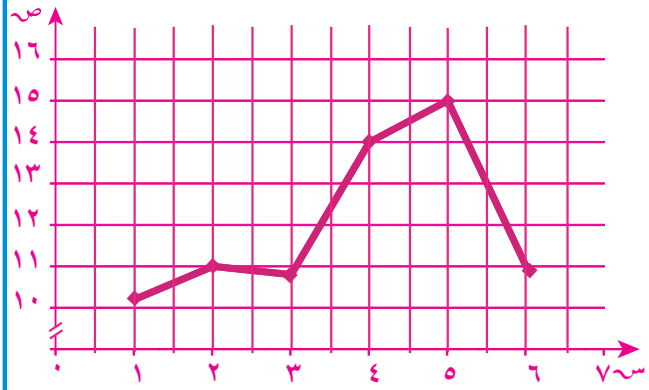
١ مثل بيانياً السلسلة الزمنية للبيانات الموجودة في الجدول أعلاه.

٢ ما نوع العلاقة بين عدد الولادات والزمن؟

اختبار سريع

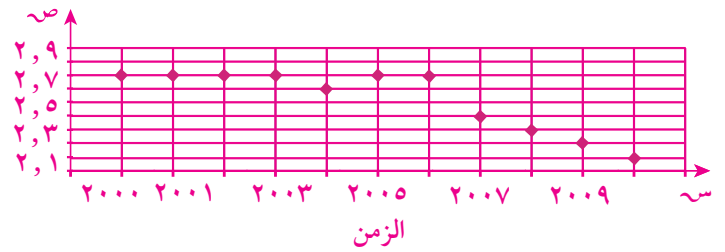
مثل البيانات أدناه بالسلسلة الزمنية، ثم بين اتجاهها العام.

س	١	٢	٣	٤	٥	٦
ص	١٠,٢	١١	١٠,٨	١٤	١٥	١١



السلسلة الزمنية تبين تغيراً عرضياً.

(أ)

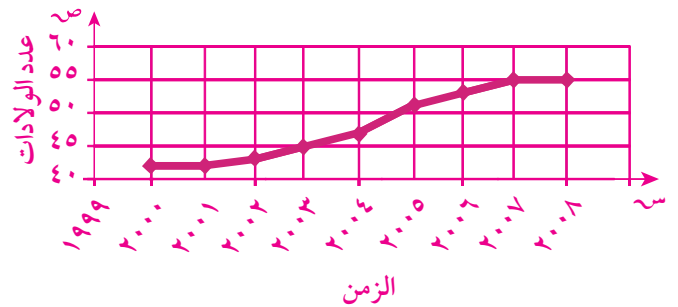


(ب) كان ثابتاً بين سنة ٢٠٠٠ وسنة ٢٠٠٦ وأصبح يتناقص بعد سنة ٢٠٠٦ .

(ج) هي علاقة خطية ثابتة من ٢٠٠٠ إلى ٢٠٠٦ ومتناقصة من ٢٠٠٦ وما بعد.

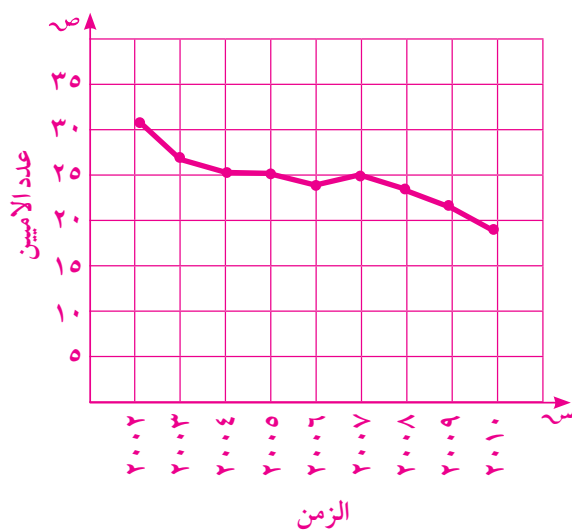
«حاول أن تحل»

(أ) ١



(ب) نلاحظ أن عدد الولادات يتزايد مع الزمن.

(أ) ٢



(ب) يتناقص عدد الأميين مع الزمن.

(مثال ٢)

يبين الجدول التالي عدد الإصابات بشلل الأطفال (ص) بالآلاف في إحدى الدول خلال السنوات (س) من سنة ١٩٦٠ إلى سنة ١٩٦٧

الزمن (س)	١٩٦٠	١٩٦١	١٩٦٢	١٩٦٣	١٩٦٤	١٩٦٥	١٩٦٦	١٩٦٧
عدد الإصابات (بالآلاف)	١٧	١٥	١٤	١٢	١٠	٧	٥	٣

١ مثل بيانياً السلسلة الزمنية للبيانات الموجودة في الجدول أعلاه.



٢ نلاحظ أن عدد الإصابات بشلل الأطفال في تناقص مع الزمن.

حاول أن تحل

١ تهتم الدول بتنمية شعوبها من خلال القضاء على الأتية باستخدام الحاسوب وذلك بإعداد برامج بهذا الخصوص، والجدول التالي يوضح عدد الأميين بالمتات في محافظة ما من خلال الفترات الزمنية الموضحة:

الزمن (س)	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٢٠٠٩	٢٠١٠
عدد الأميين بالمتات (ص)	٣١	٢٧	٢٥	٢٥	٢٤	٢٥	٢٣	٢١	١٩

١ مثل بيانياً السلسلة الزمنية للبيانات الموجودة في الجدول أعلاه.

٢ ما نوع العلاقة بين عدد الأميين في استخدام الحاسوب والزمن؟

المجموعة ب تمارين تعزيرية

(١) يبين الجدول التالي تطور عدد سكان دولة ما بالملايين كل ٥ سنوات، من سنة ١٩٧٥ حتى سنة ٢٠١٠

الزمن (س)	١٩٧٥	١٩٨٠	١٩٨٥	١٩٩٠	٢٠٠٠	٢٠٠٥	٢٠١٠
تطور عدد السكان (ص)	١	١,٣٧	١,٧	٢,١	٢,١٩	٢,٢٤	٢,٧٣

(أ) مثل البيانات أعلاه بالسلسلة الزمنية.

(ب) بين الاتجاه العام للسلسلة الزمنية. هل عدد السكان إلى تزايد أم إلى تناقص؟

(٢) يبين الجدول التالي متغيرين: الزمن بالسنوات (س) واستهلاك الطاقة الكهربائية بالآلاف الكيلوواط/ساعة (ص) في إحدى الدول من سنة ٢٠٠٠ حتى ٢٠٠٨

الزمن (س)	٢٠٠٠	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨
كمية الاستهلاك (ص)	١٢	١٣,٥	١٤	١٦	١٧,٨	١٩	٢١,٥	٢٣	٢٥

(أ) مثل البيانات أعلاه بالسلسلة الزمنية.

(ب) بين الاتجاه العام للسلسلة الزمنية.

(٣) يبين الجدول التالي عدد التلاميذ المسجلين في مدرسة ابتدائية من سنة ١٩٩٩ حتى سنة ٢٠٠٥

الزمن (س)	١٩٩٩	٢٠٠٠	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥
عدد التلاميذ (ص)	٣٥٠	٣٨٠	٤٢٠	٤٥٠	٥٠٠	٥٦٠	٦٠٠

(أ) مثل البيانات أعلاه بالسلسلة الزمنية.

(ب) بين الاتجاه العام للسلسلة الزمنية.

٢-٣: عناصر السلسلة الزمنية

١ الأهداف

- يتعرّف الاتجاه العام.
- يتعرّف التغيرات الموسمية.
- يتعرّف التغيرات الدورية.
- يتعرّف التغيرات العرضية (الفجائية).

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

الاتجاه العام - التغيرات الموسمية - التغيرات الدورية - التغيرات العرضية.

٣ الأدوات والوسائل

حاسوب - جهاز إسقاط (Data Show).

٤ التمهيد

اطلب إلى الطلاب أن يرسموا المنحنى التاريخي للسلسلة الزمنية لكل من البيانات في الجدولين التاليين:

(أ)

س	١	٢	٣	٤	٥	٦
ص	١٠	٩	١٨	١١	١٠	١١

(ب)

س	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
ص	١٠٠	١٠٥	٥٠	١١٠	١٠٨	١٠٠	٥٥	١٠٣

٥ التدريس

تعرفت في الدرس السابق السلسلة الزمنية. والآن سندرس الاتجاه العام للسلسلة الزمنية وأنواع التغيرات فيها. الاتجاه العام للسلسلة الزمنية هو الاتجاه الذي تأخذه السلسلة لحدث ما خلال فترة طويلة من الزمن.

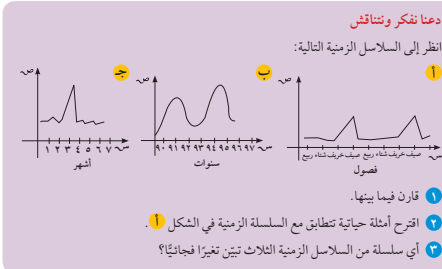
أما التغيرات فهي ٣ أنواع:

- التغيرات الموسمية: تحصل تقريباً كل سنة خلال فترة زمنية معيّنة، تكثر الأمثلة عن هذه التغيرات، منها: أعداد السوّاح، درجة الحرارة.

٢-٣

عناصر السلسلة الزمنية

Time Series Elements



سوف نتعلم

- الاتجاه العام.
- التغيرات الموسمية.
- التغيرات الدورية.
- التغيرات العرضية.

درسنا فيما سبق أن السلسلة الزمنية هي علاقة بين متغيرين أحدهما يسمى المتغير المستقل وهو الزمن (س)، والآخر يسمى المتغير التابع (ص)، ويوجد عدد من المؤثرات المشتركة في كل سلسلة زمنية ولكنها تؤثر بدرجات مختلفة من ظاهرة أخرى طبقاً لطبيعة الظاهرة محل الدراسة. والهدف من الدراسة الإحصائية للسلسلة الزمنية هو اكتشاف التغيرات التي تطرأ على قيم الظاهرة من زيادة أو نقصان في زمن محدد وتسمى هذه التغيرات التي تؤثر على السلسلة الزمنية سواء كانت متجمعة أم منفردة بعناصر السلسلة الزمنية.

عناصر السلسلة الزمنية هي:

- ١ المؤثرات الاتجاهية (الاتجاه العام للسلسلة الزمنية).
- ٢ التغيرات الموسمية.
- ٣ التغيرات الدورية.
- ٤ التغيرات العرضية (الفجائية).

وستناول هذه العناصر بشيء من التفصيل.

٦٩

عناصر السلسلة الزمنية

Time Series Elements

المجموعة ١ تمارين أساسية

(١) في دراسة لمتوسط درجات الصف العاشر على مدى ٩ سنوات، قام مدير مدرسة بتسجيل متوسط الدرجات في الجدول التالي حيث النهاية العظمى ١٠ درجات.

الزمن (س)	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٢٠٠٩	٢٠١٠
متوسط الدرجات (ص)	٦	٧	٨	٨,٥	٩	٨,٥	٨	٨,٥	٥

(أ) مثل بالخط المنكسر بيانات الجدول أعلاه.

(ب) ما نوع التغير الذي طرأ على درجات الطلاب؟

(٢) يبين الجدول التالي مبيعات أكياس الثلج في متجر ما خلال أشهر السنة.

الزمن (س)	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
المبيعات (ص)	٢	٣	٢	٢	٣	٦	٩	٥	٥	٥	٤	٣

(أ) مثل بالخط المنكسر بيانات الجدول أعلاه.

(ب) برأيك، ما سبب التغير في الشهر السابق؟

(٣) يبين الجدول التالي عدد المرضى الذين تم استئصالهم في إحدى المستشفيات خلال فصول سنتي ٢٠١٠ و ٢٠١١.

الزمن (س)	٢٠١٠	٢٠١٠	٢٠١٠	٢٠١٠	٢٠١٠	٢٠١٠	٢٠١١	٢٠١١	٢٠١١
عدد المرضى (ص)	٢٠٠	٣٢٠	٢١٠	٣٣٠	٢١٠	٣١٠	٣١٠	٢٠٠	٣٤٠

(أ) مثل بالخط المنكسر بيانات الجدول أعلاه.

(ب) ما نوع التغير الذي طرأ في كل خريف وشتاء؟ علّل إجابتك.

٣٢

- التغيرات الدورية: هي تغيرات على فترات طويلة تمتد لأكثر من سنة؛ مثلاً: فترة كساد أو ركود الأسواق، حركة الكواكب،...

- التغيرات العرضية (الفجائية): هي التغيرات الفجائية في السلسلة الزمنية تعود إلى الصدمة البحتة: الزلازل، كوارث طبيعية، النزاعات والحروب.

وستتعرف أيضًا في هذا الدرس التغيرات وكيفية تمييزها من خلال المنحنى التاريخي للسلسلة الزمنية.

في المثال (١)

نلاحظ عند رسم المنحنى التاريخي للسلسلة الزمنية تغيرًا مفاجئًا تمثل بانخفاض كبير جدًا للأرباح، وعند قراءة السنة نلاحظ أن السبب هو العدوان العراقي على الكويت سنة ١٩٩٠.

في المثال (٢)

نلاحظ التغير الدوري في المبيعات خلال الفترات الزمنية من ٤ أشهر. يبين الخط المنكسر تناقصًا في المبيعات خلال الأشهر من ٥ إلى ٨.

في المثال (٣)

كل فترة هي نصف سنة. كذلك نشهد تغيرًا دوريًا مع تزايد بطيء على مر الزمن.

٦ الربط

يبين المثالان (١)، (٢) كيف أن الأحداث الواقعية تتمثل في المنحنى التاريخي للسلسلة الزمنية.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

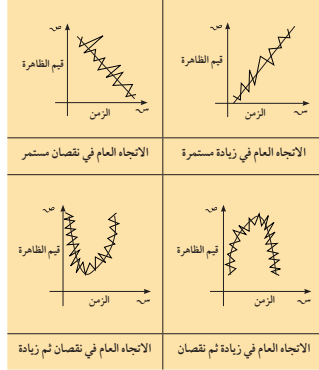
نبه الطلاب إلى عدم الخلط بين أنواع التغيرات، والانتباه دائمًا إلى المدة الزمنية التي تحصل خلالها هذه التغيرات، إذا كانت أقل من سنة فتكون موسمية، وأكثر من سنة فتكون دورية، وإذا كانت غير متوقعة فتكون فجائية.

Secular Trend

١- الاتجاه العام للسلسلة الزمنية

الاتجاه العام للسلسلة الزمنية هو الاتجاه الذي تأخذه السلسلة الزمنية لحدث ما خلال فترة طويلة من الزمن.

هناك العديد من الأمثلة التي تبيّن ذلك منها: عدد سكان بلد ما، الفئات العمرية للمجتمع، ...



Seasonal Variations

٢- التغيرات الموسمية

هي التغيرات التي تتكرر بانتظام خلال فترات زمنية أقل من سنة كأن تكون نصف سنوية أو ربع سنوية أو شهرية أو أسبوعية أو ...

والأمثلة على ذلك متعددة منها سقوط الأمطار بشكل موسمي، وكذلك مبيعات المشروبات الغازية تزداد خلال فصل الصيف، واستهلاك الكهرباء والماء يزداد أيضًا في فصل الصيف، وزيادة حركة المواصلات وازدحام الطرق في فترتي الصباح والظهير من كل يوم، والشكل التالي يبيّن التغيرات الموسمية لأعداد السواح بالآلاف للعامين ٢٠٠٦ م، ٢٠٠٧ م على الترتيب.

(٤) يبين الجدول التالي عدد المصابين بحوادث السير والذين أدخلوا إلى أحد المستشفيات خلال فصول السنة الأربعة في السنوات ٢٠٠١، ٢٠٠٢، ٢٠٠٣.

٢٠٠٣				٢٠٠٢				٢٠٠١				السنة
٤	٣	٢	١	٤	٣	٢	١	٤	٣	٢	١	الفصل
٢٤	١٣	١٣	١٠	١٨	٢٦	٢١	١٣	١٤	١٧	١٥	٢٧	عدد المصابين

(أ) مثل بيانيًا على شكل منحنى بيانات الجدول أعلاه.

(ب) ما الذي تلاحظه بالنسبة إلى الاتجاه العام للسلسلة؟

(٥) سجلت إحدى الشركات العالمية المبالغ التي حصلت عليها (بملايين الدنانير) من بيع ألعاب على الحاسوب للسنوات من ٢٠٠٠ إلى ٢٠٠٥ خلال الفصول الأربعة.

السنة	الشتاء	الربيع	الصيف	الخريف
٢٠٠٠	٦,٧	٤,٦	١٠	١٢,٧
٢٠٠١	٦,٥	٤,٦	٩,٨	١٣,٦
٢٠٠٢	٦,٩	٥	١٠,٤	١٤,١
٢٠٠٣	٧	٥,٥	١٠,٨	١٥
٢٠٠٤	٧,١	٥,٧	١١,١	١٤,٥
٢٠٠٥	٨	٦,٢	١١,٤	١٤,٩

(أ) مثل بيانيًا على شكل منحنى بيانات الجدول أعلاه.

(ب) هل الاتجاه العام للسلسلة في تزايد؟

المجموعة ب تمارين تعزيزية

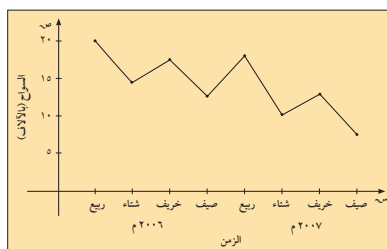
(١) يوضح الجدول التالي بيانات تطوّر طول الرجال في بلد معين المتغيران هما الزمن (س) ووحدة ١٠ سنوات، والمتغير (ص) الطول بالسنتيمتر.

الزمن (س)	١٩٥٠	١٩٦٠	١٩٧٠	١٩٨٠	١٩٩٠	٢٠٠٠	٢٠١٠
الطول بالسنتيمتر (ص)	١٧٠	١٧١	١٧١,٩	١٧٣	١٧٥	١٧٥,٥	١٧٨

(أ) مثل بالخط المنكسر بيانات الجدول أعلاه.

(ب) ما الاتجاه العام لطول الرجال في هذا البلد؟

تابع الطلاب وهم يحلون فقرات «حاول أن تحل» وأعطهم الوقت اللازم لذلك.

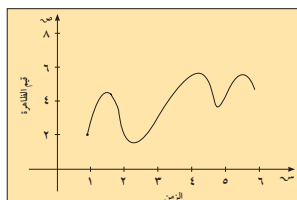


لاحظ أن الاتجاه العام للسلسلة الزمنية في نقصان.

Cyclic Variations

٣- التغيرات الدورية

هي تغيرات للسلسلة الزمنية على فترات طويلة المدى نسبياً أكثر من سنة، وتختلف التغيرات الدورية عن التغيرات الموسمية في أن التغيرات الموسمية تحدث في فترات زمنية أقل من سنة، ويمكن اعتبار التغيرات الدورية تحركاً لفترة أقل طولاً من فترة الاتجاه العام، ومن الأمثلة المهمة للتغيرات الدورية ما يحدث لشركة ما من فترة رخاء اقتصادي، ثم فترة ركود اقتصادي، ثم فترة كساد، ثم انفراج من الأزمة الاقتصادية كما هو موضح في الشكل.

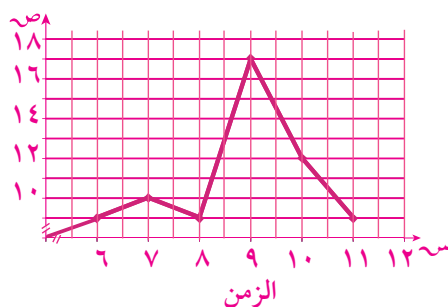


لاحظ أن الاتجاه العام للسلسلة في تزايد.

اختبار سريع

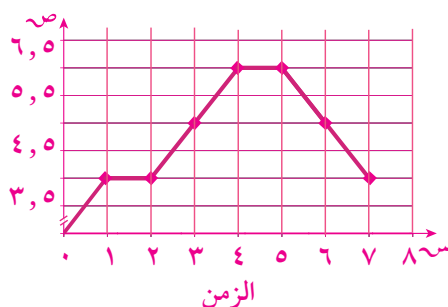
مثّل بيانياً على شكل خطّ منكسر بيانات كل من الجداول أدناه موضحاً طبيعة السلسلة الزمنية.

س	٦	٧	٨	٩	١٠	١١
ص	٩	١٠	٩	١٧	١٢	٩



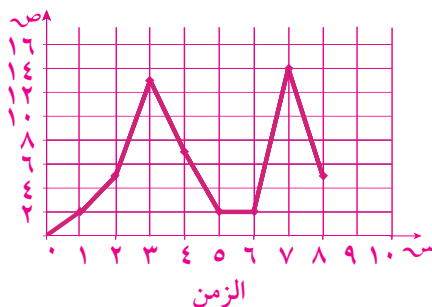
السلسلة تبين تغيراً عرضياً (فجائياً).

س	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
ص	٤	٤	٥	٦	٦	٥	٤



السلسلة تبين تغيراً دورياً.

س	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
ص	٢	٥	١٣	٧	٢	٢	١٤	٥



السلسلة تبين تغيرات موسمية.

«دعنا نفكر ونتناقش»

١ في السلسلة الزمنية (أ)، نلاحظ أن التغيرات تحصل

فقط خلال فصلي الربيع والصيف من كل سنة.

في السلسلة الزمنية (ب)، التغير يحصل على مدى

سنتين أو أكثر.

في السلسلة الزمنية (ج)، التغير يطرأ فقط على شهر

واحد ليعود بعد ذلك ويستقر.

بعض الأمثلة:

- التغير في درجات الحرارة.

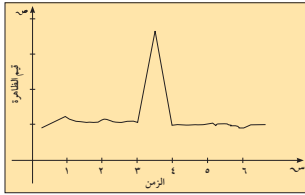
- عدد السواح في البلد.

- عدد الحجوزات الفندقية.

Irregular Variations

٤- التغيرات العرضية (الفجائية)

تأثر كثير من الظواهر من وقت إلى آخر بعوامل مختلفة تعود إلى تغيرات غير متوقعة أو إلى أمور يصعب التنبؤ بها، فمثلاً في المجالات التجارية تختلف قيم المبيعات من يوم إلى آخر متأثرة بطبيعة الطقس أو وجود حفلات زواج وما إلى ذلك من تغيرات. كما أن التغيرات تحدث نتيجة عوامل مفاجئة كالخروب، والفيضانات، والأوبئة، والزلازل. والتغيرات من هذا النوع تعرف بالتغيرات العرضية أو الفجائية، ويمكن توضيح التغيرات العرضية أو الفجائية في المنحنى التاريخي للسلسلة الزمنية بالشكل التالي:



مثال (١)

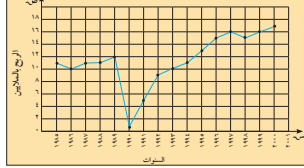
يمثل الجدول التالي أرباح إحدى الشركات الكبرى بملايين الدنانير من سنة ١٩٨٥ إلى سنة ٢٠٠٠

السنة (س)	٨٥	٨٦	٨٧	٨٨	٨٩	٩٠	٩١	٩٢	٩٣	٩٤	٩٥	٩٦	٩٧	٩٨	٩٩	٢٠٠٠
الربح بالملايين (ص)	١١	١٠	١١	١١	١٢	١	٥	٩	١٠	١١	١٣	١٥	١٦	١٦	١٦	١٧

١ مثل بيانياً على شكل خط منكسر بيانات الجدول أعلاه.

٢ ما نوع التغيرات التي طرأت على أرباح هذه الشركة؟ وما السبب الأبرز لهذه التغيرات؟

الحل:



٧٢

(٢) يبين الجدول التالي متوسط سعر أسهم شركة ما من سنة ٢٠٠٦ حتى سنة ٢٠١٢

الزمن (س)	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٢٠٠٩	٢٠١٠	٢٠١١	٢٠١٢
متوسط السعر (ص)	٤١٠	٤٠٣	٢٠٠	٢٣٠	٢٦٠	٢٨٠	٢٧٠

(أ) مثل بالخط المنكسر بيانات الجدول أعلاه.

(ب) ما نوع التغير الذي طرأ في الرسم البياني؟

(٣) يمثل الجدول البياني التالي سعر كيلو الشاي بالدنانير خلال مدة زمنية محددة بالأشهر.

الزمن (س)	١	٢	٣	٤	٥	٦
سعر الكيلو (ص)	١,٠١	١,٠٣	١,٠٤	٠,٩٩	٠,٩٥	٠,٩٥

(أ) مثل بالخط المنكسر بيانات الجدول أعلاه.

(ب) هل الاتجاه العام يظهر أن السعر إلى تزايد أم إلى تناقص؟

(٤) سجل صاحب إحدى المؤسسات الصغيرة عدد العمال المتغيين في السنوات ٢٠١١، ٢٠١٢، ٢٠١٣ خلال الفصول الأربعة.

السنة	٢٠١١				٢٠١٢				٢٠١٣			
الفصل	١	٢	٣	٤	١	٢	٣	٤	١	٢	٣	٤
عدد العمال المتغيين	٤	١٠	٧	٣	٥	١٢	٩	٤	٦	١٦	١٢	٤

(أ) مثل بيانياً على شكل منحنى بيانات الجدول أعلاه.

(ب) ما الذي تلاحظه بالنسبة إلى الاتجاه العام للسلسلة؟

(٥) يبين الجدول مبيعات إحدى شركات الإلكترونيات (بملايين الدنانير) خلال فصول السنوات من ٢٠٠٢ إلى ٢٠٠٥.

السنة	٢٠٠٢				٢٠٠٣				٢٠٠٤				٢٠٠٥			
الفصل	١	٢	٣	٤	١	٢	٣	٤	١	٢	٣	٤	١	٢	٣	٤
المبيعات	٥,٣	٤,١	٦,٨	٦,٧	٤,٨	٣,٨	٥,٦	٦,٨	٤,٣	٣,٨	٥,٧	٦	٥,٦	٤,٦	٦,٤	٥,٩

(أ) مثل بيانياً على شكل منحنى بيانات الجدول أعلاه.

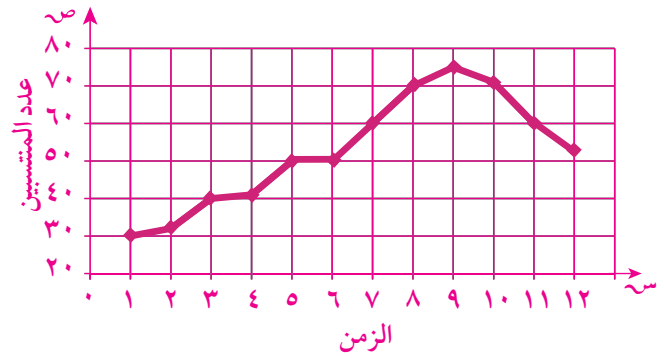
(ب) ما الذي تلاحظه بالنسبة إلى الاتجاه العام للسلسلة؟

٣٤

٣ السلسلة الزمنية (ج) تبين تغيرًا فجائيًا.

«حاول أن تحل»

١ (أ)



(ب) نلاحظ أن عدد المتسبين إلى ارتفاع من بداية السنة إلى أن يبلغ القيمة القصوى في شهر ٩، ٧٥ منتسبًا، ثم يتناقص في أشهر ١٠، ١١، ١٢.

(ج) في فصل الشتاء يكون عدد المتسبين أقل من أشهر الفصول الأخرى، لأن الناس يفضلون ممارسة النشاطات الرياضية في القاعات المقفلة في أشهر الربيع والصيف.

لدينا تغير مفاجئ في سنة ١٩٩٠ يمثل بانخفاض جلدي للأرباح. السبب الأبرز هو العدوان العراقي على الكويت.

حاول أن تحل

١ بين الجدول التالي عدد المتسبين إلى أحد الأندية الرياضية خلال أشهر سنة ٢٠٠٨

الأشهر (س)	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
عدد المتسبين (ص)	٣٠	٣٢	٤٠	٤١	٥٠	٦٠	٧٠	٧٥	٧١	٦٠	٥٥	٥٥

١ مثل بيانيًا على شكل خط منكسر بيانات الجدول أعلاه.

٢ ما الذي تلاحظه في الرسم البياني؟

٣ برأيك، ما سبب هذه التغيرات؟

مثال (٢)

بين الجدول التالي عدد البشوت المباعة في أحد المجمعات التجارية خلال فترة زمنية من أربعة أشهر وعلى امتداد أربع سنوات.

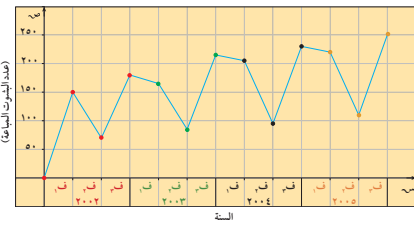


الفترة السنوات	الأولى	الثانية	الثالثة
٢٠٠٢	١٥٠	٧٠	١٨٠
٢٠٠٣	١٦٥	٨٥	٢١٥
٢٠٠٤	٢٠٥	٩٥	٢٣٠
٢٠٠٥	٢٢٠	١١٠	٢٥٠

١ مثل بيانيًا على شكل خط منكسر بيانات الجدول أعلاه.

٢ ما الذي تلاحظه؟

الحل:



١ تتكرر التغيرات بانتظام خلال الفترات الزمنية من ٤ أشهر. تزداد المبيعات في الفترتين الأولى والثالثة من كل سنة مع ازدياد خفيف خلال السنوات.

حاول أن تحل

٢ بين الجدول التالي مبيعات إحدى المؤسسات التجارية (بآلاف الدنانير) خلال كل فصل من فصول السنة الأربعة وعلى امتداد ثلاث سنوات.

السنة	الفصل الأول	الفصل الثاني	الفصل الثالث	الفصل الرابع
٢٠٠٣	٢٠٢	١٥٠	٥٠	١٠٠
٢٠٠٤	٢١٠	١٧٠	٦٠	١١٠
٢٠٠٥	٢٣٠	١٩٠	٧٥	١٣٠

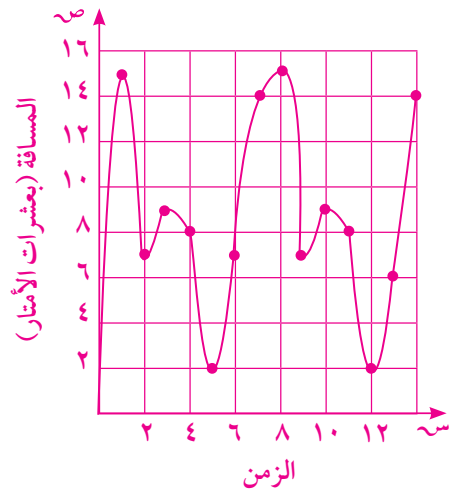
١ مثل بيانيًا على شكل خط منكسر بيانات الجدول.

٢ ما الذي تلاحظه؟



(ب) تتكرر التغيرات بانتظام خلال الفترات الزمنية من ٣ أشهر.

تزداد المبيعات في الفترتين الأولى والرابعة وتتناقص في الفترتين الثانية والثالثة مع ازدياد خفيف خلال السنوات.



(ب) الاتجاه العام للسلسلة في تزايد وتناقص مما يشكل نوع من الذبذبة.

مثال (٣)

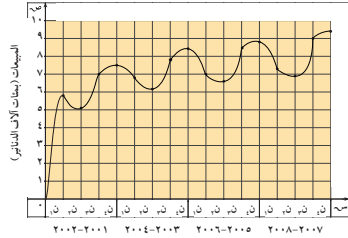
يبين الجدول التالي مبيعات إحدى الشركات (بمئات آلاف الدنانير) خلال فترة ثماني سنوات موزعة على كل نصف سنة كما في الجدول التالي:

نصف السنة	الصف الأول	الصف الثاني	الصف الثالث	الصف الرابع
٢٠٠٢ - ٢٠٠١	٥,٨	٥,١	٧,٠	٧,٥
٢٠٠٣ - ٢٠٠٢	٦,٨	٦,٢	٧,٨	٨,٤
٢٠٠٤ - ٢٠٠٣	٧,٠	٦,٦	٨,٥	٨,٨
٢٠٠٥ - ٢٠٠٤	٧,٣	٦,٩	٩,٠	٩,٤

١ ارسم بيانيًا على شكل منحني بيانات الجدول أعلاه.

٢ ما الذي تلاحظه بالنسبة إلى الاتجاه العام للسلسلة؟

الحل:



٣ الاتجاه العام للسلسلة في تزايد.

حاول أن تحل

٢٠٠٢ - ٢٠٠١ ٢٠٠٣ - ٢٠٠٢ ٢٠٠٤ - ٢٠٠٣ ٢٠٠٥ - ٢٠٠٤ ٢٠٠٦ - ٢٠٠٥ ٢٠٠٧ - ٢٠٠٦

٢٠٠٢ - ٢٠٠١ ٢٠٠٣ - ٢٠٠٢ ٢٠٠٤ - ٢٠٠٣ ٢٠٠٥ - ٢٠٠٤ ٢٠٠٦ - ٢٠٠٥ ٢٠٠٧ - ٢٠٠٦

٢٠٠٢ - ٢٠٠١ ٢٠٠٣ - ٢٠٠٢ ٢٠٠٤ - ٢٠٠٣ ٢٠٠٥ - ٢٠٠٤ ٢٠٠٦ - ٢٠٠٥ ٢٠٠٧ - ٢٠٠٦

الزمن	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤
المسافة (بعضرات الأمتار)	١٥	٩	٨	٢	١٤	٦	١٥	٧	٩	٨	٢	٦	١٤	١٤

١ ارسم بيانيًا على شكل منحني بيانات الجدول أعلاه.

٢ ما الذي تلاحظه بالنسبة إلى الاتجاه العام للسلسلة؟

٣-٣: تحليل السلاسل الزمنية

١ الأهداف

- يتعرّف معادلة الاتجاه العام للسلسلة الزمنية.
- يحسب مقدار الخطأ.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

معادلة الاتجاه العام للسلسلة الزمنية.

٣ الأدوات والوسائل

حاسوب - جهاز إسقاط (Data Show).

٤ التمهيد

اطلب إلى الطلاب أن يمثلوا البيانات على شكل خط منكسر، وأن يحسبوا معادلة الانحدار الخطي بعد التأكد من أن العلاقة بين المتغيرين خطية.

س	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١	٠
ص	٣٠	٢٩	٢٨	٣٠	٣٨	٢٤	٢٣	٢٢

٥ التدريس

معادلة الاتجاه العام للسلسلة الزمنية، هي نفسها معادلة الانحدار الخطي مع فرق بسيط أن المتغير س يتمثل بالزمن. نحول أولاً المتغير س، باعتبار أن الفترة الأولى تأخذ القيمة س = صفر، الفترة الثانية س = ١، وهكذا دواليك. ثم نطبق الخطوات نفسها التي استخدمناها عند حساب معادلة الانحدار الخطي: $\hat{S} = b + aS$

$$b = \frac{n(\sum S^2) - (\sum S)^2}{n(\sum S^2) - (\sum S)^2}$$

$$\bar{S} = \bar{S} - b \bar{S} \text{ حيث أن:}$$

$$\bar{S} = \frac{\sum S}{n}, \bar{S} = \frac{\sum S}{n}$$

٣-٣

تحليل السلاسل الزمنية

Analysing Time Series

دعنا نفكر ونتناقش

أخذت أوزان عشرة أطفال عند الولادة في أحد المستشفيات الغربية بهدف دراسة العلاقة بين وزن الطفل عند الولادة وعدد السجائر التي تدخنها الأم يومياً خلال أول شهرين من فترة الحمل.

عدد السجائر في اليوم (س)	١٥	١٠	٥	٨	٩	٧	١١	٦	٣	٢
الوزن بالجرام (ص)	١٤٤٧	١٥٠٠	١٧٠١	١٧١٢	١٨٥٧	٢٠٣١	٢١٤٥	٢٢١٤	٢٢١٠	٢٥٣٧

١ هل يوجد علاقة بين المتغيرين س، ص؟
(إرشاد: أوجد مُعامل الارتباط (r)).

٢ أوجد معادلة خط الانحدار.

٣ إذا كان وزن الطفل عند الولادة ١٩٥٠ جراماً، فما تقريباً عدد السجائر التي تدخنها الأم يومياً؟

Equation of Time Series

معادلة الاتجاه العام للسلسلة الزمنية

الاتجاه العام للسلسلة الزمنية هو أهم عنصر من عناصر السلسلة، لأنه يساعد الباحثين وفوي الاختصاص على تقدير أو توقع قيمة مستقبلية لزمين قادم. تعلمنا سابقاً كيفية إيجاد معادلة خط الانحدار.

وفي هذا الدرس، سوف نستخدم الطريقة ذاتها لإيجاد معادلة الاتجاه العام للسلسلة الزمنية مع فرق بسيط وهو استخدام المتغير (س) لتمثيل الزمن، بفرض أن العلاقة بين الزمن (س) وقيم الظاهرة (ص) هي علاقة خطية.

تمارين

تحليل السلاسل الزمنية

Analysing Time Series

المجموعة ١ تمارين أساسية

(١) يوضح الجدول التالي متغيرين: (س) هو الزمن بالسنوات و(ص) معدل دخل الفرد السنوي بالآلاف الدنانير.

الزمن بالسنوات (س)	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٢٠٠٩	٢٠١٠	٢٠١١
معدل دخل الفرد السنوي (ص)	١٣	١٣,٥	١٠	٩	١٠	١١

(أ) أوجد معادلة الاتجاه العام لمعدل دخل الفرد السنوي.

(ب) قتر قيمة ص سنة ٢٠١٦

(ج) احسب مقدار الخطأ لقيمة ص سنة ٢٠٠٩ وسنة ٢٠١٠

(٢) يبين الجدول التالي مستوى السكر في الدم (ص) لشخص ما في أعمار مختلفة (س).

العمر (س)	٣٥	٤٠	٤٥	٥٠	٥٥	٦٠
مستوى السكر في الدم (ص)	٥	٦	٧	٨	١٠	١٢

(أ) أوجد معادلة الاتجاه العام لمستوى السكر في الدم.

(ب) قتر مستوى السكر الموجود في الدم إذا كان عمر الشخص ٧٠ عاماً.

(ج) احسب مقدار الخطأ عند س = ٤٥

(٣) يبين الجدول التالي تطوّر عدد العمال في إحدى المؤسسات خلال السنوات من ٢٠٠٠ إلى ٢٠٠٥

السنة	٢٠٠٠	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥
عدد العمال	٤٥	٥١	٥٥	٦٢	٧٠	٧٣

(أ) أوجد معادلة الاتجاه العام لعدد العمال في المؤسسة.

(ب) قتر عدد العمال عام ٢٠٠٨

(ج) احسب مقدار الخطأ سنة ٢٠٠٤

عند إيجاد المعادلة كاملة، يمكن التقدير بقيم مستقبلية على ألا تكون بعيدة جدًا عن طرفي فترة الزمن.

مقدار الخطأ =

|القيمة الجدولية - القيمة التي تحقق معادلة الاتجاه العام للسلسلة الزمنية|

ونعبر عنه بـ: $|صس - صس|$

في المثال (١)

يبيّن الجدول عدد الخبراء الأجانب في دولة ما من سنة ٢٠٠٧ حتى سنة ٢٠١٤.

لإيجاد معادلة الاتجاه العام للسلسلة الزمنية، نبدأ بتحويل الزمن: ٢٠٠٧ إلى صفر، ٢٠٠٨ إلى ١، وهكذا دواليك.

الجدول في الإجابة هو طريقة لتنظيم العمل وتسهيل الحسابات.

في (ب)، سنة ٢٠١٧ هي عملياً $س = ١٠$ ، لذا ففي المعادلة نعوض $س$ بـ ١٠ ونحسب عدد العمال المتوقع سنة ٢٠١٧.

في المثالين (٢)، (٣)

تطبيق مباشر لإيجاد معادلة الاتجاه العام وتقدير قيم مستقبلية وحساب مقدار الخطأ.

الخطوات المتبعة لإيجاد معادلة الاتجاه العام للسلسلة الزمنية

١. نفرض قيم الزمن (س) باعتباره الفترة الأولى (سنة الأساس) ونعبر عنه بالعدد صفر، الفترة الثانية بالعدد ١، ثم الفترة الثالثة بالعدد ٢، وهكذا ...
٢. نعين قيم الثوابت $ص$ ، $ص$ ، $ص$ ب كما سبق شرحه حيث:

$$ص = \frac{ن(صس) - (صس)(ص)}{ن(صس) - (صس)^2}$$

$$ص = \frac{صس - ص}{ص - ص}$$

$$ص = \frac{صس - ص}{ص - ص}$$
٣. معادلة الاتجاه العام تكتب على الشكل التالي: $صس + ص$
٤. يمكننا التنبؤ بقيمة $ص$ إذا علمت قيمة $س$.
٥. نحسب مقدار الخطأ:

مقدار الخطأ = |القيمة الجدولية - القيمة التي تحقق معادلة الاتجاه العام للسلسلة الزمنية|
 ونعبر عنه بـ: $|صس - صس|$

مثال (١)

يبيّن الجدول التالي عدد الخبراء الأجانب بالآلاف في دولة ما، من سنة ٢٠٠٧ حتى سنة ٢٠١٤

السنوات (س)	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٢٠٠٩	٢٠١٠	٢٠١١	٢٠١٢	٢٠١٣	٢٠١٤
عدد الخبراء بالآلاف (صس)	٠,٥	٠,٧	٠,٨٣	١,٢	١,٥	١,٨	١,٨	١,٣

١. أوجد معادلة الاتجاه العام لعدد الخبراء الأجانب في الفترة المذكورة أعلاه.
٢. قدر كم سيصبح عدد الخبراء سنة ٢٠١٧
٣. احسب مقدار الخطأ في عدد الخبراء سنة ٢٠١٢

الحل:

١. نعتبر سنة ٢٠٠٧ هي السنة الأساس ونعبر عنها بالعدد صفر، وسنة ٢٠٠٨ بالعدد ١ وهكذا دواليك حتى سنة ٢٠١٤ فنعتبر عنها بالعدد ٧

٧٨

السنوات	س	ص	صس	س
٢٠٠٧	٠	٠,٥	٠	٠
٢٠٠٨	١	٠,٧	٠,٧	١
٢٠٠٩	٢	٠,٨٣	١,٦٦	٤
٢٠١٠	٣	١,٢	٣,٦	٩
٢٠١١	٤	١,٥	٦	١٦
٢٠١٢	٥	١,٨	٩	٢٥
٢٠١٣	٦	١,٣	٧,٨	٣٦
٢٠١٤	٧	١	٧	٤٩
المجموع	٢٨ = صس	٨,٨٣ = ص	٣٥,٧٦ = صس	١٤٠ = صس

$$ص = \frac{ن(صس) - (صس)(ص)}{ن(صس) - (صس)^2}$$

$$ص = \frac{(٨,٨٣)(٢٨) - (٣٥,٧٦)٨}{٧٨٤ - (١٤٠)٨}$$

$$ص = \frac{٠,١١٥٦}{٠,١١٥٦}$$

$$ص = \frac{صس - ص}{ص - ص}$$

$$ص = \frac{١,٠٣٨ - ٠,١١٥٦}{١ - ٠} = ٠,٩٢٢$$

$$ص = ٠,٩٢٢ + ٠,١١٥٦ = ١,٠٣٨$$

$$ص = ١,٠٣٨ + ٠,٩٢٢ = ١,٩٦٠$$

$$ص = ١,٩٦٠ + ٠,٩٢٢ = ٢,٨٨٢$$

$$ص = ٢,٨٨٢ + ٠,٩٢٢ = ٣,٨٠٤$$

$$ص = ٣,٨٠٤ + ٠,٩٢٢ = ٤,٧٢٦$$

$$ص = ٤,٧٢٦ + ٠,٩٢٢ = ٥,٦٤٨$$

$$ص = ٥,٦٤٨ + ٠,٩٢٢ = ٦,٥٧٠$$

$$ص = ٦,٥٧٠ + ٠,٩٢٢ = ٧,٤٩٢$$

$$ص = ٧,٤٩٢ + ٠,٩٢٢ = ٨,٤١٤$$

$$ص = ٨,٤١٤ + ٠,٩٢٢ = ٩,٣٣٦$$

٧٩

٦ الربط

توضّح الأمثلة (١)، (٢)، (٣) أهمية معادلة الاتجاه العام للسلسلة الزمنية في حياتنا اليومية.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

خطأ شائع جدًّا، غالبًا ما يرتكبه الطلاب لذا يجب تنبيههم إلى ضرورة البدء بصفر عند تحويل المتغيّر الذي يمثل الزمن. ثم أسألهم: إذا كانت سنة ١٩٩٩ هي س = صفر، فأَي سنة يعبر عنها بـ س = ١١، س = ٥.

٨ التقييم

تابع الطلاب وهم يحلون فقرات «حاول أن تحل» وأعطهم الوقت اللازم لذلك.

اختبار سريع

١ إذا كانت سنة س = ٢٠٠٢ تمثل بـ س = ٢، فكيف تمثل سنة: س = ٢٠٠٠؟ س = ٢٠٠٦؟ س = ٢٠٠٩؟

س = ٢٠٠٠ تمثل بـ س = صفر،

س = ٢٠٠٦ تمثل بـ س = ٦،

س = ٢٠٠٩ تمثل بـ س = ٩

٢ إذا كانت المعادلة هي: س = ٣، ١ س - ٢، ٠، فقدّر س سنة ٢٠٠٥.

س = ٢٠٠٥ تمثل بـ س = ٥

نعوّض بالمعادلة س = ٥

ص = ٢٠٠٥ = ٣ - (٥) ١، ٢ - ٠، ٤٥ = ٠،

ص = ب + س

ص = ٢٠١٢ = ٥ × ٠، ١٥٦ + ٠، ٦٩٩٢

مقدار الخطأ = |١، ٢٧٧٢ - ١، ٨| = ٥٢٢٨

أي أن مقدار الخطأ في عدد مستخدمي شبكة الإنترنت في دولة ما من سنة ٢٠٠٠ حتى سنة ٢٠٠٨

حاول أن تحل

١ بيّن الجدول التالي عدد مستخدمي شبكة الإنترنت بالآلاف في دولة ما من سنة ٢٠٠٠ حتى سنة ٢٠٠٨

السنوات (س)	٢٠٠٠	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨
عدد المستخدمين (بالآلاف) (ص)	١٠٠	١٥٠	٢٠٠	٢٦٧	٣٣٣	٧٠٠	٨٠٠	٩٠٠	١٠٠٠

١ أوجد معادلة الاتجاه العام.

٢ قدّر عدد مستخدمي شبكة الإنترنت سنة ٢٠١٢

٣ أوجد مقدار الخطأ سنة ٢٠٠٦

مثال (٢)

بيّن الجدول التالي التكلفة لإنتاج إحدى السلع بالآلاف دينار كويتي من سنة ٢٠٠٦ حتى سنة ٢٠١٣

السنة (س)	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٢٠٠٩	٢٠١٠	٢٠١١	٢٠١٢	٢٠١٣
التكلفة (بالآلاف دينار) (ص)	١٥	١٦	١٨	١٨	٢٠	٢٢	٢٤	٢٨

١ أوجد معادلة الاتجاه العام لتكلفة إنتاج السلعة.

٢ قدّر قيمة التكلفة عام ٢٠١٧

٣ احسب مقدار الخطأ سنة ٢٠١١

المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) بيّن الجدول التالي متغيّرين، الزمن (س) بالسنوات و(ص) كمية الدجاج المجمّد في دولة الكويت (بالمليون كيلوجرام).

الزمن (س)	١٩٩٧	١٩٩٨	١٩٩٩	٢٠٠٠	٢٠٠١	٢٠٠٢
كمية الدجاج (بالمليون) (ص)	٢٤	٢٧	٣٠	٣٣	٤٢	٣٧

(أ) أوجد معادلة الاتجاه العام للدجاج المجمّد في الكويت.

(ب) قدّر كم ستصبح قيمة ص سنة ٢٠٠٥

(ج) احسب مقدار الخطأ لسنة ٢٠٠٠

(٢) من الجدول التالي،

الزمن (س)	٢٠٠٠	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥
ص	٨،٧	٥،٥	٥،٦٥	٥،٨	٥،٣	٤،٢

(أ) أوجد معادلة الاتجاه العام

(ب) قدّر قيمة ص سنة ٢٠٠٩

(ج) احسب مقدار الخطأ لسنة ٢٠٠١

٩ إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

(أ) $r = -0,7056$

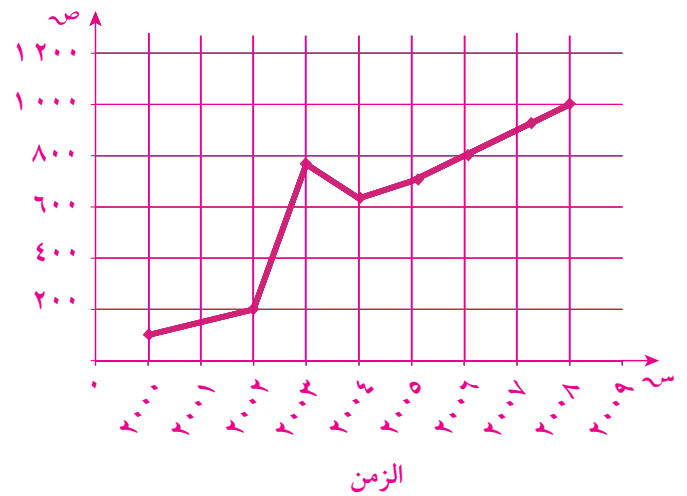
يوجد ارتباط عكسي (سالب) قوي.

(ب) $\hat{ص} = 2418,5571 - 23,5733 \times س$

(ج) $س \approx 7,3703$ تدخن الأم يومياً حوالي ٧ سجائر.

«حاول أن تحل»

(أ) ١



الحل:

١ نعتبر سنة ٢٠٠٦ هي السنة الأساس.

السنوات	س	ص	س	ص
٢٠٠٦	٠	١٥	٠	٠
٢٠٠٧	١	١٦	١٦	١
٢٠٠٨	٢	١٨	٣٦	٤
٢٠٠٩	٣	١٨	٥٤	٩
٢٠١٠	٤	٢٠	٨٠	١٦
٢٠١١	٥	٢٢	١١٠	٢٥
٢٠١٢	٦	٢٤	١٤٤	٣٦
٢٠١٣	٧	٢٨	١٩٦	٤٩
المجموع	س = ٢٨	ص = ١٦١	س = ٦٣٦	ص = ١٤٠

$ن = ٨ = س = \frac{س}{ن} = \frac{٢٨}{٨} = ٣,٥$ $ص = \frac{ص}{ن} = \frac{١٦١}{٨} = ٢٠,١٢٥$

$ب = \frac{ن(ص - (س \times ص))}{ن(س) - (س \times س)} = \frac{٨(١٦١ - ٦٣٦ \times ٣,٥)}{٧(٢٨) - ١٤٠ \times ٨}$

$١,٧٢٦٢ \approx \frac{٥٨٠}{٣٣٦}$

$١٤,٠٨٣٣ = ٣,٥ \times (١,٧٢٦٢) - ٢٠,١٢٥ = ب - ص$

∴ معادلة الاتجاه العام هي:

$ص = ١,٧٢٦٢ + ١٤,٠٨٣٣ \times س$

١١ قيمة التكلفة سنة ٢٠١٧ عند س = ١١

∴ $ص_{٢٠١٧} = ١١ \times ١,٧٢٦٢ + ١٤,٠٨٣٣ = ٣٣,٠٧١٥$

$٣٣,٠٧١٥ =$ ألف دينار

سنة ٢٠١١ $ص = ٢٢$

$٥ \times ١,٧٢٦٢ + ١٤,٠٨٣٣ = ص_{٢٠١١}$

$٢٢,٧١٤٣ =$

٨١

∴ مقدار الخطأ = $|ص_{٢٠١١} - ص_{٢٠١١}|$

$|٢٢,٧١٤٣ - ٢٢| =$

$٠,٧١٤٣ =$

∴ مقدار الخطأ = ٧١٤,٣ ديناراً

حاول أن تحل

٢ الجدول التالي يبين قيم ظاهرة معينة خلال ٧ سنوات.

السنة	١٩٩٨	١٩٩٩	٢٠٠٠	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤
قيم الظاهرة	٣	٥	٨	١٠	١٤	١٦	١٨

١ أوجد معادلة الاتجاه العام لقيم الظاهرة.

٢ تنبأ بالقيمة المتوقعة للظاهرة سنة ٢٠٠٧

٣ احسب مقدار الخطأ سنة ٢٠٠٣

مثال (٣)

الجدول التالي يبين إنتاج إحدى شركات السيارات بالآلاف سيارة من سنة ٢٠٠٧ حتى سنة ٢٠١٣

السنة (س)	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٢٠٠٩	٢٠١٠	٢٠١١	٢٠١٢	٢٠١٣
عدد السيارات بالآلاف (ص)	٤٠	٦٠	٧٠	٩٠	١٠٠	١٥٠	١٨٠

١ أوجد معادلة الاتجاه العام للسلسلة الزمنية

٢ قُدِّر عدد السيارات المنتجة سنة ٢٠١٦

٣ احسب مقدار الخطأ سنة ٢٠١١

٨٢

الاتجاه العام في زيادة مستمرة.

$$\hat{ص} = ٣٨٣٣ س + ١١٧,٨٠٠١$$

(ب) سنة ٢٠١٢ تمثل بـ س = ١٢

$$\text{إذا } \hat{ص}_{٢٠١٢} = ١٥١٤,٣٩٩٧ = ١٥١٤$$

(ج) $\hat{ص}_{٢٠٠٦} = ٨١٦,١٤$

$$\text{مقدار الخطأ} = |ص_{٢٠٠٦} - \hat{ص}_{٢٠٠٦}|$$

$$= ١٦,٠٩٩٩ \approx ١٦$$

$$\text{(أ) } \hat{ص} = ٢,٧٥٠١ + ٢,٦٠٧١ س$$

$$\text{(ب) } ٢٦,٢١٤$$

$$\text{(ج) } ٠,٢١٤٤$$

$$\text{(أ) } \hat{ص} = ٨٣,٣٩٢٨ + ٨,٦٧٨٦ س$$

$$\text{(ب) } ١٦١,٥٠٠٢$$

$$\text{(ج) } ٠,٨٩٢٨$$

الحل:

١ نعتبر سنة ٢٠٠٧ هي السنة الأساس.

السنوات	س	ص	س ص	س
٢٠٠٧	٠	٤٠	٠	٠
٢٠٠٨	١	٦٠	٦٠	١
٢٠٠٩	٢	٧٠	١٤٠	٤
٢٠١٠	٣	٩٠	٢٧٠	٩
٢٠١١	٤	١٠٠	٤٠٠	١٦
٢٠١٢	٥	١٥٠	٧٥٠	٢٥
٢٠١٣	٦	١٨٠	١٠٨٠	٣٦
المجموع	٢١	٦٩٠	٢٧٠٠	٩١

$$ن = ٧,٠٧ = \frac{\sum (س \cdot ص)}{\sum س} = \frac{٢١ \cdot ٦٩٠}{٩١} = ١٦,٠٧١٤$$

$$ب = \frac{\sum (ص - ن) \cdot س}{\sum (ص - ن)} = \frac{٦٩٠ \times ٢١ - ٢٧٠٠ \times ٧}{٢١(٢١) - ٩١ \times ٧}$$

$$٢٢,٥ =$$

$$\therefore \hat{ص} = ن + ب \cdot س = ١٦,٠٧١٤ + ٣ \times ٢٢,٥ = ٣١,٠٧١٤$$

$$\therefore \text{معادلة الاتجاه العام هي: } \hat{ص} = ب + ن$$

$$\hat{ص} = ٣١,٠٧١٤ + ٢٢,٥ س$$

$$\text{تقدير عدد السيارات المنتجة سنة ٢٠١٦ أي عند س = ٩}$$

$$\hat{ص} = ٣١,٠٧١٤ + ٩ \times ٢٢,٥ = ٢٣٣,٥٧١٤$$

$$\text{تقدير عدد السيارات المنتجة سنة ٢٠١٦ هو حوالي ٢٣٤ ألف سيارة.}$$

$$\hat{ص}_{٢٠١١} = ١٠٠,١٠٠ = \frac{٤ \times ٢٢,٥ + ٣١,٠٧١٤}{٢٠١١}$$

$$١٢١,٠٧١٤ =$$

$$\text{مقدار الخطأ} = |ص_{٢٠١١} - \hat{ص}_{٢٠١١}| = |١٢١,٠٧١٤ - ١٠٠| = ٢١,٠٧١٤$$

$$٢١,٠٧١٤ =$$

$$\text{حوالي ٢١ ألف سيارة.}$$

حاول أن تحل

٢ الجدول التالي يوضح مبيعات إحدى الشركات بالآلاف دينار في الفترة من سنة ٢٠٠١ وحتى سنة ٢٠٠٧

السنة (س)	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٧
المبيعات بالآلاف (ص)	٨٧	٩١	٩٦	١٠٩	١١٩	١٢٩	١٣٥

أوجد:

١ معادلة خط الاتجاه العام للمبيعات خلال الفترة المذكورة.

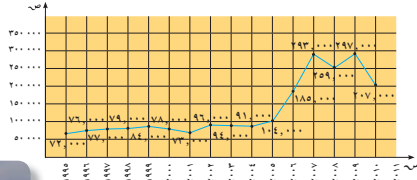
٢ القيمة المتوقعة للمبيعات عام ٢٠١٠

٣ مقدار الخطأ سنة ٢٠٠٥

المرشد لحل المسائل

المرشد لحل المسائل

يبيّن الخط المنكسر التالي أعداد السواح الذين قاموا بزيارة دولة الكويت من سنة ١٩٩٥ حتى سنة ٢٠١٠



- ١ كَوْنْ جَدُولًا مُسْتَخْدِمًا الْمَعْطِيَاتِ مِنَ الرَّسْمِ الْبَيَانِيِّ لِلخَطِّ الْمُنْكَسَرِ.
- ٢ أَوْجِدْ مَعَادِلَةَ الْإِتْجَاهِ الْعَامِ.
- ٣ قَدِّرْ عِدْدَ السَّوَّاحِ لِسَنَةِ ٢٠١٥
- ٤ أَوْجِدْ مَقْدَارَ الْخَطَأِ لِسَنَةِ ٢٠١٠

الحل:

يَهْتَمُّ الْمَعْنِيُّونَ بِتَقْدِيرَاتِ عِدْدِ السَّوَّاحِ لِلْأَعْوَامِ الْقَادِمَةِ، وَيُجَادِدُ مَقْدَارَ الْخَطَأِ لِسَنَةِ ٢٠١٠
١ نَسْتَخْرِجُ الْمَعْلُومَاتِ مِنَ الْخَطِّ الْمُنْكَسَرِ وَنَضْعُهَا فِي جَدُولٍ عَلَى الشَّكْلِ التَّالِي:

السنوات	س	ص	س	ص
١٩٩٥	٠	٧٢٠٠٠	٠	٠
١٩٩٦	١	٧٦٠٠٠	١	٧٦٠٠٠
...	...	...	...	...
٢٠١٠	١٥	٢٠٧٠٠٠	٢٢٥	٣١٠٥٠٠
كس = ١٢٠	كس = ٢١٦٥٠٠٠	كس = ٢١٠٩٥٠٠٠	كس = ١٢٤٠	

معادلة الاتجاه العام:

$$\text{ب} = ٢٨١٦١,٨ \quad \text{ض} = ٢٨٦٠٠,٨ + ٢٨١٦١,٨ \times ١٤$$

إجابة «مسألة إضافية»

(أ)

الزمن	س	ص	س	ص
ربع ٤	٠	٢٥٠٠٠	٠	٠
ربع ١	١	٣٥٠٠٠	١	٣٥٠٠٠
ربع ٢	٢	٧٥٠٠٠	٤	١٥٠٠٠٠
ربع ٣	٣	١٠٠٠٠٠	٩	٣٠٠٠٠٠
ربع ٤	٤	١٧٥٠٠٠	١٦	٧٠٠٠٠٠
ربع ١	٥	٢٧٥٠٠٠	٢٥	١٣٧٥٠٠٠
ربع ٢	٦	٣٧٥٠٠٠	٣٦	٢٢٥٠٠٠٠
ربع ٣	٧	٥٠٠٠٠٠	٤٩	٣٥٠٠٠٠٠
ربع ٤	٨	٦٧٥٠٠٠	٦٤	٥٤٠٠٠٠٠
	كس = ٣٦	كس = ٢٢٣٥٠٠٠	كس = ١٣٧١٠٠٠٠	كس = ٢٠٤

$$\text{ب) ض} = ٧٩٥٠٠ \text{ س} - ٦٩٦٦٧$$

$$\text{س} = \text{ربع} (٢٠١٥) \text{ تمثّل بـ س} = ٢٤$$

$$\text{س ربع} (٢٠١٥) = ١٨٣٨٣٣٣$$

$$\text{ج) ض ربع} (٢٠١٠) = ٢٤٨٣٣٣٣$$

$$\text{مقدار الخطأ} = |٢٤٨٣٣٣٣ - ١٧٥٠٠٠|$$

$$= ٧٣٣٣٣$$

٢٠١٥ س = ٢٠ ، بالتعويض بـ «ض»:

$$\text{ض} = ٣١٣٨٩٧ \approx ٣١٤٠٠٠$$

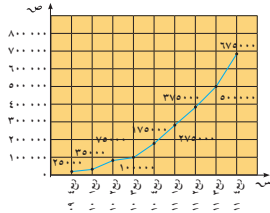
نوجد مقدار الخطأ لِسَنَةِ ٢٠١٠:

$$\text{مقدار الخطأ} = |ص - س| = ٣٥٤٦٤,٨ - ٣٥٤٦٤ = ٣٥٤٦٤,٨$$

$$\text{مقدار الخطأ تقريباً } ٣٥٤٦٤ \text{ سائحاً.}$$

مسألة إضافية

يمثّل الخط المنكسر التالي تطور عدد تطبيقات الهواتف الذكية التي تعمل بحسب أحد أنظمة التشغيل وذلك خلال الأرباع التالية من الربع الرابع من سنة ٢٠٠٩ إلى الربع الرابع من سنة ٢٠١١



يَهْتَمُّ الْمَعْنِيُّونَ بِمَعْرِفَةِ تَطَوُّرِ أَعْدَادِ التَّطبيقاتِ فِي الرَّبْعِ الرَّابِعِ مِنْ سَنَةِ ٢٠١٥ لِمَا يَتَرْتَبِ عَلَى ذَلِكَ مِنْ ارْتِفَاعٍ فِي الْمَدَاخِلِ مِنْ جَرَاءِ تَحْمِيلِ هَذِهِ التَّطبيقاتِ فِي الْهَوَاتِفِ الذِّكِيَّةِ.

١ كَوْنْ جَدُولًا كَمَا فِي «المرشد لحل المسائل» مُسْتَخْرِجًا الْمَعْطِيَاتِ مِنَ الرَّسْمِ الْبَيَانِيِّ لِلخَطِّ الْمُنْكَسَرِ.

٢ مَا هُوَ الْعِدْدُ الْمَتَوَقَّعُ لِلتَّطبيقاتِ فِي الرَّبْعِ الرَّابِعِ مِنْ سَنَةِ ٢٠١٥؟

٣ مَا هُوَ مَقْدَارُ الْخَطَأِ فِي الرَّبْعِ الرَّابِعِ مِنْ سَنَةِ ٢٠١٠؟

بنود الصح والخطأ

في البنود (١-١٥) عبارات، طلي (١) إذا كانت العبارة صحيحة، (ب) إذا كانت العبارة خاطئة.

استخدم الجدول التالي للإجابة عن التمارين (١-١١).

الزمن (س)	١	٢	٣	٤	٥
ص	١٣٥	١٤٣	١٤٠	١٥٤	١٥٢

- (١) (ب)
(٢) (ب)
(٣) (ب)
(٤) (ب)
(٥) (ب)
(٦) (ب)
(٧) (ب)
(٨) (ب)
(٩) (ب)
(١٠) (ب)
(١١) (ب)
(١٢) (ب)
(١٣) (ب)
(١٤) (ب)
(١٥) (ب)

$$(١) \quad ١٥ = \bar{ن}$$

$$(٢) \quad ٥١ = \bar{س}$$

$$(٣) \quad ٧٢٤ = \bar{ص}$$

$$(٤) \quad ٣ = \bar{س}$$

$$(٥) \quad ١٤٥ = \bar{ص}$$

$$(٦) \quad ٥٥ = \bar{س}$$

$$(٧) \quad ٢٢٧١ = \bar{ص}$$

$$(٨) \quad ٤,٥ = \bar{ب}$$

$$(٩) \quad ١٣١,٣ = \bar{ب}$$

$$(١٠) \quad \text{معادلة الاتجاه العام هي: } \bar{ص} = ٤,٥ + ١٣١,٣$$

$$(١١) \quad \text{تقدير ص عندما س = ٦ هو } ١٨٥$$

$$(١٢) \quad \text{لا تتغير السلسلة الزمنية بالمتغيرات الفجائية.}$$

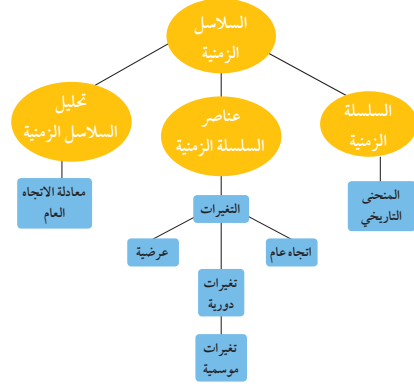
$$(١٣) \quad \text{السلسلة الزمنية هي تتبع لقيم ظاهرة معينة عبر الزمن.}$$

$$(١٤) \quad \text{تأثير السلسلة الزمنية بمتغير واحد فقط هو التغيرات الدورية.}$$

$$(١٥) \quad \text{التغيرات الدورية فترتها تكون أكبر من سنة.}$$

٣٨

مخطط تنظيمي للوحدة الثالثة



ملخص

- السلسلة الزمنية هي مجموعة قيم تأخذها ظاهرة ما في فترات زمنية مختلفة.
- المنحنى التاريخي للسلسلة الزمنية هو الخط المنكسر الذي يربط النقاط الممثلة للبيانات.
- الاتجاه العام هو الاتجاه الذي تأخذه السلسلة على مدة طويلة من الزمن.
- الاتجاه العام للسلسلة يمكن أن يكون تصاعدياً أو تنازلياً أو كليهما معاً.
- التغيرات الموسمية هي تغيرات تتكرر بانتظام خلال فترات معينة من الزمن تكون مدتها أقل من سنة.
- التغيرات الدورية هي تغيرات على فترة طويلة المدى أي أكثر من سنة.
- التغيرات العرضية هي تغيرات فجائية تعود إلى الصدفة أو إلى أمور يصعب تكهنها.
- معادلة الاتجاه العام تستخدم في عملية التكهّن بقيم الظاهرة لفترات زمنية مستقبلية، وتعطى بالقاعدة:

$$\text{حيث: } \bar{ب} = \frac{\bar{ن}(\bar{س} - ١) - (\bar{س} - ١)(\bar{ص})}{\bar{ن}(\bar{س} - ١) - (\bar{س} - ١)(\bar{ص})}$$

٨٧

استخدم الجدول التالي للإجابة عن التمارين (١٦-٢٠).

أرقام الفصل (س)	١	٢	٣	٤	٥
المبيعات (ص)	١٥	٢٠	١٢	١٣	٤٠
بالآلاف الدنانير					

$$(١٦) \quad \bar{س} = ٣ \quad (١) \quad \bar{ب} = ٥ \quad (ب) \quad \bar{ص} = ١٥ \quad (ج) \quad \bar{ن} = ٥ \quad (د) \quad \text{ليس مما سبق}$$

$$(١٧) \quad \bar{س} = ٢٥ \quad (١) \quad \bar{ب} = ٢٠ \quad (ب) \quad \bar{ص} = ١٠٠ \quad (ج) \quad \bar{ن} = ٥ \quad (د) \quad \text{ليس مما سبق}$$

$$(١٨) \quad \bar{ب} = ٤,٣ \quad (١) \quad \bar{ب} = ٣,٤ \quad (ب) \quad \bar{ص} = ٤,٣ \quad (ج) \quad \bar{ن} = ٣,٤ \quad (د)$$

$$(١٩) \quad \bar{ب} = ٣ \quad (١) \quad \bar{ب} = ٣ \quad (ب) \quad \bar{ص} = ١,٥ \quad (ج) \quad \bar{ن} = ٧,١ \quad (د)$$

$$(٢٠) \quad \text{معادلة الاتجاه العام هي:}$$

$$\bar{ب} = ٤,٣ + ١,٥ \bar{س} \quad (١) \quad \bar{ب} = ٤,٣ + ٧,١ \bar{س} \quad (ب) \quad \bar{ب} = ٣ + ١,٥ \bar{س} \quad (ج) \quad \bar{ب} = ٣ + ٧,١ \bar{س} \quad (د)$$

(٢١) الشكل المقابل يبين عدد الأميين خلال الفترة الزمنية المحددة (٢٠٠٠ - ٢٠٠٣) فإن الاتجاه العام للسلسلة الزمنية يشير إلى:



اختبار الوحدة الثالثة

أسئلة المقال

(١) يبين الجدول التالي إنتاج القمح (ص) في بلد ما بملايين الكيلوجرامات على مدى ٨ سنوات.

الزمن (س)	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٢٠٠٩	٢٠١٠	٢٠١١	٢٠١٢
كمية الإنتاج (ص)	٢٥٢٨	٢٦٧٨	٢٤٢٨	١٣٠٥	١٩٧٥	٢٨٧٥	٢٥٧٤	٢١٠٠

(أ) أوجد معادلة الاتجاه العام المناسبة.

(ب) قُدِّر كم سيصبح الإنتاج سنة ٢٠١٤.

(ج) أوجد مقدار الخطأ سنة ٢٠٠٨.

(٢) يدوّن متجر لبيع المنتجات مبيعاته اليومية في الجدول التالي على مدى أسبوع،

الزمن (س)	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
المبيعات (ص)	١٣٥	١٣٧	١٧٤	١٤٨	١٨١	٢٠٤	٢٠٠

(أ) أوجد معادلة الاتجاه العام المناسبة.

(ب) قُدِّر قيمة المبيعات يوم س = ١٧.

(ج) أوجد مقدار الخطأ عند س = ٤.

(٣) يبين الجدول التالي إنتاج الغاز الطبيعي (ص) بمئات ملايين الأمتار المكعبة $\times ١٠^٨$ كل سنتين من سنة ٢٠٠٢ حتى سنة ٢٠٠٨.

الزمن (س)	٢٠٠٢	٢٠٠٤	٢٠٠٦	٢٠٠٨
إنتاج الغاز (ص)	٨,٧	٩,٧	١٣,٥	١٢,٧

(أ) أوجد معادلة الاتجاه العام المناسبة.

(ب) قُدِّر كم سيكون الإنتاج سنة ٢٠١٢.

٣٧

تمارين إثرائية

(١) يسجل سائق حافلة نقل عمومية عدد الركاب خلال أيام الأسبوع ابتداءً من يوم الاثنين :

الزمن باليوم (س)	الاثنين (١)	الثلاثاء (٢)	الأربعاء (٣)	الخميس (٤)	الجمعة (٥)	السبت (٦)	الأحد (٧)
عدد الركاب (ص)	١٥٠	١٥٥	١٥٣	١٤٨	٢٢٠	١٣٠	١٢٠

(أ) أوجد معادلة خط الاتجاه لأعداد الركاب خلال أيام الأسبوع.

(ب) قُدِّر عدد الركاب ليوم الجمعة التالي.

(ج) احسب مقدار الخطأ عند $s = 1$ ، وعند $s = 5$.

(٢) مسؤول في شركة إنتاج للأفلام السينمائية يسجل عدد الزبائن خلال أيام الأسبوع :

أيام الأسبوع (س)	الاثنين (١)	الثلاثاء (٢)	الأربعاء (٣)	الخميس (٤)	الجمعة (٥)	السبت (٦)	الأحد (٧)
عدد الزبائن (ص)	٣٠٠	٢٨٠	٢٩٠	٣١٥	٩١٠	٨٠٠	٢٩٠

(أ) أوجد معادلة خط الاتجاه لعدد الزبائن.

(ب) قُدِّر عدد الزبائن ليوم الأربعاء التالي.

(ج) أوجد مقدار الخطأ ليوم الخميس.

(٢٢) إذا كانت معادلة الاتجاه العام لأعداد الطلبة خلال الفترة من ١٩٩٦ حتى عام ٢٠٠٤ هي

$$\widehat{y} = 2,82x + 1,8 \text{ فإن العدد المتوقع للطلاب المتقدمين عام } 2007 \text{ هو:}$$

(أ) ٢٧ (ب) ٣٠ (ج) ٢٨ (د) ليس أيًا مما سبق

(٢٣) العوامل التي تؤثر في السلسلة الزمنية هي:

(أ) الاتجاه العام فقط (ب) التغيرات الدورية فقط

(ج) التغيرات الموسمية والعرضية (د) جميع ما سبق

(٢٤) الجدول التالي يوضح عدد الطلاب المتقدمين للحصول على شهادة الماجستير من إحدى الكليات من عام ١٩٩٨م وحتى عام ٢٠٠٤م

السنة	١٩٩٨	١٩٩٩	٢٠٠٠	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤
عدد الطلاب	٣	٤	٦	١٠	١٢	١٥	٢٠

فإذا كانت معادلة الاتجاه العام لأعداد الطلاب خلال الفترة المذكورة $\widehat{y} = 2,82x + 1,54$ ،

فإن العدد المتوقع للطلاب المتقدمين عام ٢٠٠٧ تقريبًا.

(أ) ٢٧ (ب) ٢٦ (ج) ٢٨ (د) ليس أيًا مما سبق

المجموعة ١ تمارين أساسية

$$(١) (أ) \frac{\alpha - 1}{2} = \frac{0,97}{2} = 0,485, \text{ نبحث في الجدول عن القيمة } 0,485 \text{ إذا } \frac{\alpha}{2} = 0,17$$

$$(ب) \frac{\alpha - 1}{2} = \frac{0,94}{2} = 0,47, \text{ القيمة } 0,47 \text{ تقع في الجدول بين القيمتين } 0,4699 \text{ و } 0,4706$$

$$\text{إذا } \frac{\alpha}{2} = \frac{1,88 + 1,89}{2} = 1,885$$

$$(ج) \frac{\alpha - 1}{2} = \frac{0,98}{2} = 0,49, \text{ القيمة } 0,49 \text{ تقع في الجدول بين القيمتين } 0,4898 \text{ و } 0,4901$$

$$\text{إذا } \frac{\alpha}{2} = \frac{2,32 + 2,33}{2} = 2,325$$

$$(د) \frac{\alpha - 1}{2} = \frac{0,92}{2} = 0,46, \text{ القيمة } 0,46 \text{ تقع في الجدول بين القيمتين } 0,4599 \text{ و } 0,4608$$

$$\text{إذا } \frac{\alpha}{2} = \frac{1,75 + 1,76}{2} = 1,755$$

$$(٢) (أ) \therefore \text{ مستوى الثقة } 95\% \therefore \frac{\alpha}{2} = 0,96$$

$$\therefore \sigma \text{ معلومة } \therefore \text{ هامش الخطأ } = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times \frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore \text{ هـ } = \frac{16\sqrt{2}}{64\sqrt{2}} \times 1,96 = \frac{1}{4} \times 1,96 = 0,49$$

$$(ب) \text{ فترة الثقة هي } (\bar{s} - \text{هـ}, \bar{s} + \text{هـ}) = (0,2, 1,2, 0,98, 1,3)$$

(ج) عند اختيار ١٠٠ عينة عشوائية ذات الحجم نفسه (ن = ٦٤) وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن ٩٥ فترة تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي.

$$(٣) (أ) \frac{\alpha}{2} = 0,96, \text{ هـ} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times \frac{\alpha}{2} = \frac{0,5}{1000\sqrt{2}} \times 1,96 \simeq 0,0310$$

$$(ب) \text{ فترة الثقة هي } (\bar{s} - \text{هـ}, \bar{s} + \text{هـ}) = (0,9690, 0,4, 0,310, 0,5)$$

(ج) عند اختيار ١٠٠ عينة عشوائية ذات الحجم نفسه (ن = ١٠٠٠) وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن ٩٥ فترة تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي.

$$(٤) (أ) \frac{\alpha}{2} = 0,96, \text{ هـ} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times \frac{\alpha}{2} = \frac{1,25\sqrt{2}}{25\sqrt{2}} \times 1,96 \simeq 0,4383$$

$$(ب) \text{ فترة الثقة هي } (\bar{s} - \text{هـ}, \bar{s} + \text{هـ}) = (0,5617, 0,7, 0,4383, 0,8)$$

(ج) عند اختيار ١٠٠ عينة عشوائية ذات الحجم نفسه (ن = ٢٥) وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن ٩٥ فترة تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي.

$$(5) (أ) \quad \sigma = 1,96 = \frac{\alpha}{2} \quad \text{غير معلوم، } n < 30 \therefore \text{هـ} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times \frac{\alpha}{2} = \frac{1,96}{\sqrt{80}} \times 2,2 \approx 0,4821$$

$$(ب) \text{ فترة الثقة هي } (0,4821 + 4,8, 0,4821 - 4,8) = (0,2821, 4,3179)$$

(ج) عند اختيار ١٠٠ عينة عشوائية ذات الحجم نفسه ($n = 80$) وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن ٩٥ فترة تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي.

$$(6) (أ) \quad \sigma^2 \text{ غير معلوم، } n \geq 30 \therefore \text{نستخدم توزيع ت.}$$

$$\therefore n = 13 \therefore \text{ درجات الحرية } (n - 1) = 13 - 1 = 12$$

$$\therefore \text{ مستوى الثقة } 1 - \alpha = 95\% \therefore 1 - \alpha = 0,95 \Leftarrow \alpha = 0,05$$

$$\therefore \frac{\alpha}{2} = 0,025, \text{ من جدول توزيع ت تكون قيمة ت } = \frac{\alpha}{2} = 0,025 = 2,179$$

$$\text{هـ} = \text{ت} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times \frac{\alpha}{2} = \frac{3,5}{\sqrt{13}} \times 2,179 \approx 2,1126$$

$$(ب) \text{ فترة الثقة هي } (\overline{س} - \text{هـ}, \overline{س} + \text{هـ}) = (27,8874, 32,1126)$$

المجموعة ب تمارين تعزيزية

$$(1) (أ) \quad \sigma = 1,96 = \frac{\alpha}{2} \quad \text{هـ} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times \frac{\alpha}{2} = \frac{1,96}{\sqrt{64}} \times 2,25 = 0,54$$

$$(ب) \text{ فترة الثقة هي } (\overline{س} - \text{هـ}, \overline{س} + \text{هـ}) = (147,75, 172,25)$$

(ج) عند اختيار ١٠٠ عينة عشوائية ذات الحجم نفسه ($n = 64$) وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن ٩٥ فترة تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي.

$$(2) (أ) \quad \sigma = 1,96 = \frac{\alpha}{2} \quad \text{هـ} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times \frac{\alpha}{2} = \frac{1,96}{\sqrt{11}} \times 3,92 = 5,84$$

$$(ب) \text{ فترة الثقة هي } (\overline{س} - \text{هـ}, \overline{س} + \text{هـ}) = (26,58, 42,34)$$

$$(3) (أ) \quad \sigma = 1,96 = \frac{\alpha}{2} \quad \text{هـ} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times \frac{\alpha}{2} = \frac{1,96}{\sqrt{32}} \times 0,8 \approx 0,2772$$

$$(ب) \text{ فترة الثقة } = (14,0228, 14,5772)$$

(ج) عند اختيار ١٠٠ عينة عشوائية ذات الحجم نفسه ($n = 32$) وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن ٩٥ فترة تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي.

$$(4) (أ) \quad \text{ درجات الحرية } (n - 1) = 15 - 1 = 14$$

$$1 - \alpha = 0,95 \Leftarrow \alpha = 0,05, \quad \frac{\alpha}{2} = 0,025 \Leftarrow \text{ت} = 2,145$$

$$\text{هـ} = \text{ت} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times \frac{\alpha}{2} = \frac{4,2}{\sqrt{15}} \times 2,145 \approx 2,3261$$

$$(ب) \text{ فترة الثقة } = (-0,6261, 0,2661)$$

$$(5) (أ) \quad 37,0334 \simeq \frac{119,5}{\sqrt{40}} \times 1,96 = \frac{ع}{\sqrt{ن}} \times \frac{\alpha}{2} = 1,96 = \frac{\alpha}{2} \quad \text{هـ}$$

$$(ب) \quad \text{فترة الثقة} = (209,5334, 135,4666)$$

(ج) عند اختيار ١٠٠ عينة عشوائية ذات الحجم نفسه (ن = ٤٠) وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن ٩٥ فترة تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي.

تمرّن ١-٢

اختبارات الفروض الإحصائية

المجموعة ١ تمارين أساسية

(١) (أ) صياغة الفروض

ف: $\mu = 30$ مقابل ف: $\mu \neq 30$

(ب) σ غير معلومة ن = ١٥٠، ن < ٣٠، $\bar{س} = 30,3$ ، ع = ٦,٥

$$\therefore \text{نستخدم المقياس الإحصائي } U = \frac{\bar{س} - \mu}{\frac{ع}{\sqrt{ن}}}$$

$$\therefore U = \frac{30 - 30,3}{\frac{6,5}{\sqrt{150}}} \simeq -0,5653$$

(ج) $\therefore$ مستوى الثقة ٩٥٪

$$\therefore \alpha = 0,05 \leftarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$$

$$\therefore 1,96 = \frac{\alpha}{2}$$

(د) منطقة القبول هي (-١,٩٦، ١,٩٦)

(هـ) $\therefore -0,5653 \in (-1,96, 1,96)$

$\therefore$ القرار بقبول فرض العدم $\mu = 30$

(٢) (أ) صياغة الفروض

ف: $\mu = 5$ مقابل ف: $\mu \neq 5$

(ب) σ غير معلومة ن = ١٠٠٠، ن < ٣٠، $\bar{س} = 4,5$ ، ع = ١

$$\therefore \text{نستخدم المقياس الإحصائي } U = \frac{\bar{س} - \mu}{\frac{ع}{\sqrt{ن}}}$$

$$15,8114 - \simeq \frac{5 - 4,5}{\frac{1}{1000\sqrt{}}}} = u \quad \therefore$$

$$0,025 = \frac{\alpha}{2} \leftarrow 0,05 = \alpha \quad \therefore \text{ (ج)}$$

$$1,96 = \frac{\alpha}{2} u \quad \therefore$$

(د) منطقة القبول هي $(-1,96, 1,96)$

$$\text{ (هـ) } \therefore 15,8114 - \notin (-1,96, 1,96)$$

$\therefore$ القرار: نرفض فرض العدم $\mu = 5$ ونقبل الفرض البديل $\mu \neq 5$

(٣) (أ) صياغة الفروض: ف. $\mu = 300$ مقابل ف. $\mu \neq 300$

$$\text{ (ب) } \therefore \sigma = 2, 32 \text{ (معلومة)}, n = 20, \bar{s} = 280$$

$$\therefore \text{ نستخدم المقياس الإحصائي } u = \frac{\bar{s} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$2,7777 - \simeq \frac{300 - 280}{\frac{2}{20\sqrt{}}} = u \quad \therefore$$

$$0,025 = \frac{\alpha}{2} \leftarrow 0,05 = \alpha \quad \therefore \text{ (ج)}$$

$$1,96 = \frac{\alpha}{2} u \quad \therefore$$

(د) منطقة القبول هي $(-1,96, 1,96)$

$$\text{ (هـ) } \therefore 2,7777 - \notin (-1,96, 1,96)$$

$\therefore$ القرار: نرفض فرض العدم $\mu = 300$ ونقبل الفرض البديل $\mu \neq 300$

(٤) (أ) صياغة الفروض: ف. $\mu = 35$ مقابل ف. $\mu \neq 35$

$$\text{ (ب) } \therefore \sigma = 7 \text{ (معلومة)}, n = 50, \bar{s} = 40$$

$$\therefore \text{ نستخدم المقياس الإحصائي } u = \frac{\bar{s} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$5,0508 \simeq \frac{35 - 40}{\frac{7}{50\sqrt{}}} = u$$

$$0,025 = \frac{\alpha}{2} \leftarrow 0,05 = \alpha \quad \therefore \text{ (ج)}$$

$$1,96 = \frac{\alpha}{2} u \quad \therefore$$

(د) منطقة القبول هي $(-96, 96)$

(هـ) $\therefore 5,0508 \notin (-96, 96)$

$\therefore$ القرار: نرفض فرض عدم $\mu = 35$ ونقبل الفرض البديل $\mu \neq 35$

(5) (أ) صياغة الفروض: $H_0: \mu = 9600$ مقابل $H_1: \mu \neq 9600$

(ب) $\therefore \sigma$ غير معلومة $n = 64$ ، $n < 30$ ، $\bar{s} = 9420$ ، $s = 640$

$$\therefore \text{نستخدم المقياس الإحصائي } t = \frac{\bar{s} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

$$-2,25 = \frac{9600 - 9420}{\frac{640}{\sqrt{64}}} = t$$

(ج) $\therefore$ مستوى الثقة 95%

$$\therefore \alpha = 0,05 \leftarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$$

$$\therefore t_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

(د) منطقة القبول هي $(-96, 96)$

(هـ) $\therefore -2,25 \notin (-96, 96)$

$\therefore$ القرار: نرفض فرض عدم $\mu = 9600$ ونقبل الفرض البديل $\mu \neq 9600$

(6) (أ) صياغة الفروض: $H_0: \mu = 16$ مقابل $H_1: \mu \neq 16$

(ب) $\therefore \sigma = 1,4$ (معلومة) $n = 10$ ، $\bar{s} = 15$

$$\therefore \text{نستخدم المقياس الإحصائي } t = \frac{\bar{s} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$-2,2588 \simeq \frac{16 - 15}{\frac{1,4}{\sqrt{10}}} = t$$

$$(ج) \therefore \alpha = 0,05 \leftarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$$

$$\therefore t_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

(د) منطقة القبول هي $(-96, 96)$

(هـ) $\therefore -2,2588 \notin (-96, 96)$

$\therefore$ القرار: نرفض فرض عدم $\mu = 16$ ونقبل الفرض البديل $\mu \neq 16$

المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) (أ) صياغة الفروض: ف. $\mu = 200000$ مقابل ف. $\mu \neq 200000$

(ب) σ غير معلومة $n = 100$ ، $n < 30$ ، $\bar{s} = 195000$ ، $\bar{c} = 80000$

$$\therefore \text{نستخدم المقياس الإحصائي } t = \frac{\bar{s} - \mu}{\frac{\bar{c}}{\sqrt{n}}}$$

$$-0,625 = \frac{195000 - 200000}{\frac{80000}{\sqrt{100}}}$$

$$(ج) \therefore \alpha = 0,05 \leftarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$$

$$\therefore t_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

(د) منطقة القبول هي $(-1,96, 1,96)$

(هـ) $\therefore -0,625 \in (-1,96, 1,96)$

$\therefore$ القرار بقبول فرض العدم $\mu = 200000$

(٢) (أ) صياغة الفروض: ف. $\mu = 3,5$ مقابل ف. $\mu \neq 3,5$

(ب) $\sigma = 0,7$ (معلومة) $n = 200$ ، $\bar{s} = 3,3$

$$\therefore \text{نستخدم المقياس الإحصائي } z = \frac{\bar{s} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$-0,406 \simeq \frac{3,3 - 3,5}{\frac{0,7}{\sqrt{200}}}$$

$$(ج) \therefore \alpha = 0,05 \leftarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$$

$$\therefore t_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

(د) منطقة القبول هي $(-1,96, 1,96)$

(هـ) $\therefore -0,406 \notin (-1,96, 1,96)$

$\therefore$ القرار: نرفض فرض العدم $\mu = 3,5$ ونقبل الفرض البديل $\mu \neq 3,5$

(٣) (أ) صياغة الفروض: ف. $\mu = 12$ مقابل ف. $\mu \neq 12$

$\sigma = 3$ ، $n = 10$ (معلومة) $\bar{s} = 11$

$$\therefore \text{نستخدم المقياس الإحصائي } U = \frac{\bar{s} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$U = \frac{11 - 12}{\frac{3,1}{\sqrt{10}}} \simeq -1,0201$$

$$\therefore \alpha = 0,05 \leftarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$$

$$\therefore U_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

منطقة القبول هي $(-1,96, 1,96)$

$$\therefore -1,0201 \in (-1,96, 1,96)$$

$\therefore$ القرار: بقبول فرض العدم $\mu = 12$

(ب) صياغة الفروض: $H_0: \mu = 12$ مقابل $H_1: \mu \neq 12$

$$\therefore \sigma \text{ غير معلومة، } n = 25 \text{ (} n \geq 30 \text{) } \bar{s} = 11, \bar{c} = 1,1$$

$$\therefore \text{نستخدم المقياس الإحصائي } T = \frac{\bar{s} - \mu}{\frac{\bar{c}}{\sqrt{n}}}$$

$$\therefore T = \frac{11 - 12}{\frac{1,1}{\sqrt{25}}} \simeq -4,5455$$

$$\text{درجات الحرية (} n - 1 \text{) } = 25 - 1 = 24$$

$$\therefore \alpha = 0,05 \leftarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$$

$$\therefore T_{\frac{\alpha}{2}} = 2,064$$

منطقة القبول هي $(-2,064, 2,064)$

$$\therefore -4,5455 \notin (-2,064, 2,064)$$

$\therefore$ القرار: نرفض فرض العدم $\mu = 12$ ونقبل الفرض البديل $\mu \neq 12$

(٤) (أ) صياغة الفروض: $H_0: \mu = 42,1$ مقابل $H_1: \mu \neq 42,1$

$$\therefore \sigma \text{ غير معلومة } n = 80, n < 30, \bar{s} = 45,2, \bar{c} = 12$$

$$\therefore \text{نستخدم المقياس الإحصائي } U = \frac{\bar{s} - \mu}{\frac{\bar{c}}{\sqrt{n}}}$$

$$U = \frac{45,2 - 42,1}{\frac{12}{\sqrt{80}}} \simeq 2,3106$$

$$(ج) \therefore \alpha = 0,05 \leftarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$$

$$\therefore \frac{\alpha}{2} = 0,96$$

(د) منطقة القبول هي $(-0,96, 0,96)$

(هـ) $\therefore 2,3106 \notin (-0,96, 0,96)$

$\therefore$ القرار: نرفض فرض العدم $\mu = 1$ ونقبل الفرض البديل $\mu \neq 1$

اختبار الوحدة الأولى

أسئلة المقال

$$(1) (أ) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times \frac{\alpha}{2} = 0,96 \text{ هـ}$$

$$\text{هـ} = 0,96 = \frac{16\sqrt{25}}{25\sqrt{25}} \times 0,96 = \frac{4}{5} \times 0,96 = 0,568$$

(ب) فترة الثقة هي $(\bar{s} - \text{هـ}, \bar{s} + \text{هـ}) = (4,32, 4,568)$

$$(2) (أ) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times \frac{\alpha}{2} = 0,96 \text{ هـ}$$

$$\text{هـ} = 0,96 = \frac{1,1}{150\sqrt{25}} \times 0,96 = 0,176$$

(ب) فترة الثقة هي $(\bar{s} - \text{هـ}, \bar{s} + \text{هـ}) = (3,24, 3,676)$

$$(3) (أ) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times \frac{\alpha}{2} = 0,96 \text{ هـ}$$

$$\text{هـ} = 0,96 = \frac{4\sqrt{160}}{160\sqrt{160}} \times 0,96 = 0,30988$$

(ب) فترة الثقة هي $(\bar{s} - \text{هـ}, \bar{s} + \text{هـ}) = (8,99012, 9,60988)$

(4) (أ) صياغة الفروض: $\mu = 100000$ مقابل $\mu \neq 100000$

(ب) $\therefore \sigma = 10000\sqrt{100} = 100000$ (معلومة) $n = 50$, $\bar{s} = 95000$

$$\therefore \text{نستخدم المقياس الإحصائي } \frac{\bar{s} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$\therefore \frac{\bar{s} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{95000 - 100000}{\frac{100000}{50\sqrt{25}}} = -3,53$$

$$(ج) \therefore 0,05 = \alpha \longleftarrow 0,025 = \frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore 1,96 = \frac{\alpha}{2} u$$

(د) منطقة القبول هي $(-1,96, 1,96)$

$$(هـ) \therefore -353,5534 \ni (-1,96, 1,96)$$

$\therefore$ القرار: نرفض فرض العدم $\mu = 1000000$ ونقبل الفرض البديل $\mu \neq 1000000$

(5) (أ) صياغة الفروض: $H_0: \mu = 22$ مقابل $H_1: \mu \neq 22$

(ب) $\therefore \sigma$ غير معلومة، $n = 10$ ($n \geq 30$) $\overline{S} = 20$ ، $\overline{X} = 22$

$$\therefore \text{نستخدم المقياس الإحصائي } t = \frac{\overline{S} - \mu}{\frac{\overline{X}}{\sqrt{n}}}$$

$$t = \frac{22 - 20}{\frac{2}{\sqrt{10}}} \simeq 1,5811$$

(ج) درجات الحرية $(n - 1) = 10 - 1 = 9$

$$\therefore 0,05 = \alpha \longleftarrow 0,025 = \frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore t = 2,262 = \frac{\alpha}{2}$$

(د) منطقة القبول هي $(-2,262, 2,262)$

$$(هـ) \therefore 1,5811 \ni (-2,262, 2,262)$$

$\therefore$ القرار: بقبول فرض العدم $\mu = 22$

(6) (أ) صياغة الفروض: $H_0: \mu = 50$ مقابل $H_1: \mu \neq 50$

(ب) $\therefore \sigma = 9\sqrt{3} = 15.588$ (معلومة) $n = 35$ ، $\overline{S} = 47$

$$\therefore \text{نستخدم المقياس الإحصائي } u = \frac{\overline{S} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$u = \frac{50 - 47}{\frac{15.588}{\sqrt{35}}} \simeq 0,9161$$

$$(ج) \therefore 0,05 = \alpha \longleftarrow 0,025 = \frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore 1,96 = \frac{\alpha}{2} u$$

(د) منطقة القبول هي $(-1,96, 1,96)$

$$(هـ) \therefore -9161, 5 \not\in (-96, 1, 96)$$

$\therefore$ القرار: نرفض فرض عدم $\mu = 50$ ونقبل الفرض البديل $\mu \neq 50$

(٧) (أ) صياغة الفروض: ف. $\mu = 42$ مقابل ف. $\mu \neq 42$

$\therefore \sigma$ غير معلومة $n = 35$ ، $n < 30$ ، $\bar{s} = 40$ ، $\bar{c} = 3$

$$\therefore \text{نستخدم المقياس الإحصائي } t = \frac{\bar{s} - \mu}{\frac{\bar{c}}{\sqrt{n}}}$$

$$-3,9441 \simeq \frac{42 - 40}{\frac{3}{\sqrt{35}}} = t$$

$$\therefore \alpha = 0,05 \longleftarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$$

$$\therefore t_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

منطقة القبول هي $(-96, 1, 96)$

$$\therefore -3,9441 \not\in (-96, 1, 96)$$

$\therefore$ القرار: نرفض فرض عدم $\mu = 42$ ونقبل الفرض البديل $\mu \neq 42$

(ب) صياغة الفروض: ف. $\mu = 42$ مقابل ف. $\mu \neq 42$

$\therefore \sigma$ غير معلومة، $n = 25$ ($n \geq 30$)، $\bar{s} = 40$ ، $\bar{c} = 3$

$$\therefore \text{نستخدم المقياس الإحصائي } t = \frac{\bar{s} - \mu}{\frac{\bar{c}}{\sqrt{n}}}$$

$$\therefore -3,3333 \simeq \frac{42 - 40}{\frac{3}{\sqrt{25}}} = t$$

$$\text{درجات الحرية } (n - 1) = 25 - 1 = 24$$

$$\therefore \alpha = 0,05 \longleftarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$$

$$\therefore t_{\frac{\alpha}{2}} = 2,064$$

منطقة القبول هي $(-2,064, 2,064)$

$$\therefore -3,3333 \not\in (-2,064, 2,064)$$

$\therefore$ القرار: نرفض فرض عدم $\mu = 42$ ونقبل الفرض البديل $\mu \neq 42$

بنود الصح والخطأ

(أ) (٥)	(أ) (٤)	(ب) (٣)	(ب) (٢)	(أ) (١)
(أ) (١٠)	(ب) (٩)	(أ) (٨)	(أ) (٧)	(أ) (٦)

بنود الاختيار من متعدد

(ج) (١٥)	(ب) (١٤)	(أ) (١٣)	(ب) (١٢)	(ب) (١١)
(ج) (٢٠)	(أ) (١٩)	(ج) (١٨)	(أ) (١٧)	(ب) (١٦)
(ب) (٢٥)	(د) (٢٤)	(ج) (٢٣)	(ب) (٢٢)	(أ) (٢١)
(ب) (٣٠)	(د) (٢٩)	(أ) (٢٨)	(أ) (٢٧)	(ب) (٢٦)

تمارين إثرائية

$$(١) (أ) \quad \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times \frac{\alpha}{2} = ١,٩٦ \quad \text{هـ}$$

$$\text{هـ} = ١,٩٦ \times \frac{\sqrt{٩}}{\sqrt{١٣٠}} \approx ٠,٥١٥٧$$

(ب) فترة الثقة هي $(\bar{s} - \text{هـ}, \bar{s} + \text{هـ}) = (٢٧,٤٨٤٣, ٢٨,٥١٥٧)$

(٢) (أ) $\because \sigma^2$ غير معلوم، $n \geq ٣٠$ $\therefore$ نستخدم توزيع ت.

$$\because n = ٢٥$$

$$\therefore \text{ درجات الحرية } (n - ١) = ٢٤ = ١ - ٢٥$$

$$\because \text{ مستوى الثقة } ١ - \alpha = ٩٥\%$$

$$\therefore ١ - \alpha = ٩٥\% \Leftarrow \alpha = ٥\%, ٠,٠٥٠$$

$$\therefore \frac{\alpha}{2} = ٢,٥\%$$

من جدول توزيع ت تكون قيمة $t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} = ٢,٠٦٤$

$$\text{هامش الخطأ هـ} = t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \times \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$\text{هـ} = ٢,٠٦٤ \times \frac{\sqrt{٦}}{\sqrt{٢٥}} = ٢,٤٧٦٨$$

(ب) فترة الثقة هي $(\bar{s} - \text{هـ}, \bar{s} + \text{هـ}) = (١٩,٥٢٣٢, ٢٤,٤٧٦٨)$

(٣) (أ) صياغة الفروض: ف. $\mu = 290000$ مقابل ف. $\mu \neq 290000$

(ب) $\sigma = 70000$ (معلومة)، $n = 1500$ ، $\bar{s} = 300000$

$$\therefore \text{نستخدم المقياس الإحصائي } U = \frac{\bar{s} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$U = \frac{290000 - 300000}{\frac{70000}{\sqrt{1500}}} \simeq -5,5328$$

$$(ج) \therefore \alpha = 0,05 \leftarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$$

$$\therefore U_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

(د) منطقة القبول هي $(-1,96, 1,96)$

(هـ) $\therefore -5,5328 \notin (-1,96, 1,96)$

$\therefore$ القرار: نرفض فرض عدم $\mu = 290000$ وقبول الفرض البديل $\mu \neq 290000$

(٤) (أ) صياغة الفروض: ف. $\mu = 10$ مقابل ف. $\mu \neq 10$

(ب) σ غير معلومة $n = 40$ ، $\bar{s} = 9$ ، $\bar{c} = 4$

$$\therefore \text{نستخدم المقياس الإحصائي } U = \frac{\bar{s} - \mu}{\frac{\bar{c}}{\sqrt{n}}}$$

$$U = \frac{10 - 9}{\frac{4}{\sqrt{40}}} \simeq 1,5811$$

$$(ج) \therefore \alpha = 0,05 \leftarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$$

$$\therefore U_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

(د) منطقة القبول هي $(-1,96, 1,96)$

(هـ) $\therefore 1,5811 \in (-1,96, 1,96)$

$\therefore$ القرار بقبول فرض عدم $\mu = 10$

(٥) (أ) صياغة الفروض: ف. $\mu = 150$ مقابل ف. $\mu \neq 150$

$\sigma = 10$ (معلومة)، $n = 40$ ، $\bar{s} = 143$

$$\therefore \text{نستخدم المقياس الإحصائي } U = \frac{\bar{s} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$4,4272 - \simeq \frac{150 - 143}{\frac{10}{\sqrt{40}}} = 0$$

$$0,025 = \frac{\alpha}{2} \leftarrow 0,05 = \alpha \quad \therefore$$

$$1,96 = \frac{\alpha}{2} \quad \therefore$$

منطقة القبول هي $(-1,96, 1,96)$

$$\therefore 4,4272 - \ni (-1,96, 1,96)$$

$\therefore$ القرار: نرفض فرض العدم $\mu = 150$ ونقبل الفرض البديل $\mu \neq 150$

(ب) صياغة الفروض: $\mu = 150$ مقابل $\mu \neq 150$

$$\therefore \sigma \text{ غير معلومة، } n = 7 \text{ (} n \geq 30 \text{)، } \bar{s} = 143, \bar{e} = 8$$

$$\therefore \text{ نستخدم المقياس الإحصائي } t = \frac{\bar{s} - \mu}{\frac{\bar{e}}{\sqrt{n}}}$$

$$t = \frac{150 - 143}{\frac{8}{\sqrt{7}}} = 2,315$$

$$\text{درجات الحرية (} n - 1 \text{) } = 7 - 1 = 6$$

$$0,025 = \frac{\alpha}{2} \leftarrow 0,05 = \alpha \quad \therefore$$

$$\therefore t = 2,447 = \frac{\alpha}{2}$$

منطقة القبول هي $(-2,447, 2,447)$

$$\therefore 2,315 - \ni (-2,447, 2,447)$$

$\therefore$ القرار: قبول فرض العدم $\mu = 150$ ونرفض الفرض البديل $\mu \neq 150$

$$(6) \text{ (أ) } \frac{\bar{e}}{\sqrt{n}} \times \frac{\alpha}{2} = 1,96, \quad \frac{\bar{e}}{\sqrt{n}} \times \frac{\alpha}{2} = 1,96$$

$$\bar{e} = 1,96 \times \frac{2,5}{\sqrt{36}} \simeq 0,8167$$

(ب) فترة الثقة هي $(\bar{s} - \bar{e}, \bar{s} + \bar{e}) = (10,7833, 12,4167)$

$$(7) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times \frac{\alpha}{2} = 1,96, \quad \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times \frac{\alpha}{2} = 1,96$$

$$\therefore \frac{20}{\sqrt{n}} \times 1,96 = 3,92$$

$$\therefore \sqrt{n} = 10 \quad \therefore n = 100$$

(٨) (أ) صياغة الفروض: ف. $\mu = 15$ مقابل ف. $\mu \neq 15$

(ب) σ غير معلومة، $n = 50$ ($n \geq 30$)، $\bar{s} = 9$ ، $\bar{c} = 11$

$$\therefore \text{نستخدم المقياس الإحصائي } t = \frac{\bar{s} - \mu}{\frac{\bar{c}}{\sqrt{n}}}$$

$$\therefore t = \frac{15 - 9}{\frac{11}{\sqrt{50}}} \simeq 1,2197$$

(ج) درجات الحرية ($n - 1$) = $50 - 1 = 49$

$$\therefore \alpha = 0,05 \leftarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$$

$$\therefore t_{\frac{\alpha}{2}} = 2,009$$

(د) منطقة القبول هي $(-2,009, 2,009)$

(هـ) $\therefore 1,2197 \in (-2,009, 2,009)$

$\therefore$ القرار بقبول فرض العدم $\mu = 15$

(٩) (أ) صياغة الفروض: ف. $\mu = 4$ مقابل ف. $\mu \neq 4$

(ب) σ غير معلومة، $n = 10$ ($n \geq 30$)، $\bar{s} = 3,5$ ، $\bar{c} = 1,2$

$$\therefore \text{نستخدم المقياس الإحصائي } t = \frac{\bar{s} - \mu}{\frac{\bar{c}}{\sqrt{n}}}$$

$$t = \frac{4 - 3,5}{\frac{1,2}{\sqrt{10}}} \simeq 1,3176$$

(ج) درجات الحرية ($n - 1$) = $10 - 1 = 9$

$$\therefore \alpha = 0,05 \leftarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$$

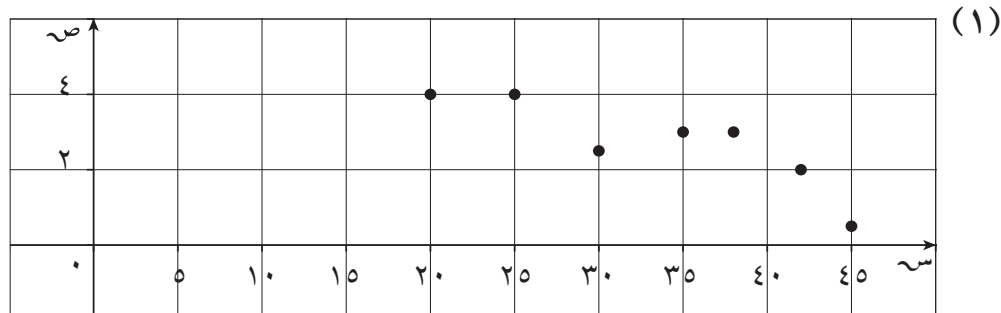
$$\therefore t_{\frac{\alpha}{2}} = 2,262$$

(د) منطقة القبول هي $(-2,262, 2,262)$

(هـ) $\therefore 1,3176 \in (-2,262, 2,262)$

$\therefore$ القرار بقبول فرض العدم $\mu = 4$

المجموعة ١ تمارين أساسية



علاقة عكسية (سالبة).

(٢) $r \approx 0,9862$

(٣) $r \approx -0,9223$ ، نوع الارتباط: عكسي (سالب) قوي.

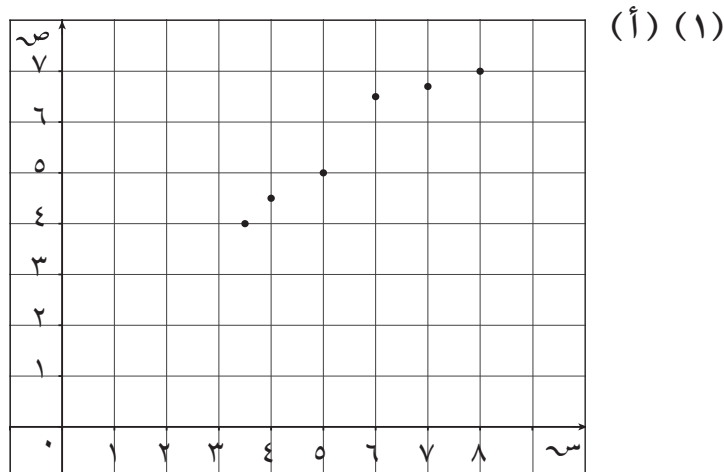
(٤) $r \approx -0,9785$ ، نوع الارتباط: عكسي (سالب) قوي.

(٥) $r \approx -0,2434$ ، نوع الارتباط: عكسي (سالب) ضعيف.

(٦) $r = 1$ ، نوع الارتباط: طردي (موجب) تام.

(٧) $r \approx 0,5045$ ، نوع الارتباط: طردي (موجب) متوسط.

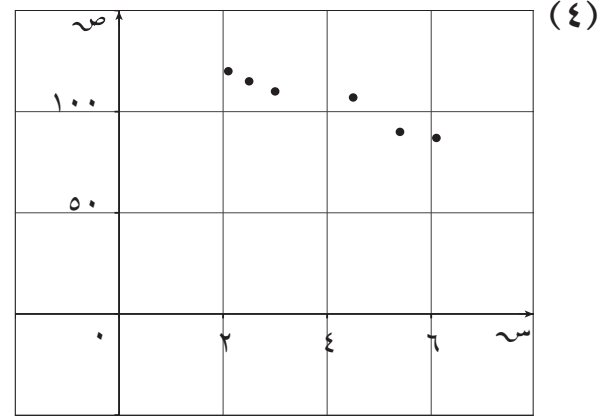
المجموعة ب تمارين تعزيزية



(ب) $r \approx 0,9673$ ، نوع الارتباط: طردي (موجب) قوي، والعلاقة خطية.

(٢) $r \approx 0,9932$ ، نوع الارتباط: طردي (موجب) قوي، إذاً هناك علاقة خطية بين وزن الدببة ومحيط الصدر.

(٣) $r \approx -0,8507$ ، نوع الارتباط: عكسي (سالب) قوي، إذاً هناك علاقة خطية بين كمية استهلاك الوقود و ثقل السيارة.



$r \approx -0,9651$ ، نوع الارتباط: عكسي (سالب) قوي، إذاً هناك علاقة خطية عكسية بين س، ص.

(٥) $r \approx 0,9930$ ، نوع الارتباط: طردي (موجب) قوي.

(٦) $r = 1$ ، نوع الارتباط: طردي (موجب) تام.

(٧) $r = -1$ ، نوع الارتباط: عكسي (سالب) تام.

(٨) $r \approx 0,2766$ ، نوع الارتباط: طردي (موجب) ضعيف.

تمرّن ٢-٢

الانحدار

المجموعة ١ تمارين أساسيّة

(١) $\hat{ص} = 0,2830 + 10,1887س$

(٢) (أ) $\hat{ص} = 66,9586 + 3,0617س$

(ب) $\hat{ص}_9 = 66,9586 + 3,0617 \times 90$

$= 342,5116$

(٣) (أ) $\hat{ص} = -6,7802 + 1,7702س$

(ب) $\hat{ص}_5 = -6,7802 + 1,7702 \times 50$

$= 81,7298$

(ج) مقدار الخطأ $= |ص_2 - \hat{ص}_2| = 4,4318$

المجموعة ب تمارين تعزيزية

$$(1) (أ) \hat{ص} = ٤٠,٨٣٠٥ - ٣,١٧٨٠ \text{ أس}$$

$$(ب) \hat{ص}_٣ = ٣ \times ٣,١٧٨٠ - ٤٠,٨٣٠٥ =$$

$$٣١,٢٩٦٥ =$$

إذا عدد الرواد ٣١

$$(2) (أ) \hat{ص} = ١٠٧,١٣٩١ - ٠,٢١٧ \text{ أس}$$

$$(ب) \hat{ص}_{١٩٥} = ٩٢,٠٩٢٤ =$$

$$(ج) \text{ مقدار الخطأ} = |٩٨,٢٢٢٦ - ١٠٣| = ٤,٧٧٧٤$$

$$\text{مقدار الخطأ} = |٨٦,٩٨٣٩ - ٨٦| = ٠,٩٨٣٩$$

$$(3) \hat{ص} = ٣ \text{ أس}$$

$$(4) \hat{ص} = ٦,٦٥٢٦ - ٠,٢١٠٥ \text{ أس}$$

$$(5) (أ) \hat{ص} = ٠,٢٦٩٧ + ٠,١٠٤١ \text{ أس}$$

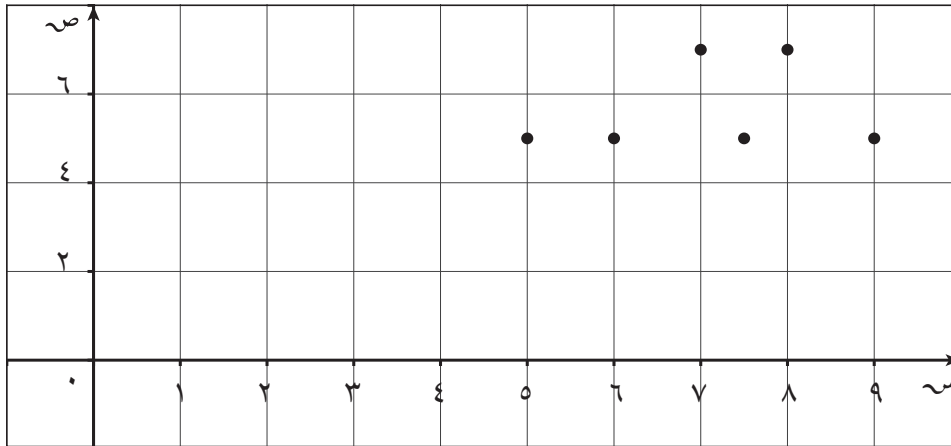
$$(ب) \hat{ص}_{٢٣} = ٢٣ \times ٠,٢٦٩٧ + ٠,١٠٤١ =$$

$$٦,٣٠٧٢ =$$

إذا عدد أفراد الأسرة ٦

اختبار الوحدة الثانية

أسئلة المقال



(1) (أ)

لا علاقة.

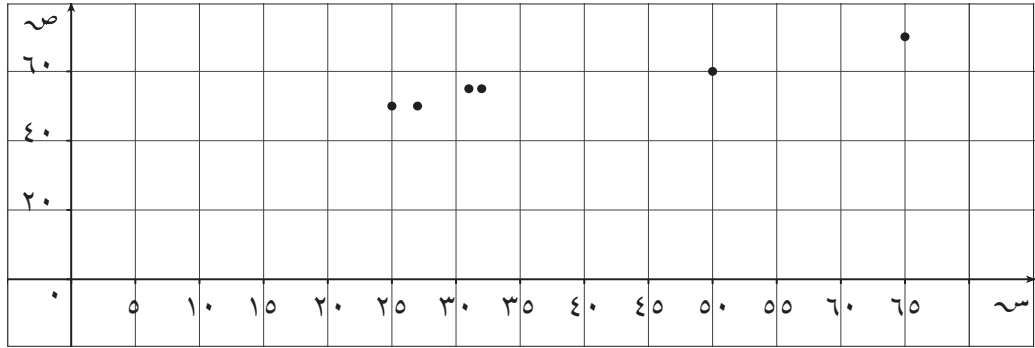
(ب) $r \approx 0,2259$ ، نوع الارتباط: طردي (موجب) ضعيف.

(٢) (أ) $r \approx 0,9803$

(ب) $\hat{ص} = 4934,7275 + 0,9392 \times 51$

(ج) $\hat{ص}_{١٤} = 12206,2155$

(د) مقدار الخطأ $= |11946,5195 - 12400| = 453,4805$



علاقة خطية طردية.

(ب) $r \approx 0,9784$

(ج) $\hat{ص} = 38,7908 + 0,4663 \times 5$

$\hat{ص}_{٥٧} = 4428,57$

(د) مقدار الخطأ $= |62,1058 - 60| = 2,1058$

(٤) (أ) $\hat{ص} = 0,13745 + 0,8893 \times 8$

(ب) $\hat{ص}_8 = 0,13745 + 0,8893 \times 8$

$= 7,33185$

إذا عدد أفراد الأسرة هو ٧

(٥) $\hat{ص} = 1 + 2 \times س$

(٦) $\hat{ص} = 3 - س$

بنود الصح والخطأ

(٥) (أ)

(٤) (أ)

(٣) (أ)

(٢) (ب)

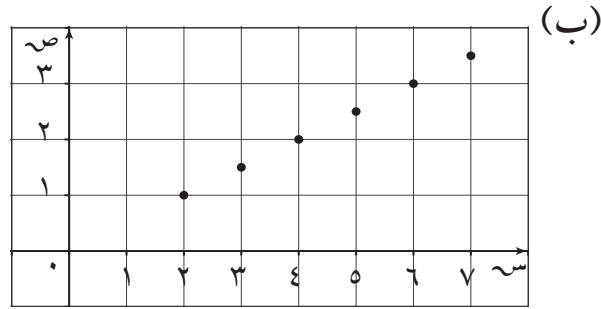
(١) (أ)

بنود الاختيار من متعدد

- (٦) (د) (٧) (ب) (٨) (د) (٩) (أ) (١٠) (ب) (١١) (ج) (١٢) (أ) (١٣) (ج) (١٤) (د) (١٥) (ج)

تمارين إثرائية

(١) (أ) $r = 1$

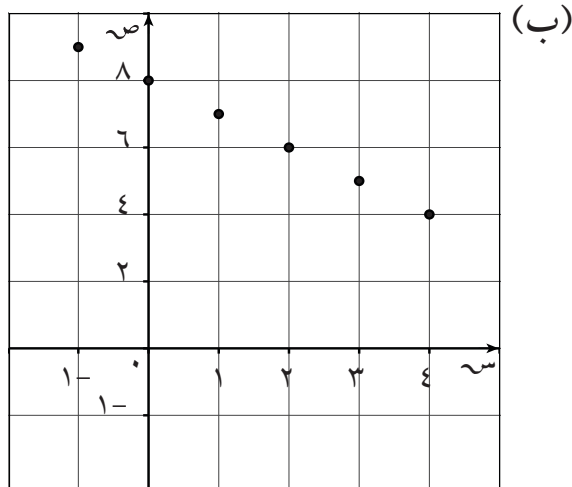


(ج) $\hat{V} = \frac{1}{4}S$

(د) $\hat{V} = \frac{1}{4} \times 6,5 = 1,625$

(هـ) الارتباط تام، إذًا لكل S مقدار الخطأ = $|V_S - \hat{V}_S| = 0$

(٢) (أ) $r = -1$

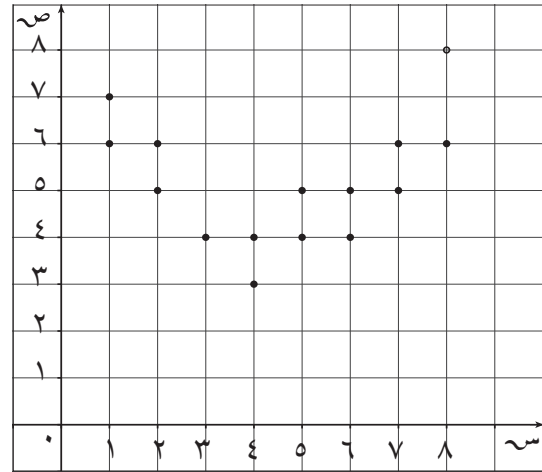
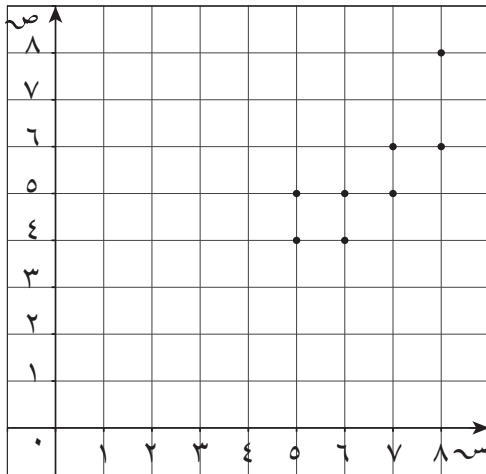


(ج) $\hat{V} = 8 - S$

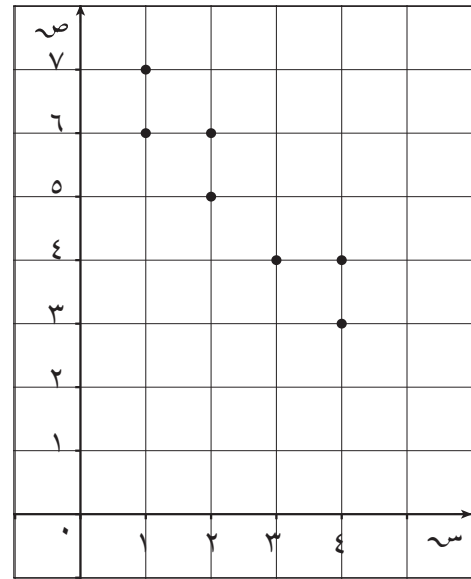
(د) $\hat{V} = 8 - 2,5 = 5,5$

(هـ) الارتباط تام، إذًا لكل S مقدار الخطأ = $|V_S - \hat{V}_S| = 0$

(أ) (٣)

(ب) $ر \approx 0,1290$ $ص = 4,8036 + 0,0714ر$ (ج) مقدار الخطأ $= |5,0178 - 4| = 1,0178$ 

علاقة خطية طردية (موجبة)



(د)

علاقة خطية عكسية (سالبة)

(هـ) $ر \approx -0,9254$ (سالبة قوية) ، $ر \approx 0,7800$ (موجبة قوية)(و) $ص' = 7,5 - 1,05ر$ ، $ص = -0,15 + 0,85ر$ $ص' = 7,5 - 1,05 \times 3 = 4,35$ ، مقدار الخطأ $= |4,35 - 4| = 0,35$ (ز) $ص'' = -0,15 + 0,85 \times 6 = 4,95$ ، مقدار الخطأ $= |4,95 - 4| = 0,95$ مقدار الخطأ $= |4,95 - 4,05| = 0,90$

$$(4) (أ) \hat{ص} = -0,1 + 0,7 \times س$$

(ب) $\hat{ص} = -0,1 + 0,7 \times 4,5 = 3,05$ ، إذا حجم مبيعاته هو 30 500 دينار.

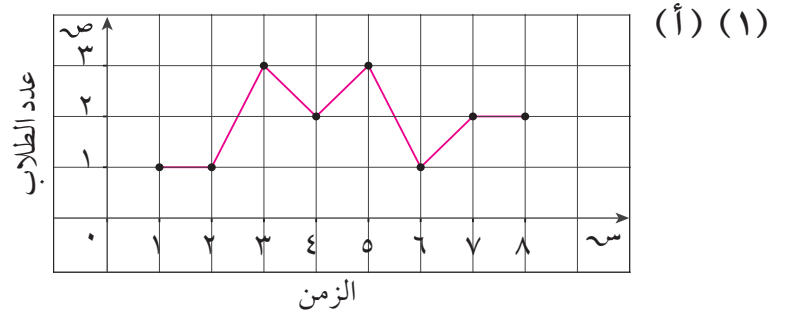
(5) $r \approx -0,2434$ ، نوع الارتباط: عكسي (سالب) ضعيف.

(6) $r \approx 0,8253$ ، نوع الارتباط: طردي (موجب) قوي.

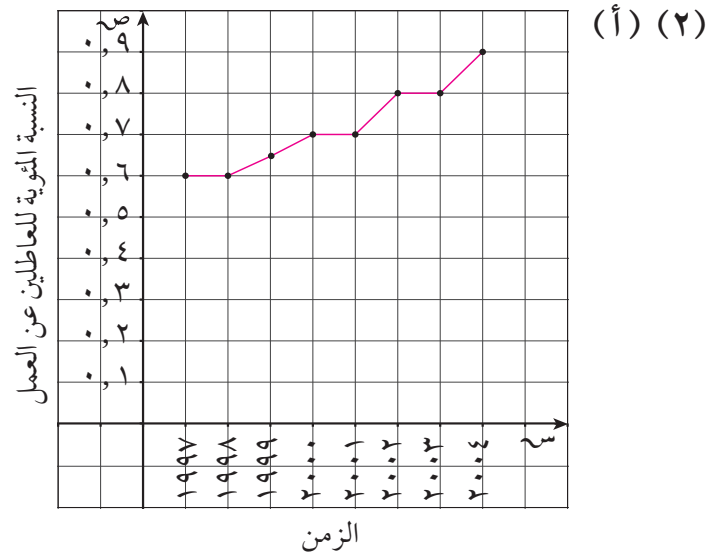
(7) $r \approx 0,6117$ ، نوع الارتباط: طردي (موجب) متوسط.

(8) $r \approx 0,4286$ ، نوع الارتباط: طردي (موجب) ضعيف.

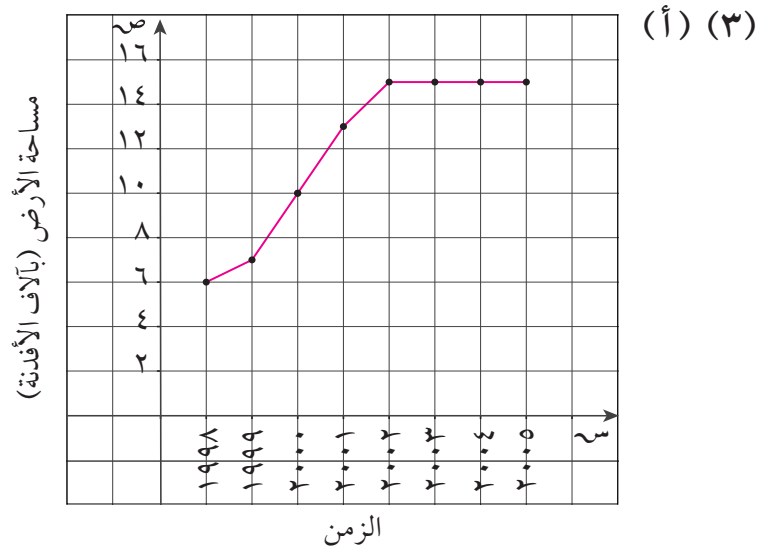
المجموعة ٢ تمارين أساسية



(ب) اتجاه عام للسلسلة الزمنية في تزايد.



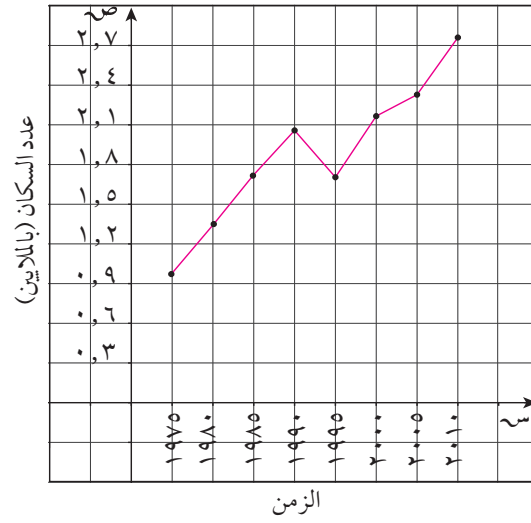
(ب) الاتجاه العام في زيادة مستمرة، لأنّ الرسم البياني هو على شكل خط منكسر تصاعدي.



(ب) الاتجاه العام في زيادة مستمرة حتى سنة ٢٠٠٢ وثبات من سنة ٢٠٠٢ حتى ٢٠٠٥.

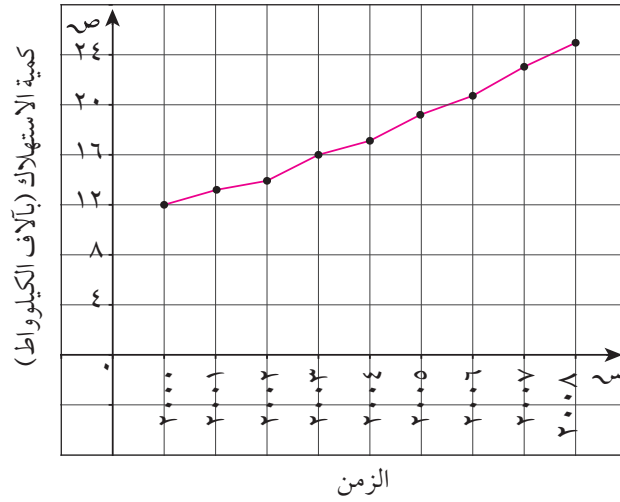
المجموعة ب تمارين تعزيزية

(أ) (١)



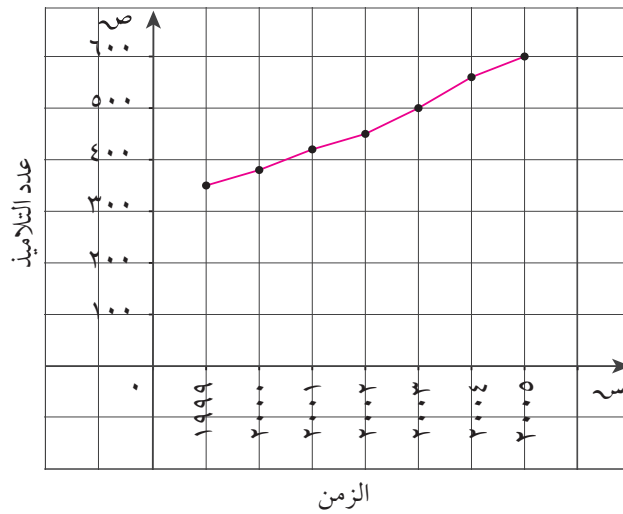
(ب) الاتجاه العام في عدد السكان إلى تزايد.

(أ) (٢)



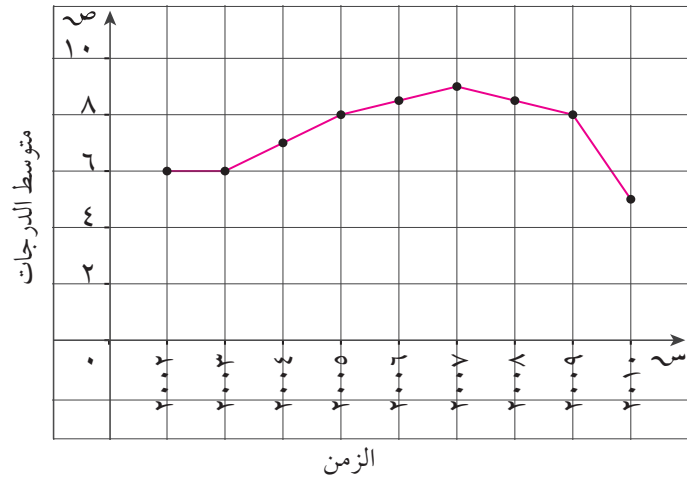
(ب) الاتجاه العام في زيادة مستمرة.

(أ) (٣)

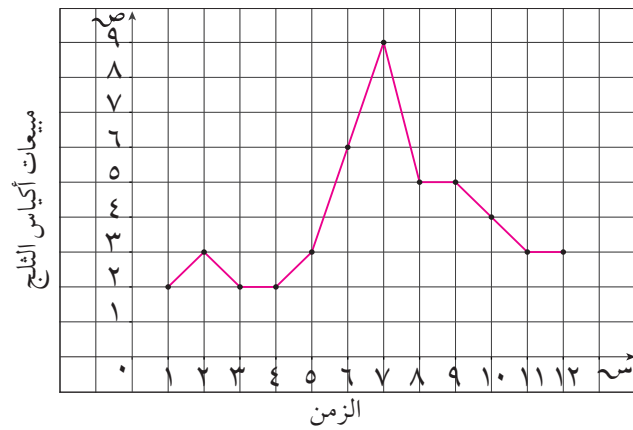


(ب) الاتجاه العام في زيادة مستمرة.

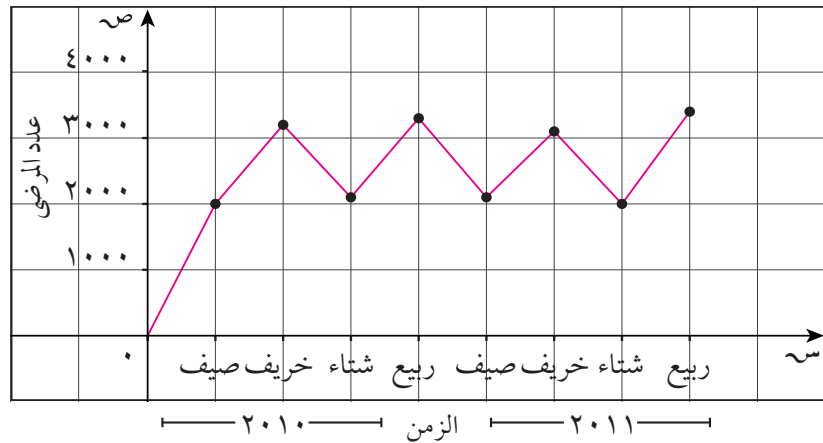
المجموعة ٢ تمارين أساسية



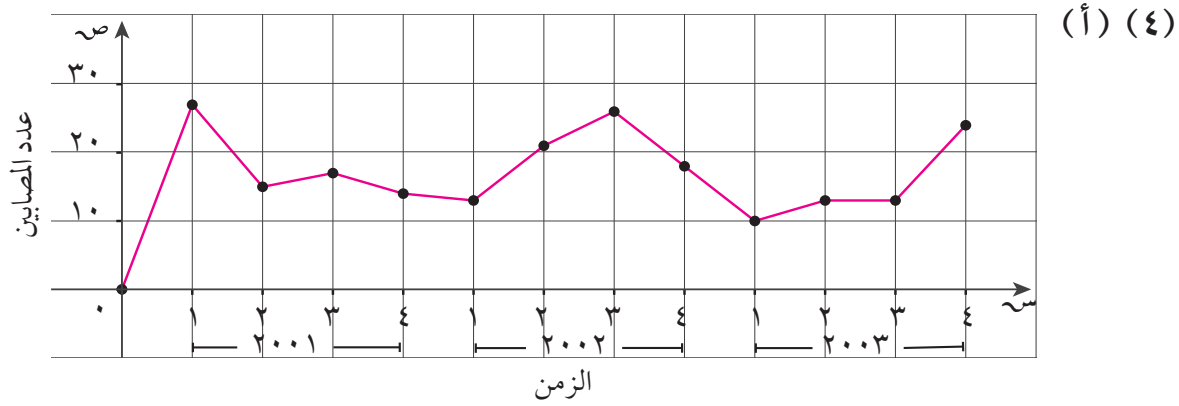
(ب) تغيّر دوري، فبعد أن كان متوسط الدرجات في تزايد مستمر من سنة ٢٠٠٢ حتى ٢٠٠٧، أصبح يتناقص من سنة ٢٠٠٧ حتى ٢٠١٠.



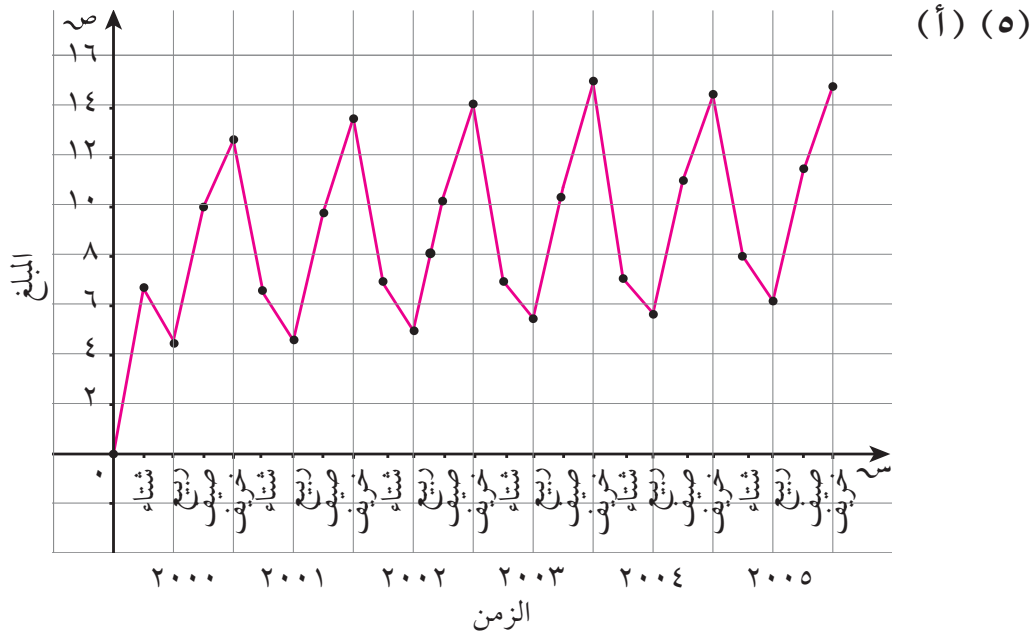
(ب) تتنوّع الإجابات. مثال: شهر ٧ أي شهر يوليو كان حار جداً.



(ب) هناك تغيّر موسمي ففي كل خريف يزداد عدد المرضى ليعود ويتناقص في كل شتاء.

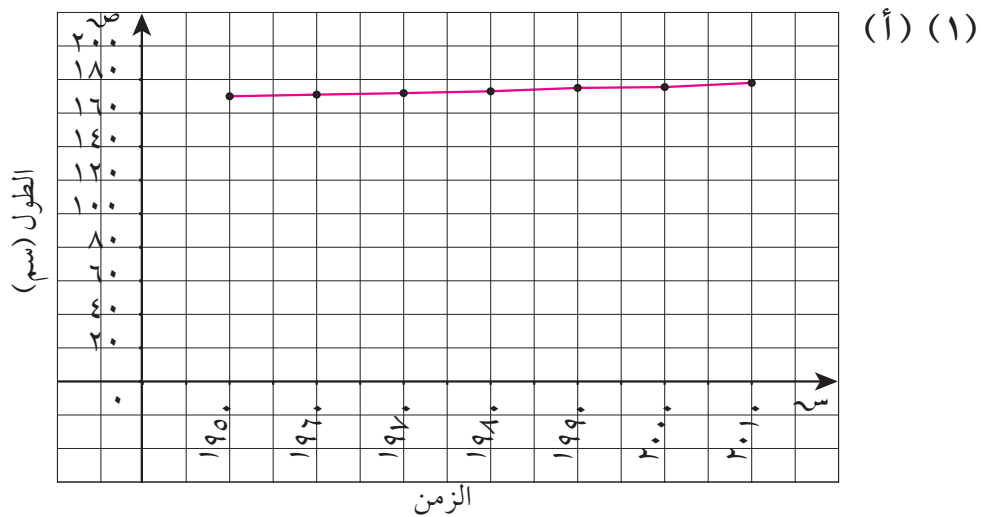


(ب) لا، اتجاه عام للسلسلة الزمنية.



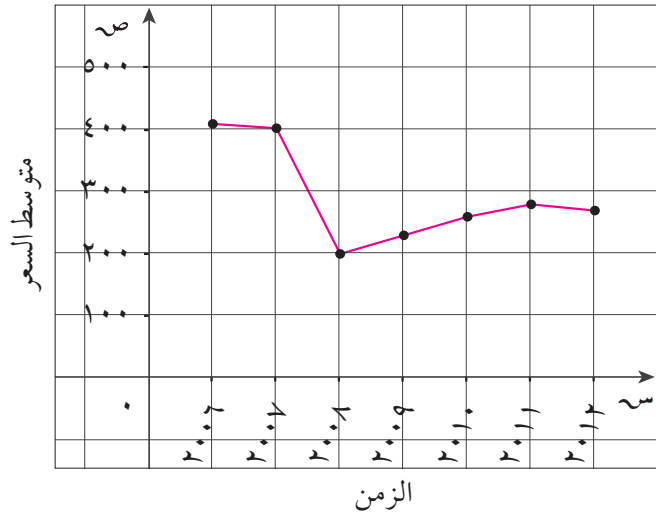
(ب) نعم، الاتجاه العام للسلسلة في تزايد.

المجموعة ب تمارين تعزيزية



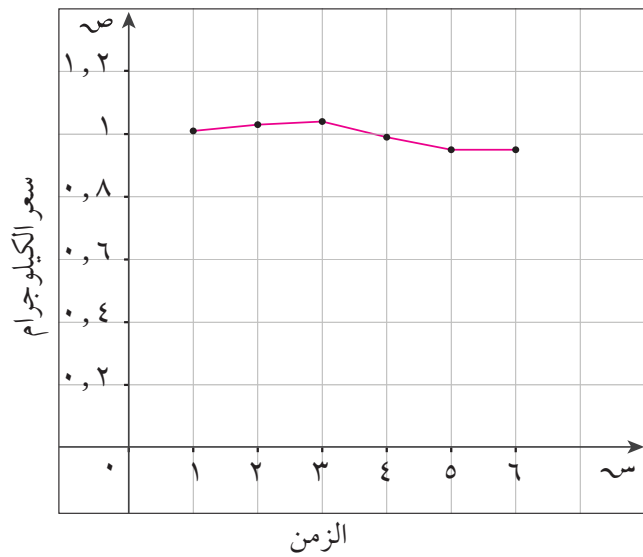
(ب) الاتجاه العام لطول الرجال في هذا البلد في تزايد مستمر.

(أ) (٢)



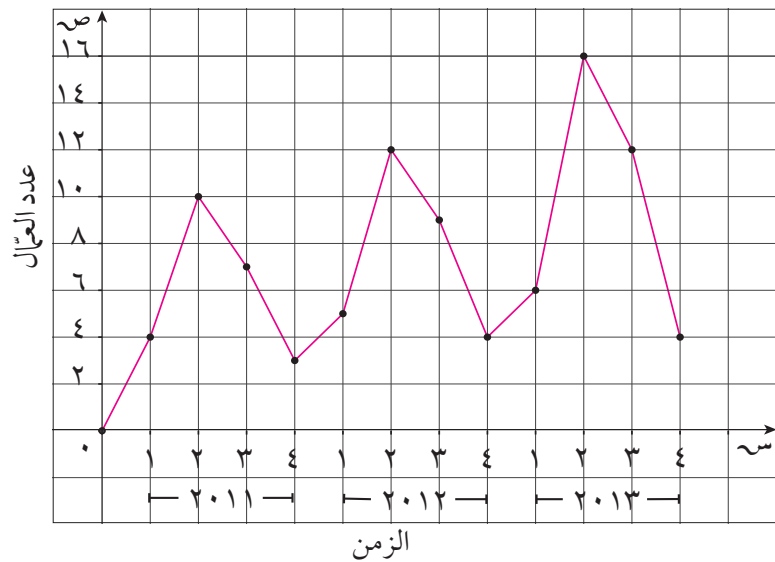
(ب) تغير مفاجئ في سنة ٢٠٠٨ يتمثل بانخفاض جذري لسعر أسهم الشركة.

(أ) (٣)

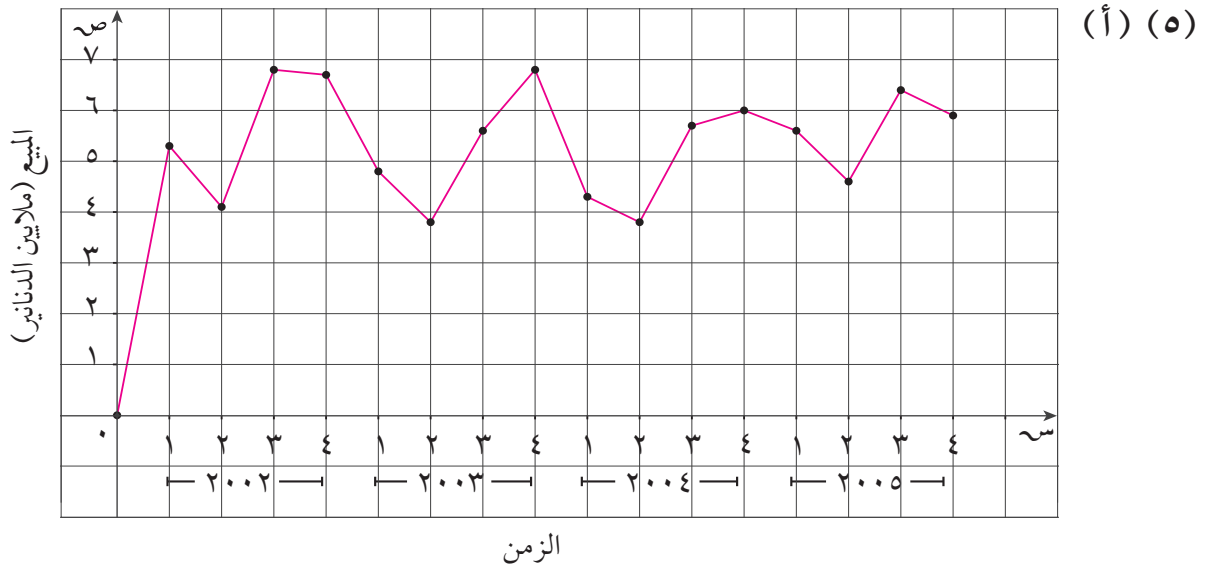


(ب) الاتجاه العام يظهر أن السعر إلى تناقص.

(أ) (٤)



(ب) الاتجاه العام للسلسلة دوري يتزايد في الفصل الثالث.



(ب) الاتجاه العام للسلسلة دوري يتزايد في الشهرين ٣ و ٤.

تمرّن ٣-٣

تحليل السلاسل الزمنية

المجموعة ٢ تمارين أساسية

(١) (أ) $\hat{ص} = ١٢,٦١٩٠ - ٠,٦١٤٣ س$

(ب) $\hat{ص}_{٢٠١٦} = ١٢,٦١٩٠ - ٠,٦١٤٣ \times ١٠ = ٦,٤٧٦$

(ج) مقدار الخطأ = $|\hat{ص}_{٢٠٠٩} - ص_{٢٠٠٩}| = |١٠,٧٧٦١ - ٩| = ١,٧٧٦١$

مقدار الخطأ = $|\hat{ص}_{٢٠١١} - ص_{٢٠١١}| = |١٠,١٦١٨ - ١٠| = ٠,١٦١٨$

(٢) (أ) $\hat{ص} = ٧ + ب س$

$\therefore \hat{ص} = ٤,٥٧١٥ + ١,٣٧١٤ س$

(ب) $\hat{ص} = ٤,٥٧١٥ + ١,٣٧١٤ \times ٧$

$= ١٤,١٧١٣$ أي ١٤ تقريبًا.

(ج) $\hat{ص}_٧ = ٤,٥٧١٥ + ١,٣٧١٤ \times ٢$

$= ٧,٣١٤٣$

$\therefore$ مقدار الخطأ = $|٧,٣١٤٣ - ٧|$

$= ٠,٣١٤٣$

$$(3) (أ) \hat{ص} = ٤٤,٧٦١٩ + ٥,٨٢٨٦ = ٥٠,٥٩٠٥$$

$$(ب) \hat{ص}_{٠.٠٨} = ٨ \times ٥,٨٢٨٦ + ٤٤,٧٦١٩ = ٩١,٣٩٠٧$$

$$(ج) \text{ مقدار الخطأ} = |\hat{ص}_{٠.٠٨} - ص_{٠.٠٨}| = |٩١,٣٩٠٧ - ٧٠,٠٧٦٣| = ٢١,٣١٤٤$$

المجموعة ب تمارين تعزيزية

$$(1) (أ) \hat{ص} = ٢٤,٠٩٥٢ + ٣,٢٢٨٦ = ٢٧,٣٢٣٨$$

$$(ب) \hat{ص}_{٠.٠٨} = ٨ \times ٣,٢٢٨٦ + ٢٤,٠٩٥٢ = ٤٩,٩٢٤٤$$

$$(ج) \text{ مقدار الخطأ} = |\hat{ص}_{٠.٠٨} - ص_{٠.٠٨}| = |٤٩,٩٢٤٤ - ٣٣,٧٨١| = ١٦,١٤٣٤$$

أي أن مقدار الخطأ هو حوالى ١٦١٠٠٠ كيلوجرام.

$$(2) (أ) \hat{ص} = ٧,٤٩٧٦ - ٠,٦٥٥٧ = ٦,٨٤١٩$$

$$(ب) \hat{ص}_{٠.٠٩} = ٩ \times ٠,٦٥٥٧ - ٧,٤٩٧٦ = ١,٥٩٦٣$$

$$(ج) \text{ مقدار الخطأ} = |\hat{ص}_{٠.٠٩} - ص_{٠.٠٩}| = |١,٥٩٦٣ - ٥,٥| = ٣,٩٠٣٧$$

اختبار الوحدة الثالثة

أسئلة المقال

$$(1) (أ) \hat{ص} = ٢٣٧٠,٥٨٣٣ - ١٧,٩١٦٧ = ٢٣٥٢,٦٦٦٦$$

$$(ب) \hat{ص}_{٠.٠٩} = ٩ \times ١٧,٩١٦٧ - ٢٣٧٠,٥٨٣٣ = ١٢٠,٣٣٣٩$$

تقدير سنة ٢٠١٤ هو حوالى ٢٢٠٩ مليون كيلوجرام.

$$(ج) \text{ مقدار الخطأ} = |\hat{ص}_{٠.٠٩} - ص_{٠.٠٩}| = |١٢٠,٣٣٣٩ - ١٣٠٥| = ١١٧,٠٢٨٤$$

أي أن مقدار الخطأ هو حوالى ١٠١٢ مليون كيلوجرام.

$$(2) (أ) \hat{ص} = ١٢٠,٤٢٨٦ + ١٢ = ١٣٢,٤٢٨٦$$

$$(ب) \hat{ص}_{١٧} = ١٧ \times ١٢ + ١٢٠,٤٢٨٦ = ٣٢٤,٤٢٨٦$$

أي أن مقدار المبيعات حوالى ٣٢٤

$$(ج) \text{ مقدار الخطأ} = |\hat{ص}_{١٧} - ص_{١٧}| = |٣٢٤,٤٢٨٦ - ١٦٨,١٤٨| = ١٥٦,٢٨٠٦$$

$$(3) (أ) \hat{ص} = ٦٨ + ٨ + ٤٨, ١س$$

$$(ب) \hat{ص}_{٢٠١٢} = ٦٨ + ٨ + ٤٨ = ١٦, ٠٨ = ٥ \times ١$$

أي أن إنتاج الغاز سنة ٢٠١٢ يقدر بـ $١٦, ٠٨ \times ١٠^٨$ متر مكعب.

بنود الصح والخطأ

(١) (ب)	(٢) (ب)	(٣) (أ)
(٤) (أ)	(٥) (ب)	(٦) (أ)
(٧) (ب)	(٨) (أ)	(٩) (أ)
(١٠) (أ)	(١١) (ب)	(١٢) (ب)
(١٣) (أ)	(١٤) (ب)	(١٥) (أ)
(١٦) (أ)	(١٧) (ب)	(١٨) (ج)
(١٩) (د)	(٢٠) (ب)	(٢١) (ب)
(٢٢) (د)	(٢٣) (د)	(٢٤) (أ)

تمارين إثرائية

$$(1) (أ) \hat{ص} = ١٤٢٩, ١٦٤ - ١٦٤, ٦٠٧١ - ٢س$$

$$(ب) \hat{ص}_{١٢} = ١٤٢٩, ١٦٤ - ١٦٤, ٦٠٧١ - ٢ \times ١٢ = ١٣٢, ٨٥٧٧$$

أي حوالى ١٣٣ راكبًا.

$$(ج) \text{ مقدار الخطأ} = |\hat{ص}_١ - ص_١| = |١٤٢٩, ١٦٤ - ١٥٠| = ١١, ٥٣٥٨$$

$$\text{مقدار الخطأ} = |\hat{ص}_٥ - ص_٥| = |١٤٢٦, ١٠٧٤ - ١٥١| = ٦٨, ٨٩٢٦$$

$$(2) (أ) \hat{ص} = ١٤٢٦, ٢٢٢ + ٢١٤٣, ٥٨س$$

$$(ب) \hat{ص}_١ = ١٤٢٦, ٢٢٢ - ٢٢٢, ٢١٤٣ - ١٠ \times ٥٨ = ٦٠٤, ٢٨٥٦$$

أي عدد الزبائن حوالى ٦٠٤.

$$(ج) \text{ مقدار الخطأ} = |\hat{ص}_٤ - ص_٤| = |١٤٢٦, ٢٢٢ - ٤٥٤| = ١٣٩, ٩٩٩٨$$