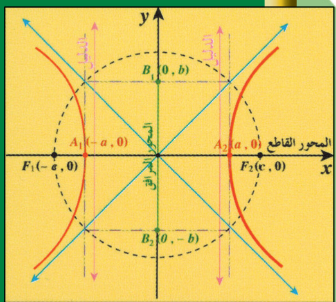
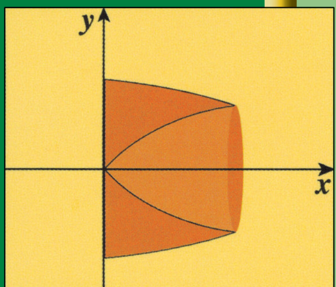
وزارة التربية
Ministry of Education
State of Kuwait | دولـــة الكويـت

الرياضيات

الصفّ الثاني عشر علمي

الفصل الدراسي الثاني - القسم الأول





كتاب الطالب

1/2

المرحلة الثانوية

وزارة التربية
Ministry of Education
State of Kuwait | دولـــة الكويـت

الرياضيات

الصفّ الثا ني عشر علمي

الفصل الدراسي الثاني – القسم الأول

كتاب الطالب

اللجنة الإشرافية لدراسة ومواءمة سلسلة كتب الرياضيات

أ. حسين علي عبدالله (رئيسًا)

حصة يونس محمد علي   أ. فتحية محمود أبو زور

الطبعة الثانية
١٤٤٧ هـ
٢٠٢٥– ٢٠٢٦ م

الطبعة الأولى ٢٠١٤-٢٠١٥ م
الطبعة الثانية ٢٠١٦-٢٠١٧ م
٢٠١٨-٢٠١٩ م
٢٠١٩-٢٠٢٠ م
٢٠٢٠-٢٠٢١ م
٢٠٢١-٢٠٢٢ م
٢٠٢٢-٢٠٢٣ م
٢٠٢٣-٢٠٢٤ م
٢٠٢٤-٢٠٢٥ م
٢٠٢٥-٢٠٢٦م

لجنة دراسة ومواءمة كتب الرياضيات للصف الثاني عشر علمي

أ. حسن نوح علي المهنا (رئيسًا)

أ. صديقة أحمد صالح الأنصاري أ. شيخة فلاح مبارك الحجرف
أ. مجدي محمد يس دراز أ. يحيى عبد السلام خالد عقل

أ. وضحى ابراهيم مزعل الدوسري

مطبعة حكومة دولة الكويت
Government Press - State of Kuwait

أودع بمكتبة الوزارة تحت رقم (١٩) بتاريخ ١٣/ ٤/ ٢٠١٦ م

بسم الله الرحمن الرحيم

حضرة صاحب السمو الشيخ مشعل الأحمد الجابر الصباح
أمير دولة الكويت
H.H. Sheikh Meshal AL-Ahmad Al-Jaber Al-Sabah
Amir Of The State Of Kuwait

سمو الشيخ صباح خالد الحمد الصباح
ولي عهد دولة الكويت

H. H. Sheikh Sabah Khaled Al-Hamad Al-Sabah
Crown Prince Of The State Of Kuwait

مقدمـــــة

الحمدلله رب العالمين، والصلاة والسلام على سيد المرسلين، محمد بن عبدالله وصحبه أجمعين.

عندما شرعت وزارة التربية في عملية تطوير المناهج، استندت في ذلك إلى جملة من الأسس والمرتكزات العلمية والفنية والمهنية، حيث راعت متطلبات الدولة وارتباط ذلك بسوق العمل، وحاجات المتعلمين والتطور المعرفي والعلمي، بالإضافة إلى جملة من التحديات التي تمثلت بالتحدي القيمي والاجتماعي والاقتصادي والتكنولوجي وغيرها، وإن كنا ندرك أن هذه الجوانب لها صلة وثيقة بالنظام التعليمي بشكل عام وليس المناهج بشكل خاص.

ومما يجب التأكيد عليه، أن المنهج عبارة عن كم الخبرات التربوية والتعليمية التي تُقدم للمتعلم، وهذا يرتبط أيضًا بعمليات التخطط والتنفيذ، والتي في محصلتها النهائية تأتي لتحقيق الأهداف التربوية، وعليه أصبحت عملية بناء المناهج الدراسية من أهم مكونات النظام التعليمي، لأنها تأتي في جانبين مهمين لقياس كفاءة النظام التعليمي، فهي من جهة تمثل أحد المدخلات الأساسية ومقياسًا أو معيارًا من معايير كفاءته من جهة أخرى، عدا أن المناهج تدخل في عملية إنماء شخصية المتعلم في جميع جوانبها الجسمية والعقلية والوجدانية والروحية والاجتماعية.

من جانب آخر، فنحن في قطاع البحوث التربوية والمناهج، عندما نبدأ في عملية تطوير المناهج الدراسية، ننطلق من كل الأسس والمرتكزات التي سبق ذكرها، بل إننا نراها محفزات واقعية تدفعنا لبذل قصارى جهدنا والمضي قدمًا في البحث في المستجدات التربوية سواء في شكل المناهج أم في مضامينها، وهذا ما قام به القطاع خلال السنوات الماضية، حيث البحث عن أفضل ما توصلت إليه عملية صناعة المناهج الدراسية، ومن ثم إعدادها وتأليفها وفق معايير عالمية استعدادًا لتطبيقها في البيئة التعليمية.

ولقد كانت مناهج العلوم والرياضيات من أول المناهج التي بدأنا بها عملية التطوير، إيمانًا بأهميتها وانطلاقًا من أنها ذات صفة عالمية، مع الأخذ بالحسبان خصوصية المجتمع الكويتي وبيئته المحلية، وعندما أدركنا أنها تتضمن جوانب عملية التعلم ونعني بذلك المعرفة والقيم والمهارات، قمنا بدراستها وجعلها تتوافق مع نظام التعليم في دولة الكويت، مركزين ليس فقط على الكتاب المقرر ولكن شمل ذلك طرائق وأساليب التدريس والبيئة التعليمية ودور المتعلم، مؤكدين على أهمية التكامل بين الجوانب العلمية والتطبيقية حتى تكون ذات طبيعة وظيفية مرتبطة بحياة المتعلم.

وفي ضوء ما سبق من معطيات وغيرها من الجوانب ذات الصفة التعليمية والتربوية تم اختيار سلسلة مناهج العلوم والرياضيات التي أكملناها بشكل ووقت مناسبين، ولنحقق نقلة نوعية في مناهج تلك المواد، وهذا كله تزامن مع عملية التقويم والقياس للأثر الذي تركته تلك المناهج، ومن ثم عمليات التعديل التي طرأت أثناء وبعد تنفيذها، مع التأكيد على الاستمرار في القياس المستمر والمتابعة الدائمة حتى تكون مناهجنا أكثر تفاعلية.

د. سعود هلال الحربي

الوكيل المساعد لقطاع البحوث التربوية والمناهج

المحتوَياتُ

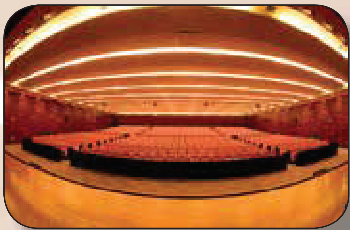
الوحدة الخامسة

التكامل

Integral

مشروع الوحدة: إيجاد مساحة تحت منحنى دالة

1 مقدمة المشروع: تعرّف الطلاب قوانين إيجاد مساحات أشكال هندسيّة مثل: المربع، المستطيل، المثلث، متوازي الأضلاع، الدائرة... ولكن كيف يمكن إيجاد مساحة منطقة محددة بمنحنى دالة ومحور السينات في فترة معينة.

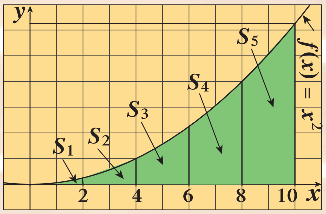


2 الهدف: يريد متعهد تقدير مساحة إحدى المنطقتين المحصورة بين مدرّج مسرح يمثل قطعًا مكافئًا معادلته: $y = x^2$ ومستوى الأرض، علمًا أن طول الممر $10\ m$ من كل جهة ونمثله على مستوى الإحداثيات.

3 اللوازم: آلة حاسبة بيانية — حاسوب — أوراق رسم.

4 أسئلة حول التطبيق:

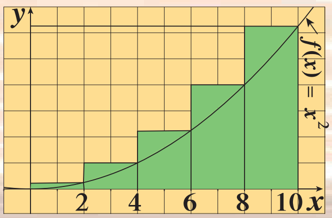
a ارسم منحنى الدالة $f : f(x) = x^2$ على الفترة المغلقة $[0\,,10]$، لتكن S المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة ومحور السينات و $x = 10$, $x = 0$.



شكل (1)

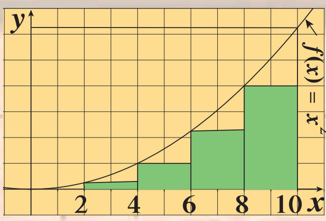
b اقسم الفترة المغلقة $[0\,,10]$ إلى خمسة أجزاء متساوية بحيث أن طول كل جزء يساوي 2. (لاحظ أن: $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5$). انظر الشكل (1).

c استخدم أطوال الفترات الجزئية: $[8,10]$، $[6,8]$، $[4,6]$، $[2,4]$، $[0,2]$ كأطوال لأضلاع مستطيلات حيث ارتفاع كل مستطيل يحقق: $y = x^2$ وذلك من جهة اليمين لكل فترة جزئية (انظر الشكل 2). احسب قيمة R_5 حيث إن R_5 هو مجموع مساحات المستطيلات الخمسة اليمنى. (تسمى أيضًا المجاميع العليا للمساحة الأساسية S).



شكل (2)

d استخدم أطوال الفترات الجزئية: $[8,10]$، $[6,8]$، $[4,6]$، $[2,4]$، كأطوال لأضلاع مستطيلات حيث إن ارتفاع كل مستطيل يحقق: $y = x^2$ وذلك من جهة اليسار لكل فترة جزئية (انظر الشكل 3). احسب قيمة L_5 حيث إن L_5 هو مجموع مساحات المستطيلات الأربعة اليسرى. (تسمى أيضًا المجاميع السفلى للمساحة الأساسية S).



شكل (3)

e اكتب متباينة تحدد العلاقة بين R_5، S، L_5.

f استخدم الخطوات السابقة في حالة تقسيم $[0\,,10]$ إلى 10 أجزاء متساوية الطول. ثم اكتب متباينة تحدد العلاقة بين R_{10}، S، L_{10}.

g أكمل الجدول التالي: حيث n عدد فترات التجزيء.

n	R_n	L_n
5		
10		
20		
50		
100		

اكتب متباينة تحدد العلاقة بين R_n، S، L_n في كل حالة. ماذا تلاحظ؟

5 التقرير: اكتب تقريرًا مفصلًا يبيّن حساباتك والنتائج التي توصلت إليها. اشرح ماذا يحدث كلما كبرت n بلا حدود $(n \to \infty)$.

دروس الوحدة

التكامل غير المحدد	التكامل بالتعويض	تكامل الدوال المثلثية	الدوال الأسية واللوغاريتمية	التكامل بالتجزيء	التكامل باستخدام الكسور الجزئية	التكامل المحدد
5–1	5–2	5–3	5–4	5–5	5–6	5–7

الوحدة الخامسة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

تعلمت:

- تحديد الفترات التي تكون عليها الدالة معرفة.
- تحديد الفترات التي تكون عليها الدالة متصلة.
- إيجاد متوسط معدل التغير لدالة على فترة معينة.
- إيجاد معدل التغير اللحظي لدالة في لحظة معينة.
- إيجاد ميل المماس عند نقطة لبيان الدالة.
- إيجاد ميل الخط العمودي على المماس عند نقطة لبيان الدالة.
- إيجاد مشتقة دالة على الفترة التي تكون فيها معرّفة ومتصلة.
- دراسة سلوك بيان الدالة باستخدام مشتقتها.
- إيجاد القيم القصوى المحلية والمطلقة لدالة على فترة معينة.
- إيجاد المشتقة الثانية ومن الرتب العليا.
- دراسة تقعر منحنى الدالة.
- اختبار المشتقة الثانية.

ماذا سوف تتعلم؟

- تعرّف المشتقة العكسية لدالة متصلة والربط مع مشتقة هذه الدالة.
- استخدام التكامل غير المحدد وجدول التكاملات وخواص التكامل.
- إيجاد تكامل الدوال المثلثية.
- إيجاد مشتقة دالة أسيّة ومشتقتها العكسية.
- إيجاد مشتقة دالة لوغاريتمية ومشتقتها العكسية.
- حساب التكامل بالتعويض.
- حساب التكاملات باستخدام التجزيء.
- تفكيك حدودية نسبية إلى كسور جزئية.
- إيجاد تكاملات بعض الدوال النسبية.
- تعرف التكامل المحدد وخواصه.

المصطلحات الأساسية

التكامل غير المحدد — مشتقة عكسية — ثابت التكامل — تكامل الدوال المثلثية — مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية — تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية — قابلية الاشتقاق — قاعدة القوى للتكامل — التكامل بالتعويض والتجزيء — الكسور الجزئية — عوامل خطية ومن الدرجة الثانية — التكامل المحدد — خواص التكامل المحدد — التفسير البياني للتكامل المحدد — المساحة.

أضف إلى معلوماتك

عمر الخيّام وأبو الوفاء البوزجاني زادا على بحوث الخوارزميّ في الجبر زيادة تعدّ أساسًا لعلاقة الجبر بالهندسة، وقد مهّدت لعلماء أوروبا بالهندسة التحليليّة التي قادت إلى التكامل والتفاضل، وعليه قامت أكثر الاختراعات والاكتشافات العلميّة.

حساب التكامل: تستطيع أن تعتبر أن ثابت بن قرّة والكوهي ومن بعدهما ابن الهيثم، قد ساهموا في نشأة حساب التكامل الحديث. دفعهم إلى ذلك حساب حجم المجسّم الناشئ عن دوران قطعة من قطع مكافئ حول محور ما.

ابتكر ثابت بن قرة، ولأوّل مرّة في تاريخ البشريّة، نوعًا من الحساب يُكافئ حساب التكامل الذي نعرفه في الوقت الحاضر، وذلك قبل نيوتن بمئات السنين. أمّا نوع التكامل الذي أحرزه فهو من نوع $\int_0^a x^n\,dx$ قيمة أسيّة تساوي الوحدة، أي التكامل $M\int_a^b x\,dx$ عندما تعرض لحساب عزم كتلة قضيب متجانس ساكن بالنسبة إلى أحد المحاور. وأثبت أن العزم الكليّ يساوي مجموع العزوم الأولية.

عمر الخيام: عالم وفيلسوف وشاعر، تخصص في الرياضيات والفلك واللغة والفقه. وهو أول من اخترع طريق حساب المثلثات والمعادلات الجبرية من الدرجة الثالثة.

5–1

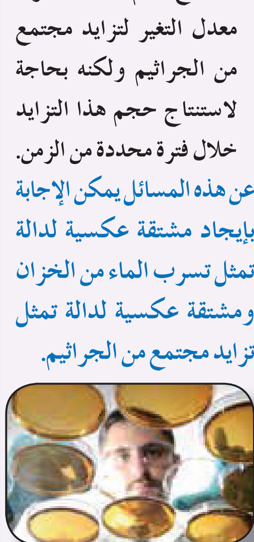
التكامل غير المحدد
Indefinite Integral

سوف تتعلم
- المشتقة العكسية.
- التكامل غير المحدد.
- مصطلحات التكامل ورموزه.
- قواعد التكامل غير المحدد.
- خواص التكامل غير المحدد.

المفردات و المصطلحات:
- مشتقة عكسية Antiderivative
- تكامل غير محدد Indefinite Integral
- قاعدة القوى Power Rule
- خاصية الضرب بعدد ثابت Constant Multiple Property
- خاصية الجمع والطرح Sum and Difference Property

هل تعلم؟
- يستطيع المهندس قياس معدل التغير لتسرب الماء من الخزان، ولكنه يريد معرفة كمية الماء التي تتسرب من هذا الخزان خلال فترة محددة من الزمن.
- يستطيع عالم الأحياء معرفة معدل التغير لتزايد مجتمع من الجراثيم ولكنه بحاجة لاستنتاج حجم هذا التزايد خلال فترة محددة من الزمن.

عن هذه المسائل يمكن الإجابة بإيجاد مشتقة عكسية لدالة تمثل تسرب الماء من الخزان ومشتقة عكسية لدالة تمثل تزايد مجتمع من الجراثيم.



دعنا نفكر ونتناقش

أكمل الجداول التالية:

a

المشتقة $F'(x) =$	الدالة $F(x) =$
	$x^2 - 1$
	$x^2 + 5$
	$x^3 + 4$
	$x^3 - 2$

b

المشتقة $F'(x) =$	الدالة $F(x) =$
$2x$	
$3x^2$	
5	
x^3	

c هل يمكن إيجاد $F(x)$ أخرى في الجزء **b** بحيث يكون لها المشتقة نفسها؟

من فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» في الجزء **a** أوجدنا F' مشتقة دالة معلومة F باستخدام قواعد الاشتقاق، أمّا في الجزء **b** أوجدنا دالة F بمعلومية مشتقتها F' وذلك بعكس ما تمّ في الجزء **a** وتسمى الدالة F مشتقة عكسية (دالة مقابلة).

تعريف: المشتقة العكسية **Antiderivative**

تسمى الدالة F مشتقة عكسية للدالة f المعرفة على مجالها I.

إذا كان: $\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$

استنادًا إلى هذا التعريف:

إذا كان $f(x) = x$ فيمكن أن تكون: $F(x) = \frac{x^2}{2}$ مشتقة عكسية للدالة f.

لأن: $F'(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)x^{2-1}$

$= x = f(x)$ باستخدام قاعدة القوى لاشتقاق الدالة

وأيضًا يمكن أن تكون $F(x) = \frac{x^2}{2} + 4$ مشتقة عكسية لها لأن

$F'(x) = x = f(x)$ (مشتقة الثابت تساوي الصفر)،

كما أن $F(x) = \frac{x^2}{2} + 50$ يمكن أن تكون مشتقة عكسية أخرى لها لأن $F'(x) = x = f(x)$.

ملاحظة: سنتعامل في دراستنا مع دوال متصلة على فترات معينة.

نظرية (1)

إذا كانت F مشتقّة عكسيّة للدالّة f على الفترة I، G مشتقّة عكسيّة أيضًا للدالّة f على الفترة I فإنّ:

$$G(x) = F(x) + C \qquad \forall x \in I$$

حيث C ثابت.

البرهان:

$\because$ F مشتقّة عكسيّة للدالّة f	$\therefore \; F'(x) = f(x) \quad , \quad x \in I$
$\because$ G مشتقّة عكسيّة للدالّة f	$\therefore \; G'(x) = f(x) \quad , \quad x \in I$
بفرض أن:	$H(x) = G(x) - F(x)$
باستخدام خواصّ الاشتقاق نجد:	$H'(x) = G'(x) - F'(x)$
أي:	$H'(x) = f(x) - f(x)$
	$H'(x) = 0$
مشتقة الثابت تساوي الصفر	$H(x) = C$
	$\therefore \; G(x) - F(x) = C$
نستنتج أنّ:	$G(x) = F(x) + C$

نظرية (2)

إذا كانت F مشتقة عكسية لِـ f على الفترة I فإن الصورة العامة للمشتقة العكسية لِـ f على الفترة I هي:

$$F(x) + C$$

حيث C ثابت اختياري

من النظرية (2) نستنتج أنه يوجد عدد لا نهائي من المشتقات العكسية للدالة f.

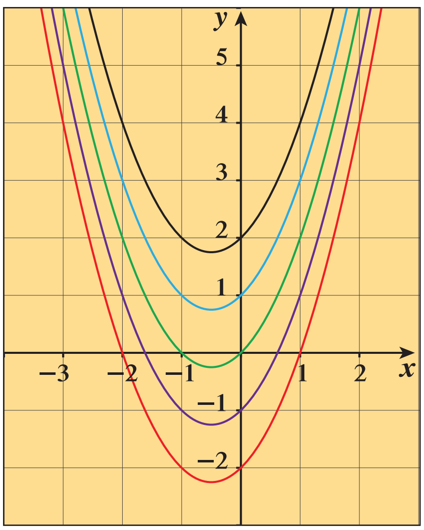
فمثلًا:

إذا كانت $f(x) = 2x + 1$ فإن الصورة العامة لمشتقتها العكسية

هي: $F(x) = x^2 + x + C$ حيث C ثابت.

ويبيّن الشكل المقابل بيانات بعض المشتقات العكسية F

عندما يأخذ الثابت C القيم 2 , 1 , 0 , -1 , -2



مثال (1)

أثبت أن: $F(x) = x^3 + 5x + 3$ هي مشتقة عكسية للدالة: $f(x) = 3x^2 + 5$
ثم اكتب الصورة العامة للمشتقة العكسية.

الحل:

$$F(x) = x^3 + 5x + 3$$
$$F'(x) = 3x^2 + 5$$
$$= f(x)$$

$\therefore$ F هي مشتقة عكسية للدالة f

الصورة العامة للمشتقة العكسية هي:

$F(x) = x^3 + 5x + C$ حيث C ثابت

حاول أن تحل

1 أثبت أن: $F(x) = 5 - \frac{1}{3}x^3$ هي مشتقة عكسية للدالة $f(x) = -x^2$
ثم اكتب مشتقة عكسية أخرى لها.

مثال (2)

أثبت أن: $F(x) = x^2 - \frac{1}{x}$ هي مشتقة عكسية للدالة: $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$

الحل:

$$F(x) = x^2 - \frac{1}{x}$$
$$F'(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$$
$$= f(x)$$

$\therefore$ F هي مشتقة عكسية للدالة f

حاول أن تحل

2 أثبت أن: $F(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2}$ هي مشتقة عكسية للدالة: $f(x) = 1 - \frac{2}{x^3}$

تعريف: التكامل غير المحدد **Indefinite Integral**

التكامل غير المحدد للدالّة f بالنسبة إلى x هو مجموعة كل المشتقّات العكسيّة F ، ويكتب على الصورة:

$$\int f(x)\,dx$$

ملاحظة:
إذا طُلب إيجاد مشتقة عكسية للدالة f فيمكن اعتبار $C = 0$.

تذكر:
مشتقة الثابت C هي صفر.

الرمز $\int$ يعبّر عن **علامة التكامل**، الدالّة f هي **الدالّة المكاملة** في التكامل، x **متغيّر التكامل**.

أي أنّ: $\int f(x)dx = F(x) + C$

وتقرأ:

التكامل غير المحدد للدالّة f بالنسبة إلى x هو $F(x) + C$.

حيث $F(x) + C$ هي مجموعة كل المشتقات العكسية F.

الثابت C هو **ثابت التكامل** وهو **ثابت اختياريّ**، وعندما نحصل على $F(x) + C$ نقول إنّنا **كاملنا** f أو **أوجدنا تكامل** f.

ملاحظة:

الدّالة التي يجري تكاملها

$\int f(x)\, dx$

رمز التكامل

x متغيّر التكامل

قواعد التكامل غير المحدد — Rules of Indefinite Integral

1. $\int k\, dx = kx + C$ k عدد ثابت
2. قاعدة القوى: $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad , \quad n \in Q - \{-1\}$

خواص التكامل غير المحدد — Properties of Indefinite Integral

1. خاصية الضرب بعدد ثابت: $\int k\, f(x)\, dx = k \int f(x) dx \quad , \quad k \neq 0$
2. خاصية الجمع والطرح: $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

ملاحظات:

a. $\int -f(x) dx = -\int f(x) dx$

b. $\int (f(x) + k) dx = \int f(x) dx + \int k\, dx$

مثال (3)

أوجد:

a. $\int 5dx$ b. $\int 4x^3\, dx$

الحل:

a. $\int 5\, dx = 5x + C$

b. $\int 4x^3 dx = 4 \int x^3 dx$

$$= 4\left(\frac{x^{3+1}}{3+1}\right) + C = x^4 + C$$

حاول أن تحل

3. أوجد:

a. $\int 15\, dx$ b. $\int 5x^4 dx$

تمكننا قاعدة الجمع والطرح في التفاضل من اشتقاق المقادير حدًّا حدًّا، كما تمكّننا هذه القاعدة في التكامل من مكاملة المقادير حدًّا حدًّا، وعندما نفعل ذلك **ندمج ثوابت التكامل الكثيرة الموجودة في ثابت اختياري واحد** في نهاية الحل.

مثال (4)

احسب: $\int (x^2-2x+5)dx$

الحل:

$$\int (x^2-2x+5)dx = \int x^2dx - \int 2x\,dx + \int 5\,dx$$

$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

$$= \frac{x^3}{3} + C_1 - 2\frac{x^2}{2} + C_2 + 5x + C_3$$

$$= \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C$$

ادمج C_3 , C_2 , C_1 في ثابت واحد

حاول أن تحل

4 احسب: $\int (3x^2-4x-1)dx$

مثال (5)

أوجد التكاملات غير المحددة التالية:

a $\int \frac{1}{x^2}dx$

b $\int \frac{x^2-4x+3}{x-1}dx$

c $\int \left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)^2 dx$

الحل:

a $\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx$

$$= \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C$$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad , \quad n \in Q - \{-1\}$

$$= \frac{x^{-1}}{-1} + C$$

$$= \frac{-1}{x} + C$$

b $\int \frac{x^2-4x+3}{x-1}dx = \int \frac{(x-3)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}}dx$

$$= \int (x-3)dx$$

قاعدة الطرح في التكامل

$$= \frac{x^2}{2} - 3x + C$$

c $\int \left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)^2 dx = \int (1-2x^{-2})^2 dx$

$\frac{x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2} = 1 - 2x^{-2}$

$$= \int (1-4x^{-2}+4x^{-4})dx$$

بسّط

$$= x + \frac{4}{x} - \frac{4}{3x^3} + C$$

حاول أن تحل

5 أوجد التكاملات غير المحددة التالية:

a $\int (2x-3)(x+4)dx$

b $\int \frac{x^2+5x+4}{x+1}dx$

c $\int \left(\frac{3x^2-x}{x}\right)^2 dx$

مثال (6)

أوجد:

a $\int \sqrt{x}\,dx$

b $\int \sqrt[5]{x^2}\,dx$

c $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$

الحل:

a $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$

$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$

$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad , \quad n \in Q - \{-1\}$

b $\int \sqrt[5]{x^2}\,dx = \int x^{\frac{2}{5}}\,dx = \frac{x^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} + C$

$= \frac{5}{7}x^{\frac{7}{5}} + C = \frac{5}{7}x\sqrt[5]{x^2} + C$

$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad , \quad n \in Q - \{-1\}$

c $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1}dx = \int \frac{\cancel{(\sqrt[3]{x}+1)}(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)dx}{\cancel{(\sqrt[3]{x}+1)}}$

$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

$= \int (\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)dx$

$= \int (x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} + 1)dx$

قاعدة الجمع والطرح

$= \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + x + C$

$= \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + x + C$

حاول أن تحل

6 أوجد:

a $\int x\sqrt{x}\,dx$

b $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

c $\int \frac{x^2-3x}{\sqrt[3]{x}}dx$

يمكن تحديد واحدة من المشتقات العكسية عندما يتوفر شرط يمكننا من إيجاد قيمة الثابت C.

مثال (7)

إن كان: $F(x) = \int (2x-3)dx$ ، $F(3) = 2$ فأوجد $F(x)$

الحل:

$$F(x) = \int (2x-3)dx = \int 2xdx - \int 3dx$$
$$= x^2 - 3x + C$$

لإيجاد قيمة الثابت C نستخدم القيمة المعطاة: $F(3) = 2$

عوِّض عن x بـ 3 وعن $F(3)$ بـ 2

$$2 = (3)^2 - 3(3) + C$$
$$2 = 9 - 9 + C$$

ومنه

$$C = 2$$

فيكون:

$$F(x) = x^2 - 3x + 2$$

حاول أن تحل

7 إذا كان: $F(x) = \int (2x+5)dx$ ، $F(-1) = 0$ فأوجد $F(x)$

مثال (8)

ألقيت كرة إلى الأعلى بسرعة ابتدائية 15 m/s من سطح برج ارتفاعه 140 m عن سطح الأرض.

a في أي زمن t سوف تصل الكرة إلى أعلى ارتفاع؟

b في أي زمن t سوف تصل الكرة إلى الأرض؟ (علمًا بأن عجلة الجاذبية الأرضية $a(t) = 9.8\ \text{m/s}^2$)

الحل:

a بما أن الكرة ألقيت إلى الأعلى فإن الحركة رأسية ونختار الاتجاه الموجب إلى الأعلى.

في الزمن t ثانية المسافة فوق سطح الأرض هي $s(t)$ والسرعة المتجهة $v(t)$ هي تناقصية وبالتالي العجلة سالبة لذا:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -9.8$$

بمكاملة الطرفين بالنسبة إلى t

$$v(t) = \int a(t)dt = \int -9.8dt$$
$$v(t) = -9.8t + C$$

ولكن $v(0) = 15$ لذا:

$$15 = -9.8(0) + C$$

ومنه:

$$C = 15$$

ويكون:

$$v(t) = -9.8t + 15$$

تصل الكرة إلى أعلى ارتفاع عندما $v(t) = 0$

$$-9.8t + 15 = 0 \Longrightarrow t = \frac{15}{9.8}$$
$$t \approx 1.53\ s$$

b نوجد $s(t)$

$$s(t) = \int v(t)dt$$

$$= \int (-9.8t + 15)dt$$

$$= -\frac{9.8t^2}{2} + 15t + C = -4.9t^2 + 15t + C$$

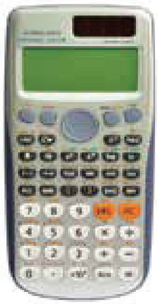
$$\because \; s(0) = 140$$

$$-4.9(0)^2 + 15(0) + C = 140$$

$$\therefore \; C = 140$$

$$s(t) = -4.9t^2 + 15t + 140$$

تصل الكرة إلى سطح الأرض عندما $s(t) = 0$ أي:



$$-4.9t^2 + 15t + 140 = 0$$

باستخدام قانون حل المعادلة التربيعية

$$t = \frac{-15 \pm \sqrt{2\,969}}{-9.8} \implies t \approx 7.1\,s$$

أي تصل الكرة إلى سطح الأرض بعد مرور $7.1\,s$ تقريبًا

حاول أن تحل

8 ألقيت كرة إلى الأعلى بسرعة ابتدائية 12 m/s من على سطح أحد الأبنية ارتفاعه 80 m عن سطح الأرض.

a في أي زمن t سوف تصل الكرة إلى أعلى ارتفاع؟

b في أي زمن t سوف تصل الكرة إلى الأرض؟

(علمًا بأن عجلة الجاذبية الأرضية $a(t) = 9.8\text{ m/s}^2$)

معلومة:

- دالة العجلة $a(t)$ تنتج من اشتقاق دالة السرعة $v(t)$ أي أن: $v'(t) = a(t)$.
- دالة السرعة $v(t)$ تنتج من اشتقاق دالة الإزاحة $s(t)$ أي أن: $v(t) = s'(t)$.

معلومة:

$$s(t) = \int v(t)\,dt$$

$$v(t) = \int a(t)\,dt$$

5–2

التكامل بالتعويض

Integration by Substitution

سوف تتعلم

- التكامل بالتعويض.

المفردات والمصطلحات:

- التكامل بالتعويض

Integration by substitution

دعنا نفكر ونتناقش

a أثبت أن: $F(x) = \frac{1}{5}(x^2+1)^5$ هي مشتقة عكسية للدالة: $f(x) = 2x(x^2+1)^4$

b استفد من a في إيجاد $\int 2x(x^2+1)^4 dx$

c ما العلاقة بين $2x$ ، x^2+1؟

d ضع $g(x) = x^2+1$ ثم أوجد $g'(x)$.

e اكتب التكامل في b وناتجه باستخدام الرموز في d.

f ماذا تلاحظ؟

معلومة:
إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق بدلالة المتغير x فإن التفاضل هو:

$$\frac{df}{dx} = f'(x)$$

$$df = f'(x)\,dx$$

في بعض الأحيان لا تمكننا القواعد الأساسية للتكامل غير المحدد من إيجاد تكامل دالة ما كما لاحظنا في فقرة «دعنا نفكر ونتناقش».

ولإيجاد هذا التكامل نتعامل مع متغير جديد. نستبدل المتغير x بالمتغير u بهدف استخدام القواعد الأساسية للتكامل غير المحدد.

فمثلاً لإيجاد: $\int 2x\sqrt{4+x^2}\,dx$

نرمز للمجذور بـ u أي $u = 4+x^2$ ثم نفاضل لنحصل على: $du = 2x\,dx$ وبالتالي نكتب:

$$\int 2x\sqrt{4+x^2}\,dx = \int \sqrt{4+x^2}\,(2x\,dx) = \int \sqrt{u}\,du$$

$$= \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3}(4+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3}(4+x^2)\sqrt{4+x^2} + C$$

قاعدة التكامل بالتعويض **Rule of Integration by Substitution**

إذا كانت F هي مشتقة عكسية للدالة f فإن:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

وإذا كان $u = g(x)$ ، $du = g'(x)\,dx$ فإن:

$$\int f(u)\,du = F(u) + C$$

مثال (1)

أوجد:

a $\int (x^2+2x+5)^3(2x+2)dx$

b $\int \frac{\left(\frac{1}{x}+4\right)^5}{x^2}dx$

الحل:

a $\int (x^2+2x+5)^3(2x+2)dx$

$u = x^2+2x+5$

قاعدة التفاضل

$du = (2x+2)dx$

بالتعويض

$$\int (x^2+2x+5)^3(2x+2)dx = \int u^3 du$$

$$= \frac{u^4}{4}+C$$

$$= \frac{(x^2+2x+5)^4}{4}+C$$

$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}+C \quad , \quad n \in Q+\{1\}$

b $\int \frac{\left(\frac{1}{x}+4\right)^5}{x^2}dx$

$u = \frac{1}{x}+4$

قاعدة التفاضل

$du = -\frac{1}{x^2}dx \Longrightarrow -du = \frac{dx}{x^2}$

$$\int \frac{\left(\frac{1}{x}+4\right)^5}{x^2}dx = \int -u^5\, du$$

بالتعويض

$$= -\frac{u^6}{6}+C$$

$$= -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{x}+4\right)^6+C$$

$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}+C \quad , \quad n \in Q-\{-1\}$

حاول أن تحل

1 أوجد:

a $\int (x^3+4x^2+x)^7(3x^2+8x+1)dx$

b $\int \sqrt[3]{x^2-5x+2}\;(2x-5)\,dx$

تمكننا قاعدة التكامل بالتعويض من تعميم قاعدة القوى في التكامل غير المحدد كالتالي:

$$\int (g(x))^n g'(x)dx = \frac{(g(x))^{n+1}}{n+1}+C \quad , \quad n \in \mathrm{Q}-\{-1\} \quad , \quad \text{ثابت } C$$

مثال (2)

أوجد:

a $\int \sqrt{4x-5}\,dx$

b $\int \frac{5}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^3}dx$

الحل:

a $\int \sqrt{4x-5}\,dx = \int (4x-5)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$g(x) = 4x-5$

$g'(x) = 4$

$$\therefore \int (4x-5)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{4}\int 4(4x-5)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (g(x))^{\frac{1}{2}}\,g'(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{(4x-5)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{12}(4x-5)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{(4x-5)^3} + C$$

b $\int \frac{5}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^3}\,dx$

$u = \sqrt{x}+2$

قاعدة التفاضل

$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \Longrightarrow 2du = \frac{dx}{\sqrt{x}}$

$$\int \frac{5}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^3}\,dx = \int \frac{5}{u^3}(2\,du)$$

بالتعويض

$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C\,,\ n \in Q - \{-1\}$

$$\int \frac{10}{u^3}du = 10\int u^{-3}\,du$$

$$= -5u^{-2} + C$$

$$= \frac{-5}{(\sqrt{x}+2)^2} + C$$

حاول أن تحل

2 أوجد:

a $\int \sqrt[5]{(3x+7)}\,dx$

b $\int \frac{3(\sqrt[3]{x}-5)\,dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

مثال (3)

أوجد: $\int x(x+1)^5\,dx$

الحل:

$u = x+1 \Longrightarrow x = u-1$

قاعدة التفاضل

$du = dx$

بالتعويض

$$\int x(x+1)^5 dx = \int (u-1)u^5 du$$
$$= \int (u^6 - u^5) du$$
$$= \frac{u^7}{7} - \frac{u^6}{6} + C$$
$$= \frac{(x+1)^7}{7} - \frac{(x+1)^6}{6} + C$$

$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad , \quad n \in Q - \{-1\}$

حاول أن تحل

3 أوجد: $\int x(2x-1)^3 dx$

مثال (4)

أوجد: $\int x^5 \sqrt{4-x^2}\, dx$

الحل:

$u = 4 - x^2 \Longrightarrow x^2 = 4 - u$

قاعدة التفاضل

$du = -2x\, dx \Longrightarrow x\, dx = -\frac{1}{2} du$

$x^5 = x^4 \cdot x$

$$\int \sqrt{4-x^2}(x^4)(x\, dx) = \int \sqrt{4-x^2}(x^2)^2 (x\, dx)$$

بالتعويض

$$= \int \sqrt{u}(4-u)^2 \left(-\frac{1}{2} du\right)$$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$= \int -\frac{1}{2}\sqrt{u}(16 - 8u + u^2) du$$
$$= \int \left(-8u^{\frac{1}{2}} + 4u^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}u^{\frac{5}{2}}\right) du$$
$$= \frac{-8}{\frac{3}{2}} u^{\frac{3}{2}} + \frac{4u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}\frac{u^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + C$$
$$= \frac{-16}{3} u^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{5} u^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{7} u^{\frac{7}{2}} + C$$
$$= -\frac{16}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{5}(4-x^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{7}(4-x^2)^{\frac{7}{2}} + C$$

حاول أن تحل

4 أوجد: $\int x^5 \sqrt{3+x^2}\, dx$

تكامل الدوال المثلثية

Integral of Trigonometric Functions

سوف تتعلم

- قواعد المكاملة المثلثية.

المفردات والمصطلحات:

- قواعد Rules
- قواعد المكاملة المثلثية Trigonometric Integral Rules

دعنا نفكر ونتناقش

يتحرك جسيم على محور السينات حيث إن موقعه عند أي لحظة $t \geqslant 0$ يعطى بالدالة: $s(t) = \sin t$. أوجد:

a السرعة اللحظية للجسيم كدالة في t.

b العجلة للجسيم كدالة في t.

الجدول أدناه يبيّن قواعد التكامل غير المحدد لبعض الدوال المثلثية جنبًا إلى جنب مع مصادر المشتقة لكل منها.

	التكامل غير المحدد
1	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
2	$\int \sin kx\, dx = -\dfrac{\cos kx}{k} + C$
3	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$
4	$\int \cos kx\, dx = \dfrac{\sin kx}{k} + C$
5	$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$
6	$\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$
7	$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$
8	$\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + C$

تذكر:

$\dfrac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$

$\dfrac{d}{dx}\left(-\dfrac{\cos kx}{k}\right) = \sin kx$

$\dfrac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\sin kx}{k}\right) = \cos kx$

$\dfrac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$

$\dfrac{d}{dx}(-\cot x) = \csc^2 x$

$\dfrac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$

$\dfrac{d}{dx}(-\csc x) = \csc x \cot x$

يمكن تطبيق قواعد التكامل التي تم دراستها عند تكامل الدوال المثلثية.

معلومة:

- دالة السرعة $v(t)$ تنتج من اشتقاق دالة الإزاحة $s(t)$ أي أن: $v(t) = s'(t)$.
- دالة العجلة $a(t)$ تنتج من اشتقاق دالة السرعة $v(t)$ أي أن: $v'(t) = a(t)$.

مثال (1)

أوجد التكاملات غير المحددة التالية:

a $\int (\sin x + \sec^2 x)dx$

b $\int \csc x(\cot x + \csc x)dx$

c $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x}$

الحل:

a $\int (\sin x + \sec^2 x)dx$

$= -\cos x + \tan x + C$ قواعد تكامل الدوال المثلثية

b $\int \csc x(\cot x + \csc x)dx$

$= \int \csc x \cdot \cot x\, dx + \int \csc^2 x\, dx$ قاعدة الجمع والطرح

$= -\csc x + C_1 - \cot x + C_2$

$= -\csc x - \cot x + C$ قواعد تكامل الدوال المثلثية

$(C_1 + C_2 = C)$

c $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$ قواعد تكامل الدوال المثلثية

حاول أن تحل

1 أوجد التكاملات غير المحددة التالية:

a $\int (\cos x + \csc^2 x)dx$

b $\int \sec x(\tan x + \sec x)dx$

c $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$

مثال (2)

أوجد:

a $\int \cos 4x\, dx$

b $\int (2x - \sin 3x)dx$

c $\int x\csc^2(x^2 - 1)dx$

الحل:

a $\int \cos 4x\, dx = \frac{1}{4}\sin 4x + C$

b $\int (2x - \sin 3x)dx = x^2 + \frac{1}{3}\cos 3x + C$

c $\int x\csc^2(x^2 - 1)dx$

$u = x^2 - 1$

$du = 2x\, dx \Longrightarrow x\, dx = \frac{1}{2}du$

$\int x\csc^2(x^2 - 1)dx$

$= \frac{1}{2}\int \csc^2 u\, du = -\frac{1}{2}\cot u + C$ قواعد تكامل الدوال المثلثية

$= -\frac{1}{2}\cot(x^2 - 1) + C$

حاول أن تحل

2 أوجد:

a $\int \sin 5x\, dx$

b $\int (x^2 + \cos 2x)dx$

c $\int x\sec^2(x^2 + 2)dx$

مثال (3)

أوجد:

b $\int \sec^2 x \cdot \tan x \, dx$

a $\int \cos^4 t \cdot \sin t \, dt$

الحل:

a $\int \cos^4 t \cdot \sin t \, dt$

$u = \cos t$

$du = -\sin t \, dt$

$\int \cos^4 t \cdot \sin t \, dt = \int -u^4 \, du$

$= -\frac{u^5}{5} + C$ والتعويض $\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$

$= -\frac{1}{5}\cos^5 t + C$

b $\int \sec^2 x \cdot \tan x \, dx$

$u = \tan x$

$du = \sec^2 x \, dx$

$\int \tan x \cdot \sec^2 x \, dx = \int u \, du$ بالتعويض

$= \frac{1}{2}u^2 + C$

$= \frac{1}{2}\tan^2 x + C$

حاول أن تحل

3 أوجد:

b $\int \csc^2 x \cdot \cot x \, dx$

a $\int \sin^3 x \cdot \cos x \, dx$

مثال (4)

أوجد:

a $\int \sin^5 (x+1) \cdot \cos(x+1) \, dx$

b $\int x^3 \cdot \cos(x^4+5) dx$

c $\int (1+\cos x)^6 \sin x \, dx$

الحل:

a $\int \sin^5 (x+1) \cdot \cos(x+1) dx$

$u = \sin(x+1)$

قاعدة التفاضل

$du = \cos(x+1)dx$

$\int \sin^5(x+1)\cdot\cos(x+1)\,dx$

بالتعويض

$= \int u^5 du = \frac{1}{6}u^6 + C$

$= \frac{1}{6}\sin^6(x+1) + C$

b $\int x^3 \cdot \cos(x^4+5)dx$

$u = x^4 + 5$

قاعدة التفاضل

$du = 4x^3 dx \Longrightarrow x^3 dx = \frac{1}{4}du$

بالتعويض

$\int \cos(x^4+5)\cdot x^3 dx = \frac{1}{4}\int \cos u\, du$

$= \frac{1}{4}\sin u + C$

$= \frac{1}{4}\sin(x^4+5) + C$

c $\int (1+\cos x)^6 \sin x\, dx$

$g(x) = 1 + \cos x \quad , \quad g'(x) = -\sin x$

قاعدة التفاضل

$\int (1+\cos x)^6 \sin x\, dx = -\int (g(x))^6 g'(x)dx$

$= -\frac{(g(x))^7}{7} + C$

$= \frac{-1}{7}(1+\cos x)^7 + C$

حاول أن تحل

4 أوجد:

a $\int \cos^3(2x-3)\cdot\sin(2x-3)dx$

b $\int x^2 \cdot \sin(x^3-1)dx$

c $\int (3+\sin 2x)^5 \cos 2x\, dx$

مثال (5)

أوجد: $\int \sec^4 x \tan x\, dx$

الحل:

$u = \sec x$

$du = \sec x \tan x\, dx$

$$\int \sec^4 x \tan x \, dx$$
$$= \int \sec^3 x \cdot \sec x \tan x \, dx$$
$$= \int u^3 \, du = \frac{u^4}{4} + C$$
$$= \frac{\sec^4 x}{4} + C$$

حاول أن تحل

5 أوجد: $\int \csc^5 x \cot x \, dx$

الدوال الأسية واللوغاريتمية

Exponential and Logarithmic Function

سوف تتعلم

- تعرّف مشتقات الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية.
- تكامل الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية.

المفردات والمصطلحات:

- دالة أسية Exponential Function
- دالة لوغاريتمية Logarithmic Function

تذكر:

الدالة f : $f(x) = a^x$ هي دالة أسية حيث $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

دعنا نفكر ونتناقش

1. لتكن f دالة أسية: $f(x) = a^x$

باستخدام تعريف المشتقة بيّن أن: $f'(x) = a^x \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{a^h - 1}{h}$

2. أوجد: $f'(0)$

3. من 2 , 1 لاحظ أن: $f'(x) = f'(0)a^x$

4. من المعادلة في 1 تبيّن أن معدل التغير لأي دالة أسية يعتمد على الأساس لهذه الدالة.

أكمل الجدول التالي باستخدام الآلة الحاسبة:

h	$\dfrac{2^h - 1}{h}$	$\dfrac{3^h - 1}{h}$	$\dfrac{e^h - 1}{h}$
0.1			
0.01			
0.001			
0.0001			
0.00001			

5. استنتج قيمة تقريبية لكل من:

$$\lim_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h} \ , \ \lim_{h \to 0} \frac{3^h - 1}{h} \ , \ \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

6. أكمل ما يلي:

عند $a = 2$ فإن $f'(0) \approx$ ....

عند $a = 3$ فإن $f'(0) \approx$ ....

عند $a = e$ فإن $f'(0) \approx$ ....

7. أوجد باستخدام الآلة الحاسبة: $\ln(2), \ln(3), \ln e$

وقارن إجاباتك مع ما حصلت عليه في 6 .

من فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» يمكننا ملاحظة أن: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{a^h - 1}{h} = \ln(a)$

اشتقاق الدوال الأسية Derivative of Exponential Functions

قاعدة (1)

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$$

إذا كانت u دالة في x قابلة للاشتقاق فإن:

$$\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

في القاعدة (1) وبوضع $a = e$ نحصل على القاعدة التالية:

قاعدة (2)

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

وفي حالة u دالة في x قابلة للاشتقاق فإن:

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$$

مثال (1)

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

a $f(x) = 3^x$ b $f(x) = 6^{\sqrt{x}}$ c $f(x) = 10^{\sin x}$

الحل:

a $f(x) = 3^x$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(3^x) = 3^x \ln 3 \qquad \frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$$

b $f(x) = 6^{\sqrt{x}}$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(6^{\sqrt{x}}) = 6^{\sqrt{x}} \ln 6 \frac{d}{dx}\sqrt{x} \qquad \frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{6^{\sqrt{x}} \ln 6}{2\sqrt{x}}$$

c $f(x) = 10^{\sin x}$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(10^{\sin x}) = 10^{\sin x} \cdot \ln 10 \frac{d}{dx}\sin x$$

$$= 10^{\sin x} \cdot \ln 10 \cdot \cos x$$

حاول أن تحل

1 أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

a $f(x) = 10^x$ b $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$ c $f(x) = 5^{\cos x}$

تذكر:

$\ln e = 1$

$\ln e^m = m$

$m > 0 \;,\; n > 0$

(1) $\ln(m \cdot n) = \ln m + \ln n$

(2) $\ln \frac{m}{n} = \ln m - \ln n$

(3) $\ln m^k = k \ln m$

(4) $e^{\ln m} = m$

مثال (2)

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

a $f(x) = e^{\frac{2x}{3}}$ b $g(x) = e^{x^2+3x-1}$ c $h(x) = e^{\sec x}$

الحل:

a $f(x) = e^{\frac{2x}{3}}$

$$f'(x) = e^{\frac{2}{3}x}\left(\frac{2x}{3}\right)' = \frac{2}{3}e^{\frac{2x}{3}}$$

b $g(x) = e^{x^2+3x-1}$

$$g'(x) = e^{x^2+3x-1}(x^2+3x-1)'$$
$$= (2x+3)e^{x^2+3x-1}$$

c $h(x) = e^{\sec x}$

$$h'(x) = e^{\sec x}(\sec x)'$$
$$= \sec x \tan x\, e^{\sec x}$$

حاول أن تحل

2 أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

a $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ b $g(x) = e^{x^2-4}$ c $h(x) = e^{\tan x}$

اشتقاق دوال اللوغاريتمات الطبيعية

Derivatives of Natural Logarithmic Functions

سنوجد مشتقة دالة اللوغاريتم الطبيعي مرتكزين على مشتقة الدالة الأسية.

تعلمت فيما سبق أن: $y = \ln x \Longleftrightarrow e^y = x$

$$\frac{d}{dx}(e^y) = \frac{d}{dx}(x)$$

$$(e^y)\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x} \qquad e^y = x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \qquad y = \ln x$$

تذكر:

(1) مجال الدالة f:

$f(x) = \ln x$ هو $\mathbb{R}^+$

(2) مجال الدالة f:

$f(x) = \ln(g(x))$ هو

$\{x : g(x) > 0\}$

تذكر:

$\ln e^x = x \ , \ x \in \mathbb{R}$

$e^{\ln x} = x \ , \ x > 0$

قاعدة (3)

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

إذا كانت u دالة في x قابلة للاشتقاق:

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

لاحظ أن: $\frac{d}{dx}(\ln g(x)) = \frac{g'(x)}{g(x)}$

مثال (3)

أوجد مشتقات كل من الدوال التالية:

a) $f(x) = \ln x^2$

b) $g(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

c) $h(x) = \ln\sqrt{x}$

d) $k(x) = \ln(\cos x)$

الحل:

a) $f'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{d}{dx}(x^2) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}$

b) $g'(x) = \frac{1}{\frac{1}{x}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = x \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{x}$

c) $h'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$

d) $k'(x) = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{d}{dx}(\cos x) = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$

حاول أن تحل

3 أوجد مشتقات كلّ من الدوال التالية:

a) $f(x) = \ln(2x + x^3)$

b) $g(x) = \ln\frac{1}{2x+1}$

c) $h(x) = \ln(1 + \sqrt{3}x)$

d) $h(x) = \ln(\sin x)$

مثال توضيحي

إذا كان f دالة: $f(x) = \ln|x|$

فأوجد $f'(x)$

الحل:

$$f(x) = \ln|x| \Longrightarrow f(x) = \begin{cases} \ln x & : x > 0 \\ \ln(-x) & : x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \ln x \quad : x > 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad (1)$$

قاعدة

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$f(x) = \ln(-x) \quad : x < 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x} \quad (2)$$

من (2) , (1) نجد أن:

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

قاعدة (4)

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$$

تكامل بعض الدوال الأسية واللوغاريتمية

Integrals of some Exponential and Logarithmic Functions

علمنا أن: $\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$ ومنها تكون المشتقة العكسية هي:

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

والجدول التالي يبيّن تكامل بعض الدوال الأسية واللوغاريتمية حيث: $u = g(x)$

قاعدة المشتقة	التكامل غير المحدد
$\frac{d}{dx}e^x = e^x$	$\int e^x\,dx = e^x + C$
$\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx} = u'e^u$	$\int u'e^u\,dx = e^u + C$
$\frac{d}{dx}\ln\|x\| = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}dx = \ln\|x\| + C$
$\frac{d}{dx}\ln\|u\| = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{u'}{u}$	$\int \frac{u'}{u}dx = \ln\|u\| + C$

لاحظ أن: $\int \frac{g'(x)dx}{g(x)} = \ln|g(x)| + C$

مثال (4)

أوجد:

b) $\int 2x \cdot e^{x^2+3}dx$

a) $\int 2e^x\,dx$

الحل:

a) $\int 2e^x dx = 2\int e^x dx$

$= 2e^x + C$

b) $\int 2x \cdot e^{x^2+3}dx$

$u = x^2 + 3$

$du = 2x\,dx$

$\int 2x\,e^{x^2+3}dx = \int e^u du$

$= e^u + C$

$\therefore \int 2x\,e^{x^2+3}dx = e^{x^2+3} + C$

حاول أن تحل

4 أوجد:

b) $\int (2x-1)e^{x^2-x+3}dx$

a) $\int e^{3x}dx$

مثال (5)

أوجد:

a $\int \frac{3}{2x+5}dx$

b $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+7}dx$

c $\int \frac{x^2-5x+6}{x}dx$

الحل:

a $\int \frac{3}{2x+5}dx$

$u = 2x+5$

قاعدة التفاضل $du = 2dx \Longrightarrow dx = \frac{1}{2}du$

بالتعويض $\int \frac{3}{2x+5}dx = \frac{3}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{3}{2}\ln|u|+C$

$= \frac{3}{2}\ln|2x+5|+C$

b $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+7}dx$

$u = x^2+3x+7$

قاعدة التفاضل $du = (2x+3)dx$

بالتعويض $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+7}dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u|+C$

$= \ln|x^2+3x+7|+C$

c $\int \frac{x^2-5x+6}{x}dx = \int \left(\frac{x^2}{x} - \frac{5x}{x} + \frac{6}{x}\right)dx$

$= \int \left(x - 5 + \frac{6}{x}\right)dx$

$= \frac{x^2}{2} - 5x + 6\ln|x|+C$

حاول أن تحل

5 أوجد:

a $\int \frac{-5}{3x-2}dx$

b $\int \frac{3t^2-6t}{t^3-3t^2+8}dt$

c $\int \frac{x^3+4}{x}dx$

يتضمن تكامل دالة الظل (tangent) الدالة اللوغاريتمية كما هو مبيّن في المثال التالي. وهذا أيضًا صحيح في دالة مقلوب ظل الزاوية (cotangent).

مثال (6)

أوجد: $\int \tan x\, dx$

الحل:

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$g(x) = \cos x$$

قاعدة التفاضل

$$g'(x) = -\sin x$$

بالتعويض

$$\int \tan x\, dx = \int -\frac{g'(x)}{g(x)} dx$$

$$= -\ln|g(x)| + C$$

$$= -\ln|\cos x| + C$$

$$= \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| + C$$

$$= \ln|\sec x| + C$$

حاول أن تحل

6 أوجد: $\int \cot x\, dx$

التكامل بالتجزيء

Integration by Parts

سوف تتعلم

- التكامل بالتجزيء.

المفردات والمصطلحات:

- بالتجزيء By Parts

دعنا نفكر ونتناقش

1 هل يمكنك إيجاد: $\int x\sin x\, dx$ مستخدمًا ما تعلمته في البنود السابقة؟

2 لتكن الدالة f: $f(x) = x\sin x$

a أوجد: $f'(x)$، $f''(x)$

b اكتب $f(x)$ بدلالة $\cos x$ و $f''(x)$ فقط.

c أوجد مشتقة عكسية F للدالة f وتحقق من إجابتك.

عند إيجاد تكامل بعض الدوال نواجه بعض الصعوبات لذلك نبحث عن طرائق بديلة تساعدنا في حل ذلك وإحدى هذه الطرائق التكامل بالتجزيء.

قاعدة حاصل الضرب في صورة التكامل Product Rule in Integral Form

عندما تكون v و u دالتين في x قابلتين للتفاضل، فإن قاعدة حاصل الضرب في التفاضل تفيد بما يلي:

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

بمكاملة كل من الطرفين بالنسبة إلى x :

$$\int \frac{d}{dx}(uv)\, dx = \int \left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right) dx$$

وبإعادة الترتيب نصل إلى المعادلة التكاملية:

$$\int \left(u\frac{dv}{dx}\right)dx = \int \left(\frac{d(uv)}{dx}\right)dx - \int \left(v\frac{du}{dx}\right)dx$$

$$= uv - \int \left(v\frac{du}{dx}\right) dx$$

وعند كتابة هذه المعادلة بالصورة التفاضلية الأبسط نحصل على القاعدة التالية:

قاعدة التكامل بالتجزيء Integration by Parts Formula

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

تعبّر هذه القاعدة عن $\int u\, dv$ بدلالة تكامل آخر هو $\int v\, du$.

باختيار **ملائم** للمتغيّرين u , v، يمكن حساب التكامل الثاني بطريقة أسهل من حساب التكامل الأول، وهذا هو السبب في أهميّة القاعدة.

مثال (1)

أوجد: $\int x\sin x\,dx$

الحل:

$$\int x\sin x\,dx$$

$$u = x \qquad dv = \sin x\,dx$$

$$du = dx \qquad v = -\cos x$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x - \int (-\cos x)dx$$

$$= -x\cos x + \sin x + C$$

حاول أن تحل

1 أوجد: $\int x\cos x\,dx$

مثال (2)

أوجد:

a $\int x\,e^{x}\,dx$

b $\int 3x\,e^{2x+1}\,dx$

الحل:

a $\int x\,e^{x}\,dx$

$$u = x \qquad dv = e^{x}\,dx$$

$$du = dx \qquad v = e^{x}$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x\,e^{x}\,dx = xe^{x} - \int e^{x}\,dx$$

$$= x\,e^{x} - e^{x} + C = (x-1)e^{x} + C$$

b $\int 3x\,e^{2x+1}\,dx$

$$u = 3x \qquad dv = e^{2x+1}\,dx$$

$$du = 3dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x+1}$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int 3x\,e^{2x+1}\,dx = \frac{3}{2}x\,e^{2x+1} - \frac{3}{2}\int e^{2x+1}\,dx$$

$$= \frac{3}{2}x\,e^{2x+1} - \frac{3}{4}e^{2x+1} + C$$

معلومة:

للمساعدة يمكننا استخدام النمط التالي:

$u = \square \;,\; dv = \square$

$du = \square \;,\; v = \square$

تذكر:

$$\int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$$

حاول أن تحل

2 أوجد:

a $\int (x-3)e^{x-3}\,dx$

b $\int 4x\,e^{-5x}\,dx$

مثال (3)

أوجد: $\int \ln(x+1)dx$

الحل:

$\int \ln(x+1)dx$

$u = \ln(x+1)$ $\qquad$ $dv = dx$

$du = \frac{1}{x+1}dx$ $\qquad$ $v = x$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$$\int \ln(x+1)dx = x\ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1}dx$$
$$= x\ln(x+1) - \int \frac{x+1-1}{x+1}dx$$
$$= x\ln(x+1) - \int \left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$= x\ln(x+1) - x + \ln|x+1| + C$$
$$= x\ln(x+1) - x + \ln(x+1) + C$$

لاحظ $x+1>0$

حاول أن تحل

3 أوجد: $\int \ln x\,dx$

مثال (4)

أوجد: $\int x\ln x\,dx$

الحل:

$\int x\ln x\,dx$

$u = \ln x$ $\qquad$ $dv = x\,dx$

$du = \frac{1}{x}dx$ $\qquad$ $v = \frac{x^2}{2}$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

تذكر: $\int dx = x + C$

$$\int x\ln x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

حاول أن تحل

4 أوجد: $\int (x+1)\ln(x+1)dx$

يمكن حساب التكامل بالتجزيء أكثر من مرة.

مثال (5)

أوجد: $\int x^2\cos x\,dx$

الحل:

$$\int x^2\cos x\,dx$$

$u = x^2 \qquad dv = \cos x\,dx$

$du = 2x\,dx \qquad v = \sin x$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x - 2\int x\sin x\,dx \qquad (1)$$

نستخدم القاعدة مرّة ثانية لإيجاد: $\int x\sin x\,dx$

$u = x \qquad dv = \sin x\,dx$

$du = dx \qquad v = -\cos x$

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x - \int -\cos x\,dx$$
$$= -x\cos x + \sin x + C_1 \qquad (2)$$

من (2) , (1) نحصل على:

$$\int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x - 2(-x\cos x + \sin x + C_1)$$
$$= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$$

حيث $C = -2C_1$

حاول أن تحل

5 أوجد: $\int x^2\sin x\,dx$

مثال (6)

أوجد: $\int x^2 e^x \, dx$

الحل:

$$\int x^2 e^x \, dx$$

$u = x^2$ $\qquad$ $dv = e^x \, dx$

$du = 2x \, dx$ $\qquad$ $v = e^x$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int x\, e^x dx \qquad (1)$$

باستخدام القاعدة مرّة ثانية لإيجاد: $\int x\, e^x \, dx$

$u = x$ $\qquad$ $dv = e^x \, dx$

$du = dx$ $\qquad$ $v = e^x$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\int x\, e^x dx = x\, e^x - \int e^x dx$$

$$= x\, e^x - e^x + C_1 \qquad (2)$$

من (2) , (1) نحصل على:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(x\, e^x - e^x + C_1)$$

$$= x^2 e^x - 2x\, e^x + 2e^x - 2C_1$$

$$= (x^2 - 2x + 2)e^x + C$$

$C = -2C_1$

حاول أن تحل

6 أوجد: $\int x^2 \, e^{x+2} \, dx$

مثال (7)

أوجد: $\int e^x \sin x \, dx$

الحل:

$$\int e^x \sin x \, dx$$

$u = e^x$ $\qquad$ $dv = \sin x \, dx$

$du = e^x \, dx$ $\qquad$ $v = -\cos x$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x - \int -e^x \cos x\, dx$$

$$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx \qquad (1)$$

باستخدام القاعدة مرّة ثانية لإيجاد: $\int e^x \cos x\, dx$

$u = e^x \qquad dv = \cos x\, dx$

$du = e^x\, dx \qquad v = \sin x$

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx \qquad (2)$$

نعوّض (2) في (1) :

$$\int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$$

$$2\int e^x \sin x\, dx = e^x(\sin x - \cos x)$$

$$\int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$$

حاول أن تحل

7 أوجد: $\int e^x \cos x\, dx$

التكامل باستخدام الكسور الجزئية

Integration Using Partial Fractions

سوف تتعلم

- مقدمة عن الكسور الجزئية.
- مقامات لها عوامل خطية.

المفردات والمصطلحات:

- كسور جزئية Partial Fractions
- تفكيك Expand
- عامل خطي Linear Factor

دعنا نفكر ونتناقش

a لتكن الدالة f: $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x-2} - \frac{2}{x+2}$

اكتب $f(x)$ على الصورة: $f(x) = \frac{r(x)}{h(x)}$

حيث $h(x)$ هو المقام المشترك.

b لتكن الدالة g: $g(x) = \frac{x^2+8x-4}{x(x^2-4)}$

نأخذ: $\frac{x^2+8x-4}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}$

1 اضرب طرفي المعادلة في x ثم بسّط وعوّض عن x بالصفر.

استنتج قيمة A.

2 اضرب طرفي المعادلة في $x-2$ ثم بسّط وعوّض عن x بـ 2

استنتج قيمة B.

3 اضرب طرفي المعادلة في $x+2$ ثم بسّط وعوّض عن x بـ -2

استنتج قيمة C.

c ما العلاقة بين $f(x)$ و $g(x)$؟

درسنا في ما سبق أن أي كثيرة حدود عواملها حقيقية قد يمكننا تحليلها إلى عوامل خطية (من الدرجة الأولى) وعوامل من الدرجة الثانية (تربيعية) ليس لها أصفار حقيقية (ليس لها جذور حقيقية).

يمكننا استخدام ذلك في إيجاد تكامل لحدوديات نسبية وسوف تقتصر دراستنا على تكامل الحدوديات النسبية التي يمكن تحليل المقام فيها إلى عوامل خطيّة.

أولًا: المقام يمكن تحليله إلى عوامل خطية (عوامل من الدرجة الأولى) غير مكررة

المقام $h(x)$ عبارة عن ناتج ضرب عوامل خطية غير مكررة.

لتكن $f(x) = \frac{r(x)}{h(x)}$ حيث المقام $h(x)$ على الصورة:

$$h(x) = (a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\dots(a_kx+b_k)$$

حيث لا يوجد عوامل مكررة ولا يوجد عامل ثابت مضروب بآخر.

في هذه الحالة تكون الدالة f على صورة كسور جزئية كالتالي:

$$\frac{r(x)}{h(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \dots + \frac{A_k}{a_kx+b_k}$$

مثال (1)

لتكن الدالة f : $f(x)=\dfrac{5x-1}{x^2-2x-15}$

فأوجد:

a الكسور الجزئية

b $\int f(x)\,dx$

الحل:

a حلّل المقام

$$x^2-2x-15=(x+3)(x-5)$$

$$\frac{5x-1}{x^2-2x-15}=\frac{A_1}{x+3}+\frac{A_2}{x-5}$$

اضرب طرفي المعادلة في $(x+3)(x-5)$ وبسّط

$$5x-1=A_1(x-5)+A_2(x+3)$$

عوّض عن x بـ 5

$$5(5)-1=A_1(5-5)+A_2(5+3)$$

$$\therefore\ A_2=3$$

عوّض عن x بـ (-3)

$$5(-3)-1=A_1(-3-5)+A_2(-3+3)$$

$$\therefore\ A_1=2$$

عوّض عن A_1 و A_2 بقيمتيهما

$$\frac{5x-1}{x^2-2x-15}=\frac{2}{x+3}+\frac{3}{x-5}$$

للتحقق يمكن جمع كسري الطرف الأيمن بإيجاد مقام مشترك وبالمقارنة مع الطرف الأيسر.

b

$$\int f(x)dx=\int\frac{5x-1}{x^2-2x-15}dx$$

$$=\int\left(\frac{2}{x+3}+\frac{3}{x-5}\right)dx$$

$$=\int\frac{2}{x+3}dx+\int\frac{3}{x-5}dx$$

$\int(f_1(x)+f_2(x))\,dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx$

$$=2\int\frac{1}{x+3}dx+3\int\frac{1}{x-5}dx$$

$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$

$$=2\ln|x+3|+3\ln|x-5|+C$$

$\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$

حاول أن تحل

1 لتكن الدالة f : $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-4x+3}$

فأوجد:

a الكسور الجزئية

b $\int f(x)\,dx$

مثال (2)

أوجد: $\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx$

الحل:

نوجد الكسور الجزئية للحدودية النسبية: $\frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}$

تحليل المقام

$$2x^3+3x^2-2x = x(2x^2+3x-2)$$
$$= x(2x-1)(x+2)$$
$$\therefore \frac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)} = \frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{2x-1}+\frac{A_3}{x+2}$$

اضرب طرفي المعادلة في: $x(2x-1)(x+2)$ وبسّط

$$x^2+2x-1 = A_1(2x-1)(x+2)+A_2x(x+2)+A_3x(2x-1)$$

عوّض عن x بـ 0

$$0^2+2(0)-1 = A_1(0-1)(0+2)+A_2(0)+A_3(0)$$
$$\therefore A_1=\frac{1}{2}$$

عوّض عن x بـ $\frac{1}{2}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\frac{1}{2}\right)-1 = A_1(0)+\frac{1}{2}A_2\times\left(\frac{5}{2}\right)+A_3(0)$$
$$\therefore A_2=\frac{1}{5}$$

عوّض عن x بـ -2

$$(-2)^2+2(-2)-1 = A_1(0)+A_2(0)+(-2A_3)(-5)$$
$$\therefore A_3=-\frac{1}{10}$$

ومنه:

$$\frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x} = \frac{\frac{1}{2}}{x}+\frac{\frac{1}{5}}{2x-1}+\frac{\frac{-1}{10}}{x+2}$$

$$\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx = \int\left(\frac{\frac{1}{2}}{x}+\frac{\frac{1}{5}}{2x-1}-\frac{\frac{1}{10}}{x+2}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x|+\frac{1}{10}\ln|2x-1|-\frac{1}{10}\ln|x+2|+C$$

حاول أن تحل

2 أوجد: $\int \frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x}dx$

ثانيًا: المقام يمكن تحليله إلى عوامل خطية بعضها متكرر

المقام $h(x)$ عبارة عن ناتج ضرب عوامل خطية بعضها متكرر. لكل عامل من عوامل $h(x)$ على الصورة $(mx+n)^k$، يجب أن يحتوي التفكيك إلى كسور جزئية على مجموع حدود عددها k:

$$\frac{A_1}{mx+n}+\frac{A_2}{(mx+n)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(mx+n)^k}$$

مثال (3)

أوجد: $\int \frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x}\,dx$

الحل:

نوجد الكسور الجزئية للحدودية النسبية $\frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x}$

حلّل المقام:

$$x^3-4x^2+4x = x(x^2-4x+4) = x(x-2)^2$$

تفكك $(x-2)^2$ إلى حدّين

$$\therefore \quad \frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x} = \frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x-2}+\frac{A_3}{(x-2)^2} \qquad (1)$$

اضرب كلًّا من طرفي المعادلة في $x(x-2)^2$

$$-x^2+2x+4 = A_1(x-2)^2 + A_2x(x-2) + A_3x$$

نضع في المعادلة $x = 2$ فنحصل على $A_3 = 2$

نضع في المعادلة $x = 0$ فنحصل على $A_1 = 1$

ثم نعوّض في المعادلة عن $A_1 = 1$ ، $A_3 = 2$ ، وإحدى قيم x ولتكن $x = 1$ لإيجاد A_2

$$-(1)^2+2(1)+4 = 1(1-2)^2 + A_2(1)(1-2) + (2)(1)$$

$$-1+2+4 = (-1)^2 + A_2(-1) + 2$$

$$\therefore \quad A_2 = -2$$

لدينا: $A_1 = 1 \;,\; A_2 = -2 \;,\; A_3 = 2$

التعويض في المعادلة (1) يعطي:

$$\frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x} = \frac{1}{x}+\frac{-2}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}$$

$$\int \frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x}dx = \int\left(\frac{1}{x}+\frac{-2}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}\right)dx$$

$$= \int\frac{1}{x}dx + \int\frac{-2}{x-2}dx + \int\frac{2}{(x-2)^2}dx$$

$$= \int\frac{1}{x}dx - 2\int\frac{1}{x-2}dx + 2\int\frac{1}{(x-2)^2}dx$$

$$= \ln|x| - 2\ln|x-2| - \frac{2}{x-2} + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$$

حاول أن تحل

3 أوجد: $\int \frac{4x^2-4x+1}{x^3-2x^2+x}\,dx$

مثال (4)

أوجد: $\int \frac{3+x+x^2}{x^3+2x^2}\,dx$

الحل:

تحليل المقام إلى عوامل خطية

$x^3+2x^2 = x^2(x+2)$

$\therefore\ \frac{3+x+x^2}{x^3+2x^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x+2}$

اضرب كلًّا من طرفي المعادلة في: $x^2(x+2)$ ثم بسّط

$3+x+x^2 = A_1x(x+2)+A_2(x+2)+A_3x^2$

عوّض عن x بـ 0

$3+0+0^2 = A_1(0)+A_2(0+2)+A_3(0)^2$

$\therefore\ A_2 = \frac{3}{2}$

عوّض عن x بـ -2

$3-2+(-2)^2 = A_1(0)+A_2(0)+A_3(-2)^2$

$\therefore\ A_3 = \frac{5}{4}$

نعوّض في المعادلة عن: $A_2 = \frac{3}{2}$ ، $A_3 = \frac{5}{4}$ وإحدى قيم x ولتكن $x = 1$ لإيجاد قيمة A_1

$3+1+(1)^2 = 3A_1 + \frac{3}{2}(3) + \frac{5}{4}\times(1)^2$

$\therefore\ A_1 = -\frac{1}{4}$

$$\int \frac{3+x+x^2}{x^3+2x^2}\,dx = \int \left(\frac{-\frac{1}{4}}{x} + \frac{\frac{3}{2}}{x^2} + \frac{\frac{5}{4}}{x+2}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|x| - \frac{3}{2x} + \frac{5}{4}\ln|x+2| + C$$

حاول أن تحل

4 أوجد: $\int \frac{x^2+1}{x^3+4x^2}\,dx$

عندما تكون درجة البسط في الحدودية النسبية $f(x) = \frac{r(x)}{h(x)}$ مساوية أو أكبر من درجة المقام، نوجد أولًا ناتج القسمة $q(x)$ باستخدام القسمة المطولة ثم نكتب الدالة على الصورة: $f(x) = q(x) + \frac{p(x)}{h(x)}$ حيث $p(x)$ هو الباقي.

مثال (5)

أوجد: $\int \frac{x^2 - 3x + 7}{x^2 - 4x + 4}\, dx$

الحل:

$\because$ درجة البسط = درجة المقام

$\therefore$ نبدأ بقسمة البسط على المقام باستخدام القسمة المطولة

ناتج القسمة $\longrightarrow$ 1

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline x^2 - 4x + 4 & x^2 - 3x + 7 \\ & -\ (x^2 - 4x + 4) \\ \hline & x + 3 \end{array}$$

الباقي $\longrightarrow$ $x + 3$

$$\frac{x^2 - 3x + 7}{x^2 - 4x + 4} = 1 + \frac{x+3}{(x-2)^2}$$

الحدودية النسبية

$$\frac{x+3}{(x-2)^2} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2}$$

نضرب كلًّا من طرفي المعادلة في $(x-2)^2$ ثم نبسّط

$$x + 3 = A_1(x-2) + A_2$$

عوّض عن x بـ 2

$$2 + 3 = A_1(0) + A_2$$

$$\therefore\ A_2 = 5$$

نعوّض في المعادلة عن $A_2 = 5$ وإحدى قيم x ولتكن $x = 1$ لإيجاد قيمة A_1 .

$$1 + 3 = -A_1 + 5$$

$$\therefore\ A_1 = 1$$

$$\int \frac{x^2 - 3x + 7}{x^2 - 4x + 4} dx = \int \left(1 + \frac{1}{x-2} + \frac{5}{(x-2)^2}\right) dx$$

$$= x + \ln|x-2| - \frac{5}{x-2} + C$$

حاول أن تحل

5 a هل يمكن حل مثال (5) بطريقة أخرى.

b أوجد: $\int \frac{x^3 - 2x^2 - 4}{x^3 - 2x^2}\, dx$

مثال (6)

أوجد: $\int \frac{2x^3 - 9x^2 + 25}{x^2 - 6x + 8}\, dx$

الحل:

$\because$ درجة البسط 3 ودرجة المقام 2

$\therefore$ يجب استخدام القسمة المطولة

ناتج القسمة $\longrightarrow$ $2x + 3$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x + 3 \\ \hline
x^2 - 6x + 8 & 2x^3 - 9x^2 + 25 \\
- & 2x^3 - 12x^2 + 16x \\ \hline
 & 3x^2 - 16x + 25 \\
- & 3x^2 - 18x + 24 \\ \hline
 & 2x + 1
\end{array}
$$

الباقي $\longrightarrow$ $2x + 1$

ومنه نكتب:

$$\frac{2x^3 - 9x^2 + 25}{x^2 - 6x + 8} = 2x + 3 + \frac{2x + 1}{x^2 - 6x + 8}$$

$$= 2x + 3 + \frac{2x + 1}{(x-2)(x-4)}$$

نأخذ الحدودية النسبية $\frac{2x + 1}{(x-2)(x-4)}$

ونكتبها على الصورة: $\frac{2x + 1}{(x-2)(x-4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4}$

نضرب طرفي المعادلة في $(x-2)(x-4)$ ثم نعوّض على الترتيب $x = 2$ و $x = 4$

نحصل على $A = -\frac{5}{2}$ ، $B = \frac{9}{2}$

$$\frac{2x^3 - 9x^2 + 25}{x^2 - 6x + 8} = 2x + 3 + \frac{-\frac{5}{2}}{x-2} + \frac{\frac{9}{2}}{x-4}$$

ومنه تكون:

$$\therefore \int \frac{2x^3 - 9x^2 + 25}{x^2 - 6x + 8}\, dx = 2\int x\,dx + 3\int dx - \frac{5}{2}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{9}{2}\int \frac{dx}{x-4}$$

$$= x^2 + 3x - \frac{5}{2}\ln|x-2| + \frac{9}{2}\ln|x-4| + C$$

حاول أن تحل

6 أوجد: $\int \frac{x^3 - 7x + 9}{x^2 - 3x + 2}\, dx$

مثال (7)

أوجد: $\int \frac{x^4-2x^3+4x+2}{x^3-x^2-x+1}\,dx$

الحل:

$\because$ درجة البسط أكبر من درجة المقام

$\therefore$ نبدأ بقسمة البسط على المقام باستخدام القسمة المطولة

ناتج القسمة $\longrightarrow$ $x-1$

$$\begin{array}{r|l} x^3-x^2-x+1 & x^4-2x^3+4x+2 \\ - & x^4-x^3-x^2+x \\ \hline - & -x^3+x^2+3x+2 \\ & -x^3+x^2+x-1 \\ \hline & 2x+3 \end{array}$$

الباقي $\longrightarrow$ $2x+3$

$$\frac{x^4-2x^3+4x+1}{x^3-x^2-x+1}=x-1+\frac{2x+3}{(x-1)^2(x+1)}$$

الحدودية النسبية

$$\frac{2x+3}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{x+1}$$

نضرب كلًّا من طرفي المعادلة في $(x-1)^2(x+1)$ ثم نبسّط

$$2x+3=A_1(x-1)(x+1)+A_2(x+1)+A_3(x-1)^2$$

عوّض عن x بـ 1

$$2(1)+3=A_1(0)+2A_2+A_3(0)$$

$$\therefore\ A_2=\frac{5}{2}$$

عوّض عن x بـ -1

$$2\times(-1)+3=A_1(0)+A_2(0)+4A_3$$

$$\therefore\ A_3=\frac{1}{4}$$

نعوّض في المعادلة عن $A_2=\frac{5}{2}$ ، $A_3=\frac{1}{4}$ وإحدى قيم x ولتكن $x=0$

$$\therefore\ A_1=-\frac{1}{4}$$

$$\int \frac{x^4-2x^3+4x+2}{x^3-x^2-x+1}dx=\int\left(x-1+\frac{-\frac{1}{4}}{x-1}+\frac{\frac{5}{2}}{(x-1)^2}+\frac{\frac{1}{4}}{x+1}\right)dx$$

$$=\frac{x^2}{2}-x-\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{5}{2(x-1)}+\frac{1}{4}\ln|x+1|+C$$

حاول أن تحل

7 أوجد: $\int \frac{2x^4+3x^2-9}{x^3-6x^2+9x}\,dx$

التكامل المحدد

Definite Integral

سوف تتعلم

- التكامل المحدد والمساحة.
- خواص التكامل المحدد.
- قاعدة القوى في صورة التكامل.
- التعويض في التكامل المحدد.

المفردات والمصطلحات:

- تكامل محدد

Definite Integral

- تكامل بالتعويض

Integration by Substitution

معلومة:

عند كتابة $\int_a^b f(x)\,dx$ يأخذ المتغيّر x كلّ القيم من a إلى b.

دعنا نفكر ونتناقش

لنعتبر $f(x) = 2x - 2$ على الفترة $[1\ ,\ 4]$،

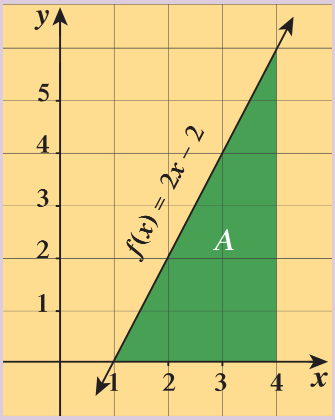
من الشكل المقابل، أوجد:

a $F(x)$ المشتقة العكسية للدالة.

b $F(4)\ ,\ F(1)$، ثم احسب $F(4) - F(1)$

c مساحة المنطقة A.

d ماذا تلاحظ؟



التكامل المحدد Definite Integral

تعلمت فيما سبق إنه إذا كانت f دالة متصلة على $[a\ ,b]$ وكانت الدالة F مشتقة عكسية للدالة f فإن التكامل غير المحدد للدالة f هو:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

وفي هذا البند سوف تتعلم التكامل المحدد للدالة f من a إلى b وهو العدد الحقيقي:

$F(b) - F(a)$

حيث:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b$$
$$= [F(x)]_a^b$$
$$= F(b) - F(a)$$

ويسمّى a, b حدّي التكامل، والقواعد التي سبق ذكرها في التكامل غير المحدد تطبق على التكامل المحدد.

مثال (1)

أوجد التكامل المحدد للدالة: $f(x) = 3x^2 - x + 4$ من $x = -2$ إلى $x = 3$.

الحل:

$$\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = \int_{-2}^{3} (3x^2 - x + 4)\,dx$$
$$= \left[x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x\right]_{-2}^{3}$$
$$= \left((3)^3 - \frac{1}{2}(3)^2 + 4(3)\right) - \left((-2)^3 - \frac{1}{2}(-2)^2 + 4(-2)\right)$$
$$= 34.5 + 18 = 52.5$$

حاول أن تحل

1 أوجد: $\int_2^7 (x^3 - 2x^2 + 2)dx$

خواص التكامل المحدد Properties of the Definite Integral

إذا كانت f دالة متصلة على الفترة I ، $k \in \mathbb{R}$ ، $a, b, c \in I$ فإن:

1 $\int_a^a f(x)dx = 0$

2 $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

3 $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$

4 $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

5 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

لاحظ في خاصية 3 أنه: إذا كان $k = 1$ فإن: $\int_a^b dx = b - a$

مثال (2)

أوجد:

a $\int_{-8}^{-4} dx$

b $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (2\cos x)dx$

c $\int_2^{-1} (\sqrt{x+1} - 3)dx$

d $\int_1^2 \left(3e^x + \frac{e}{x}\right)dx$

الحل:

a $\int_{-8}^{-4} dx = [x]_{-8}^{-4} = -4 - (-8) = 4$

b $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (2\cos x)dx = 0$

خواص التكامل المحدد $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

c $\int_2^{-1} (\sqrt{x+1} - 3)dx = -\int_{-1}^2 (\sqrt{x+1} - 3)dx = -\int_{-1}^2 \left((x+1)^{\frac{1}{2}} - 3\right)dx$

$$= -\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - 3x\right]_{-1}^2$$

$$= -\left[\frac{2}{3}(2+1)^{\frac{3}{2}} - 3(2) - \frac{2}{3}(-1+1)^{\frac{3}{2}} + 3(-1)\right]$$

$$= -\left(\frac{2}{3}(3\sqrt{3}) - 6 - 3\right) = 9 - 2\sqrt{3}$$

d $\int_1^2 \left(3e^x + \frac{e}{x}\right)dx = [3e^x + e\ln x]_1^2$

$\int_a^b \frac{1}{x}dx = [\ln|x|]_a^b$

$$= (3e^2 + e\ln 2) - (3e^1 + e\ln 1)$$

$$= 3e^2 + e\ln 2 - 3e$$

حاول أن تحل

2 أوجد:

a $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\sin 2x-\csc^2 x\right)dx$

b $\int_{2}^{-3} 5\,dx$

c $\int_{3}^{3}(-2x^3+x^2)dx$

d $\int_{2}^{4}\frac{dx}{x-1}$

مثال (3)

أوجد:

a $\int_{-2}^{3}|x|dx$

b $\int_{0}^{5}|x-3|dx$

الحل:

a
$$\int_{-2}^{3}|x|dx=\int_{-2}^{0}|x|dx+\int_{0}^{3}|x|dx$$
$$=\int_{-2}^{0}(-x)dx+\int_{0}^{3}x\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{3}$$
$$=2+\frac{9}{2}=\frac{13}{2}$$

b
$$\int_{0}^{5}|x-3|dx=\int_{0}^{3}|x-3|dx+\int_{3}^{5}|x-3|dx$$
$$=\int_{0}^{3}(-x+3)dx+\int_{3}^{5}(x-3)dx$$
$$=\left[-\frac{x^2}{2}+3x\right]_{0}^{3}+\left[\frac{x^2}{2}-3x\right]_{3}^{5}$$
$$=\frac{9}{2}+\left(\frac{25}{2}-15\right)-\left(\frac{9}{2}-9\right)$$
$$=\frac{13}{2}$$

حاول أن تحل

3 أوجد:

a $\int_{-3}^{4}|2x-4|dx$

b $\int_{1}^{3}|x+2|dx$

لتكن f دالة متصلة على $[a,b]$

6 إذا كانت: $f(x)\geqslant 0 \quad \forall \quad x\in[a,b]$

فإن: $\int_{a}^{b}f(x)dx\geqslant 0$

7 إذا كانت: $f(x)\leqslant 0 \quad \forall \quad x\in[a,b]$

فإن: $\int_{a}^{b}f(x)dx\leqslant 0$

تذكر:

$$|x|=\begin{cases}x & : \ x>0\\ 0 & : \ x=0\\ -x & : \ x<0\end{cases}$$

مثال (4)

دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_{3}^{5}(x^2+x)dx \geqslant 0$

الحل:

بفرض $f(x) = x^2 + x$

وهي دالة متصلة على $[3\,,5]$

نضع $x^2 + x = 0$

$x(x+1) = 0$

$$\begin{array}{ccccccc} -\infty & + & & - & & + & +\infty \\ \longleftarrow & & \bullet & & \bullet & & \longrightarrow \\ & & -1 & & 0 & & \end{array}$$

$f(x) \geqslant 0 \quad \forall \quad x \in (-\infty\,,-1] \cup [0\,,\infty)$

$\because \quad [3\,,5] \subseteq [0\,,\infty)$

$\therefore \quad x^2 + x \geqslant 0 \quad \forall \quad x \in [3\,,5]$

$\int_{3}^{5}(x^2+x)dx \geqslant 0$

حاول أن تحل

4 دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_{-1}^{0}(x^2+x)dx \leqslant 0$

8 لتكن الدالتين $f\,,g$ متصلتين على $[a\,,b]$ وكانت: $f(x) \leqslant g(x) \quad \forall\, x \in [a\,,b]$

فإن: $\int_{a}^{b} f(x)dx \leqslant \int_{a}^{b} g(x)dx$

مثال (5)

دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_{1}^{3}(2x-3)dx \leqslant \int_{1}^{3}(x^2+2)dx$

الحل:

نفرض أن $f(x) = 2x - 3 \;,\; g(x) = x^2 + 2$

وهما دالتان متصلتان على $\mathbb{R}$

نوجد
$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= (2x-3) - (x^2+2) \\ &= 2x - 3 - x^2 - 2 \\ &= -x^2 + 2x - 5 \end{aligned}$$

نضع $-x^2 + 2x - 5 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= 4 - 4(-1)(-5)$$
$$= 4 - 20 = -16 \ , \ -16 < 0$$

$\therefore$ لا توجد للمعادلة جذور حقيقية $\Longleftarrow$ $f(x) - g(x)$ وحيدة الإشارة وبأخذ قيمة اختيارية نجد أن

$$f(x) - g(x) \leqslant 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

أي أن: $f(x) - g(x) \leqslant 0 \qquad \forall x \in [1, 3]$

$$(2x - 3) - (x^2 + 2) \leqslant 0 \qquad \forall x \in [1, 3]$$
$$\Longrightarrow 2x - 3 \leqslant x^2 + 2$$

خاصية $\qquad \therefore \ \int_1^3 (2x - 3)dx \leqslant \int_1^3 (x^2 + 2)dx$

حاول أن تحل

5 دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_{-1}^2 (x^2 + 1)dx \geqslant \int_{-1}^2 (x - 1)dx$

التفسير البياني للتكامل المحدد Graphical Interpretation of Definite Integral

في المستوى الإحداثي لتكن f دالة متصلة على $[a, b]$،

A تمثل مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات

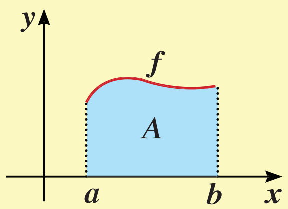
والمستقيمين $x = a \ , \ x = b$

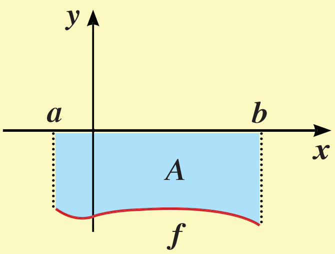
1 إذا كانت: $f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [a, b]$

فإن: $\int_a^b f(x)\,dx = A$

2 إذا كانت: $f(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in [a, b]$

فإن: $\int_a^b f(x)\,dx = -A$





مثال (6)

a أوجد مساحة المنطقة المحددة بين منحنى الدالة $f(x) = -3$، ومحور السينات، والمستقيمين $x = -2 \ , \ x = 4$.

b تحقق بيانيًّا.

الحل:

a $f(x) = -3$

$$\because \ f(x) \leqslant 0 \qquad \forall x \in [-2, 4]$$

f سالبة على $[-2, 4]$ $\qquad A = -\int_{-2}^4 f(x)dx$

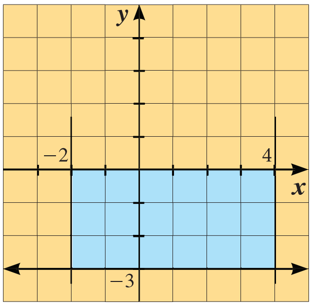
$f(x) = -3$

$$= -\int_{-2}^{4} -3\, dx$$
$$= \int_{-2}^{4} 3\, dx$$
$$= 3(4-(-2))$$
$$= 18 \text{ units squared}$$

b تحقق بيانيًّا:

مساحة المنطقة تساوي مساحة المستطيل الذي بعديه 3، 6 (وحدة طول)

$$\therefore\ A = 3 \times 6 = 18 \text{ units squared}$$



حاول أن تحل

6 أوجد قيمة $\int_{1}^{5} (2-2x)dx$ بيانيًّا.

مثال (7)

أوجد:

a $\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx$

b $\int_{0}^{3} -\sqrt{9-x^2}\, dx$

الحل:

a $\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx$

نأخذ: $y = \sqrt{4-x^2}$

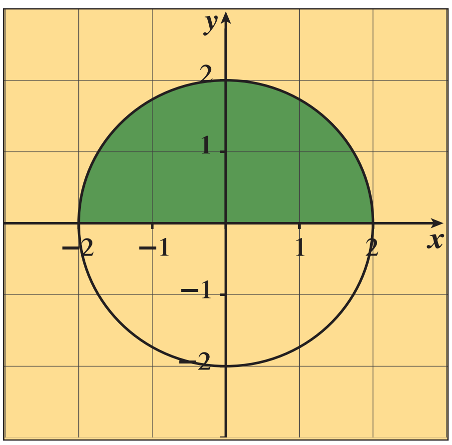
$$y^2 = 4 - x^2$$
$$x^2 + y^2 = 4$$

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 2 وحدة طول.

والدالة: $y = \sqrt{4-x^2}$ تمثل معادلة النصف العلوي للدائرة

مساحة المنطقة المظللة $= \int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx$

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\pi(2)^2$$
$$= 2\pi$$



b $\int_{0}^{3} -\sqrt{9-x^2}\,dx$

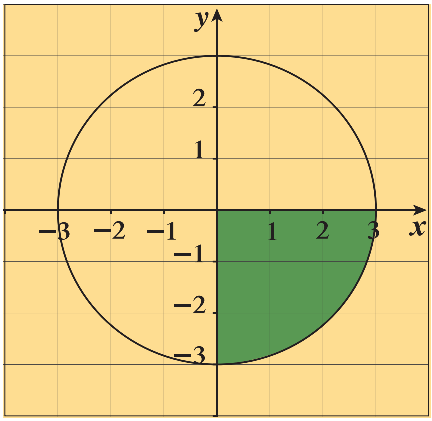
نأخذ: $y = -\sqrt{9-x^2}$

$$y^2 = 9 - x^2$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها 3 وحدات طول.

والدالة $y = -\sqrt{9-x^2}$ تمثل معادلة النصف السفلي للدائرة



فيكون:

$$\int_{0}^{3} -\sqrt{9-x^2}\,dx = -A$$

$$= \frac{-1}{4}\pi(3)^2$$

$$= \frac{-9\pi}{4}$$

حاول أن تحل

7 أوجد:

a $\int_{-5}^{5} \sqrt{25-x^2}\,dx$

b $\int_{0}^{4} -\sqrt{16-x^2}\,dx$

تعلمت في البنود السابقة طرائق عدة لإيجاد التكامل غير المحدد منها التكامل بالتعويض والتكامل بالتجزيء والتكامل بالكسور الجزئية. وتستخدم هذه الطرائق أيضًا في إيجاد التكاملات المحددة.

ويجب مراعاة ما يلي عند استخدام طريقة التعويض في إيجاد التكامل المحدد:

$$\int_{a}^{b} f(g(x))g'(x)\,dx$$

بفرض $u = g(x) \quad , \quad du = g'(x)dx$

ثم كامل بالنسبة لـ u من $u = g(a)$ إلى $u = g(b)$ بحيث يكون:

$$\int_{a}^{b} f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\cdot du$$

مثال (8)

أوجد: $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x\,dx$

الحل:

$$u = \tan x \quad , \quad du = \sec^2 x\,dx$$

عندما $x = 0$ فإن $u = \tan 0 = 0$

عندما $x = \frac{\pi}{4}$ فإن $u = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x\, dx = \int_0^1 u\,du$$
$$= \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

حاول أن تحل

8 **a** هل يمكن حل مثال (8) بطريقة أخرى؟ فسّر إجابتك.

b أوجد: $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x \cos 2x\, dx$

مثال (9)

أوجد:

a $\int_{-1}^{1} (x^2 + 2x - 3)^2 (x + 1)dx$ **b** $\int_0^3 x\sqrt{x+1}\, dx$

الحل:

a $\int_{-1}^{1} (x^2 + 2x - 3)^2 (x + 1)dx$

لتكن: $u = x^2 + 2x - 3$

فإن $du = (2x + 2)dx \Longrightarrow \frac{1}{2}du = (x + 1)dx$

عندما $x = -1$ فإن $u = -4$

عندما $x = 1$ فإن $u = 0$

عندئذٍ

$$\int_{-1}^{1} ((x^2 + 2x - 3)^2 (x + 1))dx = \frac{1}{2}\int_{-4}^{0} u^2\, du$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{u^3}{3}\right]_{-4}^{0}$$
$$= \frac{1}{2}\left(0 + \frac{64}{3}\right)$$
$$= \frac{32}{3}$$

b $\int_0^3 x\sqrt{x+1}\, dx$

طريقة أولى بالتجزيء:

$u = x \qquad dv = (x+1)^{\frac{1}{2}}dx$

$du = dx \qquad v = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int_0^3 x\sqrt{x+1}\, dx = \left[\frac{2x}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 - \frac{2}{3}\int_0^3 (x+1)^{\frac{3}{2}}\, dx$$
$$= \frac{2}{3}\left[x(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 - \frac{4}{15}\left[(x+1)^{\frac{5}{2}}\right]_0^3$$
$$= \frac{2}{3}\left[3 \times (4)^{\frac{3}{2}}\right] - \frac{4}{15}\left[4^{\frac{5}{2}} - 1\right] = \frac{116}{15}$$

طريقة ثانية:

$$\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx = \int_0^3 (x+1-1)\sqrt{x+1}\,dx$$
$$= \int_0^3 (x+1)\sqrt{x+1}\,dx - \int_0^3 \sqrt{x+1}\,dx$$
$$= \int_0^3 (x+1)^{\frac{3}{2}}\,dx - \int_0^3 (x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx$$
$$= \frac{2}{5}\left[(x+1)^{\frac{5}{2}}\right]_0^3 - \frac{2}{3}\left[(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3$$
$$= \frac{116}{15}$$

حاول أن تحل

9 أوجد:

a $\int_{-1}^{1}\left((x+1)\sqrt{x^2+2x+5}\right)dx$

b $\int_2^5 x\sqrt{x-1}\,dx$

مثال (10)

أوجد: $\int_{-2}^{0} \frac{x}{e^x}\,dx$

الحل:

$$\int_{-2}^{0} x\,e^{-x}\,dx$$

نستخدم التكامل بالتجزيء:

$u = x \qquad dv = e^{-x}\,dx$

$du = dx \qquad v = -e^{-x}$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int_{-2}^{0} x\,e^{-x}\,dx = -\left[x\,e^{-x}\right]_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0} -e^{-x}\,dx$$
$$= -\left[x\,e^{-x}\right]_{-2}^{0} - \left[e^{-x}\right]_{-2}^{0}$$
$$= -(0+2e^2) - (1-e^2)$$
$$= -2e^2 - 1 + e^2$$
$$= -e^2 - 1$$

حاول أن تحل

10 أوجد: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sec^2 x\,dx$

مثال (11)

أوجد: $\int_1^5 \frac{2x+8}{x^2+4x+3}\,dx$

الحل:

نوجد الكسور الجزئية للدالة الحدودية النسبية $f(x) = \frac{2x+8}{x^2+4x+3}$

فنكتب: $f(x) = \frac{2x+8}{(x+1)(x+3)}$

$$\frac{2x+8}{(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3}$$

نضرب طرفي المعادلة بـ $(x+1)(x+3)$ ونعوّض $x = -1$ و $x = -3$ فنجد على الترتيب $A = 3$ ، $B = -1$

وبالتالي: $f(x) = \frac{3}{x+1} - \frac{1}{x+3}$

ومنه:

$$\int_1^5 \frac{2x+8}{x^2+4x+3}\,dx = \int_1^5 \left(\frac{3}{x+1} - \frac{1}{x+3}\right)dx$$

$$= 3\int_1^5 \frac{dx}{x+1} - \int_1^5 \frac{dx}{x+3}$$

$$= 3\left[\ln|x+1|\right]_1^5 - \left[\ln|x+3|\right]_1^5$$

$$= 3[\ln 6 - \ln 2] - [\ln 8 - \ln 4]$$

$$= 3\ln\frac{6}{2} - \ln\frac{8}{4}$$

$$= 3\ln 3 - \ln 2$$

حاول أن تحل

11 أوجد: $\int_4^7 \frac{3x^2-17}{x^2-x-6}\,dx$

المرشد لحل المسائل

إن معدل التغير الشهري في دالة العائدات للمتجر الذي يملكه فهد من بيع سلعة معينة هو $\frac{dR}{dx} = R'(x) = x^2 - x$
حيث x هو عدد الوحدات المباعة شهريًّا من السلعة وR هو العائدات الشهرية من بيع x وحدات من السلعة نفسها بالدينار.

a اشرح كيف يمكن لفهد أن يجد الدالة التي تمثل العائدات الشهرية في متجره من بيع السلعة المذكورة.

b ما هي عائدات فهد في الشهر الذي يباع خلاله 30 وحدة من السلعة المذكورة؟

الحل:

a لإيجاد دالة العائدات فكّر فهد بإيجاد المشتقة العكسية لمعدل التغير الشهري، وهنا قام بوضع $R(x) = \int R'(x)\,dx$
أي $R(x) = \int (x^2 - x)\,dx$ مما يعطي دالة العائدات على النحو $R(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C$ مما يجعل وجود الثابت C
لغزًا، عندها فكّر وانتبه أنه عندما لا تباع أي وحدة شهريًّا يكون العائد هو 0 أي $R(0) = 0$ مما يعطيه أن $C = 0$ وهنا
تأكد أن دالة العائدات الشهرية هي: $R(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$ (دينار) في الشهر عندما يبيع x وحدة.

b أما عائدات المتجر من السلعة عندما يبيع فهد 30 وحدة هو:

$$R(30) = \frac{(30)^3}{3} - \frac{(30)^2}{2} = 9\,000 - 450 = 8\,550 \text{ (دينارًا)}$$

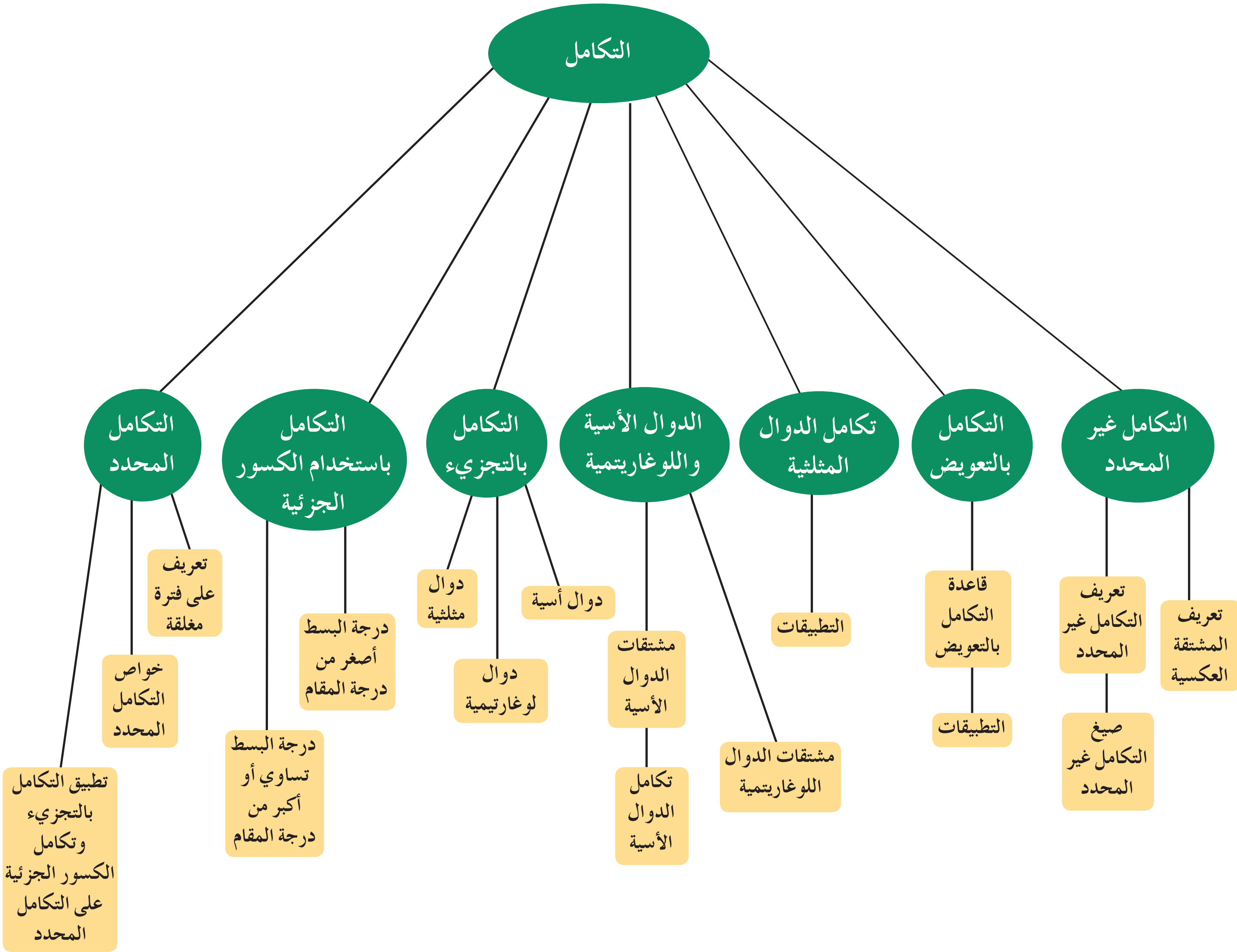
مسألة إضافية

إن معدل التغير الأسبوعي في دالة التكلفة لمصنع الإطارات الذي يملكه عيسى عند صنع x إطار أسبوعيًّا هو:
$\frac{dC}{dx} = C'(x) = 10x + 50$ حيث $C(x)$ هي التكلفة الأسبوعية من بيع x إطار بالدينار.

a اشرح كيف يمكن لعيسى أن يجد الدالة التي تمثل التكلفة الأسبوعية لصنع x إطار علمًا أن التكلفة لصنع 10 إطارات أسبوعيًّا هي 2 000 دينار.

b ما هي تكلفة صنع 20 إطارًا في الأسبوع الواحد في مصنع عيسى؟

مخطط تنظيمي للوحدة الخامسة



ملخص

- التكامل غير المحدد للدالة f بالنسبة إلى x يكتب $\int f(x)\,dx$ ويساوي $F(x)+C$ حيث $F(x)$ هي المشتقة العكسية و C ثابت التكامل.

• جدول صيغ التكامل:

قاعدة المشتقّة	التكامل غير المحدد
$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=x^n \quad , \quad n\neq -1$	1 $\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad , \quad n\neq -1$
$\frac{d}{dx}\left(-\frac{\cos kx}{k}\right)=\sin kx$	2 $\int \sin kx\,dx=-\frac{\cos kx}{k}+C$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin kx}{k}\right)=\cos kx$	3 $\int \cos kx\,dx=\frac{\sin kx}{k}+C$
$\frac{d}{dx}\tan x=\sec^2 x$	4 $\int \sec^2 x\,dx=\tan x+C$
$\frac{d}{dx}(-\cot x)=\csc^2 x$	5 $\int \csc^2 x\,dx=-\cot x+C$
$\frac{d}{dx}\sec x=\sec x\tan x$	6 $\int \sec x\tan x\,dx=\sec x+C$
$\frac{d}{dx}(-\csc x)=\csc x\cot x$	7 $\int \csc x\cot x\,dx=-\csc x+C$

قاعدة التكامل بالتعويض $\int f(g(x))g'(x)\,dx=F(g(x))+C$

• خواص التكامل غير المحدد

b $\int kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx$

a $\int (f(x)\pm g(x))\,dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx$

d $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\ln|f(x)|+C$

c $\int -f(x)\,dx=-\int f(x)\,dx$

e $\int f'(x)\,e^{f(x)}\,dx=e^{f(x)}+C$

جدول تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية

قاعدة المشتقّة	التكامل غير المحدد
$\frac{d}{dx}e^x=e^x$	$\int e^x\,dx=e^x+C$
$\frac{d}{dx}e^u=e^u\frac{du}{dx}=u'e^u$	$\int u'e^u\,dx=e^u+C$
$\frac{d}{dx}\ln|x|=\frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\,dx=\ln|x|+C$
$\frac{d}{dx}\ln|u|=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}=\frac{u'}{u}$	$\int \frac{u'}{u}\,dx=\ln|u|+C$

- التكامل بالتجزيء: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ حيث u , v دالتين في x قابلتين للتفاضل.
- الكسور الجزئية

تفكيك $\frac{r(x)}{h(x)}$ إلى كسور جزئية.

لكل عامل من $h(x)$ على الصورة $(mx+n)^k$، يجب أن يحتوي التفكيك إلى كسور جزئية على مجموع حدود عددها k :

$$\frac{A_1}{mx+n}+\frac{A_2}{(mx+n)^2}+\dots+\frac{A_k}{(mx+n)^k}$$

لاحظ أنه في حالة $k=1$، فإنه يوجد حد واحد فقط في المجموع.

- تفكيك $\frac{r(x)}{h(x)}$ إلى كسور جزئية

حلّل المقام وحدّد العوامل الخطية لِـ $h(x)$.

- التكامل المحدد

- $\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$
- $\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du (u=g(x) \;\; ; \;\; du = g'(x)\,dx)$

1 إذا f دالة متصلة وموجبة على $[a\,,b]$، $a<b$، فإن $\int_a^b f(x)\,dx$ يمثل المساحة المحددة بمنحنى الدالة f، ومحور السينات، والمستقيمين ذات المعادلتين $x=a \;\; , \;\; x=b$.

2 إذا f دالة متصلة وسالبة على $[a,b]$، $a<b$، فإن $-\int_a^b f(x)\,dx$ يمثل المساحة المحددة بمنحنى الدالة f، ومحور السينات، والمستقيمين ذات المعادلتين $x=a \;\; , \;\; x=b$.

- خواص التكامل المحدد

f دالة متصلة على $[a\,,b]$

1 $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

2 $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

3 $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$

4 $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

5 $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \;\; ; \;\; c\in[a\,,b]$

6 $f(x)\geqslant 0 \;\; \forall \;\; x\in[a\,,b] \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$

7 $f(x)\leqslant 0 \;\; \forall \;\; x\in[a\,,b] \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leqslant 0$

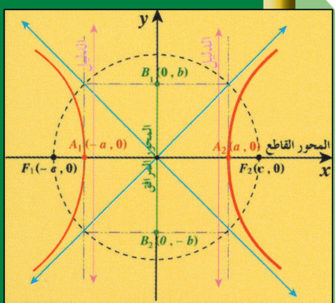
8 f ، g دالتان متصلتان على $[a\,,b]$ وإذا كان: $f(x)\leqslant g(x) \,\forall\, x\in[a\,,b] \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$

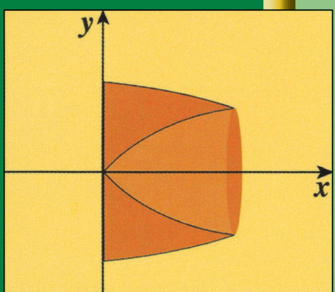
وزارة التربية
Ministry of Education
State of Kuwait | دولـــة الكويــت

الرياضيات

الصفّ الثاني عشر علمي

الفصل الدراسي الثاني - القسم الثاني





كتاب الطالب

2/2

المرحلة الثانوية

وزارة التربية
Ministry of Education
State of Kuwait | دولــــة الكويت

الرياضيات

الصفّ الثاني عشر علمي

الفصل الدراسي الثاني – القسم الثاني

كتاب الطالب

اللجنة الإشرافية لدراسة ومواءمة سلسلة كتب الرياضيات

أ. حسين علي عبدالله (رئيسًا)

حصة يونس محمد علي | أ. فتحية محمود أبو زور

الطبعة الثانية
١٤٤٧ هـ
٢٠٢٥ - ٢٠٢٦ م

الطبعة الأولى ٢٠١٤-٢٠١٥ م
الطبعة الثانية ٢٠١٦-٢٠١٧ م
٢٠١٨-٢٠١٩ م
٢٠١٩-٢٠٢٠ م
٢٠٢٠-٢٠٢١ م
٢٠٢١-٢٠٢٢ م
٢٠٢٢-٢٠٢٣ م
٢٠٢٣-٢٠٢٤ م
٢٠٢٤-٢٠٢٥ م
٢٠٢٥-٢٠٢٦م

لجنة دراسة ومواءمة كتب الرياضيات للصف الثاني عشر علمي

أ. حسن نوح علي المهنا (رئيسًا)

أ. صديقة أحمد صالح الأنصاري　　أ. شيخة فلاح مبارك الحجرف

أ. مجدي محمد يس دراز　　أ. يحيى عبد السلام خالد عقل

أ. وضحى ابراهيم مزعل الدوسري

دار التَّربَويّون House of Education ش.م.م. وبيرسون إديوكيشن ٢٠١٤م

مطبعة حكومة دولة الكويت
Government Press - State of Kuwait

أودع بمكتبة الوزارة تحت رقم (١٩) بتاريخ ١٣/ ٤/ ٢٠١٦ م


بسم الله الرحمن الرحيم

حضرة صاحب السمو الشيخ مشعل الأحمد الجابر الصباح
أمير دولة الكويت
H.H. Sheikh Meshal AL-Ahmad Al-Jaber Al-Sabah
Amir Of The State Of Kuwait

سمو الشيخ صباح خالد الحمد الصباح
ولي عهد دولة الكويت

H. H. Sheikh Sabah Khaled Al-Hamad Al-Sabah
Crown Prince Of The State Of Kuwait

المحتوَياتُ

الوحدة السادسة

تطبيقات التكامل
Integration Applications

مشروع الوحدة: احتساب سعر البيع

1. **مقدمة المشروع:** يعتبر النفط منذ فترة طويلة وحتى عصرنا الحاضر من أهم الموارد التي يحتاج إليها الإنسان، إن لجهة استخداماته أو لجهة مردوده المادي على الدول المنتجة.

2. **الهدف:** سوف تستكشف من خلال العمل في هذا المشروع كيف يحتسب سعر البيع لإنتاج بئر من النفط الخام خلال فترة زمنية معينة.

3. **اللوازم:** آلة حاسبة — حاسوب.

4. **أسئلة حول التطبيق:**

تبيّن لإحدى الشركات أن إحدى الآبار يمكن أن يعطي 300 برميل من النفط الخام يوميًّا على أن يتوقف إنتاجه خلال 3 سنوات، وقدرت أنه في عدد t من الأيام ابتداءً من الآن سوف يكون سعر النفط الخام معطى بالعلاقة: $P(t) = 30 + 0.3\sqrt{t}$ (Dollars) للبرميل الواحد (السعر العالمي لبيع النفط الخام بالدولار الأميركي).

إذا كانت الشركة تبيع النفط عند استخراجه من البئر مباشرة، فما القيمة الإجمالية لبيع النفط مستقبلًا؟

a معدل التغير لثمن البيع الإجمالي $\frac{dR}{dt}$ هو:

$\frac{dR}{dt}$ = [سعر بيع البرميل الواحد بالدولار] × [عدد البراميل المباعة في اليوم الواحد]

أوجد $\frac{dR}{dt}$ (لاحظ أن: $\frac{dR}{dt} = \frac{dR}{dB} \times \frac{dB}{dt}$ حيث إن B هو عدد البراميل المستخرجة).

b أوجد $R(t) = \int \frac{dR}{dt}\, dt$ علمًا أن: $R(0) = 0$

c أوجد قيمة $R(t)$ خلال 3 سنوات.

دروس الوحدة

المساحات في المستوي	حجوم الأجسام الدورانية	طول قوس ومعادلة منحنى دالة	المعادلات التفاضلية
6–1	6–2	6–3	6–4

الوحدة السادسة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعرفت النهايات المنتهية وغير المنتهية عند نقطة أو على فترة.
- تعرفت الاتصال على فترة والانفصال عند نقطة أو على فترة.
- تعرفت مشتقة دالة عند نقطة وعلى فترة.
- تعرفت قابلية الاشتقاق وقواعد الاشتقاق.
- تعرفت التطبيق على الاشتقاق لإيجاد التفاضل.
- تعرفت الدوال التزايدية والدوال التناقصية ورسومها البيانية.
- تعرفت المشتقة العكسية والتكامل المحدد.

ماذا سوف تتعلم؟

- إيجاد المساحة بين المنحنيات.
- إيجاد المساحة المحددة بين منحنيات متقاطعة.
- إيجاد القيم المحدودة لدوال متغيرة.
- التعرف على الحجم كتكامل.
- إيجاد الحجم بطريقة المقاطع العرضية الدائرية.
- معادلة منحنى دالة بمعلومية ميل المماس وإحداثيات نقطة.
- طول قوس على منحنى دالة.
- حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى.
- حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية.

المصطلحات الأساسية

المساحة — المساحة المحددة بين منحنيين — الحجم — المقاطع العرضية الدائرية — معادلة دالة بمعلومية ميل المماس وإحداثيات نقطة — طول قوس على منحنى دالة — المعادلة التفاضلية — المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى — المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية.

أضف إلى معلوماتك

يستخدم التكامل المحدد في مجالات علمية متعددة ومنها المجال الفيزيائي حيث يمكن إيجاد كتلة إحداثيات نقطة ثقل جسم معين فمثلًا:

لنأخذ g , f دالتين متصلتين على الفترة $[a\,,b]$ حيث $f(x) \geq g(x)$ ونأخذ صفيحة رقيقة لها كثافة نوعية p وتغطي هذه الصفيحة المنطقة R بين منحنى الدالة $f(x)$ ومنحنى الدالة $g(x)$ فنحصل على التالي:

كتلة $(R) = m = p\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

وإحداثيات نقطة الثقل $(\overline{x}\,,\,\overline{y})$ هي:

$$\overline{x} = \frac{p\int_a^b x[f(x) - g(x)]dx}{p\int_a^b [f(x) - g(x)]dx} = \frac{p\int_a^b x[f(x) - g(x)]dx}{m}$$

$$\overline{y} = \frac{\frac{1}{2}\,p\int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}dx}{p\int_a^b [f(x) - g(x)]dx} = \frac{\frac{1}{2}\,p\int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}dx}{m}$$

المساحات في المستوي
Areas in the Plane

سوف تتعلم
- المساحة بين المنحنيات.
- المساحة المحددة بين منحنيات متقاطعة.
- القيم المحددة لدوال متغيّرة.

المفردات والمصطلحات:
- مساحة منطقة محددة بين منحنيين
Area Enclosed between Two Curves
- المساحة المحددة بين منحنيات متقاطعة
Area Enclosed by Intersecting Curves
- وحدة مربعة
Unit Squared

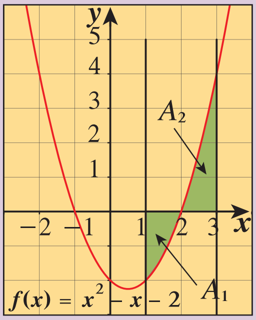
دعنا نفكر ونتناقش

في الشكل المجاور منحنى الدالة f : $f(x) = x^2 - x - 2$ في الفترة $[1,3]$.

1 أوجد: $\int_1^3 f(x)\,dx$.

2 احسب مساحة كل من المنطقتين A_1 , A_2 المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمين $x = 3$, $x = 1$

3 قارن بين ما حصلت عليه في 2 , 1 .



أولاً: مساحة منطقة محددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة $[a,b]$

علمنا من دراستنا السابقة أنه إذا كانت f دالة متصلة على $[a,b]$ فإن مساحة المنطقة A المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمين $x = b$, $x = a$

إذا كانت: $f(x) \geqslant 0 \quad \forall\, x \in [a,b]$

فإن $A = \int_a^b f(x)\,dx$

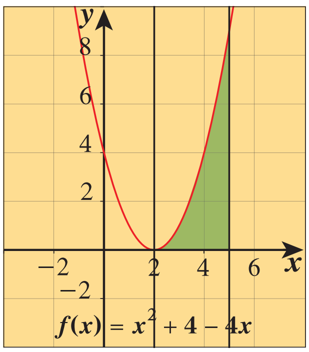
إذا كانت: $f(x) \leqslant 0 \quad \forall\, x \in [a,b]$

فإن $A = -\int_a^b f(x)\,dx$

مثال (1)

يبيّن الشكل المقابل بيان الدالة: $f(x) = x^2 + 4 - 4x$

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة ومحور السينات والمستقيمين $x = 5$, $x = 2$



الحل:

من الشكل:

$\because\ f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [2,5]$

$$\therefore\ A = \int_2^5 f(x)\,dx = \int_2^5 (x^2 + 4 - 4x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + 4x - 2x^2\right]_2^5 = \left[\frac{125}{3} + 20 - 50\right] - \left[\frac{8}{3} + 8 - 8\right]$$

$$= \frac{35}{3} - \frac{8}{3} = 9 \quad \text{units square}$$

تذكر:
أننا نتعامل مع دوال متصلة على فترات معينة.

حاول أن تحل

1 في مثال (1) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمين $x = 4$, $x = -1$

مثال (2)

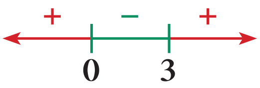
أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 - 3x$ ومحور السينات.

الحل:

نوجد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنى الدالة f مع محور السينات بوضع

$$f(x) = 0$$
$$x^2 - 3x = 0$$
$$x(x-3) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{أو} \quad x = 3$$

نبحث هل $f(x) \leqslant 0$ أو $f(x) \geqslant 0$ في $[0 , 3]$



$$\because \; f(x) \leqslant 0 \qquad \forall\, x \in [0,3]$$

$\therefore$ المساحة:

$$A = -\int_0^3 f(x)\,dx$$
$$= -\int_0^3 (x^2 - 3x)\,dx$$
$$= -\left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right]_0^3$$
$$= -\left[\left(9 - \frac{27}{2}\right) - (0)\right]$$
$$= -\left(-\frac{9}{2}\right)$$
$$= \frac{9}{2} \quad \text{units square}$$

حاول أن تحل

2 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 5x + 4$ ومحور السينات.

لاحظت في فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» أن الدالة f تقطع محور السينات عند $x = 2$

حيث $2 \in [1,3]$ تم تقسيم الفترة لحساب مساحة المنطقة المطلوبة والقاعدة التالية توضح ذلك:

لتكن f دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ ، $c \in (a,b)$ حيث $f(c) = 0$

فإن مساحة المنطقة المستوية المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة $[a,b]$ هي:

$$A = \left|\int_a^c f(x)\,dx\right| + \left|\int_c^b f(x)\,dx\right|$$

وهذه القاعدة صحيحة عند وجود: ... , c_1 , c_2 , c_3 تنتمي إلى (a , b)

حيث $f(c_1) = f(c_2) = f(c_3) = \ldots = 0$

مثال (3)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة المبينة.

a $f(x) = x^3 - 4x \quad , \quad \left[-1 , \frac{3}{2}\right]$

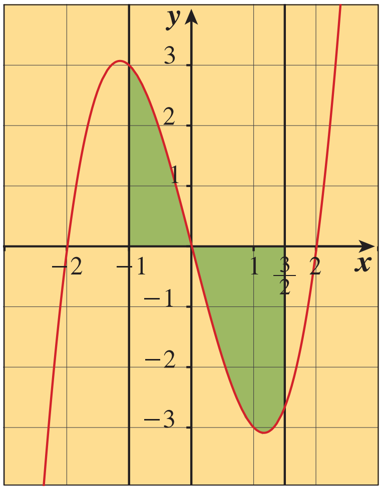
b $f(x) = \sin x \quad , \quad \left[-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\right]$

الحل:

a $f(x) = x^3 - 4x \quad , \quad \left[-1 , \frac{3}{2}\right]$

نوجد قيم x بحيث

$$f(x) = 0$$
$$x^3 - 4x = 0$$
$$x(x^2 - 4) = 0$$
$$x(x-2)(x+2) = 0$$
$$x = 0 \quad , \quad 0 \in (-1 , \frac{3}{2})$$
$$x = 2 \quad , \quad 2 \notin (-1 , \frac{3}{2})$$
$$x = -2 \quad , \quad -2 \notin (-1 , \frac{3}{2})$$



شكل توضيحي

$\therefore$ المنحنى يقطع محور السينات عند $x = 0$

فتكون مساحة المنطقة A كما يلي:

$$A = \left|\int_{-1}^{0} f(x)dx\right| + \left|\int_{0}^{\frac{3}{2}} f(x)dx\right|$$

$$= \left|\int_{-1}^{0} (x^3 - 4x)dx\right| + \left|\int_{0}^{\frac{3}{2}} (x^3 - 4x)dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{0}^{\frac{3}{2}}\right|$$

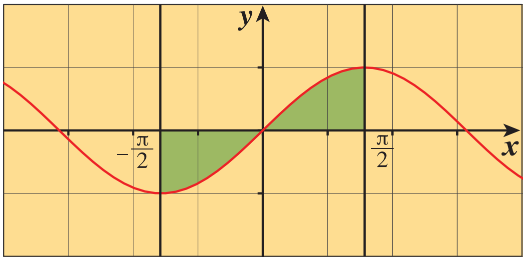
$$= \left|\left[0 - \left(\frac{-7}{4}\right)\right]\right| + \left|-\frac{207}{64} - 0\right|$$

$$= \frac{7}{4} + \frac{207}{64}$$

$$= \frac{112}{64} + \frac{207}{64}$$

$$= \frac{319}{64} \quad \text{(وحدة مربعة)}$$

b $f(x) = \sin x \quad , \quad \left[-\frac{\pi}{2} \;,\; \frac{\pi}{2}\right]$



نرسم منحنى الدالة f: نلاحظ أنه في الفترة $\left[-\frac{\pi}{2} \;,\; \frac{\pi}{2}\right]$

تنقسم المنطقة المطلوبة إلى منطقتين حيث $f(x) = 0$ عند $x = 0$

فتكون مساحة المنطقة المطلوبة كما يلي:

$$A = \left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx\right|$$

$$A = \left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin x\,dx\right| + \left|\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx\right|$$

$$= \left|\left[-\cos x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\right| + \left|\left[-\cos x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$= \left|-(1-0)\right| + \left|-(0-1)\right| = 1 + 1 = 2$$ (وحدة مربعة)

حاول أن تحل

3 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة المبينة.

a $f(x) = x^3 - 9x \quad , \quad [-2 \;,\; 1]$

b $f(x) = \cos x \quad , \quad [0 \;,\; \pi]$

ثانيًا: مساحة منطقة محددة بمنحنيي دالتين في الفترة $[a \,, b]$

مساحة منطقة محددة بين منحنيين

إذا كانت كل من $f \,, g$ متّصلتين على الفترة $[a \,, b]$، حيث

$$f(x) \geqslant g(x) \qquad \forall x \in [a \,, b]$$

فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين $g \;,\; f$ والمستقيمين $x = a \;,\; x = b$ هي:

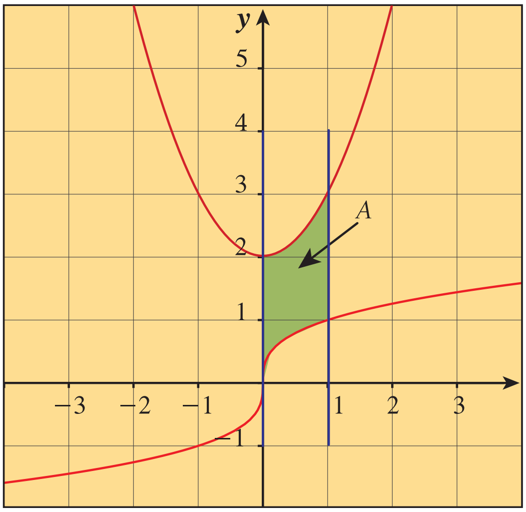
$$A = \int_{a}^{b} [f(x) - g(x)]\,dx$$

مثال (4)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 2$ ومنحنى الدالة g : $g(x) = \sqrt[3]{x}$ والمستقيمين $x = 1$, $x = 0$

علمًا بأن: $\forall x \in [0 , 1]$, $f(x) > g(x)$

الحل:



شكل توضيحي

$\because \; f(x) > g(x) \; \forall \; x \in [0 , 1]$

$\therefore$ مساحة المنطقة المحددة هي:

$$A = \int_0^1 [f(x) - g(x)]dx$$
$$= \int_0^1 (x^2 + 2 - \sqrt[3]{x})dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\right]_0^1$$
$$= \left(\frac{1}{3} + 2 - \frac{3}{4}\right) - (0)$$
$$= \frac{19}{12}$$ (وحدة مربعة)

حاول أن تحل

4 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 3$

ومنحنى الدالة g : $g(x) = x^2 + 1$ والمستقيمين $x = 1$, $x = -1$

علمًا بأن: $\forall x \in [-1 , 1]$, $f(x) > g(x)$

مثال (5)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = e^x$ ومنحنى الدالة g : $g(x) = -1 - x^2$ والمستقيمين $x = 3$, $x = 0$

علمًا بأن المنحنيين للدالتين f , g غير متقاطعين.

الحل:

$\because$ المنحنيين غير متقاطعين نأخذ قيمة اختيارية تنتمي للفترة $(0 , 3)$ ولتكن $x = 1$

$f(1) = e^1 = e$

$g(1) = -1 - (1^2) = -2$

أي أن: $f(x) > g(x) \qquad \forall \; x \in [0 , 3]$

فتكون مساحة المنطقة المحددة هي:

$$A = \int_0^3 (f(x) - g(x))dx$$
$$= \int_0^3 (e^x + x^2 + 1)dx = \left[e^x + \frac{x^3}{3} + x\right]_0^3$$
$$= (e^3 + 9 + 3) - (1) = e^3 + 11 \quad \text{(وحدة مربعة)}$$

حاول أن تحل

5 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 1$

ومنحنى الدالة g : $g(x) = -x^2 - 3$ والمستقيمين $x = 1$, $x = -1$

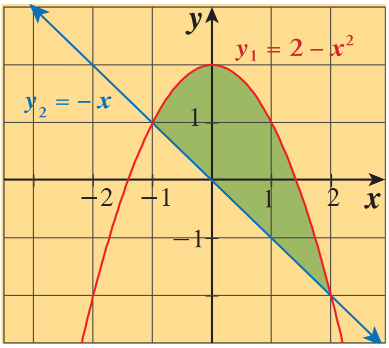
علمًا بأن المنحنيين للدالتين f , g غير متقاطعين.

عندما تنحصر منطقة بين منحنيات متقاطعة، فإنّ حدود التكامل هي الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع.

مثال (6)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى القطع المكافئ

$y_1 = 2 - x^2$ والمستقيم $y_2 = -x$



شكل توضيحي

الحل:

لإيجاد الإحداثيات السينية لنقطتي التقاطع:

نضع $y_1 = y_2$

$$2 - x^2 = -x$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$x = -1 \quad \text{أو} \quad x = 2$$

$\therefore$ حدّا التكامل هما: 2 , -1

نأخذ قيمة اختيارية تنتمي إلى الفترة $(-1, 2)$ ولتكن $x = 0$

$$y_1 = 2 - (0)^2 = 2$$
$$y_2 = 0$$
$$\because \quad y_1 \geqslant y_2 \quad \forall x \in [-1, 2]$$

$\therefore$ مساحة المنطقة هي:

$$A = \int_{-1}^{2} (y_1 - y_2)dx$$
$$A = \int_{-1}^{2} [2 - x^2 - (-x)]dx$$
$$= \left[2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2}$$
$$= \left[(2 \times 2) - \frac{(2)^3}{3} + \frac{(2)^2}{2}\right] - \left[2(-1) - \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2}\right]$$
$$= \frac{9}{2} \quad \text{(وحدة مربعة)}$$

حاول أن تحل

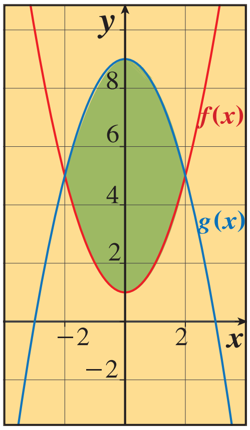
6 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين: $y_2 = -2x + 5 \quad , \quad y_1 = x^2 + 2$

في مثال (6) يمكن إيجاد المساحة A باستخدام القيمة المطلقة دون الحاجة لاستخدام القيمة الاختيارية كالتالي:

$$A = \left| \int_{-1}^{2} (y_1 - y_2)\,dx \right| = \left| \int_{-1}^{2} (y_2 - y_1)\,dx \right|$$

مثال (7)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي: $g(x) = -x^2 + 9 \quad , \quad f(x) = x^2 + 1$



شكل توضيحي

الحل:

لإيجاد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع المنحنيين نضع

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 + 1 = -x^2 + 9$$

$$2x^2 = 8$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

يكون التكامل من $x = -2$ إلى $x = 2$ ومساحة المنطقة هي:

$$A = \left| \int_{-2}^{2} (f(x) - g(x))\,dx \right|$$

$$= \left| \int_{-2}^{2} (x^2 + 1 + x^2 - 9)\,dx \right| = \left| \int_{-2}^{2} (2x^2 - 8)\,dx \right|$$

$$= \left| \left[\frac{2x^3}{3} - 8x \right]_{-2}^{2} \right|$$

$$= \left| \left[\frac{2(2)^3}{3} - 8(2) \right] - \left[\frac{2(-2)^3}{3} - 8(-2) \right] \right|$$

$$= \frac{64}{3}$$ (وحدة مربعة)

حاول أن تحل

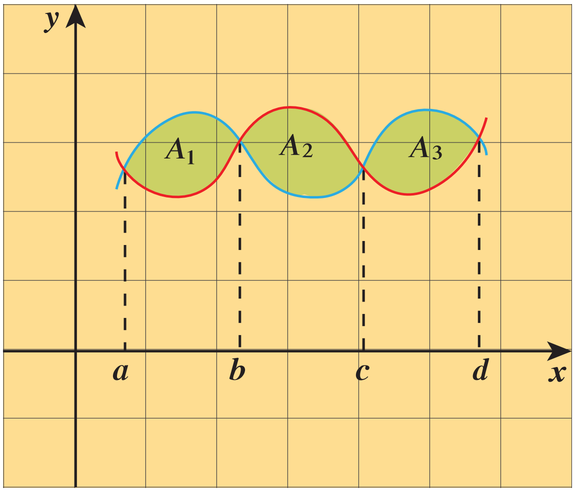
7 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين: $g(x) = x^2 - 1 \quad , \quad f(x) = -2x^2 + 2$

القيم المحدودة لدوال متغيّرة
Boundaries with Changing Functions

إذا كانت منطقة محدودة بأكثر من دالّة واحدة،
ولا يوجد تكامل واحد يعطي مساحة هذه المنطقة.
في هذه الحالة تُجزأ المنطقة المطلوب إيجاد مساحتها
ولتكن A، إلى مناطق جزئية تناظر تغيرات هذه الدوال كما في
الشكل الموضح وتكون:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + ...$$

ونكمل كالمعتاد.



مثال (8)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومنحنى الدالة g حيث:

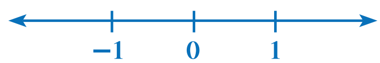
$$f(x) = x^3 - 1 \quad , \quad g(x) = x - 1$$

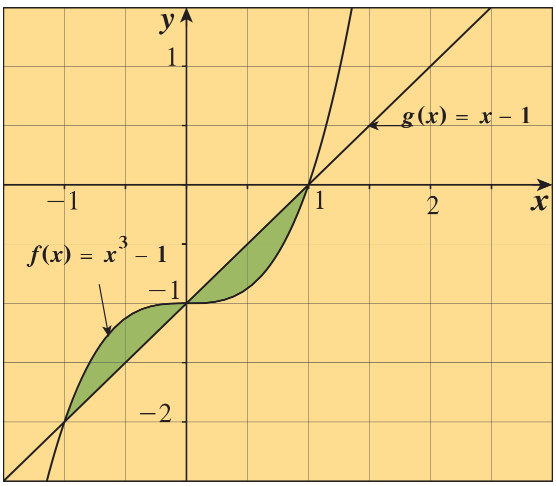
الحل:

$$f(x) = x^3 - 1 \quad , \quad g(x) = x - 1$$

لإيجاد الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع نضع:

$$f(x) = g(x)$$
$$x^3 - 1 = x - 1$$
$$x^3 - x = 0$$
$$x(x^2 - 1) = 0$$
$$x(x - 1)\ (x + 1) = 0$$
$$x = 0 \ , \ x = 1 \ , \ x = -1$$





شكل توضيحي

فيكون التكامل على الفترتين: $[-1 , 0]$, $[0 , 1]$ وهو يعطي مساحة المنطقة A المحددة بين المنحنيين.

$$A = \left|\int_{-1}^{0} (f(x) - g(x))dx\right| + \left|\int_{0}^{1} (f(x) - g(x))dx\right|$$
$$= \left|\int_{-1}^{0} (x^3 - 1 - x + 1)dx\right| + \left|\int_{0}^{1} (x^3 - 1 - x + 1)dx\right|$$
$$= \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}\right|$$
$$= \left|0 - \left(-\frac{1}{4}\right)\right| + \left|-\frac{1}{4} - 0\right| = \frac{1}{2} \quad \text{(وحدة مربعة)}$$

حاول أن تحل

8 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومنحنى الدالة g في كل مما يلي:

$$f(x) = 1 - x^3 \quad , \quad g(x) = -4x + 1$$

مثال (9)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين:

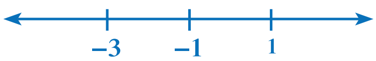
$$f(x) = x^3 - x \quad , \quad g(x) = 3 - 3x^2$$

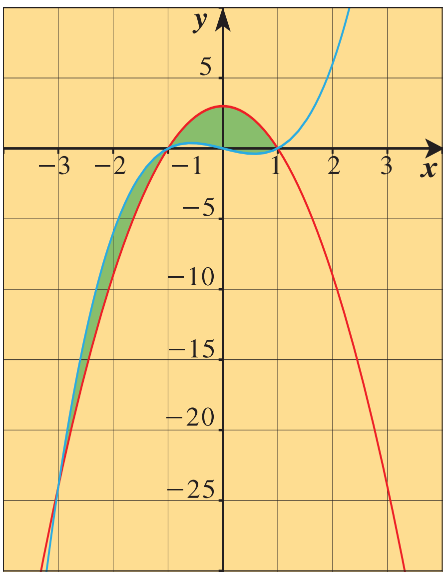
الحل:

لإيجاد الإحداثي السيني لنقاط تقاطع المنحنيين:

نضع

$$f(x) = g(x)$$
$$x^3 - x = 3 - 3x^2$$
$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$$
$$x^2(x+3) - (x+3) = 0$$
$$(x^2 - 1)(x+3) = 0$$
$$(x-1)(x+1)(x+3) = 0$$
$$x = 1 \quad , \quad x = -1 \quad , \quad x = -3$$





شكل توضيحي

فيكون التكامل على الفترتين $[-3, -1]$, $[-1, 1]$

وهو يعطي مساحة المنطقة A المحددة بالمنحنيين:

$$A = \left| \int_{-3}^{-1} (f(x) - g(x)\,dx) \right| + \left| \int_{-1}^{1} (f(x) - g(x)\,dx) \right|$$
$$= \left| \int_{-3}^{-1} (x^3 - x - 3 + 3x^2)dx \right| + \left| \int_{-1}^{1} (x^3 - x - 3 + 3x^2)dx \right|$$
$$= \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - 3x + x^3 \right]_{-3}^{-1} \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - 3x + x^3 \right]_{-1}^{1} \right|$$
$$= \left| \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 3 - 1 \right) - \left(\frac{81}{4} - \frac{9}{2} + 9 - 27 \right) \right| + \left| \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 3 + 1 \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 3 - 1 \right) \right|$$
$$= |+4| + |-4| = 8 \quad \text{(وحدة مربعة)}$$

حاول أن تحل

9 أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين:

$g(x) = \frac{x}{2}$, $f(x) = \sqrt{x}$

والمستقيمين $x = 9$, $x = 0$

6–2

حجوم الأجسام الدورانية

Volumes of Revolution Solids

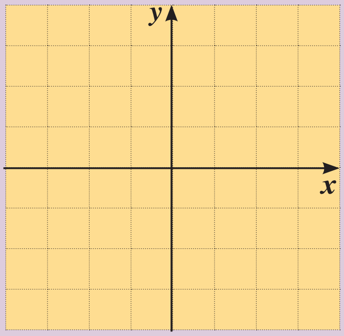
سوف تتعلم

- التعرف على الحجم كتكامل.
- إيجاد الحجم بطريقة المقاطع العرضيّة الدائريّة.

المفردات والمصطلحات:

- شرائح Slices
- حجم مجسم Volume of a Solid
- الأجسام الدورانية Solids of Revolution

دعنا نفكر ونتناقش



1 **a** ارسم منحنى الدالة: $f(x) = 1$ في الفترة $[1, 4]$

b ظلّل المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f(x) = 1$ ومحور السينات في الفترة $[1, 4]$

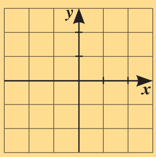
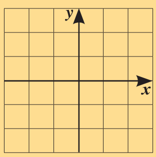
c قم بتدوير هذه المنطقة المستوية حول محور السينات. ما المجسم الناتج؟

d أوجد حجم المجسم الناتج من الدوران؟

e أوجد قيمة التكامل: $\int_1^4 \pi(f(x))^2 dx$

f ماذا تلاحظ من **e** , **d** ؟

2 كرّر الخطوات السابقة من **1** لكلّ من الدوال التالية وأكمل الجدول.

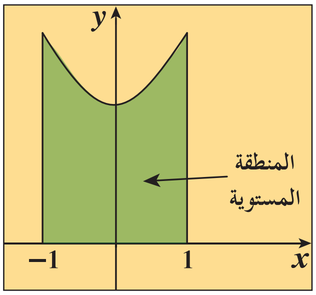
الدالة	الفترة	منحنى الدالة	اسم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية	حجم المجسم	$\int_a^b \pi(f(x))^2 dx$
$f(x) = x$	$[0, 3]$				
$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$	$[-2, 2]$				

من فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» لاحظنا أنه: إذا نتج مجسم من دوران منطقة محددة بمنحنى دالة f ومحور السينات والمستقيمين $x = b$ ، $x = a$ حيث $a < b$ دورة كاملة حول محور السينات فإن حجم هذا المجسم يساوي:

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx$$

مثال (1)

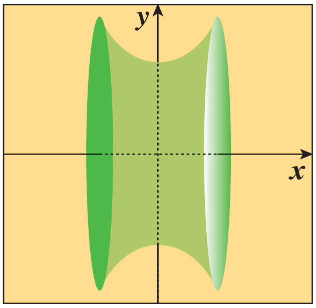
أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 2$ ومحور السينات في الفترة $[-1, 1]$.



الحل:

حجم المجسم الناتج هو:

$$V = \pi \int_{-1}^{1} (f(x))^2 dx$$
$$= \pi \int_{-1}^{1} (x^2 + 2)^2 dx$$
$$= \pi \int_{-1}^{1} (x^4 + 4x^2 + 4) dx$$
$$= \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{4x^3}{3} + 4x \right]_{-1}^{1}$$
$$= \pi \left[\left(\frac{1}{5} + \frac{4}{3} + 4 \right) - \left(-\frac{1}{5} - \frac{4}{3} - 4 \right) \right]$$
$$= \frac{166}{15} \pi \quad \text{units cube}$$



شكل توضيحي

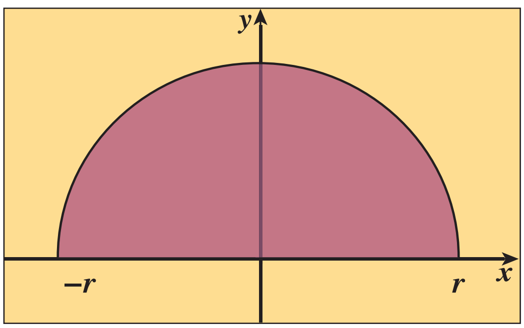
حاول أن تحل

1 أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f:
$f(x) = \sqrt{x - 1}$ ومحور السينات في الفترة $[1, 5]$.

من فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» لاحظنا أن المجسم الناتج من دوران منحنى الدالة $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ (نصف دائرة) هو كُرة طول نصف قطرها $r = 2$. ويمكننا استخدام قاعدة إيجاد حجوم الأجسام الدورانية في إثبات قانون حجم الكُرة.

مثال (2)

باستخدام التكامل المحدد أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بنصف الدائرة $y = \sqrt{r^2 - x^2}$



شكل توضيحي

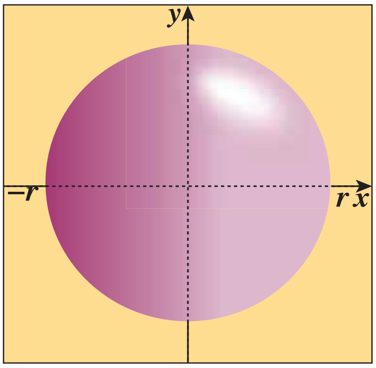
الحل:

$$\because \quad y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

تمثل معادلة نصف دائرة مركزها نقطة الأصل $(0, 0)$ وطول نصف قطرها r

$\therefore$ المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات هو كُرة.

∴ حجم المجسم الناتج (الكُرة) هو:



$$V = \pi\int_{-r}^{r} y^2 dx = \pi\int_{-r}^{r}\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 dx$$

$$= \pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)dx = \pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r}$$

$$= \pi\left[\left(r^3-\frac{r^3}{3}\right)-\left(-r^3+\frac{r^3}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{units cube}$$

حاول أن تحل

2 باستخدام التكامل المحدد أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f : $r \neq 0$ ، $f(x) = r$ في الفترة $[0, h]$

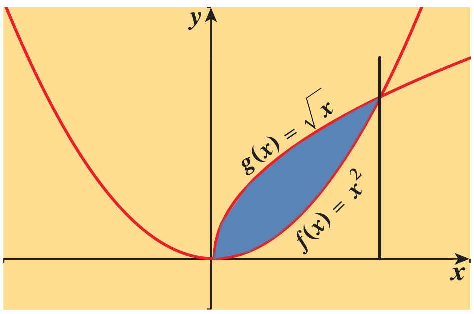
إذا نتج مجسم عن دوران منطقة محددة بمنحنيي الدالتين g ، f والمستقيمين $x = b$ ، $x = a$ دورة كاملة حول محور السينات، بحيث f, g لهما الإشارة نفسها في الفترة $[a, b]$، فإن حجم هذا المجسم يعطى بالقاعدة:

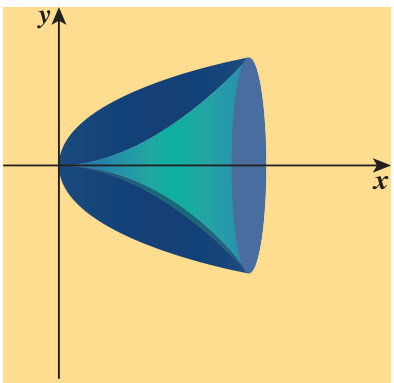
$$V = \pi\int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2]dx$$

حيث: $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ أو $f(x) \leqslant g(x) \leqslant 0$

مثال (3)

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنيي الدالتين g : $g(x) = \sqrt{x}$ ، $f(x) = x^2$





الحل:

المنطقة المستوية محددة بمنحنيي الدالتين

نجد التقاطع بوضع:

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 = \sqrt{x} \qquad (x \geqslant 0)$$

بتربيع الطرفين

$$x^4 = x$$

$$x^4 - x = 0$$

$$x(x^3-1) = 0$$

$$x(x-1)(x^2+x+1) = 0$$

نحصل على: $x = 0$ ، $x = 1$

وبالنسبة إلى المعادلة $x^2+x+1 = 0$

نوجد المميز Δ :

$$\Delta = 1 - 4(1)(1) = -3 \quad , \quad -3 < 0$$

∴ المعادلة ليس لها حلول في $\mathbb{R}$ فيكون التكامل على $[0, 1]$

نأخذ قيمة اختيارية في $(0,1)$ ولتكن $x=\frac{1}{4}$

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{16} \quad , \quad g\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad g(x) \geqslant f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

$\therefore$ حجم المجسم الناتج عن الدوران: $V=\pi\int_0^1[(g(x))^2-(f(x))^2]dx$

$$V=\pi\int_0^1[(\sqrt{(x)})^2-(x^2)^2]dx$$

$$V=\pi\int_0^1(x-x^4)dx$$

$$=\pi\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\pi\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)-(0)\right]$$

$$=\frac{3}{10}\pi \quad \text{units cube}$$

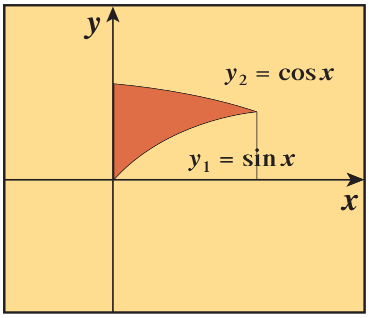
حاول أن تحل

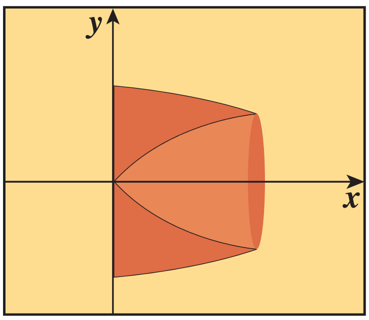
3 أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بين منحنيي الدالتين

$$f(x)=\frac{x^2}{2}+1 \quad , \quad g(x)=\frac{x}{2}+2$$

مثال (4)

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنيي الدالتين. $y_2=\cos x$, $y_1=\sin x$ على الفترة $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.





الحل:

نرسم منحنى كل من الدالتين y_2 , y_1 في الفترة $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

المنطقة موضّحة في الشكل (المقابل).

من الرسم البياني نلاحظ أن: $y_2 \geqslant y_1 \geqslant 0$

$\therefore$ حجم المجسم الناتج يساوي: $V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}[(y_2^2-y_1^2)dx$

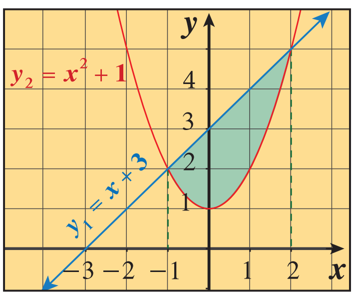
$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}[(\cos^2x-\sin^2x)dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(2x)dx \qquad \cos^2x-\sin^2x=\cos 2x$$

$$=\frac{\pi}{2}[\sin(2x)]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\pi}{2}(1-0)$$

$$=\frac{\pi}{2} \quad \text{(وحدة مكعبة)}$$



حاول أن تحل

4 أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنيي الدالتين: $y_1=x+3$, $y_2=x^2+1$

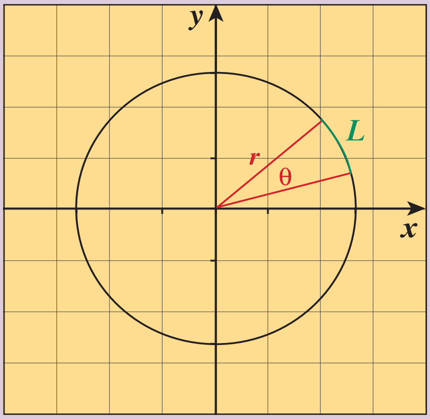
6–3

طول قوس ومعادلة منحنى دالة
Arc Length and Equation of Function Curve

سوف تتعلم
- معادلة منحنى دالة بمعلومية ميل المماس ونقطة تنتمي إلى بيان الدالة.
- طول القوس.

المفردات والمصطلحات:
- معادلة منحنى دالة Equation of Function Curve
- طول قوس Arc Length

دعنا نفكر ونتناقش



تعرفت سابقًا أن محيط دائرة طول نصف قطرها r يعطى بالقاعدة: $2\pi r$ وأن القوس المقابل لزاوية مركزية θ(radians) في الدائرة طوله: $L = r\theta$.

أكمل الجدول التالي:

طول القوس المقابل (L)	قياس زاوية مركزية في دائرة θ(radians)
	$\frac{\pi}{6}$
	$\frac{\pi}{2}$
	π
	$\frac{3\pi}{2}$

أولًا: إيجاد طول قوس من منحنى

نلاحظ من خلال فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» أن بالإمكان إيجاد طول قوس على منحنى مألوف لدينا وهو الدائرة حيث استخدمنا القاعدة $L = r\theta$.

كما أننا نستخدم قاعدة لإيجاد طول قوس على أي منحنى.

قاعدة طول القوس

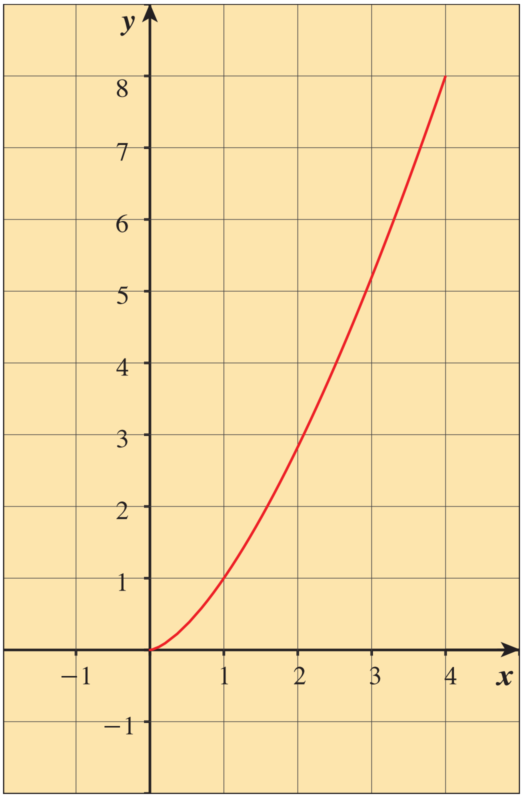
إذا كانت الدالة f' متصلة على $[a, b]$ فإن طول القوس من منحنى $y = f(x)$ في $[a, b]$ هو:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

ملاحظة: سنتعامل في هذا البند مع دوال مشتقاتها متصلة على الفترات المعطاة.

مثال (1)

في الشكل، أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \sqrt{x^3}$ في الفترة $[0, 4]$



الحل:

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$(x^n)' = nx^{n-1}$

$$L = \int_0^4 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

$$= \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx$$

لإيجاد التكامل نستخدم قاعدة التعويض

$$g(x) = 1 + \frac{9}{4}x$$

$$g'(x) = \frac{9}{4}$$

$$L = \frac{4}{9}\int_0^4 \frac{9}{4}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$L = \frac{4}{9} \times \frac{2}{3}\left[\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^3}\right]_0^4$$

$$= \frac{8}{27}\left[\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}(4)\right)^3} - \sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}(0)\right)^3}\right]$$

$$= \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)$$

$$L \approx 9.07 \text{ units}$$

حاول أن تحل

1 أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 1$ في الفترة $[3, 8]$

مثال (2)

أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{1}{3}(3+2x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[0 , 6]$

الحل:

$$f(x) = \frac{1}{3}(3+2x)^{\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \times 2 \times \frac{3}{2}(3+2x)^{\frac{1}{2}}$$ $(u^n)' = nu'u^{n-1}$

$$f'(x) = (3+2x)^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_0^6 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

$$L = \int_0^6 \sqrt{1+3+2x}\,dx$$ قاعدة طول القوس

$$= \int_0^6 \sqrt{4+2x}\,dx$$

$$= \int_0^6 (4+2x)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^6 2(4+2x)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(4+2x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^6$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}[16^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}]$$

$$L = \frac{56}{3}$$ (وحدة طول)

حاول أن تحل

2 أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{2}{9}(9+3x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[2 , 5]$

ثانيًا: إيجاد معادلة منحنى دالة باستخدام التكامل

مثال (3)

أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x , y)$ يساوي: $3x^2 - 4x + 1$ ويمر بالنقطة $A(1 , 2)$

الحل:

$$\because \quad f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

$$\therefore \quad f(x) = \int (3x^2 - 4x + 1)dx$$

$$f(x) = \frac{3x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + x + C$$

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + C$$

لتعيين قيمة الثابت C نعوّض بالنقطة $A(1, 2)$ في المعادلة السابقة فنحصل على:

$$2 = (1)^3 - 2(1)^2 + 1 + C$$

$$2 = 1 - 2 + 1 + C$$

$$C = 2$$

$\therefore$ معادلة المنحنى f المطلوب هي: $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$

حاول أن تحل

3 أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x, y)$ يساوي $3x^2 + x$ ويمر بالنقطة $(2, 2)$

مثال (4)

أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x, y)$ يساوي: $4x^3 + 6x^2 - 2x + 1$ ويمر بالنقطة $B(1, 0)$

الحل:

$$\because \quad f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 2x + 1$$

$$\therefore \quad f(x) = \int (4x^3 + 6x^2 - 2x + 1)dx$$

$$f(x) = 4\frac{x^4}{4} + 6\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + x + C$$

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + x + C$$

لتعيين قيمة الثابت C نعوّض بالنقطة $B(1, 0)$ في المعادلة السابقة فنحصل على:

$$0 = (1)^4 + 2(1)^3 - (1)^2 + 1 + C$$

$$0 = 1 + 2 - 1 + 1 + C$$

$$C = -3$$

$\therefore$ معادلة المنحنى f المطلوب هي: $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + x - 3$

حاول أن تحل

4 أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x, y)$ يساوي $-8x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ ويمر بالنقطة $(-1, -5)$

مثال (5)

إذا كان ميل العمودي على منحنى الدالة f عند أي نقطة عليه (x , y) يساوي $\sqrt{5-4x}$

فأوجد معادلة المنحنى عندما يمر بالنقطة $A(-5 , 3)$

الحل:

$\because$ ميل العمودي $= \dfrac{-1}{f'(x)}$ حيث $f'(x) \neq 0$

$$\therefore \sqrt{5-4x} = \frac{-1}{f'(x)}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{5-4x}}$$

$\therefore$ معادلة المنحنى هي:

$$f(x) = \int f'(x)\,dx$$

$$= \int \frac{-1}{\sqrt{5-4x}}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int -4(5-4x)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{(5-4x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C\right]$$

(1) $\therefore f(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{5-4x} + \dfrac{1}{4}C$

لتعيين قيمة الثابت C: $f(-5) = 3$

بالتعويض في (1)

$$3 = \frac{1}{2}\sqrt{5-4(-5)} + \frac{1}{4}C$$

$$3 = \frac{1}{2}(5) + \frac{1}{4}C$$

$$\Longrightarrow C = 2$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{5-4x} + \frac{1}{2}$$

حاول أن تحل

5 إذا كان ميل العمودي لمنحنى الدالة f عند أي نقطة عليه (x , y) هو $2x - 1$

فأوجد معادلة المنحنى علمًا بأنه يمر بالنقطة $B(1 , 0)$

مثال (6)

لتكن: $f''(x) = 6x - 6$ فأوجد معادلة الدالة f إذا كانت النقطة $(-1 , 15)$ نقطة حرجة للدالة.

الحل:

$$f'(x) = \int f''(x)dx$$

$$= \int (6x - 6)dx$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + C$$

$\because$ $(-1 , 15)$ نقطة حرجة $\quad \therefore \; f'(-1) = 0$

$$3(-1)^2 - 6(-1) + C = 0$$

$$C = -9$$

$$\therefore \; f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

$$f(x) = \int f'(x)dx$$

$$= \int (3x^2 - 6x - 9)dx$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + C$$

بالتعويض في النقطة $(-1 , 15)$:

$$15 = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + C$$

$$\therefore \; C = 15 - 5 = 10$$

$\therefore$ معادلة المنحنى هي: $\quad \therefore \; f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$

حاول أن تحل

6 لتكن: $f''(x) = 5x - 2$

فأوجد معادلة الدالة f إذا كانت النقطة $P(2 , -2)$ نقطة حرجة للدالة.

6-4

المعادلات التفاضلية

Differential Equations

سوف تتعلم

- حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى.
- حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية.

المفردات والمصطلحات:

- معادلة تفاضلية Differential Equation

دعنا نفكر ونتناقش

لتكن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $y = f(x) = 5e^{2x} + 4$

a أوجد المشتقه من الرتبة الأولى y' للدالة $y = f(x)$

b أثبت أن y' , y تحققان المعادلة: $y' - 2y + 8 = 0$

c لنأخذ الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $y = g(x) = x^2 + 4$،

أوجد علاقة بين y' , y مستقلة عن المتغير x .

تعريف (1)

المعادلات التفاضلية: هي معادلات تحتوي على دالّة مجهولة وبعض مشتقاتها.

نستخدم عادة y بدلًا من $f(x)$.

تعريف (2)

رتبة المعادلة التفاضلية هي أعلى رتبة لمشتقة دالة موجودة في هذه المعادلة.

فمثلًا:

$y' = xy$ ، $y' = -8$ ، $y' - 2y = x - 1$ هي معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى.

$y'' = -8$ ، $y'' + 2xy' - y = 0$ هي معادلات تفاضلية من الرتبة الثانية.

ولكن $y - 2x = 5$ هي ليست بمعادلة تفاضلية.

تعريف (3)

درجة المعادلة التفاضلية: هي أكبر أس لأعلى المشتقات رتبة.

فمثلًا:

$y'' + (y')^2 + y = 1$ هي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى.

$\frac{4x}{y} = (y')^2$ هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية.

$(y'')^3 + x^4y' + e^xy = 0$ هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثالثة.

تدريب:

أكمل الجدول التالي محدّدًا رتبة ودرجة كل معادلة من المعادلات التفاضلية فيه.

الدرجة	الرتبة	المعادلة التفاضلية
		$y' = 5y$
		$y'^2 = \frac{4x}{y}$
		$y'' = 5y' + xy$
		$(y'')^2 = 1 + (y')^3$
		$y''' = (y')^2 + x^3$

حل المعادلات التفاضلية هو إيجاد دوال تحقق مع مشتقاتها هذه المعادلات.

وسنقتصر في دراستنا على حل معادلات تفاضلية من الدرجة الأولى.

مثال (1)

أثبت أن الدالة: $y = e^{x^2}$ هي حل للمعادلة التفاضلية: $y' - 2xy = 0$

الحل:

أوجد المشتقة من الدرجة الأولى: $y = e^{x^2}$

$(e^u)' = u'e^u$ $\qquad y' = 2x\, e^{x^2}$

عوّض y, y' بقيمتيهما في المعادلة التفاضلية $\qquad 2xe^{x^2} - 2xe^{x^2} = 0$

الدالة $y = e^{x^2}$ هي حل للمعادلة التفاضلية: $y' - 2xy = 0$

حاول أن تحل

1 أثبت أنّ الدالة: $y = 2e^{3x} + 1$ هي حل للمعادلة: $y' + 3 = 3y$

هناك بعض القواعد التي تساعد في حل معادلات تفاضلية من الدرجة الأولى.

I المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى التي على الصورة $y' = f(x)$ حلها يكون على الصورة: $y = \int f(x)\,dx$

مثال (2)

حل المعادلة: $y' = 3x^2 - 1$

الحل:

لإيجاد y نكامل y' $\qquad y = \int y'\,dx$

طبّق الحالة $\qquad y = \int (3x^2 - 1)\,dx$

حيث C ثابت $\qquad y = x^3 - x + C$

حاول أن تحل

2 حل المعادلة: $y' = 7x^2 + 9x - 1$

مثال (3)

حل المعادلة: $y' = 3x^2 - 1$، التي تحقق $y = 2$ عند $x = 1$

الحل:

$$y = \int y'dx$$

$$y = \int (3x^2 - 1)\,dx$$

$$= x^3 - x + C$$

عوّض عن x بـ 1 وعن y بـ 2 $\qquad 2 = 1^3 - 1 + C$

$$C = 2$$

$$\therefore\ y = x^3 - x + 2$$

حاول أن تحل

3 حل المعادلة: $y' = 8x^3 - 3x^2 + 4$، والتي تحقق $y = 5$ عند $x = 1$

II بعض المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى تحوي المتغيرين: y , x على الصورة: $\frac{dy}{dx} = g(x)\cdot h(y)$ يتم حلها بطريقة فصل المتغيرات بالصورة التالية:

$$\frac{1}{h(y)}\,dy = g(x)\,dx$$

ونكامل الطرفين وصولًا إلى حل المعادلة التفاضلية وهو إيجاد y.

مثال (4)

حل المعادلات التفاضلية التالية:

a $y' - 2xy = 0$

b $y' = 4y$

الحل:

a $y' - 2xy = 0$

$\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$ $\qquad$ $y' = \frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = 2xy$

$\frac{dy}{y} = 2x\,dx$ $\qquad$ فصل المتغيرات

$\int \frac{dy}{y} = \int 2x\,dx$ $\qquad$ كامل الطرفين $\int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$

$\ln|y| = x^2 + C$

$|y| = e^{x^2+C} = e^{x^2} \cdot e^C$ $\qquad$ $\ln y = x \Rightarrow y = e^x$

$y = \pm e^C \cdot e^{x^2}$

$y = ke^{x^2}$ $\qquad$ $\pm e^C = k$

b $y' = 4y$

$\frac{dy}{dx} = 4y$ $\qquad$ $y' = \frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{y} = 4\,dx$ $\qquad$ فصل المتغيرات

$\int \frac{dy}{y} = \int 4\,dx$ $\qquad$ كامل الطرفين

$\ln|y| = 4x + C$

$|y| = e^{4x+C}$

$y = \pm e^C \cdot e^{4x}$ $\qquad$ $\pm e^C = k$

$y = k\,e^{4x}$

حاول أن تحل

4 حل المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$

III المعادلات التفاضلية على الصورة $y' = ay$ حيث $a \neq 0$ حلولها هي $y = k\,e^{ax}$ حيث $k \in \mathbb{R}^*$.

يمكن توضيح ذلك كالتالي:

$$y' = ay$$
$$\frac{dy}{dx} = ay$$
$$\frac{dy}{y} = a\,dx$$
$$\int \frac{dy}{y} = \int a\,dx$$
$$\ln|y| = ax + C$$
$$|y| = e^{ax+C} = e^{ax} \cdot e^C$$
$$y = \pm e^C \cdot e^{ax}$$
$$y = ke^{ax}$$

ثابت $k = \pm e^C$

مثال (5)

أوجد حلًّا للمعادلة: $y' = 4y$ إذا كان $y = 2$ عند $x = 0$

الحل:

طبّق القاعدة III

$$y' = 4y$$

$$\therefore \quad y = k\,e^{4x}$$

عوّض عن y , x بالقيم المعطاة

$$2 = k\,e^{4(0)}$$

$e^0 = 1$

$$2 = k \times 1$$

$$k = 2$$

$$\therefore \quad y = 2e^{4x}$$

حاول أن تحل

5 أوجد حلًّا للمعادلة: $y' = -2y$ إذا كان $y = 3$ عند $x = 0$

IV المعادلات التفاضلية على الصورة $y' = ay + b$ حيث $b \neq 0$, $a \neq 0$ تكون حلولها: $y = k\,e^{ax} - \frac{b}{a}$

مثال (6)

a حلّ المعادلة: $2y' + y = 1$

b أوجد الحل الذي يحقق $y = 2$ عند $x = -1$

الحل:

اكتب المعادلة على الشكل $y' = ay + b$

a
$$2y' + y = 1$$

$$y' = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$$

طبّق القاعدة IV

$$y = k\,e^{-\frac{1}{2}x} + 1$$

عوّض y , x بقيمتيهما

b
$$k\,e^{\frac{1}{2}} + 1 = 2$$

$$k = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + 1$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}} + 1$$

حاول أن تحل

6 حل المعادلة $3y' - 2y = 4$، ثم أوجد الحل الذي يحقق $y = 3$ عند $x = 0$

V المعادلات التفاضلية على الصورة: $y'' = f(x)$

يتم حل هذه المعادلات بخطوتين: $y' = \int f(x)dx = F(x) + C_1$

ثم $y = \int (F(x) + C_1)dx$

مثال (7)

حل المعادلة: $y'' = 3x^2 - 2x$

الحل:

نكتب: $y' = \int (3x^2 - 2x)dx$

كامل $y' = x^3 - x^2 + C_1$

$y = \int y'\, dx$ $\quad y = \int (x^3 - x^2 + C_1)\, dx$

كامل $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$

حاول أن تحل

7 حل المعادلة: $y'' = -3x^2 + 6x$

VI المعادلات التفاضلية على الصورة: $ay'' + by' + cy = 0$ حيث a, b, c أعداد حقيقية و $a \neq 0$

المعادلة: $ar^2 + br + c = 0$ تسمى المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية: $ay'' + by' + cy = 0$

تقبل النتائج التالية:

a إذا كان للمعادلة المميزة حلّين حقيقيين $r_1 \neq r_2$ فإن حل المعادلة التفاضلية هو: $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

حيث $C_1 , C_2 \in \mathbb{R}^*$

b إذا كان للمعادلة المميزة حلًا حقيقيًا (مكررًا) $r_1 = r_2$ فإن حل المعادلة التفاضلية هو: $y = (C_1 x + C_2)e^{rx}$

حيث $C_1 , C_2 \in \mathbb{R}^*$

c إذا كان للمعادلة المميزة حلّين تخيليين $r_2 = \alpha - i\beta$, $r_1 = \alpha + i\beta$ فإن حل المعادلة التفاضلية هو:

$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$ حيث $C_1 , C_2 \in \mathbb{C}$

مثال (8)

حل المعادلة: $y'' - 4y' + 3y = 0$

الحل:

أوجد المعادلة المميزة

$$r^2 - 4r + 3 = 0$$

$$(r-3)(r-1) = 0$$

$r = 3$ أو $r = 1$

أوجد الحلول

طبّق a – VI

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو: $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}$

حاول أن تحل

8 حل المعادلة: $2y'' - 5y' + 3y = 0$

ملاحظة: يمكنك استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد جذري المعادلة التربيعية.

مثال (9)

حل المعادلة: $y'' - 4y' + 4y = 0$

الحل:

أوجد المعادلة المميزة

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

$$(r-2)^2 = 0$$

$$r - 2 = 0$$

أوجد الحلول

$$r = 2$$

$$r_1 = r_2 = 2$$

$$y = (C_1 x + C_2)e^{rx}$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو: $y = (C_1 x + C_2)e^{2x}$

حاول أن تحل

9 حل المعادلة: $4y'' - 12y' + 9y = 0$

مثال (10)

حل المعادلة: $y'' + y' + 4y = 0$

الحل:

أوجد المعادلة المميزة $r^2 + r + 4 = 0$

$$\Delta = (1)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 1 - 16$$
$$= -15 = 15i^2$$

أوجد الحلول

$$r_1 = \frac{-1 - \sqrt{15}\,i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}i$$
$$r_2 = \frac{-1 + \sqrt{15}\,i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو: $y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{15}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{15}}{2}x\right)$

حاول أن تحل

10 حل المعادلة: $y'' + 2y' + 8y = 0$

تطبيق حياتي

إثرائي (الطب)

حقنت مادة كيميائية مباشرة في العضل، بعد مرورها عبر الدم يتخلص الجسم من فضلات هذه المادة عن طريق الكلى.

لقد تمّ الاستنتاج أن كمية المادة (S) الموجودة في الدم في الزمن t (بالساعات) هي حل للمعادلة التفاضلية:

$2S''(t) + 3S'(t) + S(t) = 0$ مع $S(0) = 0$ ، $S'(0) = \frac{q}{2}$

حيث q هي كمية المادة المحقونة في العضل.

أوجد: $S(t)$.

الحل:

$$2S''(t) + 3S'(t) + S(t) = 0$$

أوجد المعادلة المميزة $2r^2 + 3r + 1 = 0$

أوجد الحلول $r = -1 \ , \ r = -\frac{1}{2}$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو: $S(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-\frac{1}{2}t}$

عوّض عن S بقيمتها $0 = C_1 + C_2 \quad (1)$

أوجد مشتقة $S(t)$ $S'(t) = -C_1 e^{-t} - \frac{1}{2} C_2 e^{-\frac{1}{2}t}$

عوّض عن S' بقيمتها $\frac{q}{2} = -C_1 - \frac{1}{2} C_2 \quad (2)$

لإيجاد قيم C_1 , C_2 نحل النظام
$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ -C_1 - \frac{1}{2} C_2 = \frac{q}{2} \end{cases}$$

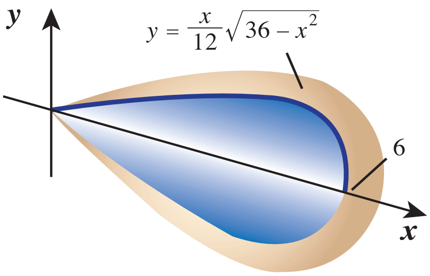
نحصل على: $C_1 = -q \ , \ C_2 = q$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو: $S(t) = -q e^{-t} + q e^{-\frac{1}{2}t}$

المرشد لحل المسائل

بعد أن طلب أستاذ الرسم من الطلاب رسم شاقول يستخدم للبناء، رسم وليد الشكل المقابل.

وقد قدّر أن الرسم هو لشاقول وزنه 195 g تقريبًا.



a أوجد حجم الشاقول.

b إذا كان الشاقول مصنوع من النحاس، وكتلة الثقل النوعي هي $8.5\ g/cm^3$،
فما هو الوزن التقريبي لهذا الشاقول؟ وهل تقدير وليد مناسب؟

الحل:

a $V = \int_0^6 \pi(f(x))^2 dx = \pi \int_0^6 \frac{x^2}{144}(36 - x^2)dx$

$= \frac{\pi}{144}\left[\frac{36x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^6 = \pi(7.2)$

$\approx 22.62\ cm^3$

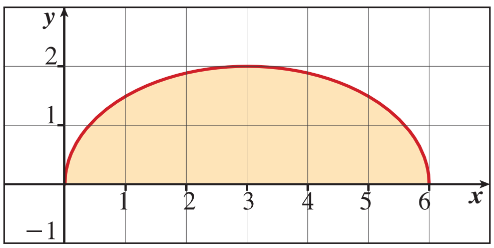
b الثقل النوعي $= \frac{\text{الوزن}}{\text{الحجم}}$

الوزن: $22.62 \times 8.5 = 192.1$

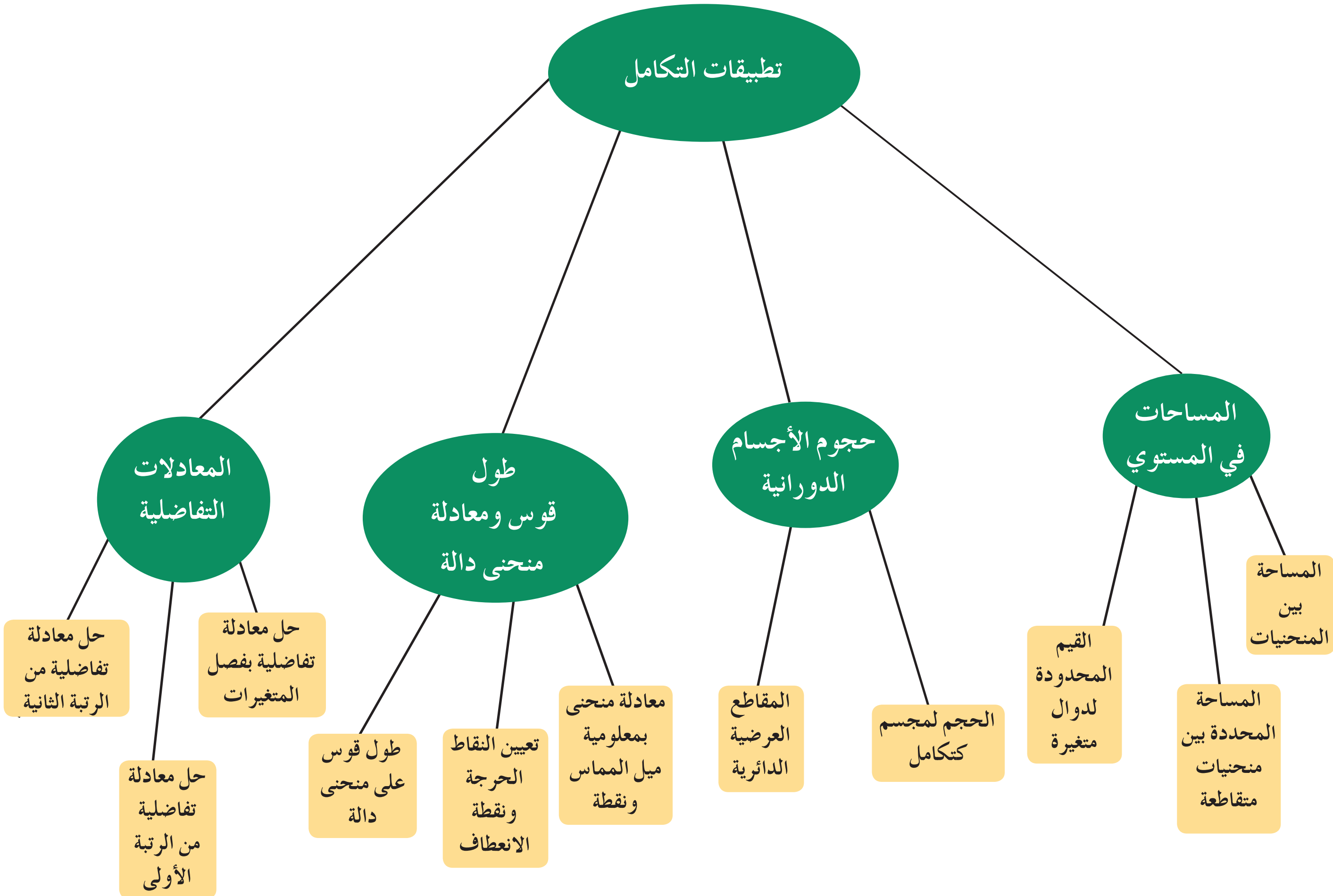
إذًا تقدير وليد قريب من الوزن الحقيقي.

مسألة إضافية

أوجد حجم الشكل الناتج عن دورة كاملة للمنطقة المظللة حول محور السينات
والمحصورة بين $x = 0$، $x = 6$، ومحور السينات ومنحنى الدالة: $y = \frac{\sqrt{-4x^2 + 24x}}{3}$



مخطط تنظيمي للوحدة السادسة



ملخص

- مساحة منطقة محددة بمنحنى دالة f متصلة في فترة $[a,b]$ ومحور السينات والمستقيمين: $x=a$ ، $x=b$ هي:

$$A=\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{حيث} \quad f(x)\ge 0$$

$$A=-\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{حيث} \quad f(x)\le 0$$

- إذا كان $f(x)\le 0$ على الفترة $[a,c]$ و $f(x)\ge 0$ على الفترة $[c,b]$ فإن: $A=\left|\int_a^c f(x)\,dx\right|+\left|\int_c^b f(x)\,dx\right|$
- إذا كانت كل من f ، g متصلتين في الفترة $[a,b]$ وكانت $f(x)\ge g(x)$ فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين والمستقيمين $x=a$ ، $x=b$ هي: $A=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$

- إذا تحددت منطقة بين منحنيات متقاطعة فإن نقاط التقاطع هي حدود التكامل.
- إذا تحددت منطقة بأكثر من دالة ولا يوجد تكامل مفرد يعطي المساحة فيمكن تجزيء هذه المنطقة إلى مناطق تناظر تغيرات كل دالة ونتابع العمل.
- إذا نتج مجسم عن دوران منطقة مستوية محددة بمنحيي الدالتين f , g دورة كاملة حول محور السينات بحيث f , g لهما الإشارة نفسها في الفترة $[a,b]$ فإن حجم هذا المجسم يعطى بالقاعدة: $V(x) = \pi\int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2]dx$ وذلك في الحالتين: $f(x) \geq g(x) \geq 0$ أو $f(x) \leq g(x) \leq 0$.
- إذا نتج مجسم عن دورة منطقة مستوية محددة بمنحنى دالة واحدة f دورة كاملة حول محور السينات في الفترة $[a,b]$ فإن حجم المجسم يعطى بالقاعدة: $V(x) = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx$.
- كل نقطة على منحنى دالة ينتج عنها مقطع دائري في دورة كاملة حول محور السينات.
- يمكن إيجاد معادلة منحنى دالة بمعلومية ميل المماس على المنحنى ومعلومية نقطة محددة يمر بها هذا المنحنى.
- نستخدم المشتقة الثانية للدالة f لدراسة القيم القصوى والقيم العظمى لمنحنى الدالة.
- نستخدم المشتقة الثانية للدالة f لإيجاد نقطة انعطاف منحنى الدالة.
- تساعدنا القاعدة: $L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ على إيجاد طول قوس على منحنى دالة في الفترة $[a,b]$.
- رتبة المعادلة التفاضلية هي أعلى رتبة لمشتقة دالة موجودة في هذه المعادلة.
- درجة المعادلة التفاضلية هي أكبر أس لأعلى المشتقات رتبة.
- يمكن حل المعادلات التفاضلية بفصل المتغيرات: $\frac{1}{h(y)}dy = g(x)dx$ ثم نكامل.
- حل المعادلة التفاضلية: $y' = ay$ هو $y = ke^{ax}$.
- حل المعادلة التفاضلية: $y' = ay + b$ هو $y = ke^{ax} - \frac{b}{a}$.

لحل المعادلات التفاضلية على الصورة: $ay'' + by' + cy = 0$

نوجد المعادلة المميزة: $ar^2 + br + c = 0$ ومنها لدينا 3 حالات:

a إذا كانت $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ فإن الحل: $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

b إذا كانت $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ فإن الحل: $y = (C_1 x + C_2)e^{r x}$

c إذا كانت $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ فإن الحل: $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

حيث: $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$

القطوع المخروطية

Conic Sections

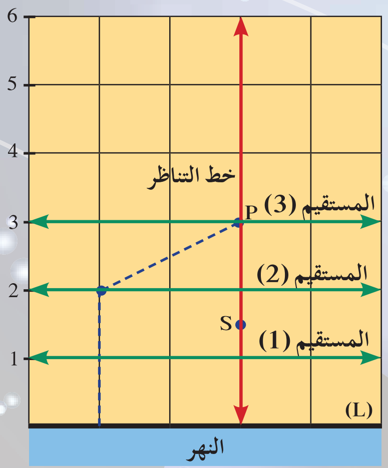
مشروع الوحدة: لماذا القطوع المخروطية؟

1 **مقدمة المشروع:** اهتم علماء الفلك منذ القدم بالشمس والنجوم وحركة الكواكب وتأثيرها على حياتهم وذلك منذ مئات السنين أي قبل الميلاد وحتى عصرنا الحاضر. فتوصلوا إلى تحديد دوران الكواكب حول الشمس فكانت قطوعًا مخروطية على شكل قطع ناقص.

2 **الهدف:** استكشاف القطوع المخروطية وتعرف أنواعها وعناصرها الأساسية واستخداماتها في الحياة اليومية.

3 **اللوازم:** ورق رسم بياني — مسطرة — فرجار — آلة حاسبة (اختياري).

4 **أسئلة حول التطبيق:**



افترض أنك قمت برحلة مع زملائك إلى الطبيعة لبضعة أيام وأردتم نصب خيمة إلى جانب النهر ومضخة للمياه على أن يكون موقع الخيمة على المسافة نفسها من حافة النهر والمضخة.

استخدم اللوازم لصنع نموذج يحدد كل المواقع الممكنة للخيمة.

a ارسم مستقيمًا أفقيًا (L) قريبًا من أسفل ورقة الرسم البياني والتي تمثل حافة النهر، ثم رقّم المستقيمات الأفقية فوق المستقيم L (انظر الرسم).

b سجّل موقع المضخة بالنقطة (P) على المستقيم الثالث فوق المستقيم (L) الذي يمثل حافة النهر.

c ارسم مستقيمًا عموديًا على (L) يمر بالنقطة P، ثم حدّد عليه النقطة S في منتصف المسافة بين (P) والمستقيم (L).

d أوجد البعد d_1 من المستقيم (2) إلى المستقيم (L). ثم ركّز سن الفرجار عند P وبفتحة تساوي d_1 وعيّن نقطتين على المستقيم (2) على أن تكون كل نقطة في جهة مختلفة عن الأخرى من الخط العمودي على L.

e هل توجد نقاط أخرى على المستقيم (2) تبعد نفس البعد عن P والمستقيم L؟

f أوجد البعد d_2 من المستقيم (3) إلى المستقيم (L). عيّن نقطتين على المستقيم (3) لهما البعد d_2 إلى المضخة P.

g تابع العمل بتعيين نقاط مشابهة لما ورد سابقًا في الفقرتين (d), (f) وذلك على مستقيمات أفقية أعلى النقطة S.

h صل النقاط بمنحنى. ما نوع المنحنى الذي حصلت عليه؟ وماذا تمثل هذه النقاط؟

i كيف سيتغير المنحنى إذا كان موقع المضخة قريبًا من حافة النهر أو بعيدًا عن حافة النهر؟

j ما أقرب نقطة إلى المضخة وإلى حافة النهر؟ ما اسم هذه النقطة؟

5 **التقرير:** اكتب تقريرًا مفصلًا يعكس عملك في هذا المشروع ويبيّن حساباتك والمنحنى الذي حصلت عليه.

اذكر إذا كان بالإمكان تسميته بناء على مكتسبات سابقة تعرفت عليها.

دروس الوحدة

الاختلاف المركزي	القطع الزائد	القطع الناقص	القطوع المخروطية — القطع المكافىء
7 – 4	7 – 3	7 – 2	7 – 1

الوحدة السابعة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعرفت نهايات الدوال (كثيرات الحدود والدوال الجذرية).
- تعرفت ميل المماس على منحنى الدالة عند نقطة على هذا المنحنى.
- أوجدت معادلات خط المماس والخط العمودي على المماس عند نقطة معطاة على منحنى دالة.
- استكشفت الخطوط المقاربة العمودية والأفقية وكتبت معادلاتها.
- رسمت منحنى الدالة $f(x) = ax^2 + bx + c$ حيث $a \neq 0$.
- أوجدت معكوس الدالة $f(x) = ax^2 + bx + c$
- حدّدت خط التناظر لمنحنى الدالة $f(x) = ax^2 + bx + c$ وخط التناظر لمنحنى معكوسها.

ماذا سوف تتعلم؟

- كتابة معادلات للقطوع المكافئة.
- تمثيل القطوع المكافئة يدويًّا وإيجاد البؤرة والدليل.
- خواص القطع الناقص.
- كتابة معادلات القطوع الناقصة.
- إيجاد البؤرتين وأطراف المحورين الأكبر والأصغر في القطع الناقص ورسم بيانه.
- كتابة معادلات القطوع الزائدة.
- إيجاد المحور القاطع (الأساسي) والمحور المرافق والخطوط المقاربة والبؤرتين في القطع الزائد ورسم بيانه.
- الاختلاف المركزي للقطوع المخروطية.
- ربط قيمة الاختلاف المركزي بشكل القطع المخروطي.
- إيجاد الاختلاف المركزي.

المصطلحات الأساسية

القطوع المخروطية – قطع مكافئ – قطع ناقص – قطع زائد – بؤرة – دليل – المحور الأصغر والمحور الأكبر – نقطة المركز – رأسي القطع الناقص – رأسي القطع الزائد – خطوط مقاربة مائلة للقطع الزائد – المحور الأساسي (القاطع) للقطع الزائد – المحور المرافق للقطع الزائد – الاختلاف المركزي e

أضف إلى معلوماتك

في سنة 1609 أثبت العالم الفلكي «جوهانس كيبلر» أن النظام الذي أثبته «كوبرنيكس» والذي يتحدث عن مركزية الشمس يعكس هذه الحقيقة بدقة وبذلك وضع «كيبلر» القوانين الثلاثة. وما يهمنا هو القانون الأول، ومفاده ما يلي:

تدور الكواكب حول الشمس بحركة على شكل قطع ناقص حيث إن الشمس هي إحدى بؤرتيه.

جوهانس كيبلر Johannes Kepler
(1571 – 1630)

القطوع المخروطية – القطع المكافئ
Conic Sections – Parabola

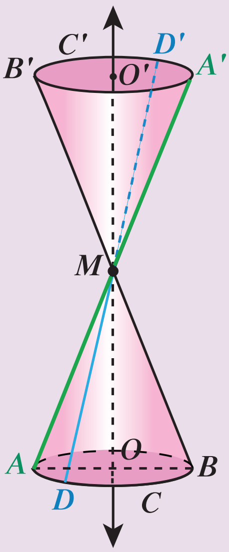
سوف تتعلم
- القطوع المخروطية.
- القطوع المكافئة وخواصها.
- تطبيقات باستخدام القطوع المكافئة.

المفردات والمصطلحات:
- القطوع المخروطية Conic Sections
- قطع مكافئ Parabola
- بؤرة Focus
- دليل Directrix
- الراسم Tracer
- المحور Axis
- السطح المخروطي Conic Surface
- رأس القطع المكافئ Vertex of Parabola

الربط بالحياة:

يشبه مخروط الآيس كريم أحد سطوح المخروط.

دعنا نفكر ونتناقش



لتكن C، C' دائرتين متطابقتين في مستويين متوازيين حيث إن $\overleftrightarrow{OO'}$ عمودي على مستويي C, C' والنقطة M منتصف $\overline{OO'}$.

a ماذا يسمى هذا المجسم؟

b حدّد محوره.

c حدّد الرأس والقاعدة (هل يوجد أكثر من قاعدة؟)

d عيّن راسمًا (مستقيم واصل بين نقطتين على الدائرتين C، C' ويمر بالرأس M)

هل يوجد أكثر من راسم؟

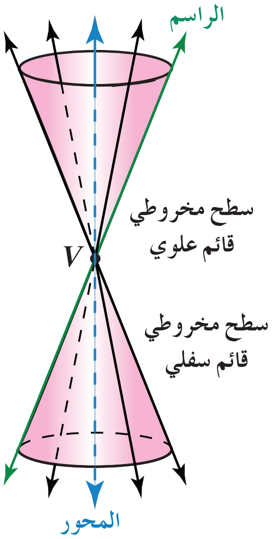
اشرح.

السطح المخروطي Conic Surface

تخيّل شكلًا هندسيًّا يتكوّن من مستقيمين غير متعامدين يتقاطعان في نقطة V.

إذا أدرنا هذا الشكل في الفضاء ثلاثي الأبعاد حول منصف إحدى الزاويتين بين هذين المستقيمين، سينشأ من هذا الشكل سطح مخروطين قائمين رأساهما عند النقطة V ومنصف إحدى الزاويتين هو المحور، كما يبيّن الشكل المقابل.

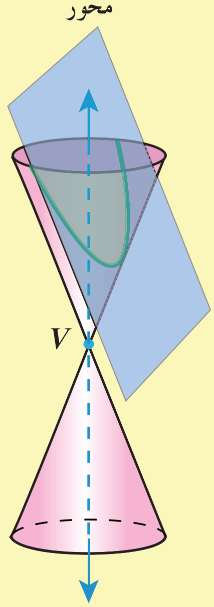
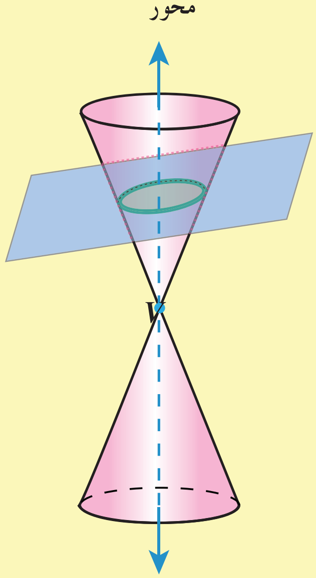
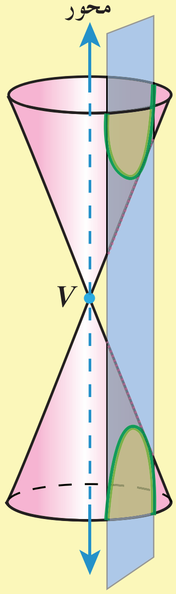
كل مستقيم يمر بالنقطة V ويشكل جزءًا من السطح المخروطي يسمى **راسم**.



القطوع المخروطية Conic Sections

إذا قُطع السطح الذي حصلنا عليه سابقًا بمستويات تأخذ أوضاعًا واتجاهات مختلفة بالنسبة إلى الراسم أو إلى المحور فسوف نحصل على مقاطع (منحنيات) مختلفة تسمى قطوعًا مخروطية.

ويوضح الجدول التالي وضعية المستوى بالنسبة إلى الراسم أو إلى المحور.

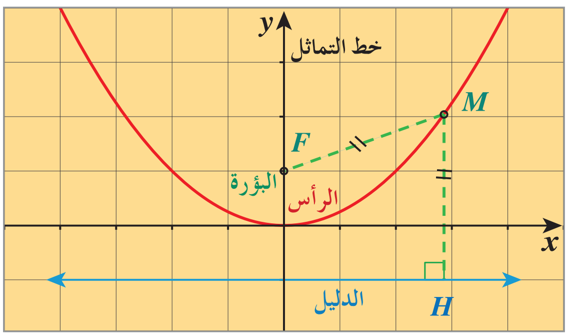
الشكل			
وضع المستوى	المستوى موازٍ لراسم ولا يحويه	المستوى ليس عموديًّا على المحور وليس موازيًا لأي راسم	المستوى موازٍ للمحور ولا يحويه
القطع الناتج	قطع مكافئ	قطع ناقص	قطع زائد

القطع المكافئ Parabola

تعلمنا الكثير عن القطوع المكافئة نلخص ما عرفناه في التعريف التالي:

تعريف: القطع المكافئ

القطع المكافئ هو مجموعة كل النقاط في المستوى المتساوية البعدين عن نقطة ثابتة معطاة (البؤرة) وعن مستقيم ثابت معطى (الدليل).



في الوصف الهندسي، النقطة المعطاة هي **بؤرة** القطع المكافئ، والخط المستقيم هو **الدليل**، (انظر إلى الشكل المجاور).

يمكن توضيح أن:

- **خط تماثل القطع المكافئ هو المستقيم العمودي على الدليل مارًا بالبؤرة ويسمى محور القطع المكافئ.**
- **رأس القطع المكافئ هو نقطة تقاطع المحور مع المنحنى وهذه النقطة في منتصف المسافة بين البؤرة والدليل.**

المثال التوضيحي التالي يبيّن استنتاج معادلة القطع المكافئ باستخدام تعريف القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل.

مثال توضيحي

استنتج أن القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته $F(0\,,p)$ معادلته هي: $x^2 = 4py$

الحل:

$\because$ رأس القطع المكافئ نقطة الأصل وبؤرته $F(0\,,p)$

$\therefore$ معادلة دليله $y = -p$

من تعريف القطع المكافئ:

$M(x\,,y)$ متساوية البعدين عن $F(0\,,p)$ وعن المستقيم $y = -p$.

بعد النقطة M عن المستقيم $y = -p$ هو $|y+p|$ وحدة طول

المسافة من $M(x\,,y)$ إلى $F(0\,,p)$ هي $\sqrt{x^2+(y-p)^2}$ وحدة طول

من تعريف القطع المكافئ:

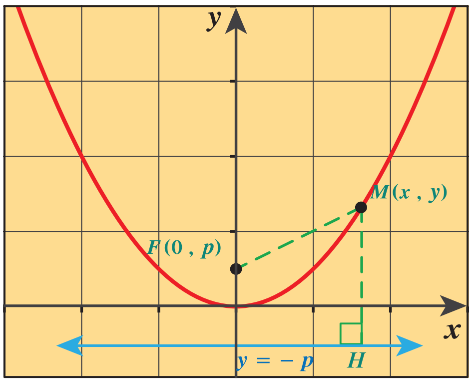
$$|y+p| = \left(\sqrt{x^2+(y-p)^2}\right)$$

بتربيع كل من الطرفين $|y+p|^2 = \left(\sqrt{x^2+(y-p)^2}\right)^2$

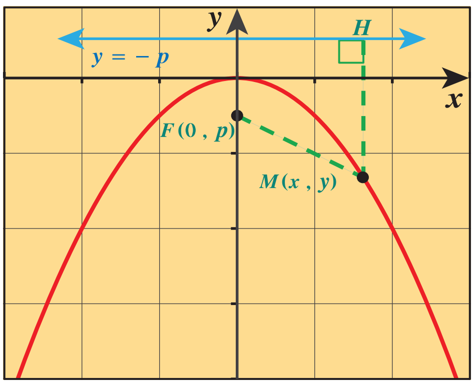
$$(y+p)^2 = x^2+(y-p)^2$$

بتفكيك كل من الطرفين $y^2+2py+p^2 = x^2+y^2-2py+p^2$

تبسيط $x^2 = 4py$



شكل (a) حيث $p > 0$



شكل (b) حيث $p < 0$

لاحظ أن الرأس $(0,0)$ يقع في منتصف المسافة
بين البؤرة والدليل في كل من الحالتين.

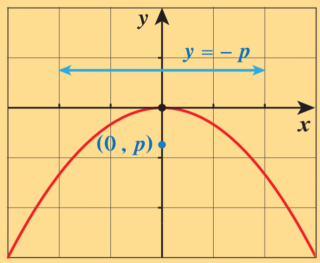
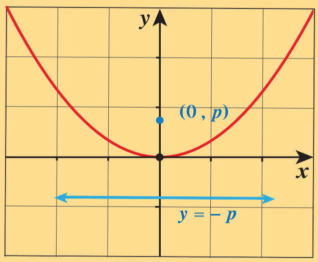
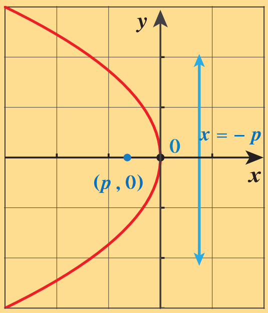
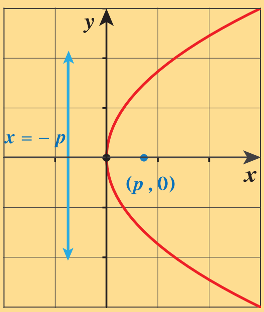
تذكر:
قانون المسافة بين نقطتين في المستوى:
$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

تذكر:
$(|x|)^2 = |x|^2 = x^2$

معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته $F(0\,,p)$ ومعادلة دليله $y=-p$ هي $x^2 = 4py$

ويمكن استنتاج معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته $F(p\,,0)$ ومعادلة دليله $x=-p$ هي $y^2 = 4px$.

قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل $(0, 0)$

الصورة العامة	$x^2 = 4py$		$y^2 = 4px$	
الفتحة	إلى أعلى أو إلى أسفل		إلى اليمين أو إلى اليسار	
البؤرة	$(0\,,p)$		$(p\,,0)$	
الدليل	$y = -p$		$x = -p$	
محور التناظر	محور الصادات $(y - axis)$		محور السينات $(x - axis)$	
المسافة من الرأس إلى البؤرة	$\lvert p \rvert$			
المسافة من الرأس إلى الدليل	$\lvert p \rvert$			
إشارة p	$p < 0$	$p > 0$	$p < 0$	$p > 0$
الشكل				

مثال (1)

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي:

a رأسه نقطة الأصل وبؤرته $F(4\,,0)$

b بؤرته $F(0\,,-3)$ ودليله المستقيم: $y = 3$

الحل:

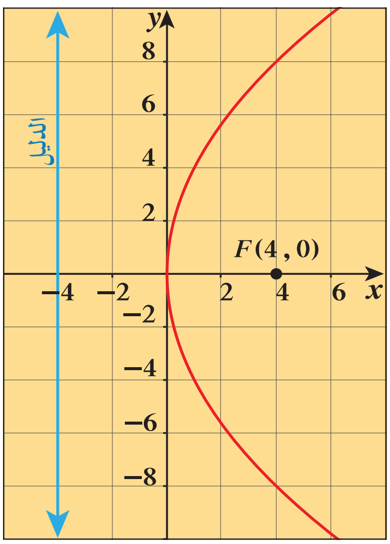
a الرأس: نقطة الأصل $(0\,,0)$

$\because$ البؤرة: $F(4\,,0)$ تنتمي إلى الجزء الموجب من محور السينات

$p = 4$، معادلة الدليل: $x = -4$ (مستقيم رأسي)

$\therefore$ معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $y^2 = 4px$

معادلة القطع المكافئ هي: $y^2 = 16x$



شكل توضيحي

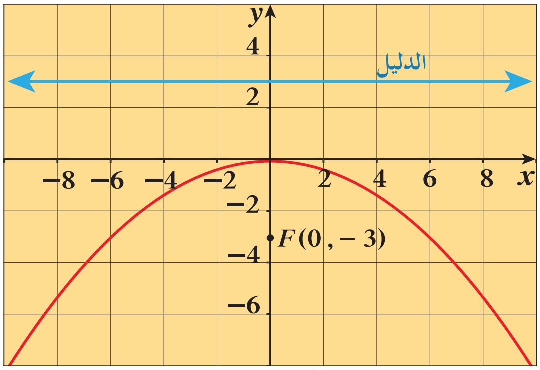
$\because$ **b** البؤرة: $F(0,-3) \Longrightarrow p = -3$

معادلة الدليل: $y = 3$ (مستقيم أفقي)

$\therefore$ رأس القطع في منتصف المسافة بين F والدليل أي $(0\,,0)$

$\therefore$ معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $x^2 = 4py$

معادلة القطع المكافئ هي: $x^2 = -12y$



شكل توضيحي

حاول أن تحل

1 **a** أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته $F(-4\,,0)$

b أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $F(0\,,2)$ ودليله المستقيم $y = -2$

مثال (2)

أوجد البؤرة ومعادلة الدليل لقطع مكافئ ، ثم ارسم شكلًا تقريبيًّا لهذا القطع في كل مما يلي:

a المعادلة: $x^2 = -2y$

b المعادلة: $\frac{1}{3}y^2 = x$

الحل:

a $\because$ المعادلة المعطاة للقطع المكافئ على الصورة:

$$x^2 = 4py$$

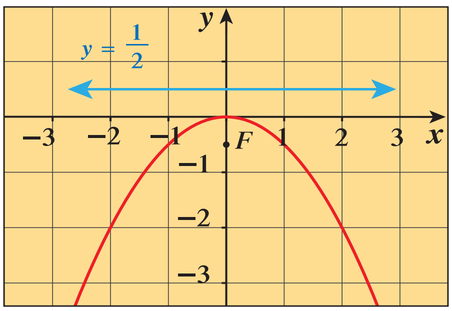
$x^2 = -2y$ ، محور التماثل هو $y-axis$

$$\therefore \quad 4p = -2 \Longrightarrow p = -\frac{1}{2} \quad , \quad p < 0$$

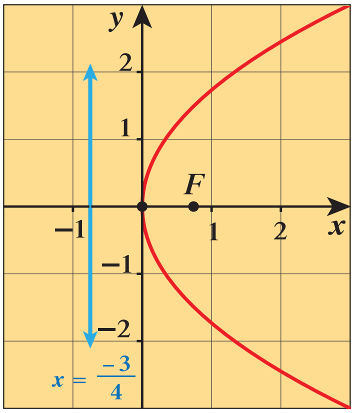
$\therefore$ البؤرة: $F(0\,,p) = F\left(0\,,-\frac{1}{2}\right)$

معادلة الدليل: $y = -p \Longrightarrow y = -\left(-\frac{1}{2}\right)$

$$y = \frac{1}{2}$$



شكل القطع المكافئ



شكل القطع المكافئ

b $\because$ المعادلة المعطاة للقطع المكافئ على الصورة: $y^2 = 4px$

محور التماثل هو $x - axis$ ، $y^2 = 3x$

$\therefore \quad 4p = 3 \Longrightarrow p = \frac{3}{4}$

البؤرة: $F(p, 0) = F\left(\frac{3}{4}, 0\right)$

معادلة الدليل: $x = -p \Longrightarrow x = -\frac{3}{4}$

حاول أن تحل

2 أوجد البؤرة والدليل لقطع مكافئ، ثم ارسم شكلًا تقريبيًّا لهذا القطع في كل مما يلي:

a المعادلة: $y = \frac{x^2}{4}$

b المعادلة: $x = -\frac{1}{5}y^2$

مثال (3)

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطة $A(1, 2)$ وخط تماثله $x - axis$.

الحل:

رأس القطع المكافئ نقطة الأصل

$\because$ خط تماثله $x - axis$

$\therefore$ معادلته على الصورة $y^2 = 4px$

$\because$ القطع المكافئ يمر بالنقطة $A(1, 2)$ $\therefore$ تحقق المعادلة أي أن:

نعوّض في معادلة القطع عن x بـ 1 وعن y بـ 2

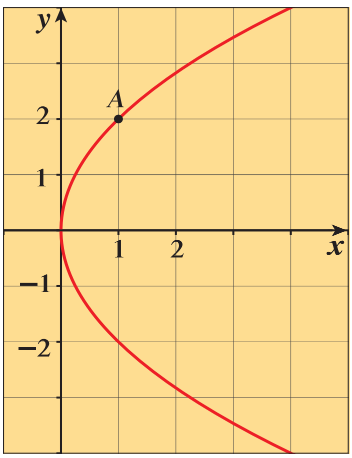
$(2)^2 = 4p(1)$

$4 = 4p \Longrightarrow p = 1$

المعادلة: $y^2 = 4px$

$y^2 = 4(1)x$

$y^2 = 4x$



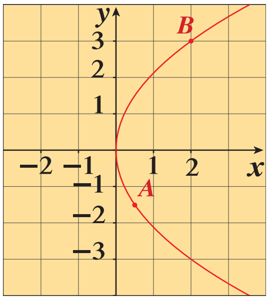
حاول أن تحل

3 أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطة $A(1, 1)$ وخط تماثله $y - axis$.

مثال (4)

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين

$A\left(\frac{1}{2}, \frac{-3}{2}\right)$, $B(2,3)$



الحل:

$\because$ منحنى القطع المكافئ يمر بالنقطتين $A\left(\frac{1}{2}, \frac{-3}{2}\right)$, $B(2,3)$

ورأسه نقطة الأصل

$\therefore$ معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $y^2 = 4px$

وبالتعويض عن (x , y) بإحداثيات B (أو بإحداثيات A) نحصل على:

$$(+3)^2 = 4p(2)$$

$$9 = 8p \Longrightarrow p = \frac{9}{8}$$

المعادلة:

$$y^2 = 4px$$

$$y^2 = 4 \times \frac{9}{8}x$$

$$y^2 = \frac{9}{2}x$$

حاول أن تحل

4 أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(0,0)$ ويمر بالنقطتين $B(1,4)$, $A(-1,4)$

مثال (5)

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومعادلة دليله $x = -3$

الحل:

$\because$ معادلة الدليل هي: $x = -3$ (مستقيم رأسي)

والدليل متعامد مع خط التماثل

$\therefore$ خط التماثل أفقي. $(x - axis)$

$\because$ رأس القطع نقطة الأصل

$\therefore$ معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $y^2 = 4px$

معادلة الدليل هي على الصورة $x = -p$

$$x = -3 \Longrightarrow p = 3$$

المعادلة:

$$y^2 = 4px$$

$$y^2 = 4(3)x$$

$$y^2 = 12x$$

حاول أن تحل

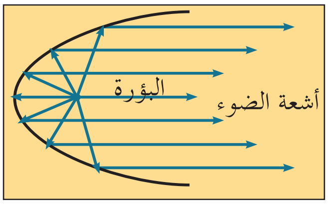
5 أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومعادلة دليله $y = 1$

معلومة:

في 23 فبراير عام 1986 تمّ افتتاح مبنى مجلس الأمة الكويتي بالتزامن مع احتفالات العيد الوطني الخامس والعشرين للدولة.
يقع المبنى في منطقة القبلية على شارع الخليج العربي وهو تحفة معمارية مشابه لخيمة ويرمز للضيافة الكويتية العريقة. تذكر بعض الدراسات أن المصمم الدنماركي يورن أوتسون قام بتصميمه على أن تكون سقيفة المدخل الواسعة همزة وصل بين البحر والصحراء.

Applications Using Parabolas تطبيقات باستخدام القطوع المكافئة

إذا دورنا قطعًا مكافئًا في الفراغ الثلاثي الأبعاد باستخدام خط التماثل كمحور للدوران، فإن القطع المكافئ ينتج سطحًا مكافئًا **Paraboloid**.

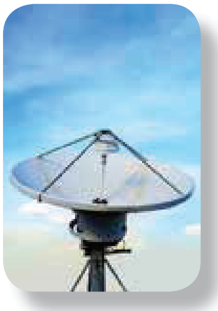


مقطع عرضي لمجسم مكافئ

إذا وضعنا مصدرًا ضوئيًّا في بؤرة سطح مكافئ عاكس، فإن الضوء ينعكس من هذا السطح في خطوط مستقيمة موازية لمحور التماثل، كما هو موضح في الشكل المقابل.

هذا يبيّن كيف تعمل الأنوار (الكشافات) الرئيسية للسيارة.

ينطبق المبدأ نفسه على الإشارات التي تنطلق في الاتجاه العكسي، مثل بعض مكبرات الصوت والعكس صحيح.



عندما تنطلق الموجات الضوئية أو الصوتية نحو السطح المكافئ موازية لخط تماثله فإنها تنعكس من هذا السطح وتتجمع في البؤرة.

الهدف هو تركيز الضوء أو الصوت عند البؤرة حيث يوضع المستقبل الإلكتروني (الريسيفر).

على سبيل المثال الميكروفونات المكافئة التي تستخدم أثناء مباريات كرة القدم.

مثال (6)

تُستخدم ميكروفونات مكافئة على جانبي ملعب لالتقاط الأصوات من داخل الملعب.

إذا كان قد تولد ميكروفون مكافئ من تدوير قطع مكافئ معادلته: $y^2 = 15x$،

فحدّد موضع البؤرة (جهاز الاستقبال الإلكتروني) لهذا القطع المكافئ.

الحل:

إذا نظرنا إلى السطح المكافئ باعتبار أن رأسه $(0, 0)$ وخط تماثله هو محور السينات،

$$\because \quad y^2 = 4px$$

$$y^2 = 15x$$

$$\therefore \quad 4p = 15$$

$$p = \frac{15}{4}$$

البؤرة هي عند: $F(p, 0) = F\left(\frac{15}{4}, 0\right)$

فيلزم أن يوضع المستقبل (جهاز الاستقبال الإلكتروني) عند النقطة $F\left(\frac{15}{4}, 0\right)$

حاول أن تحل

6 تصنع إحدى الشركات الكشافات المكافئة لنوعيات عديدة من السيارات.

إذا كان لأحد هذه الكشافات سطح مكافئ متولد من تدوير القطع المكافئ الذي معادلته $x^2 = 12y$، فأين سيكون موضع المصباح الكهربائي؟

مثال (7)

تصنع إحدى الشركات مصابيح أمامية للسيارات. إذا كان أحد المصابيح على شكل سطح مكافئ متولد من تدوير قطع مكافئ معادلته $y^2 = 12x$ ، فأين يجب وضع لمبة المصباح؟

الحل:

إذا نظرنا إلى السطح المكافئ باعتبار أن رأسه $(0 , 0)$ ومحور تماثله $x - axis$

معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $y^2 = 4px$

$\because \ y^2 = 12x$

$4p = 12 \Longrightarrow p = 3$

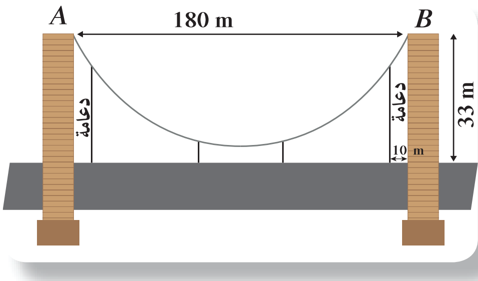
البؤرة: $F(p , 0) = F(3 , 0)$

توضع اللمبة على بعد 3 (وحدات قياس) من رأس القطع المكافئ.

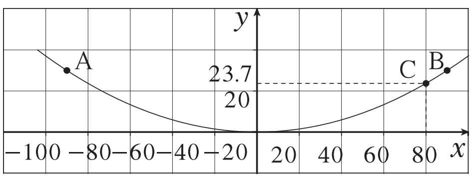
حاول أن تحل

7 في مثال (7)، ما معادلة القطع المكافئ إذا كانت اللمبة تبعد 4 (وحدات قياس) عن رأس القطع المكافئ؟

مثال (8)



يصل سلك معدني متدلٍ بين رأسي عمودي جسر. السلك المعدني هو على صورة قطع مكافئ. يبعد العمودان عن بعضهما مسافة 180 m ويبلغ ارتفاع كل منهما 33 m ، يبلغ أصغر ارتفاع للسلك عن الطريق العام 3 m ، وضعت على الطريق دعامات للسلك المتدلي. أوجد طول الدعامة التي تبعد 10 m عن أي من العمودين.



الحل: باعتبار رأس القطع المكافئ هو $(0 , 0)$

معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $x^2 = 4py$

إحداثيات النقطة B هي: $x_B = \dfrac{180}{2} = 90 \ , \ y_B = 33 - 3 = 30$

بالتعويض في معادلة القطع المكافئ نحصل على: $(90)^2 = 4p \times 30$

$p = \dfrac{90^2}{4 \times 30} = 67.5$

معادلة القطع المكافئ: $x^2 = 4 \times 67.5y$

$x^2 = 270y$

الإحداثي السيني للدعامة: $90 - 10 = 80$

بالتعويض في معادلة القطع المكافئ: $(80)^2 = 270y$

$y \approx 23.7$

يبلغ طول الدعامة حوالي: $23.7 + 3 = 26.7$m

حاول أن تحل

8 في مثال (8)، إذا كان البعد بين العمودين 220 m وارتفاع كل عمود 36 m ، فأوجد طول الدعامة التي تبعد 10 m عن أي من العمودين.

7–2

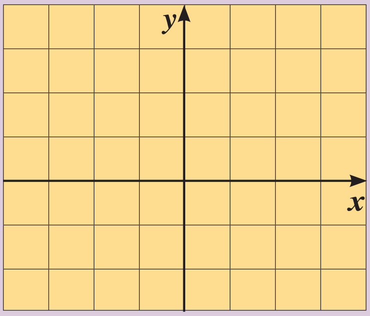
القطع الناقص

Ellipse

سوف تتعلم
- القطوع الناقصة وخواصها.
- تطبيقات باستخدام القطوع الناقصة.

المفردات والمصطلحات:
- قطع ناقص Ellipse
- بؤرتين Two Foci
- المحور الأصغر Minor Axis
- المحور الأكبر Major Axis
- نقطة المركز Center
- رؤوس Vertices

دعنا نفكر ونتناقش

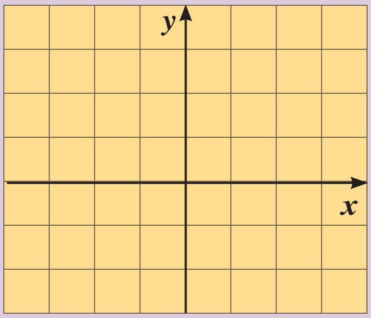


1 **a** أوجد إحداثيات نقاط التقاطع مع محور السينات ومحور الصادات للمنحنى حيث معادلته: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} = 1$

b عيّن أربع نقاط أخرى تحقق المعادلة المعطاة أعلاه.

ما شكل المنحنى الذي تتوقع أن تحصل عليه؟

c ما إحداثيات نقطة المركز للشكل الذي حصلت عليه؟



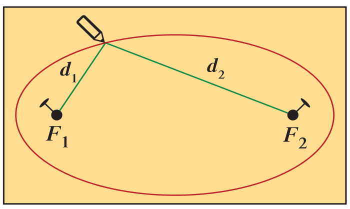
2 **a** أوجد إحداثيات نقاط التقاطع مع محور السينات ومحور الصادات للمنحنى الذي معادلته: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ عيّن هذه النقاط على المحاور.

b عيّن أربع نقاط أخرى تحقق المعادلة المعطاة.
وارسم شكلًا تقريبيًّا ثم قارن بين الشكلين.

تعريف: القطع الناقص

القطع الناقص هو مجموعة كل النقاط في المستوى التي يكون مجموع بعدي كل نقطة منها عن نقطتين ثابتتين في المستوى ثابتًا.

تسمى النقطتان الثابتتان **بؤرتين**، وتسمى نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بينهما **مركز القطع الناقص**. يوضّح الشكل المقابل قطعًا ناقصًا بؤرتاه F_2 , F_1، والبعدان اللذان مجموعهما ثابت هما d_2 , d_1.

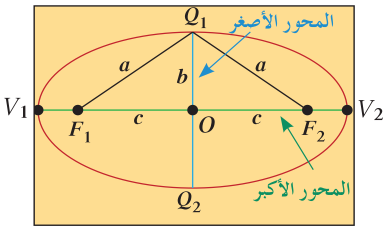


شكل (a)

لتوضيح تعريف القطع الناقص عمليًّا، تخيل خيطًا طوله ثابت، أحد طرفيه مثبت عند إحدى البؤرتين وطرفه الآخر مثبت عند البؤرة الثانية، ويتحرك قلم على الخيط وهو مشدود، فإن المنحنى الذي يرسمه القلم هو قطع ناقص. وإن طول الخيط هو مجموع البعدين d_2 , d_1 انظر إلى الشكل **(a)**.

معلومة:
لاحظ أنه إذا انطبقت بؤرتا القطع الناقص على بعضهما، فإن الشكل الناتج يكون دائرة نصف قطرها هو نصف طول الخيط.

وفي القطع الممثل للشكل **(b)** القطعة المستقيمة $V_1 V_2$ المارة بالبؤرتين وطرفاها على القطع تسمى **المحور الأكبر للقطع (الرئيسي)** ويسمى طرفاها **رأسي القطع الناقص**. والقطعة المستقيمة $Q_1 Q_2$ المارة بالمركز والعمودية على المحور الأكبر، ويقع طرفاها على القطع تسمى **المحور الأصغر للقطع الناقص (الثانوي)**. هذان المحوران هما **خطا تماثل القطع الناقص**، ونقطة تقاطعهما تسمى مركز القطع الناقص.



شكل **(b)**

$a^2 = b^2 + c^2$

في الشكل **(b)** عندما يكون القلم على أحد رأسي القطع الناقص وليكن V_1، يكون طول الخيط هو $V_1 F_1 + V_1 F_2$ وإذا وضعنا $F_2 V_2$ بدلًا من $V_1 F_1$ فإن طول الخيط يصبح $V_2 F_2 + V_1 F_2$ وهو طول المحور الأكبر.

وفي دراسة القطع الناقص، اتفق على اعتبار **طول المحور الأكبر $2a$ وطول المحور الأصغر $2b$ والمسافة بين البؤرتين $2c$.**

وهناك علاقة أساسية بين القيم $a\,,b\,,c$ يمكن استنتاجها من الشكل **(b)** حيث $Q_1 F_2$ ،$Q_1 F_1$ متساويان في الطول ومجموعهما هو $2a$، أما OQ_1 فتساوي b، OF_1 تساوي c.

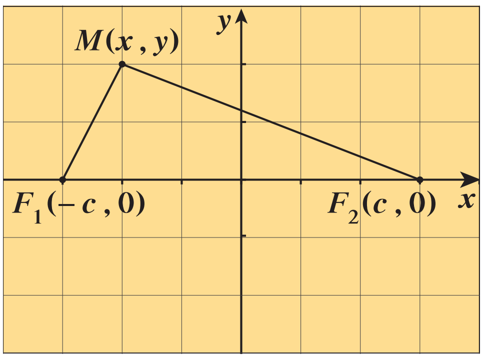
$\therefore \quad a^2 = b^2 + c^2$ أو $c^2 = a^2 - b^2$. وللقطع الناقص دليلان.

مثال توضيحي

لنأخذ في المستوى الإحداثي نقطتان ثابتتان على محور السينات $F_1(-c\,,0)$ ، $F_2(c\,,0)$ والنقطة $M(x\,,y)$ متحركة بحيث:

$$MF_1 + MF_2 = 2a \qquad (1)$$

$a > c$ ثابتان $a \neq 0 \;,\; c \neq 0$



$$MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \;;\; MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$MF_1{}^2 - MF_2{}^2 = x^2 + 2cx + c^2 + y^2 - x^2 + 2cx - c^2 - y^2$$

$$MF_1{}^2 - MF_2{}^2 = 4cx \qquad (2)$$

$$(MF_1 - MF_2)(MF_1 + MF_2) = 4cx \qquad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

من

$$(MF_1 - MF_2)(2a) = 4cx$$

$$MF_1 - MF_2 = \frac{2cx}{a} \qquad (3)$$

من $(1)\,,(3)$

$$MF_1 + MF_2 = 2a$$

$$MF_1 - MF_2 = \frac{2cx}{a}$$

نستنتج: $MF_1 = a + \frac{cx}{a} \;,\; MF_2 = a - \frac{cx}{a}$

لنأخذ $MF_1{}^2 = (x+c)^2 + y^2$ ثم $MF_1{}^2 = \left(a + \frac{cx}{a}\right)^2$

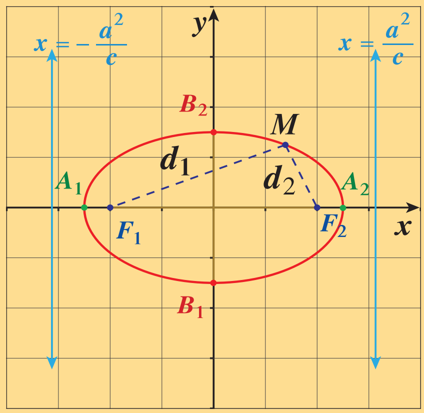
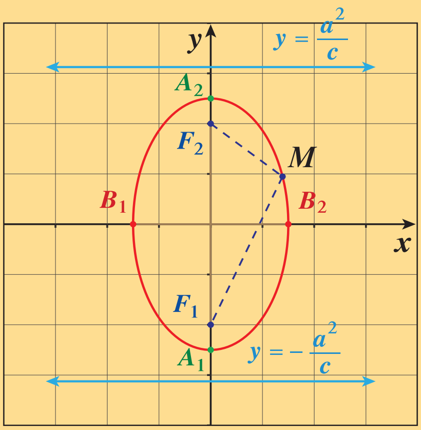
فنحصل على: $x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = a^2 + 2cx + \frac{c^2 x^2}{a^2}$

$$x^2 - \frac{c^2 x^2}{a^2} + y^2 = a^2 - c^2$$

$$x^2 \frac{(a^2 - c^2)}{a^2} + y^2 = a^2 - c^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2 b^2}{a^2} + y^2 = b^2$$ نضع $a^2 - c^2 = b^2$:

بالقسمة على b^2 نحصل على: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ وهي معادلة القطع الناقص.

معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل $(0,0)$ كالتالي:

	$a > b > 0$	$a > b > 0$
المعادلة	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$
بيان القطع		
المحور الأكبر	ينطبق على محور السينات	ينطبق على محور الصادات
الرأسان طرفا المحور الأكبر	$A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$	$A_1(0,-a)$, $A_2(0,a)$
طول المحور الأكبر	$2a$	
طرفا المحور الأصغر	$B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$	$B_1(-b,0)$, $B_2(b,0)$
طول المحور الأصغر	$2b$	
البؤرتان	$F_1(-c,0), F_2(c,0)$	$F_1(0,-c)$, $F_2(0,c)$
العلاقة الأساسية	$a^2 = b^2 + c^2$	
معادلتا الدليلين	$x = -\frac{a^2}{c}$, $x = \frac{a^2}{c}$	$y = -\frac{a^2}{c}$, $y = \frac{a^2}{c}$
التناظر	القطع الناقص متناظر حول كل من محوريه ومركزه	

مثال (1)

إذا كانت: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{10}=1$ معادلة قطع ناقص فأوجد:

a رأسي القطع وطرفي المحور الأصغر.

b البؤرتين.

c معادلتي دليلي القطع.

d طول كل من المحورين ثم ارسم شكلًا تقريبيًا للقطع.

الحل:

a معادلة القطع الناقص هي: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

ومن معادلة القطع الناقص نجد أن:

$$a^2=16 \Longrightarrow a=4$$

$$b^2=10 \Longrightarrow b=\sqrt{10}$$

والمحور الأكبر ينطبق على محور السينات

رأسا القطع الناقص هما: $A_2(4,0)\ ,\ A_1(-4,0)$

طرفا المحور الأصغر هما: $B_2(0,\sqrt{10})\ ,\ B_1(0,-\sqrt{10})$

b

$$c^2=a^2-b^2$$

$$c^2=16-10$$

$$=6$$

ومنه $c=\sqrt{6}$

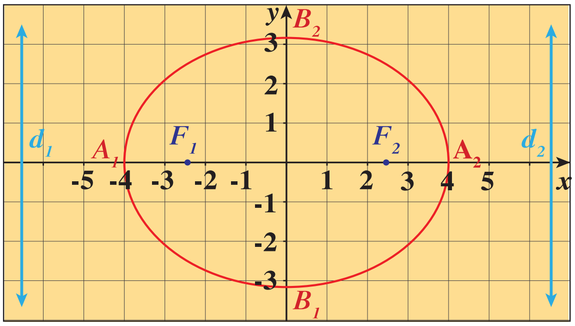
فنحصل على: $F_2(\sqrt{6},0)\ ,\ F_1(-\sqrt{6},0)$

c معادلة الدليلين: $x=\frac{a^2}{c}\ ,\ x=-\frac{a^2}{c}$ ومنه نجد:

$$x=\frac{16}{\sqrt{6}}=\frac{8\sqrt{6}}{3} \qquad x=\frac{-16}{\sqrt{6}}=\frac{-8\sqrt{6}}{3}$$

d طول المحور الأكبر هو $2a$: $2a=2\times4=8$

طول المحور الأصغر هو $2b$: $2b=2\sqrt{10}$



حاول أن تحل

1 إذا كانت: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ معادلة قطع ناقص فأوجد:

a رأسي القطع وطرفي المحور الأصغر.

b البؤرتين.

c معادلة دليلي القطع.

d طول كل من المحورين، ثم ارسم شكلًا تقريبيًا للقطع.

مثال (2)

أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه: $F_1(0,-3)$, $F_2(0,3)$ وطول محوره الأصغر 4، ثم ارسم شكلًا تقريبيًا لهذا القطع.

الحل:

تقع البؤرتان على محور الصادات فتكون المعادلة على الصورة $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

وتكون $c=3$، طول المحور الأصغر $=4$

$\therefore 2b=4 \Longrightarrow b=2$

$\therefore$ طرفا المحور الأصغر $(2,0)$, $(-2,0)$

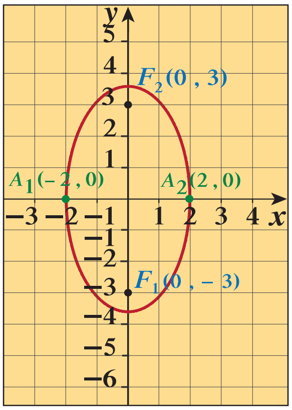
$\therefore b^2=4$

$c^2=a^2-b^2$

$9=a^2-4$

$a^2=13$

$\therefore$ معادلة القطع الناقص هي: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{13}=1$



حاول أن تحل

2 أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه: $F_2(2,0)$, $F_1(-2,0)$ وطول محوره الأكبر 6، وارسم شكلًا تقريبيًا لهذا القطع.

مثال (3)

أوجد البؤرتين والرأسين وطول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي معادلته: $25x^2+16y^2-400=0$

الحل:

$25x^2+16y^2-400=0$

$25x^2+16y^2=400$

$\frac{25x^2}{400}+\frac{16y^2}{400}=\frac{400}{400}$ قسمة طرفي المعادلة على 400

$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ الصورة العامة للقطع الناقص

$b^2=16 \Longrightarrow b=4$

$a^2=25 \Longrightarrow a=5$

$\because c^2=a^2-b^2$

$\therefore c^2=25-16$

$c^2=9 \Longrightarrow c=3$

البؤرتان على محور الصادات: $F_1(0,-3)$, $F_2(0,3)$

الرأسان على محور الصادات: $B_1(0,-5)$, $B_2(0,5)$

طول المحور الأكبر هو $2a$ فيكون: $2a=2\times 5=10$

حاول أن تحل

3 أوجد البؤرتين والرأسين وطول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي معادلته: $x^2+4y^2=16$

مثال (4)

أوجد معادلة قطع ناقص مركزه $(0, 0)$ إذا كان محوره الأكبر ينطبق على المحور السيني وطوله 12 cm والمسافة بين البؤرتين 8 cm.

الحل:

$\because$ طول المحور الأكبر هو 12 cm

$\therefore 2a = 12 \Longrightarrow a = 6$

$\because$ المسافة بين البؤرتين هو 8 cm

$\therefore 2c = 8 \Longrightarrow c = 4$

ولكن: $a^2 = b^2 + c^2$

$b^2 = a^2 - c^2 = 6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20$

معادلة القطع الناقص هي: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

بالتعويض نحصل على المعادلة: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$

حاول أن تحل

4 أوجد معادلة قطع ناقص مركزه $(0, 0)$ إذا كان محوره الأكبر ينطبق على المحور الصادي وطوله 16 cm والمسافة بين البؤرتين 10 cm.

مثال (5)

أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه $(0, 0)$ وإحدى بؤرتيه $F(2, 0)$ ويمر بالنقطة $A(2, 1)$.

الحل:

$\because$ البؤرة $F(2, 0)$ تقع على محور السينات

$\therefore$ معادلة للقطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل هي:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad , \quad c = 2$

$c^2 = a^2 - b^2$

$(2)^2 = a^2 - b^2$

$a^2 = b^2 + 4 \qquad (1)$

$\because$ القطع الناقص يمر بالنقطة $A(2, 1)$

$\therefore \frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \Longrightarrow \frac{4b^2 + a^2}{a^2 b^2} = 1$

$4b^2 + a^2 = a^2 b^2 \qquad (2)$

بالتعويض (1) في (2) نجد: $4b^2 + b^2 + 4 = b^2(b^2 + 4)$

ومنه نحصل على المعادلة: $b^4 - b^2 - 4 = 0$

$b^2 = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$

بالتعويض عن b^2 في (1) نجد: $a^2 = \frac{9+\sqrt{17}}{2}$

ومعادلة القطع الناقص هي:

$$\frac{x^2}{\frac{9+\sqrt{17}}{2}} + \frac{y^2}{\frac{1+\sqrt{17}}{2}} = 1$$

$$\frac{2x^2}{9+\sqrt{17}} + \frac{2y^2}{1+\sqrt{17}} = 1$$

حاول أن تحل

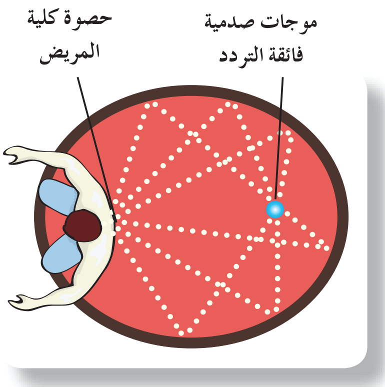
5 **a** هل يمكنك حل مثال (5) بطريقة أخرى؟ فسّر.

b أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه $(0, 0)$ ومحوره الأصغر أفقي طوله 10 cm ويمر بالنقطة $A(2, 2\sqrt{6})$.

تطبيقات باستخدام القطوع الناقصة Applications Using Ellipses

عندما ندوّر قطعًا ناقصًا في فراغ ثلاثي الأبعاد حول محوره الأكبر، فإن القطع الناقص يُنتج **سطحًا لمجسم قطع ناقص.** فالضوء أو الصوت المنبعث من إحدى البؤرتين سينعكس عند السطح ويمر خلال البؤرة الأخرى.

كذلك تحتوي متاحف العلوم على صالات عرض للهمس تعمل بهذا المبدأ، إذا همس شخص يقف في إحدى البؤرتين، فيمكن للشخص الذي يقف في البؤرة الأخرى أن يسمعه بسهولة، حتى إذا كان المتحدث يدير له ظهره. هناك تطبيق طبي، أيضًا، في علاج حصوات الكلى. يبعث جهاز تفتيت الحصوات بموجات صدمية فائقة التردد (UHF) من إحدى البؤرتين وتمر الموجات الصدمية عبر حصوات كلية المريض في البؤرة الثانية وتفتتها.



مثال (6)

للقطع الناقص الذي يولد السطح الناقص لجهاز تفتيت الحصوات، محور أكبر نقطتاه الطرفيتان $A_1(-6, 0)$ ، $A_2(6, 0)$، ومحور الأصغر إحدى نقطتيه الطرفيتين $B_1(0, -2.5)$، أوجد إحداثيات البؤرتين.

الحل:

من المعلومات المعطاة نجد أن: $a = 6$ ، $b = 2.5$ ومركزه $(0, 0)$

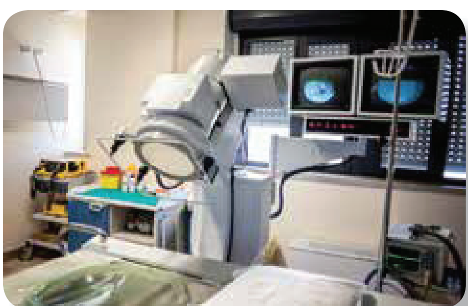
$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$= \sqrt{6^2 - 2.5^2}$$

$$\approx 5.454$$

البؤرتان هما بالتقريب النقطتان $F_1(-5.45, 0)$ ، $F_2(5.45, 0)$



حاول أن تحل

6 يتولد المجسم الناقص لأحد أجهزة تفتيت الحصوات، من دوران قطع ناقص نقطتا طرفي محوره الأكبر $A_1(-8, 0)$, $A_2(8, 0)$. إذا كانت إحدى نقطتي طرفي محوره الأصغر $B_1(0, 3.5)$؛ فأوجد إحداثيات البؤرتين.

مثال (7)

لمتابعة الهمس في الصالات البيضاوية الشكل فإن الصوت الذي ينطلق من بؤرة يمكن الاستماع إليه بشكل تام في البؤرة الثانية. على افتراض أن إحدى الصالات الكبرى مبنية على شكل بيضاوي طولي محوريها 98 m و 46 m.
على أي مسافة من مصدر الصوت يجب أن يكون موقع شخص ليتمكن من سماعه بشكل واضح؟

الحل:

$\because$ مصدر الصوت عند إحدى البؤرتين

$\therefore$ يجب أن يقف الشخص عند البؤرة الأخرى حتى يسمع الصوت بوضوح

الشكل البيضاوي للصالة يمثل قطعًا ناقصًا له محور أكبر طوله 98 m

$$\therefore \; 2a = 98$$

$$a = 49$$

وطول المحور الأصغر 46 m

$$\therefore \; 2b = 46$$

$$b = 23$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

من المعادلة:

$$c^2 = (49)^2 - (23)^2$$

$$c^2 = 1872$$

$$c \approx 43.267$$

والمسافة بين البؤرتين هي:

$$2c \approx 86.5$$

أي حوالي 86.5 m

يجب أن يكون موقع الشخص على بعد 86.5 m تقريبًا من مصدر الصوت.

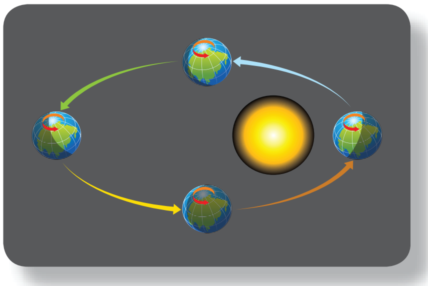
حاول أن تحل

7 على افتراض أن الصالة بيضاوية الشكل طولي محوريها 78 m ، 36 m.
على أي مسافة من مصدر الصوت يجب أن يكون موقع شخص ليتمكن من سماع الصوت المنطلق بشكل واضح؟

مثال (8)

تتحرك كواكب المجموعة الشمسية في مدارات على شكل قطع ناقص حيث إن الشمس هي إحدى بؤرتيه. على افتراض أن المحور الأكبر أفقي وطوله حوالى 1.52×10^8 km والمحور الأصغر طوله حوالى 1.48×10^8 km،

ما المسافة بين الشمس والبؤرة الثانية؟



الحل:

$\because$ المدار على شكل قطع ناقص

طول المحور الأكبر 1.52×10^8

$$\therefore \quad 2a = 1.52 \times 10^8$$

$$a = 0.76 \times 10^8 = 76 \times 10^6$$

وطول المحور الأصغر 1.48×10^8

$$\therefore \quad 2b = 1.48 \times 10^8$$

$$b = 0.74 \times 10^8 = 74 \times 10^6$$

من المعادلة:

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c^2 = (76 \times 10^6)^2 - (74 \times 10^6)^2 = 10^{12}(5\,776 - 5\,476)$$

$$= 300 \times 10^{12} \Longrightarrow c \approx 17.3 \times 10^6$$

$$2c \approx 34.6 \times 10^6$$

أي أن المسافة بين الشمس والبؤرة الثانية هي 34.6×10^6 km

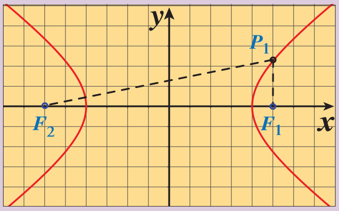
حاول أن تحل

8 إذا كان الكوكب المقصود في المثال (8) هو كوكب الأرض، اكتب معادلة تمثل حركة كوكب الأرض حول الشمس.

القطع الزائد

Hyperbola

دعنا نفكر ونتناقش



الشكل المجاور يمثل بيان المعادلة:

$$9x^2 - 16y^2 = 144$$

a اكتب المعادلة على الصورة: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

b تحقق من أن النقطة $P_1\left(5, \frac{9}{4}\right)$ تحقق المعادلة السابقة.

c أوجد بعد النقطة P_1 عن كل من النقطتين $F_1(5, 0)$ ، $F_2(-5, 0)$

d أوجد: $|P_1F_1 - P_1F_2|$

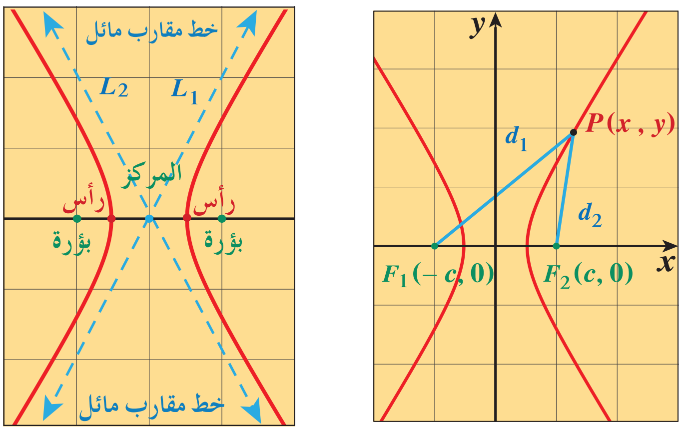
e كرر الخطوات **c** ، **b** مع النقطتين: $P_2\left(-5, \frac{9}{4}\right)$ ، $P_3(4, 0)$

f ماذا تلاحظ؟

تعريف: القطع الزائد

القطع الزائد هو مجموعة كل النقاط في المستوي التي تكون القيمة المطلقة للفرق بين بعدي كل نقطة منها عن نقطتين ثابتتين في المستوي ثابتًا.

يوضح الشكل **(a)** قطعًا زائدًا، وكل من النقطتين الثابتتين F_2 ، F_1 تسمى **بؤرة**، وبعدا أي نقطة عنهما d_2 ، d_1 (حيث الفرق بينهما ثابت). يتكون القطع الزائد من منحنيين منفصلين (فرعين) ويسمى الخطان L_2 ، L_1 **خطين مقاربين مائلين** للقطع. المستقيم المار بالبؤرتين يقطع فرعي القطع في **نقطتي الرأسين**، وتسمى القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين **بالمحور القاطع (الأساسي)**، كما تسمى نقطة منتصف المحور القاطع **مركز القطع الزائد**.



شكل (a)

سوف تتعلم

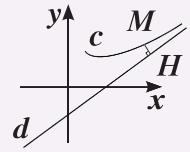
- القطع الزائد.
- خواص القطع الزائد.

المفردات والمصطلحات:

- قطع زائد Hyperbola
- خطوط مقاربة Asymptotes
- رؤوس Vertices

معلومة:

الخط المقارب المائل



d هو خط مقارب مائل للمنحنى c إذا المسافة $MH \longrightarrow 0$ عندما تبتعد النقطة M إلى اللا نهاية على المنحنى c.

الربط بالتكنولوجيا:

لرسم بيان القطوع المخروطية على الآلة الحاسبة البيانية:
من القائمة Menu أنقر على Conics فتظهر الصفحة.

Select Equation

$X = A(Y-K)^2 + K$

$X = AY^2 + BY + C$

$Y = A(X-H)^2 + K$

$Y = AX^2 + BX + C$

$(X-H)^2 + (Y-H)^2 = R^2$

$AX^2 + AY^2 + BX + CY + D = 0$

$\frac{(X-H)^2}{A^2} + \frac{(Y-H)^2}{B^2} = 1$

$\frac{(X-H)^2}{A^2} - \frac{(Y-H)^2}{B^2} = 1$

$\frac{(Y-H)^2}{B^2} - \frac{(X-H)^2}{A^2} = 1$

اختر المعادلة. فتظهر صفحة تتضمن المعاملات والثوابت.
عوّض ثم أنقر على ▭ فيظهر الرسم البياني للقطع المخروطي على الشاشة.

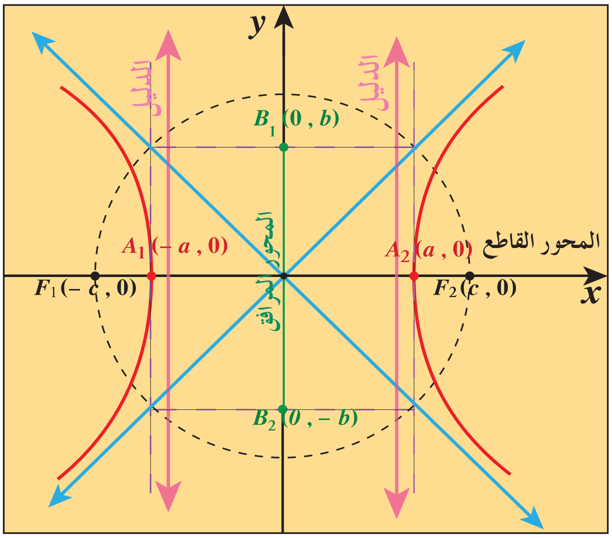
في الشكل (b) إذا رسمنا مماسين للقطع الزائد عند نقطتي الرأسين، ودائرة مركزها هو مركز القطع الزائد، وطول نصف قطرها c هو بعد البؤرة عن مركز القطع، فإن الدائرة تقطع كل مماس بنقطتين. وبرسم مستطيل رؤوسه النقاط الأربع يكون أحد بعديه $2a$ مساويًا لطول المحور القاطع $(\overline{A_1A_2})$، وبعده الآخر $2b$ مساويًا لطول **المحور المرافق** $(\overline{B_1B_2})$، وبالتالي، نحصل على العلاقة الأساسية:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

نلاحظ أن: $c > a \ , \ c > b$

كما أنه لا توجد علاقة ثابتة بين $a \ , \ b$ كما في القطع الناقص.

وللقطع الزائد دليلين كما في الشكل.



شكل (b)

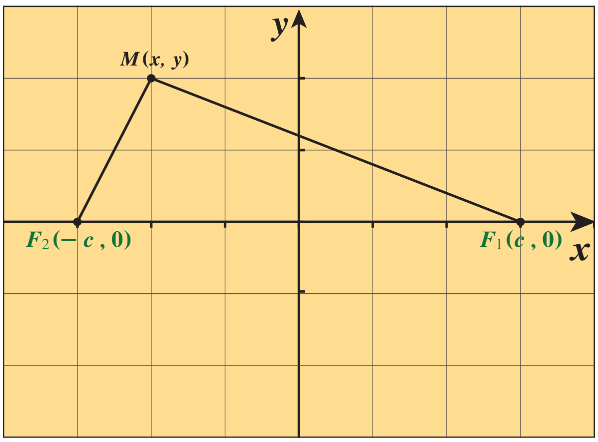
مثال توضيحي

لنأخذ في المستوى الإحداثي نقطتان ثابتتان $F_1(c , 0)$ ، $F_2(-c , 0)$ والنقطة $M(x , y)$ متحركة بحيث:

$|MF_1 - MF_2| = 2a$ $\quad$ $a \neq 0 \ , \ c \neq 0$ ثابتتان $c > a$

ومنه $MF_1 - MF_2 = 2a$ أو $MF_2 - MF_1 = 2a$

ومن الشكل المقابل نلاحظ أن: $MF_1 > MF_2$ فيكون $MF_1 - MF_2 = 2a$



$$MF_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$MF_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$MF_1{}^2 - MF_2{}^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - x^2 - 2cx - c^2 - y^2$$

$$MF_1{}^2 - MF_2{}^2 = -4cx$$

ولكن: $(MF_1 - MF_2)(MF_1 + MF_2) = -4cx$

المعطى: $(2a)(MF_1 + MF_2) = -4cx$

$$MF_1 + MF_2 = -\frac{2cx}{a}$$

فيصبح لدينا: $\begin{cases} MF_1 + MF_2 = -\dfrac{2cx}{a} \\ MF_1 - MF_2 = 2a \end{cases}$

نحصل على: $MF_1 = a - \dfrac{cx}{a} \ , \ MF_2 = -a - \dfrac{cx}{a}$

$$MF_1{}^2 = \left(a - \frac{cx}{a}\right)^2 = (x-c)^2 + y^2$$

$$a^2 - 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2} = x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$\frac{c^2x^2}{a^2} - x^2 - y^2 = c^2 - a^2$$

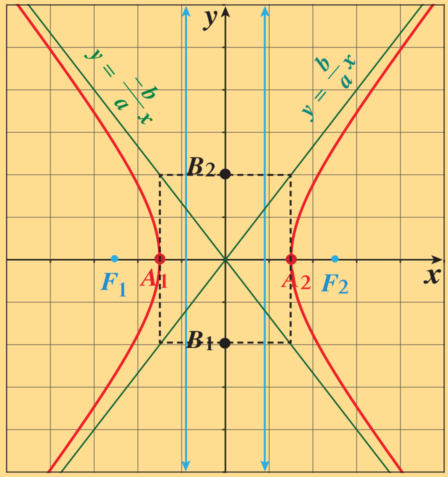
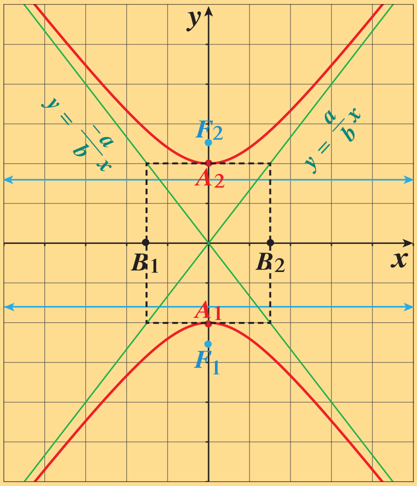
نفرض $c^2 - a^2 = b^2$

$$x^2\frac{(c^2 - a^2)}{a^2} - y^2 = c^2 - a^2$$

$$\frac{x^2b^2}{a^2} - y^2 = b^2$$

بالقسمة على b^2 نحصل على: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ وهي معادلة قطع زائد

معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل كالتالي:

المعادلة	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
بيان القطع		
طرفا المحور القاطع الرأسان	$A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$	$A_1(0,-a)$, $A_2(0,a)$
المحور القاطع (الأساسي)	ينطبق على محور السينات	ينطبق على محور الصادات
طول المحور القاطع	$2a$	
طرفا المحور المرافق	$B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$	$B_1(-b,0)$, $B_2(b,0)$
طول المحور المرافق	$2b$	
البؤرتان	$F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$	$F_1(0,-c)$, $F_2(0,c)$
العلاقة الأساسية	$c^2=a^2+b^2$	
معادلة الخطين المقاربين	$y=\pm\frac{b}{a}x$	$y=\pm\frac{a}{b}x$
معادلة الدليلين	$x=\pm\frac{a^2}{c}$	$y=\pm\frac{a^2}{c}$
التناظر	القطع متناظر حول محوريه ومركزه	

مثال (1)

لتكن: $9x^2 - 16y^2 = 144$ معادلة قطع زائد، أوجد:

a رأسي القطع الزائد.

b البؤرتين.

c معادلتي دليلي القطع.

d طول كل من المحورين.

e معادلة كل من الخطين المقاربين ثم ارسم شكلًا تخطيطيًّا للقطع.

الحل:

a المعادلة

$$9x^2 - 16y^2 = 144$$

اقسم طرفي المعادلة على 144

$$\frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = \frac{144}{144}$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

والمعادلة على الصورة:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

المحور القاطع على محور السينات وبالتالي:

$$a^2 = 16 \Longrightarrow a = 4$$

$$b^2 = 9 \Longrightarrow b = 3$$

رأسا القطع الزائد هما:

$$A_1(-4,0)\ ,\ A_2(4,0)$$

b لإيجاد البؤرتين نكتب المعادلة:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

بالتعويض:

$$c^2 = 16 + 9 = 25$$

$$c = 5$$

البؤرتان:

$$F_1(-5,0)\ ,\ F_2(5,0)$$

c معادلتي دليلي القطع الزائد:

$$x = \frac{a^2}{c} \quad , \quad x = -\frac{a^2}{c}$$

$$x = \frac{16}{5} \quad , \quad x = -\frac{16}{5}$$

d طول المحور القاطع:

$$2a = 2 \times 4 = 8$$

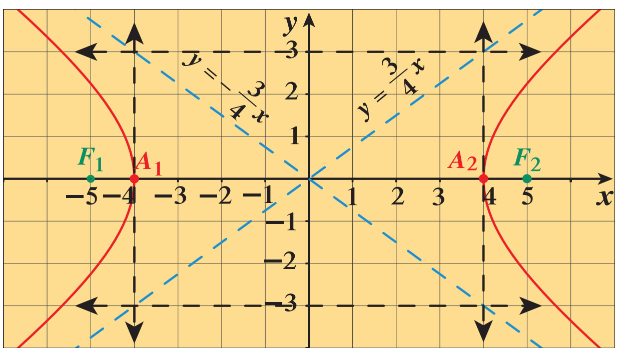
طول المحور المرافق:

$$2b = 2 \times 3 = 6$$

e معادلة كل من الخطين المقاربين:

$$y = \pm \frac{b}{a}x$$

$$y = \pm \frac{3}{4}x$$



لرسم مخطط هذا القطع الزائد نعيّن طرفي المحور الأساسي (رأس القطع) ونرسم منهما مستقيمين موازيين لمحور الصادات ونعيّن طرفي المحور المرافق ونرسم منهما مستقيمين موازيين لمحور السينات.

تتقاطع هذه المستقيمات في أربع نقاط تشكل رؤوس مستطيل والخطان المقاربان للقطع الزائد ينطبقان على قطري المستطيل ونكمل رسم بيان القطع.

حاول أن تحل

1 لتكن: $9y^2 - 25x^2 = 225$ معادلة قطع زائد، أوجد:

a رأسي القطع الزائد.

b البؤرتين.

c معادلتي دليلي القطع.

d طول كل من المحورين.

e معادلة كل من الخطين المقاربين ثم ارسم شكلًا تخطيطيًا للقطع.

مثال (2)

أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $F_2(0,3)$, $F_1(0,-3)$ ورأساه $A_2(0,2)$, $A_1(0,-2)$

ثم أوجد معادلة كلّ من خطيه المقاربين وارسم شكلًا تقريبيًا للقطع.

الحل:

$\because$ البؤرتين على محور الصادات.

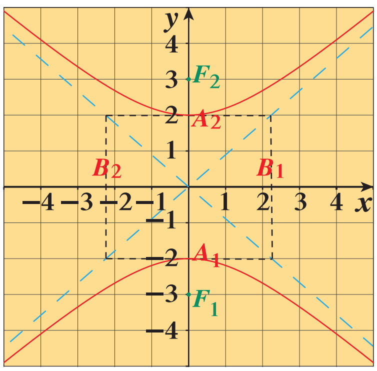
$\therefore$ معادلة القطع الزائد هي: $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$

$\because$ إحدى البؤرتين $F_2(0,3)$ $\therefore$ $c = 3$

$\because$ أحد الرأسين $A_2(0,2)$ $\therefore$ $a = 2$

ولكن:

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$3^2 = 2^2 + b^2$$
$$b^2 = c^2 - a^2$$
$$= 9 - 4$$
$$= 5$$



معادلة القطع الزائد هي: $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{5} = 1$

معادلتا الخطين المقاربين هما: $y = \pm \dfrac{a}{b} x \Rightarrow y = \pm \dfrac{2}{\sqrt{5}} x \Rightarrow y = \pm \dfrac{2\sqrt{5}}{5} x$

لرسم مخطط القطع الزائد، نبدأ برسم مستطيل رؤوسه هي الأزواج المرتبة: $(\pm a , \pm b)$

$(\pm 2 \ , \ \pm\sqrt{5})$، ثم نرسم الخطين المقاربين على أنهما ينطبقان على قطري المستطيل ونكمل رسم بيان القطع.

حاول أن تحل

2 أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $F_1(-4,0)$, $F_2(4,0)$ ورأساه $A_1(-2,0)$, $A_2(2,0)$، ثم أوجد معادلة كلّ من خطيه المقاربين، وارسم شكلًا تقريبيًا للقطع.

ملاحظة: يمكنك رسم مخطط القطع الزائد بطرق أخرى.

مثال (3)

أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0\,,0)$ وإحدى بؤرتيه $F(0\,,\sqrt{34})$ ومعادلة أحد خطيه المقاربين هي: $y = \frac{3}{5}x$

الحل:

$\because$ إحدى البورتين $F(0\,,\sqrt{34})$

$\therefore$ المحور القاطع ينطبق على محور الصادات ومعادلته: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

$\because\ c^2 = a^2 + b^2$

$\therefore\ 34 = a^2 + b^2 \qquad (1)$

معادلة المقارب: $y = \frac{a}{b}x$ حيث من المعطى $y = \frac{3}{5}x$

$\therefore\ \frac{3}{5} = \frac{a}{b}$

$\therefore\ a = \frac{3b}{5}$

بالتعويض في المعادلة (1):

$$34 = \left(\frac{3b}{5}\right)^2 + b^2$$

$$34 = \frac{9b^2}{25} + b^2$$

$$850 = 9b^2 + 25b^2$$

$$b^2 = \frac{850}{34}$$

$$b^2 = 25 \qquad \Longrightarrow \quad b = 5$$

لإيجاد قيمة a نستخدم:

$$a = \frac{3b}{5}$$

$$a = \frac{3 \times 5}{5} = 3$$

ومعادلة القطع الزائد هي:

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{25} = 1$$

حاول أن تحل

3 أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0, 0)$ وإحدى بؤرتيه $F(\sqrt{41}\,, 0)$ ومعادلة أحد خطية المقاربين $y = \frac{4}{5}x$

مثال (4)

أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0\,,0)$ وأحد رأسيه $(-4\,,0)$ ويمر بالنقطة $(5\,,-2)$.

الحل:

$\because$ أحد رأسي القطع الزائد $(-4\,,0)$

$\therefore$ المحور القاطع ينطبق على محور السينات

ومعادلة القطع هي: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

من المعطيات: $a = 4$ فيكون: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

يمر القطع الزائد بالنقطة $(5, -2)$

بالتعويض

$$\therefore \frac{25}{16} - \frac{4}{b^2} = 1 \Longrightarrow \frac{25}{16} - 1 = \frac{4}{b^2}$$

$$\frac{9}{16} = \frac{4}{b^2}$$

$$b^2 = \frac{64}{9}$$

معادلة القطع الزائد: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{\frac{64}{9}} = 1$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{9y^2}{64} = 1$$

حاول أن تحل

4 أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0, 0)$ وأحد رأسيه $\left(0, \frac{5}{4}\right)$ ويمر بالنقطة $\left(-\sqrt{3}, -\frac{5}{2}\right)$

تطبيقات باستخدام القطع الزائد

يتحدث العلماء عن نظرية تقول إن الجرم السماوي الذي يتحرك ضمن مجال جاذبية جسم آخر أثقل منه يتبع مسارًا قريبًا جدًّا من شكل قطع مخروطي حيث إحدى بؤرتيه هي الجسم الأثقل، مثال على ذلك الشمس هي إحدى بؤرتي الكواكب التي تدور حولها. أما حركة المذنبات بالنسبة للشمس نظريًّا فإنها تقترب من الشمس ويكوّن معها حلقة جزئية لتترك بعد ذلك النظام الشمسي وتبتعد في الفضاء الواسع لتتبع مسارًا يشبه أحد فروع القطع الزائد.

مثال (5) **تطبيقات حياتية**

عند اقتراب مركبة فضائية من أحد الكواكب، تُغيّر جاذبية هذا الكوكب مسار المركبة إلى قطع زائد.

أوجد معادلة تنمذج مسار مركبة فضائية قرب كوكب زحل إذا كان $c = 492\,788.2$ km ، $a = 332\,965$ km

الحل:

نفرض أن مركز القطع الزائد هو نقطة الأصل وأن المحور القاطع أفقي.

تكون المعادلة على الصورة: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

العلاقة الأساسية للقطع الزائد $c^2 = a^2 + b^2$

حل في b^2 $b^2 = c^2 - a^2$

عوّض $b^2 = (492\,788.2)^2 - (332\,965)^2$

استخدم آلة حاسبة $b^2 \approx 1.320 \times 10^{11}$

$$\frac{x^2}{1.109 \times 10^{11}} - \frac{y^2}{1.320 \times 10^{11}} = 1$$

يمكن أن تنمذج مسار سفينة فضائية حول زحل بالمعادلة: $\frac{x^2}{1.109 \times 10^{11}} - \frac{y^2}{1.320 \times 10^{11}} = 1$

حاول أن تحل

5 في مثال (5): أوجد معادلة تنمذج مسار سفينة فضائية حول نبتون إذا كان: $a = 35\,988\,342$ km ، $c = 4\,498\,542\,800$ km

مثال (6)

عندما تنطلق مركبة فضائية وتقترب من أحد الكواكب، فإن جاذبية هذا الكوكب تغير مسار المركبة من خط مستقيم إلى منحنى يشبه أحد فرعي القطع الزائد. أوجد معادلة قطع زائد تمثل مسار مركبة فضائية حول كوكب الزهرة إذا افترضنا أن نقطة الأصل هي مركز القطع الزائد والمحور القاطع في وضع أفقي علمًا أن طول نصف المحور القاطع 1 882 820 km والمسافة بين البؤرتين هي 108 208 000 km

الحل:

$\because$ المحور القاطع هو أفقي

$\therefore$ معادلة القطع الزائد هي على الصورة:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

من المعطيات:

$$a = 1\,882\,820$$

$$2c = 108\,208\,000$$

$$c = 54\,104\,000$$

من المعادلة الأساسية للقطع الزائد:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$b^2 = (54\,104\,000)^2 - (1\,882\,820)^2 = 2.9 \times 10^{15}$$

والمعادلة:

$$\frac{x^2}{3.5 \times 10^{12}} - \frac{y^2}{2.9 \times 10^{15}} = 1$$

حاول أن تحل

6 في مثال (6): أوجد معادلة قطع زائد مركزه $(0, 0)$ لمسار المركبة الفضائية حول كوكب المشتري علمًا أن:

$a = 38\,942\,360$ km ، $c = 778\,547\,200$ km

الاختلاف المركزي

Eccentricity

سوف تتعلم

- الاختلاف المركزي.
- الدليل.

المفردات والمصطلحات:

- اختلاف مركزي Eccentricity
- دليل Directrix

ملاحظة:
البؤرة لا تقع على الدليل.

معلومة:
الحرف e هو نسبة تستخدم في القطوع المخروطية $e > 0$ وليس له علاقة بالحرف e في اللوغاريتم الطبيعي حيث $\ln e = 1$

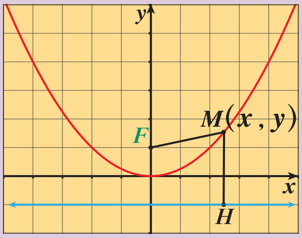
دعنا نفكر ونتناقش

1. في كل قطع من القطوع الموضحة إذا كانت MF تمثل المسافة بين البؤرة ونقطة تنتمي للقطع، MH تمثل البعد بين الدليل ونقطة تنتمي للقطع.
فأوجد $\frac{MF}{MH}$ (مستخدمًا الأدوات الهندسية).

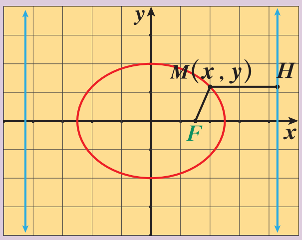
2. بفرض أن النقطة M في التمثيلات البيانية أخذت موضعًا آخر على منحنى القطع.
أوجد $\frac{MF}{MH}$

3. من 2 ، 1 ماذا تلاحظ؟

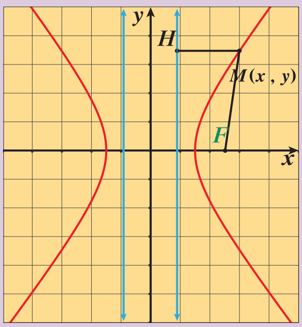
قطع مكافئ



قطع ناقص



قطع زائد



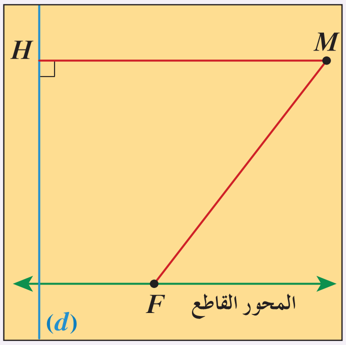
تمكنا في البنود السابقة من تعريف القطوع المخروطية (المكافئ – الناقص – الزائد).
يوفر الاختلاف المركزي فرصة جديدة للتعرف على القطوع المخروطية على أنها منحنيات مترابطة تشكل عائلة موحدة.

تعريف:
القطع المخروطي هو مجموعة كل النقاط في المستوى الإحداثي حيث تكون نسبة بعد كل منها من نقطة ثابتة (البؤرة) إلى بعدها عن مستقيم ثابت (الدليل) في نفس المستوى تساوي مقدارًا ثابتًا.

• هذا المقدار الثابت يسمى **الاختلاف المركزي** للقطع المخروطي ويرمز إليه بالرمز e

ومن فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» نجد أن:

$$\frac{MF}{MH} = e$$



وحيث إن M نقطة على قطع مخروطي، F نقطة ثابتة (بؤرة القطع) ولا تقع على المستقيم الثابت d (دليل القطع). MF المسافة بين النقطتين، MH البعد بين M والدليل.

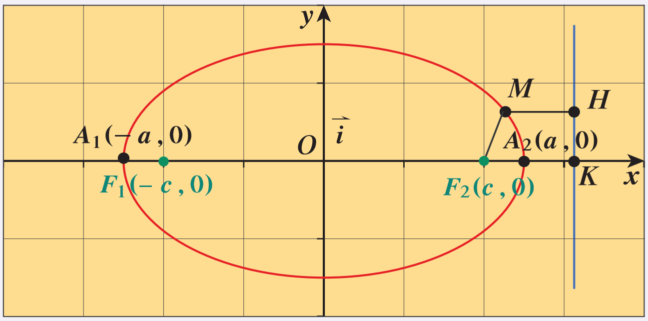
فيكون لدينا الحالات التالية:

a إذا $e = 1$ يكون القطع المخروطي **قطعًا مكافئًا** (Parabola)

b إذا $e < 1$ يكون القطع المخروطي **قطعًا ناقصًا** (Ellipse)

c إذا $e > 1$ يكون القطع المخروطي **قطعًا زائدًا** (Hyperbola)

من تعريف القطع المخروطي $e = \frac{MF}{MH}$ قيمة ثابتة لكل نقطة متحركة في المستوى الإحداثي فمثلًا في القطع الناقص:



$A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ هما نقطتان تحققان خاصية النقطة M

$\because$ $e = \dfrac{\text{بعد النقطة عن إحدى البؤرتين}}{\text{بعد النقطة عن أحد الدليلين}}$

$$\frac{A_1F_2}{A_1K} = e \Longrightarrow A_1F_2 = e(A_1K)$$

$$\Longrightarrow OF_2 + OA_1 = e(OK + OA_1)$$

$$c + a = e(OK + a)$$

$$c + a = e(OK) + (e)a \qquad (1)$$

$$\frac{A_2F_2}{A_2K} = e \Longrightarrow A_2F_2 = e(A_2K)$$

$$OA_2 - OF_2 = e(OK - OA_2)$$

$$a - c = e(OK - a)$$

$$-c + a = e(OK) - (e)a \qquad (2)$$

بطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) ينتج أن:

$$2c = 2 \cdot e(a)$$

$$e = \frac{c}{a}$$

معلومة:

الاختلاف المركزي للمسارات المخروطية لبعض الكواكب

الكوكب	الاختلاف المركزي
عطارد	0.21
الزهرة	0.01
الأرض	0.02
المريخ	0.09
المشتري	0.05
زحل	0.06
أورانوس	0.05
نبتون	0.008

مثال (1)

حدد نوع القطع في كل مما يلي ثم أوجد معادلته.

a اختلافه المركزي $(e = 1)$ وبؤرته: $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

b اختلافه المركزي $\left(e = \frac{1}{2}\right)$ وإحدى بؤرتيه: $F(2, 0)$

c اختلافه المركزي $(e = 2)$ ومعادلة أحد دليليه: $x = 1$

الحل:

a $\because \quad e = 1$

$\therefore$ القطع هو قطع مكافئ

البؤرة $F\left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad , \quad p = \frac{1}{2}$

محور السينات هو محور التماثل

$$\therefore \quad y^2 = 4px$$
$$= 4\left(\frac{1}{2}\right)x$$

معادلة القطع: $y^2 = 2x$

b $\because \quad e = \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{1}{2} < 1$

$\therefore$ القطع هو قطع ناقص

$\because$ إحدى البؤرتين $F(2, 0)$

$\therefore$ المحور الأكبر ينطبق على محور السينات ومركزه نقطة الأصل

من البؤرة $F(2, 0)$ نستنتج $c = 2$

$$\because \quad e = \frac{c}{a}$$
$$\therefore \quad \frac{1}{2} = \frac{2}{a}$$
$$a = 4$$

في القطع الناقص:

$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$2^2 = 4^2 - b^2$$
$$b^2 = 16 - 4$$
$$b^2 = 12$$

معادلة القطع الناقص: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

c $\because \quad e = 2 \quad , \quad 2 > 1$

$\therefore$ القطع هو قطع زائد

$\because$ معادلة أحد دليليه $x = 1$

$\therefore$ المحور القاطع (الأساسي) ينطبق على محور السينات ومركزه $(0, 0)$

معادلة الدليل هي:

$$x = \frac{a^2}{c}$$

$$1 = \frac{a^2}{c}$$

$$c = a^2 \qquad (1)$$

$$\because \; e = \frac{c}{a}$$

$$\therefore \; 2 = \frac{c}{a}$$

$$c = 2a \qquad (2)$$

بحل المعادلتين (2) , (1)

$$a^2 = 2a$$

$$a(a-2) = 0$$

$\therefore \; a = 0$ مرفوضة أو $a = 2$ قيمة مقبولة

$$\therefore \; e = a = 2$$

$$c = (2)^2 = 4$$

$$\because \; c^2 = a^2 + b^2$$

$$\because \; c^2 = a^2 + b^2$$

$$16 = 4 + b^2 \implies b^2 = 12$$

$\because$ معادلة القطع هي:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

حاول أن تحل

1 حدد نوع القطع في كل مما يلي ثم أوجد معادلته

a اختلافه المركزي $(e = 1)$ وبؤرته $F(-1,0)$

b اختلافه المركزي $\left(e = \frac{4}{5}\right)$ وإحدى بؤرتيه $F(-4\sqrt{2}\,, 0)$

c اختلافه المركزي $(e = \sqrt{3})$ ومعادلة أحد دليليه $x = \frac{1}{3}$

مثال (2)

أوجد الاختلاف المركزي لكل قطع مما يلي حيث معادلته:

a $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

b $x^2 - 25y^2 = 1$

الحل:

a $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

قطع ناقص معادلته: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

بالمقارنة:

$$a^2 = 25$$
$$a = 5$$
$$b^2 = 9$$
$$b = 3$$

لدينا:

$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$c^2 = 25 - 9$$
$$= 16$$
$$c = 4$$

الاختلاف المركزي

$$e = \frac{c}{a}$$

بالتعويض:

$$e = \frac{4}{5}$$

b $x^2 - 25y^2 = 1$

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{\frac{1}{25}} = 1$$

قطع زائد معادلته: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ بالمقارنة يكون:

$$a^2 = 1$$
$$a = 1$$
$$b^2 = \frac{1}{25}$$
$$b = \frac{1}{5}$$

في القطع الزائد:

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = 1 + \frac{1}{25}$$
$$= \frac{26}{25}$$
$$c = \frac{\sqrt{26}}{5}$$
$$\because \; e = \frac{c}{a}$$
$$\therefore \; e = \frac{\frac{\sqrt{26}}{5}}{1} = \frac{\sqrt{26}}{5}$$

حاول أن تحل

2 أوجد الاختلاف المركزي لكل قطع مما يلي حيث معادلته:

a $x^2 + \frac{y^2}{25} = 1$

b $24y^2 = 600 + 25x^2$

مثال (3)

أوجد طول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي اختلافه المركزي $\left(e = \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ وطول محوره الأصغر 4 وحدات.

الحل:

$$\because \quad e = \frac{c}{a}$$

$$\therefore \quad \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

أي:

$$c = \frac{a\sqrt{5}}{3}$$

طول المحور الأصغر 4 أي

$$2b = 4$$

$$b = 2$$

في القطع الناقص:

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$\frac{5a^2}{9} = a^2 - 4$$

$$a^2 = 4 + \frac{5a^2}{9}$$

$$9a^2 = 36 + 5a^2$$

$$4a^2 = 36$$

$$a^2 = 9$$

$$a = 3$$

$$2a = 2(3) = 6$$

طول المحور الأكبر $=$ 6 وحدات.

حاول أن تحل

3 أوجد طول المحور القاطع للقطع الزائد الذي اختلافه المركزي $(e = 2)$ وطول محوره المرافق 6 وحدات.

مثال (4)

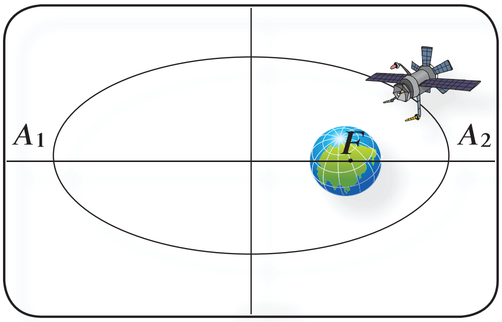
يمكن وضع الأقمار الاصطناعية في مدارات بيضاوية الشكل (قطع ناقص) في دورانها حول الأرض.

لنفترض أن قمرًا صناعيًّا يتحرك في مدار بيضاوي (قطع ناقص) حول الأرض حيث الاختلاف المركزي $(e = 0.04)$ وطول نصف محوره الأكبر 7 500 km وإحدى بؤرتيه مركز الأرض.

a أوجد معادلة مدار القمر الاصطناعي.

b على افتراض أن طول نصف قطر الأرض 6 372 km فأوجد أطول وأقصر بُعد للقمر الاصطناعي عن سطح الأرض.

الحل:



a $e = 0.04 \ , \ a = 7\,500$ km

لدينا: $e = \frac{c}{a} = 0.04$ بالتعويض:

$c = 7\,500 \times 0.04$

$= 300$

ويكون مركز الأرض إحدى البؤرتين أي $F(300\,,0)$:

في القطع الناقص: $a^2 = b^2 + c^2$

$b^2 = (7\,500)^2 - (300)^2$

$b^2 = 56\,160\,000$

معادلة المدار: $\frac{x^2}{56\,250\,000} + \frac{y^2}{56\,160\,000} = 1$

b أقصر بُعد للقمر الاصطناعي عن سطح الأرض هو عند النقطة A_2

نوجد أولًا المسافة FA_2

$FA_2 = 7\,500 - 300 = 7\,200$

طول نصف قطر الأرض $= 6\,372$

فيكون أقصر بُعد: $7200 - 6372 = 828$

أي 828 km

أطول بُعد للقمر الاصطناعي عن سطح الأرض هو عند النقطة A_1

نوجد FA_1

$FA_1 = 7\,500 + 300 = 7\,800$

أطول بُعد عن سطح الأرض:

$7\,800 - 6\,372 = 1\,428$

أي 1 428 km

حاول أن تحل

4 إذا كان القمر الاصطناعي له مدار بيضاوي (قطع ناقص) حول الأرض حيث اختلافه المركزي $e = 0.05$ وطول نصف محوره الأكبر 8 600 km وإحدى بؤرتيه مركز الأرض.

a أوجد معادلة مدار القمر الاصطناعي.

b إذا كان نصف قطر الأرض 6 372 km

فأوجد أطول وأقصر بُعد للقمر الاصطناعي عن سطح الأرض.

المرشد لحل المسائل

يوضح الرسم المقابل شكل **(a)** لوحًا للطاقة الشمسية على شكل قطع مكافئ، حيث إن البعد بين طرفيه هو $8\,m$.

ويبلغ عمقه من منتصف المسافة $2\,m$.

أوجد البؤرة، ثم أوجد معادلة القطع المكافئ وارسمه.

الحل:

كيف فكر عبد العزيز؟

بعد تحليل معطيات المسألة. أستنتج نقطتين على القطع المكافئ وأعوض عنهما في المعادلة لأجد البؤرة، ومن ثم أرسم القطع المكافئ بعد إيجاد معادلته.

أولًا:

بما أن المسافة بين طرفي القطع المكافىء هي $8\,m$. والعمق في منتصف المسافة هو $2\,m$ فيكون لدينا $M_1(4,2)$, $M_2(-4,2)$ نقطتان على القطع المكافئ.

ثانيًا:

معلوم أن معادلة القطع المكافئ العامة هي: $x^2 = 4py$

لذا أعوض عن x بـ 4 وعن y بـ 2 لأجد p

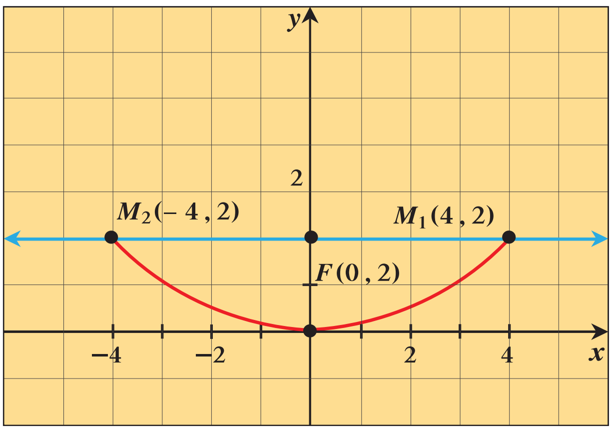
إذًا $(4)^2 = 4p(2)$

$$16 = 8p$$

$$p = 2$$

$\therefore$ البؤرة هي $F(0,p)$ أي $F(0,2)$ فتكون المعادلة هي:

$x^2 = 8y$ فأرسمها بالآلة الحاسبة البيانية.

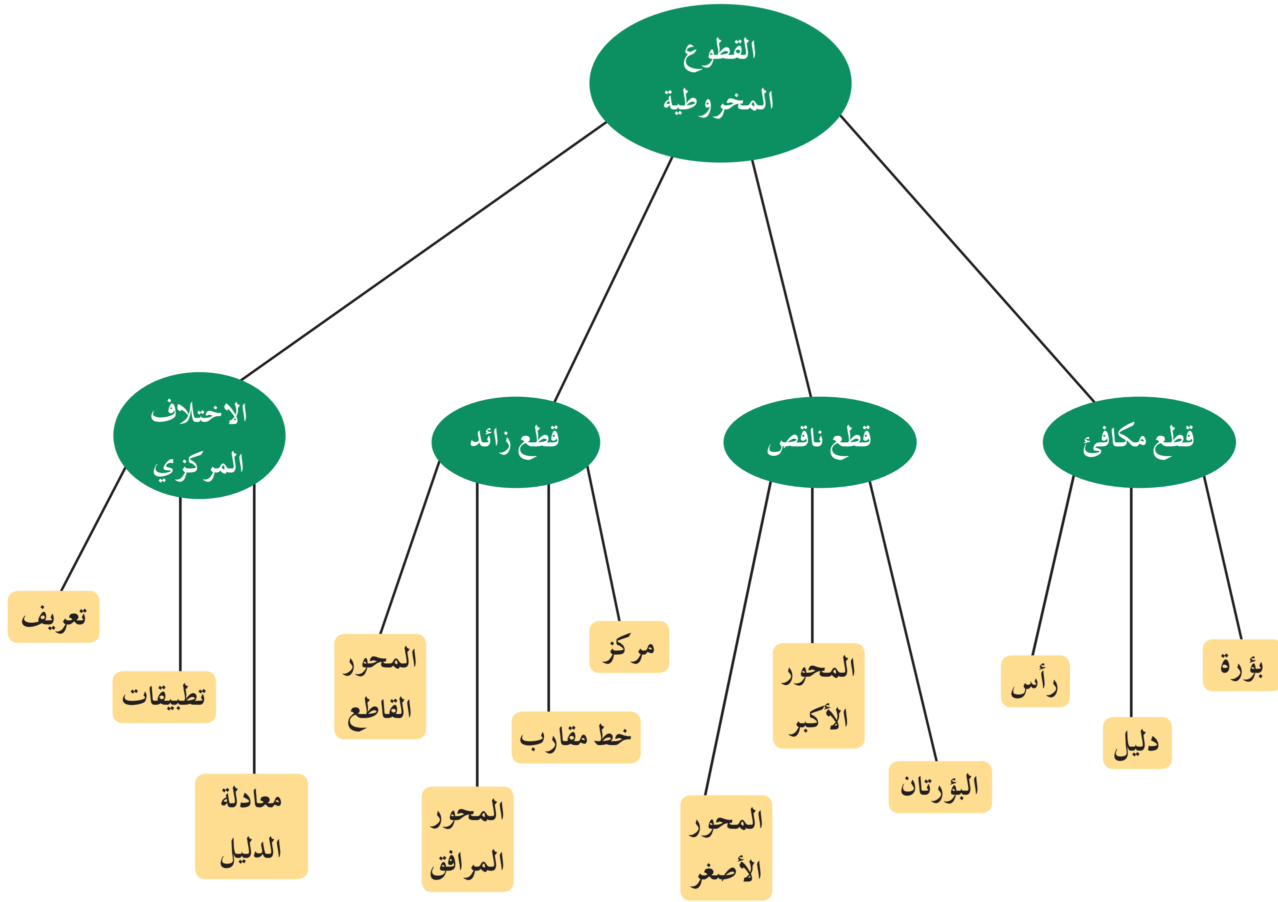


شكل (a)

مسألة إضافية

أوجد البؤرة في المسألة أعلاه إذا بلغ عمق لوح الطاقة الشمسية مترًا واحدًا من المركز.

مخطط تنظيمي للوحدة السابعة



ملخص

- **القطع المكافئ:**
- **تعريف:** القطع المكافئ هو مجموعة كل النقاط في المستوى المتساوية البعدين عن نقطة ثابتة معطاة (البؤرة) وعن مستقيم ثابت معطى (الدليل).

- قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل $(0, 0)$

الصورة العامة	$x^2 = 4py$		$y^2 = 4px$	
الفتحة	إلى أعلى أو إلى أسفل		إلى اليمين أو إلى اليسار	
إشارة p	$p < 0$	$p > 0$	$p < 0$	$p > 0$
البؤرة	$(0, p)$		$(p, 0)$	
الدليل	$y = -p$		$x = -p$	
محور التناظر	محور الصادات $(y - axis)$		محور السينات $(x - axis)$	
المسافة من الرأس إلى البؤرة	$\lvert p \rvert$			
المسافة من الرأس إلى الدليل	$\lvert p \rvert$			

- القطع الناقص:

- **تعريف:** القطع الناقص هو مجموعة كل النقاط في المستوى التي يكون مجموع بعدي كل نقطة منها عن نقطتين ثابتتين في المستوى ثابتًا.
- معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل $(0, 0)$ كالتالي:

المعادلة	$a > b > 0$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$a > b > 0$ $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$
المحور الأكبر	ينطبق على محور السينات	ينطبق على محور الصادات
الرأسان طرفا المحور الأكبر	$A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$	$A_1(0, -a)$, $A_2(0, a)$
طول المحور الأكبر	$2a$	
طرفا المحور الأصغر	$B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$	$B_1(-b, 0)$, $B_2(b, 0)$
طول المحور الأصغر	$2b$	
البؤرتان	$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$	$F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$
العلاقة الأساسية	$a^2 = b^2 + c^2$	
معادلتا الدليلين	$x = -\frac{a^2}{c}$, $x = \frac{a^2}{c}$	$y = -\frac{a^2}{c}$, $y = \frac{a^2}{c}$
التناظر	القطع الناقص متناظر حول كل من محوريه ومركزه	

■ **القطع الزائد:**

- **تعريف:** القطع الزائد هو مجموعة كل النقاط في المستوي التي تكون القيمة المطلقة للفرق بين بعدي كل نقطة منها عن نقطتين ثابتتين في **المستوي ثابتًا.**
- **معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل كالتالي:**

المعادلة	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
طرفا المحور القاطع الرأسان	$A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$	$A_1(0,-a)$, $A_2(0,a)$
المحور القاطع (الأساسي)	ينطبق على محور السينات	ينطبق على محور الصادات
طول المحور القاطع	$2a$	
طرفا المحور المرافق	$B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$	$B_1(-b,0)$, $B_2(b,0)$
طول المحور المرافق	$2b$	
البؤرتان	$F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$	$F_1(0,-c)$, $F_2(0,c)$
العلاقة الأساسية	$c^2 = a^2 + b^2$	
معادلة الخطين المقاربين	$y = \pm \frac{b}{a}x$	$y = \pm \frac{a}{b}x$
معادلة الدليلين	$x = \pm \frac{a^2}{c}$	$y = \pm \frac{a^2}{c}$
التناظر	القطع متناظر حول محوريه ومركزه	

■ **الاختلاف المركزي:**

- **تعريف:** القطع المخروطي هو مجموعة كل النقاط في المستوى الإحداثي حيث تكون نسبة بعد كل منها من نقطة ثابتة (البؤرة) إلى بعدها عن مستقيم ثابت (الدليل) في نفس المستوى تساوي مقدارًا ثابتًا.

هذا المقدار الثابت يسمى الاختلاف المركزي للقطع المخروطي ويرمز إليه بالرمز e.

- في القطع المكافئ: $e = 1$
- في القطع الناقص: $e = \frac{c}{a} < 1$
- في القطع الزائد: $e = \frac{c}{a} > 1$

الوحدة الثامنة

الاحتمال

Probability

مشروع الوحدة: أهمية استخدام علم الاحتمالات المستند على إحصاءات سابقة للوصول إلى استنتاجات مفيدة.

1 **مقدمة المشروع:** في إحدى رحلات الخطوط الجوية التي يتم خلالها استخدام طائرة تتسع لِـ 213 راكبًا، تقوم الشركة ببيع أكثر من 213 بطاقة لأنه معروف من رحلات سابقة أن بعض الركاب ممن سبق أن حجزوا بطاقات سفر قد يتخلفون عن الرحلة.

2 **الهدف:** تهتم الشركة بأن يكون عدد الركاب في الرحلة مساويًا لعدد المقاعد المتوفرة على الطائرة أي 213 مقعدًا، لأنّه إذا وجدت مقاعد فارغة على الطائرة خلال الرحلة فإن المردود المادي للرحلة سيتناقص، أما إذا كان عدد الركاب أكبر من عدد المقاعد فإن الشركة ستقوم بدفع تعويض مادي لكل راكب لم يتوفر له مقعد على متن الطائرة وهذا أيضًا سينقص من المردود المادي للرحلة.

3 **اللوازم:** آلة حاسبة — حاسوب.

4 **أسئلة حول التطبيق:**

بناءً على إحصاءات سابقة فإن احتمال تخلف راكب واحد عن رحلة جوية هو 0.0975

a أثبت أن عدد البطاقات المباعة للرحلة يجب أن يكون 236 بطاقة حتى يتأمن وجود 213 راكبًا عند انطلاق الرحلة.

b إذا باعت الشركة 240 بطاقة أي 4 بطاقات أكثر مما يلزم لتأمين 213 راكبًا.

أوجد احتمال وجود راكب إضافي لا مقعد له على متن الطائرة.

c إذا كانت الشركة تدفع 200 دينار لكل راكب حجز بطاقة ولم يجد مقعدًا على متن الطائرة للرحلة.

فأوجد احتمال أن تدفع الشركة 1 000 دينار تعويضًا للركاب الذين لم يجدوا لهم مقاعد على متن الطائرة إذا كانت الشركة قد باعت 246 بطاقة.

5 **التقرير:** ضع تقريرًا مفصّلًا حول المشروع واعرض استخدام خصائص الاحتمال والتوقع في تنفيذه.

دروس الوحدة

المتغيرات العشوائية المتقطعة	المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة)
8–1	8–2

الوحدة الثامنة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- استخدمت مبدأ العد والتباديل والتوافيق لعد الطرق الممكنة لإجراء عملية ما.
- تعرفت التجربة العشوائية وفضاء العينة.
- عيّنت احتمالات بعض الأحداث والأحداث المتنافية ومتمم الحدث والأحداث المستقلة.

ماذا سوف تتعلم؟

- تعرف المتغيرات العشوائية المتقطعة والمتصلة.
- إيجاد دالة التوزيع الاحتمالي ودالة التوزيع التراكمي لمتغيّر عشوائي متقطع.
- إيجاد دالة كثافة الاحتمال لمتغير عشوائي متصل.

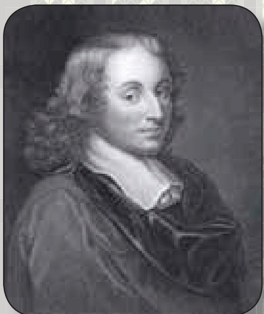
المصطلحات الأساسية

المتغيّر العشوائي المتقطع — التوزيع الاحتمالي — دالة التوزيع الاحتمالي — بيان دالة التوزيع الاحتمالي — توقع المتغيّرات العشوائية المتقطعة — تباين المتغيّرات العشوائية المتقطعة — الانحراف المعياري للمتغيّرات العشوائية المتقطعة — دالة التوزيع التراكمي لمتغيّر عشوائي متقطع — بيان دالة التوزيع التراكمي لمتغيّر عشوائي متقطع — توزيع ذات الحدين — التوقع والتباين والانحراف المعياري لتوزيع ذات الحدين — تجربة برنولي — المتغيّر العشوائي المتصل (المستمر) — التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي المستمر — دالة كثافة الاحتمال — التوزيع الاحتمالي المنتظم لمتغيّر عشوائي مستمر — التوزيع الاحتمالي الطبيعي — حساب الاحتمالات للتوزيع الطبيعي — التوقع والتباين للتوزيع الاحتمالي المنتظم.

أضف إلى معلوماتك

عمل كل من مؤسسي حساب الاحتمالات (كاردانو Cardano، باسكال Pascal، فيرما Fermat، برنولي Bernoulli) على تطوير هذا الحساب وذلك من خلال تجارب نواتجها قابلة للعد.

وبعد ذلك تركز الاهتمام على متغيرات عشوائية يمكن أن تأخذ عددًا لا نهائيًّا من القيم أو كل القيم على فترة من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.



بليز باسكال Blaise Pascal
(1623–1662)

بيير دي فيرما Pierre de Fermat
(1665–1601)

8–1

المتغيرات العشوائية المتقطعة

Discrete Random Variables

سوف تتعلم

- المتغيّر العشوائي المتقطع والتوزيع الاحتمالي.
- توزيع ذات الحدين وتجربة برنولي.
- وسط التوزيع الاحتمالي.
- دالة التوزيع الاحتمالي ودالة التوزيع التراكمي.

المفردات والمصطلحات:

- المتغيّر العشوائي
  Random Variable
- التوزيع الاحتمالي
  Distribution Probability
- متغيّر عشوائي متقطع
  Discrete Random Variable
- توزيع ذات الحدين
  Binomial Probability Distribution
- وسط التوزيع الاحتمالي
  Mean of a Probability Distribution
- تباين التوزيع الاحتمالي
  Variance of a Probability Distribution
- دالة التوزيع الاحتمالي
  Probability Distribution Function
- دالة التوزيع التراكمي
  Cumulative Distribution Function

ملاحظة:

عندما نقول قطعة نقود نعني أنها قطعة نقود منتظمة واحتمال ظهور الصورة (H) يساوي احتمال ظهور الكتابة (T).

دعنا نفكر ونتناقش

عند إلقاء حجري نرد منتظمين وملاحظة الوجه العلوي.

الحجر الأول مرقم كما يلي:

وجهان مرقمان 0، وجهان مرقمان 1، وجهان مرقمان 2.

الحجر الثاني مرقم كما يلي:

ثلاثة أوجه مرقمة 0، ثلاثة أوجه مرقمة 1.

ليكن E: مجموع العددين الظاهرين على الوجه العلوي.

الحجر الأول (أعمدة) — الحجر الثاني (صفوف)

+	0	0	1	1	2	2
0	0	0	1	1	2	2
0	0	0	1	1	2	2
0	0	0	1	1	2	2
1	1	1	2	2	3	3
1	1	1	2	2	3	3
1	1	1	2	2	3	3

1 بيّن أن النتائج الممكنة هي: $0 \, , 1 \, , 2 \, , 3$

2 **a** مستخدمًا الجدول المقابل، أوجد احتمال كل من النتائج التالية:

$$P(E=0)$$

$$P(E=1)$$

$$P(E=2)$$

b استنتج احتمال $P(E=3)$

3 **a** إذا كنا نهتم بناتج ضرب العددين الظاهرين على الوجه العلوي، فما النتائج الممكنة؟

b أوجد احتمال كل من النتائج الممكنة.

مقدّمة Introduction

في ما سبق درسنا بعض مفاهيم التجارب العشوائية والاحتمال. ونحن نعلم أن فضاء العيّنة هو مجموعة نواتج التجربة العشوائية والتي غالبًا ما تكون صفات أو مسميات يصعب التعامل معها رياضيًّا.

لذا يقوم الباحث بإقران هذه النواتج الوصفية للتجربة العشوائية بقيم عددية حقيقية تسمى **بالمتغير العشوائي** والذي تتغير قيمته بتغير نتيجة التجربة العشوائية.

فعلى سبيل المثال عند إلقاء قطعة نقود منتظمة مرتين متتاليتين فإن فضاء العينة يكون كالتالي:

$$S=\{(H,H)\ ,\ (H,T)\ ,\ (T,H)\ ,\ (T,T)\}$$

فمثلًا إذا اقتصرت ملاحظتنا على **عدد الصور** التي ظهرت في كل عنصر من عناصر فضاء العينة S والتي هي كالتالي: 2، 1، 1، 0 على الترتيب نكون قد أقرنّا كل عنصر من عناصر فضاء العينة بعدد حقيقي كما هو موضّح في الجدول التالي:

عدد الصور في كل عنصر	عناصر فضاء العينة S
2	(H,H)
1	(H,T)
1	(T,H)
0	(T,T)

وسوف نرمز للمتغير العشوائي بالرمز X وعليه فإن مدى X هو: $\{0,1,2\}$

المتغيّر العشوائي Random Variable

تعريف: المتغير العشوائي Random Variable

هو دالة مجالها فضاء العينة لتجربة عشوائية S ومجالها المقابل هو $\mathbb{R}$ ومداها مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$

حيث $X : S \longrightarrow \mathbb{R}$

(X هو المتغير العشوائي لتجربة عشوائية، S فضاء العينة، $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية).

في المثال السابق نلاحظ ما يلي:

1. مجال المتغير العشوائي X هو: $S = \{(H,H)\ ,\ (H,T)\ ,\ (T,H)\ ,\ (T,T)\}$
2. المجال المقابل للمتغير العشوائي هو $\mathbb{R}$.
3. المدى للمتغير العشوائي X هو: $\{2\ ,\ 1\ ,\ 0\}$ ويرمز له بالرمز $X(S)$

يوجد عدة أنواع من المتغيرات العشوائية، سوف تدرس نوعين فقط منها وهما:

1. المتغيرات العشوائية **المتقطعة** (المنفصلة).
2. المتغيرات العشوائية **المتصلة** (المستمرة).

وسوف نستخدم X، Y، ... كرمز للمتغيرات العشوائية و x، y ... لقيم هذه المتغيرات.

المتغيرات العشوائية المتقطعة (المنفصلة) Discrete Random Variables

كما ذكرنا سابقًا أن المتغيرات العشوائية تنقسم إلى عدة أنواع منها متغيرات عشوائية متقطعة (منفصلة) ومتغيرات عشوائية متصلة (مستمرة) وسنتناول كل منهما بالتفصيل:

تعريف: المتغير العشوائي المتقطع Discrete Random Variable

يكون المتغير العشوائي X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا إذا كانت مجموعة القيم الممكنة له (المدى) $X(S)$ هي مجموعة متقطعة أي قابلة للعد، من الأعداد الحقيقية سواء أكانت منتهية أم غير منتهية.

مثال (1)

في تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين، أوجد مجموعة القيم للمتغيرات العشوائية التالية، ثم حدّد فيما إذا كانت متغيرات عشوائية متقطعة أم لا.

a المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الصور.

b المتغير العشوائي Y الذي يمثل مربع عدد الصور.

c المتغير العشوائي Z الذي يمثل عدد الصور مطروحًا منه عدد الكتابات.

الحل:

a $S = \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$

عناصر مدى المتغير العشوائي X	عناصر فضاء العينة S
2	(H,H)
1	(H,T)
1	(T,H)
0	(T,T)

∴ مدى المتغيّر العشوائي: $X(S) = \{0, 1, 2\}$

نوع المتغير العشوائي X: متقطع

b

عناصر مدى المتغير العشوائي Y	عناصر فضاء العينة S
$(2)^2 = 4$	(H,H)
$(1)^2 = 1$	(H,T)
$(1)^2 = 1$	(T,H)
$(0)^2 = 0$	(T,T)

∴ مدى المتغيّر العشوائي: $Y(S) = \{0, 1, 4\}$

نوع المتغير العشوائي Y: متقطع

c

عناصر مدى المتغير العشوائي Z	عناصر فضاء العينة S
$2 - 0 = 2$	(H,H)
$1 - 1 = 0$	(H,T)
$1 - 1 = 0$	(T,H)
$0 - 2 = -2$	(T,T)

∴ مدى المتغيّر العشوائي: $Z(S) = \{-2, 0, 2\}$

نوع المتغير العشوائي Z: متقطع

حاول أن تحل

1 في تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين، أوجد مجموعة القيم للمتغيرات العشوائية التالية وحدّد فيما إذا كانت متغيرات عشوائية متقطعة أم لا.

a المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الكتابات.

b المتغير العشوائي Y الذي يمثل مكعب عدد الكتابات.

c المتغير العشوائي Z الذي يمثل عدد الكتابات مطروحًا منه 2.

التوزيع الاحتمالي Probability Distribution

تعلمنا سابقًا أن المتغير العشوائي المتقطع هو دالة مداها مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ قابلة للعد. ونبحث الآن في احتمال وقوع كل عنصر من عناصر فضاء العينة المناظر لكل عنصر من عناصر المدى.

تعريف: دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X

إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متقطعًا مداه $\{x_1 , x_2 , x_3 , ...\}$

فإن دالة التوزيع الاحتمالي f تعرّف كالتالي:

$$f(x_i) = P(X = x_i) \quad , \quad i = 1, 2, 3, ...$$

ويمكن تمثيلها بالجدول التالي:

x_i	x_1	x_2	.....
$f(x_i)$	$P(x_1)$	$P(x_2)$	.....

أي أن مجموعة النقاط في المستوى الإحداثي التي تمثل الأزواج المرتبة $(x_i \ , \ P(x_i))$

تسمى **دالة التوزيع الاحتمالي** Probability Distribution Function.

مثال (2)

في تجربة رمي حجر نرد مرة واحدة، المتغير العشوائي X يعبّر عن:

الجذر التربيعي للعدد الظاهر على الوجه العلوي عندما يكون الجذر التربيعي عددًا كليًّا والصفر لغير ذلك.

فأوجد:

a فضاء العينة (S) وعدد عناصره $n(S)$.

b مدى المتغير العشوائي X.

c احتمال وقوع كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X: $f(x_i) = P(X = x_i)$

d دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

تذكر:

$$P(A) = \frac{A \text{ عدد عناصر}}{S \text{ عدد عناصر}}$$

الحل:

a فضاء العينة: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

عدد عناصر فضاء العينة: $n(S) = 6$

b

عناصر فضاء العينة S	عناصر مدى المتغير العشوائي X
1	1
2	0
3	0
4	2
5	0
6	0

∴ مدى المتغيّر العشوائي: $X = \{0, 1, 2\}$

c $\because \; f(x_i) = P(X = x_i)$

$\therefore \; f(0) = P(X = 0) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$f(1) = P(X = 1) = \frac{1}{6}$

$f(2) = P(X = 2) = \frac{1}{6}$

d دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي:

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

حاول أن تحل

2 عند رمي حجر نرد مرة واحدة، إذا كان المتغير العشوائي X يعبّر عن:
«مربع العدد الظاهر مطروحًا منه 1 عندما يكون العدد الظاهر أصغر من 4، و $1-$ لغير ذلك».

فأوجد:

a فضاء العينة S وعدد عناصر فضاء العينة $n(S)$.

b مدى المتغير العشوائي X.

c احتمال وقوع كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X.

d دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

لاحظ في مثال (2) أن: $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$

مثال (3)

عند إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية، إذا كان المتغير العشوائي X يعبّر عن «عدد الكتابات».

فأوجد ما يلي:

a فضاء العينة (S) وعدد عناصره $n(S)$.

b مدى المتغير العشوائي X.

c احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X.

d دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

الحل:

a فضاء العينة:

$$S = \{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H),(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$$

$$n(S) = 8$$

b

عناصر فضاء العينة S	عدد الكتابات في كل عنصر
(H,H,H)	0
(H,H,T)	1
(H,T,H)	1
(T,H,H)	1
(H,T,T)	2
(T,H,T)	2
(T,T,H)	2
(T,T,T)	3

∴ مدى المتغيّر العشوائي: $X = \{0 , 1 , 2 , 3\}$

c

$$P(X=0) = \frac{1}{8}$$

$$P(X=1) = \frac{3}{8}$$

$$P(X=2) = \frac{3}{8}$$

$$P(X=3) = \frac{1}{8}$$

d دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X:

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

تذكر:

في تجربة عشوائية، عند رمي قطعة نقود m من المرّات فإن عدد عناصر فضاء العينة $n(S) = 2^m$

معلومة:

كانت الروبية الهندية العملة المتداولة في دولة الكويت وذلك لفترة تزيد عن مئة وعشرين عامًا، وفي 17 مايو 1961 انتهى تعامل دولة الكويت بهذه العملة بناءً على قاعدة التسوية مع المصرف المركزي الهندي التالية:
1 000 روبية = 75 دينارًا كويتيًا.
أي 1 روبية = 75 فلسًا أو 13.33 روبية تعادل دينارًا واحدًا.

حاول أن تحل

3 عند إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية، إذا كان المتغير العشوائي X يعبر عن «عدد الصور»، فأوجد ما يلي:

a فضاء العينة (S) وعدد عناصره $n(S)$.

b مدى المتغير العشوائي X.

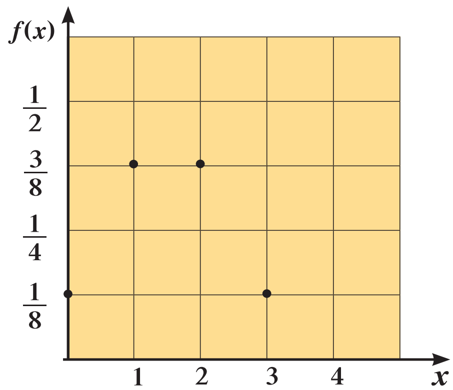
c احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X.

d دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

لاحظ في مثال (3) أن: $P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$

بيان دالة التوزيع الاحتمالي Graph of Probability Distribution Function

دالة التوزيع الاحتمالي هي مجموعة نقاط المستوى التي تمثل الأزواج المرتبة $(x_i, f(x_i))$ وبالتالي فإن بيان دالة التوزيع الاحتمالي عبارة عن نقاط يمكن تمثيلها في المستوى الإحداثي، والشكل التالي يبيّن تمثيل الدالة في مثال 3.



ملاحظة هامة:

دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X تحقق الشرطين:

1 $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$

2 $f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\ldots=1$

مجموع قيم دالة التوزيع الاحتمالي f تساوي الواحد الصحيح.

مثال (4)

إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي:

x	-2	1	2	3
$f(x)$	0.3	0.1	k	0.2

فأوجد قيمة k.

الحل:

$\because$ مجموع قيم دالة التوزيع الاحتمالي f تساوي الواحد الصحيح

$\therefore \quad f(-2)+f(1)+f(2)+f(3)=1$

$0.3+0.1+k+0.2=1$

$k=1-0.6$

$k=0.4$

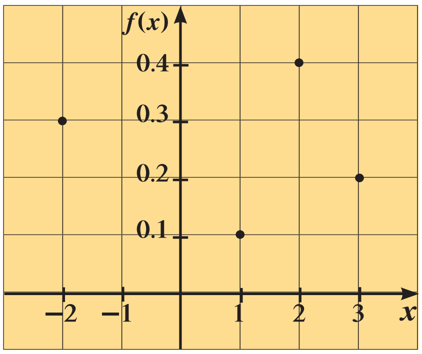
حاول أن تحل

4 إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.35	0.15	0.1	0.2	k

فأوجد قيمة k.

الشكل التالي يمثّل دالة التوزيع الاحتمالي في مثال **4**.



لاحظ أن قيم المتغير العشوائي X يمكن أن تكون سالبة.

مثال (5)

إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه هو: $\{-2,-1,0,1\}$

وكان $f(1)=0.2 \quad , \quad f(-2)=f(-1)=0.3$

أوجد $f(0)$، ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

الحل:

$\because \quad f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)=1$

$\therefore \quad 0.3+0.3+f(0)+0.2=1$

$f(0)=1-0.8$

$=0.2$

∴ دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	0.3	0.3	0.2	0.2

حاول أن تحل

5 إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه هو: $\{0, 1, 2, 3\}$

وكان: $f(0) = 0.1 \ , \ f(1) = 0.6 \ , \ f(2) = 0.15$

فأوجد $f(3)$، ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

تذكر:

إذا كان

$n, r \in \mathbb{Z}^+ , n \geqslant r$

1 $_nP_r = n(n-1)(n-2)...$
$...(n-r+1)$

$_nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

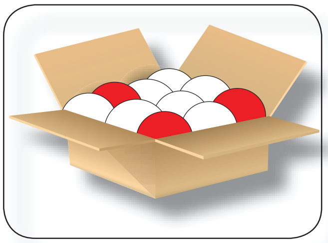
2 $_nC_r = \dfrac{_nP_r}{r!}$

$_nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

مثال (6)

صندوق يحتوي على 10 كرات متماثلة منها 7 كرات بيضاء و 3 كرات حمراء. سحبت أربع كرات عشوائيًّا معًا من الصندوق. إذا كان المتغير العشوائي X يمثّل عدد الكرات الحمراء.

فأوجد ما يلي:



a عدد عناصر فضاء العينة $n(S)$.

b مدى المتغير العشوائي X.

c احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X.

d دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

الحل:

a عدد عناصر فضاء العينة (S): $n(S) = {}_{10}C_4 = 210$

b عدد الكرات الحمراء التي يمكن سحبها كالتالي:

لدينا 4 حالات:

- أن تكون كل الكرات المسحوبة بيضاء.

∴ عدد الكرات الحمراء المسحوبة = صفر $\longleftarrow$ $X = 0$

- أن تكون الكرات المسحوبة منها 3 كرات بيضاء وواحدة حمراء $\longleftarrow$ $X = 1$
- أن تكون الكرات المسحوبة منها 2 كرة بيضاء و 2 كرة حمراء $\longleftarrow$ $X = 2$
- أن تكون الكرات المسحوبة منها 1 كرة بيضاء و 3 كرات حمراء $\longleftarrow$ $X = 3$

∴ مدى المتغير العشوائي X هو: $\{0, 1, 2, 3\}$

c

$$P(X=0) = \frac{_7C_4 \times {}_3C_0}{_{10}C_4} = \frac{35}{210}$$

$$P(X=1) = \frac{_7C_3 \times {}_3C_1}{_{10}C_4} = \frac{105}{210}$$

$$P(X=2) = \frac{_7C_2 \times {}_3C_2}{_{10}C_4} = \frac{63}{210}$$

$$P(X=3) = \frac{_7C_1 \times {}_3C_3}{_{10}C_4} = \frac{7}{210}$$

d دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X:

x	0	1	2	3	المجموع
$f(x)$	$\frac{35}{210}$	$\frac{105}{210}$	$\frac{63}{210}$	$\frac{7}{210}$	1

حاول أن تحل

6 صندوق يحتوي على 10 كرات متماثلة منها 7 كرات بيضاء و3 كرات حمراء. سحبت عشوائيًّا 3 كرات معًا من الصندوق.

إذا كان المتغير العشوائي X يمثل عدد الكرات البيضاء،

فأوجد ما يلي:

a عدد عناصر فضاء العينة (S).

b مدى المتغير العشوائي X.

c احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X.

d دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

التوقع (الوسط) والتباين للمتغيرات العشوائية المتقطعة

Expectation and Variance for Discrete Random Variables

التوقع (الوسط) للمتغير العشوائي المتقطع X هو أحد مقاييس النزعة المركزية ويرمز له بالرمز μ.

وهو القيمة التي تتجمع حولها القيم الممكنة للمتغير العشوائي المتقطع، و**التباين** (σ^2) هو القيمة التي تقيس تشتت قيم المتغير العشوائي المتقطع عن قيمته المتوسطة، وبالتالي فإن التوقع والتباين يلخصان أهم صفات المتغيرات العشوائية وسوف ندرس كلًّا من التوقع والتباين لكل من المتغيرات العشوائية المتقطعة.

أولًا: التوقع (الوسط) للمتغير العشوائي المتقطع Expectation for Discrete Random Variable

تعريف:

إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا له دالة التوزيع الاحتمالي f،

مدى X: $X(S) = \{x_1 \ , \ x_2 \ , \ x_3 \ ,....\}$

فإن التوقع (μ) للمتغير العشوائي X يعطى بالصيغة التالية:

$$\mu = \Sigma\, x_i\, f(x_i)$$

أي أن:

$$\mu = x_1\, f(x_1) + x_2\, f(x_2) + x_3\, f(x_3) + ...$$

مثال (7)

إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X هي:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{1}{35}$

فأوجد التوقع μ للمتغير العشوائي X.

الحل:

$$\mu = \Sigma x_i f(x_i)$$

$$= 1 \times \frac{3}{7} + 2 \times \frac{2}{7} + 3 \times \frac{6}{35} + 4 \times \frac{3}{35} + 5 \times \frac{1}{35}$$

$$= 2$$

حاول أن تحل

7 إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X هي:

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

فأوجد التوقع μ للمتغير العشوائي X.

التباين للمتغير العشوائي المتقطع Variance for Discrete Random Variable

تعريف:

إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا له دالة التوزيع الاحتمالي f فإن التباين للمتغير العشوائي يعطى بالصيغة:

التباين: $\sigma^2 = \Sigma\left(x_i^2\ f(x_i)\right) - \mu^2$ حيث μ هو التوقع

الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ (الجذر التربيعي الموجب للتباين)

مثال (8)

يبيّن الجدول التالي دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	0.43	0.29	0.17	0.09	0.02

فأوجد:

a التوقع (μ).

b التباين (σ^2).

c الانحراف المعياري (σ).

الحل:

a التوقع (μ):

$$\mu = \sum x_i\, f(x_i)$$
$$= 1 \times 0.43 + 2 \times 0.29 + 3 \times 0.17 + 4 \times 0.09 + 5 \times 0.02$$
$$= 1.98$$

b التباين (σ^2):

$$\sigma^2 = \sum x_i^2\, f(x_i) - \mu^2$$
$$= 1 \times 0.43 + 4 \times 0.29 + 9 \times 0.17 + 16 \times 0.09 + 25 \times 0.02 - (1.98)^2 = 5.06 - 3.92$$
$$= 1.1396$$

c الانحراف المعياري:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$
$$= \sqrt{1.1396}$$
$$\approx 1.0675$$

حاول أن تحل

8 يبيّن الجدول التالي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي متقطع X.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	0.2	0.1	0.3	0.1	0.3

فأوجد:

a التوقع (μ).

b التباين (σ^2).

c الانحراف المعياري (σ).

دالة التوزيع التراكمي لمتغير عشوائي متقطع

Cumulative Distribution Function for a Discrete Random Variable

درسنا بالتفصيل دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X .
وبيّنا أن دالة التوزيع الاحتمالي f تحقق الشرطين:

1. $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$
2. $\Sigma f(x_i) = 1$

ونتعرض الآن لدالة أخرى للمتغير العشوائي المتقطع X وهي دالة التوزيع التراكمي.

تعريف:

دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع عند القيمة a هي احتمال وقوع المتغير العشوائي X بحيث يكون X أصغر من أو يساوي a

أي أن: $F(a) = P(X \leqslant a)$

لاحظ أن مجال دالة التوزيع التراكمي F هو $\mathbb{R}$ وأن المجال المقابل يساوي المدى $[0,1]$

مثال (9)

الجدول التالي يبيّن دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X .

x	3	4	5
$f(x)$	0.5	0.3	0.2

إذا كانت F دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X .

فأوجد: $F(2)$, $F(3)$, $F(4)$, $F(4.5)$, $F(5)$, $F(7)$

الحل:

$$F(2) = P(X \leqslant 2) = 0$$

$$F(3) = P(X \leqslant 3) = P(X < 3) + P(X = 3)$$
$$= 0 + 0.5$$
$$= 0.5$$

$$F(4) = P(X \leqslant 4)$$
$$= P(X < 4) + P(X = 4)$$
$$= P(3) + P(4)$$
$$= 0.5 + 0.3$$
$$= 0.8$$

تذكر:
نرمز لدالة التوزيع الاحتمالي بالرمز f.
ونرمز لدالة التوزيع التراكمي بالرمز F.

$$F(4.5) = P(X \leqslant 4.5)$$
$$= P(X < 4.5) + P(X = 4.5)$$
$$= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 4.5)$$
$$= 0.5 + 0.3 + 0$$
$$= 0.8$$

$$F(5) = P(X \leqslant 5)$$
$$= P(X < 5) + P(X = 5)$$
$$= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$
$$= 0.5 + 0.3 + 0.2$$
$$= 1$$

$$F(7) = P(X \leqslant 7)$$
$$= P(X < 7) + P(X = 7)$$
$$= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 7)$$
$$= 0.5 + 0.3 + 0.2 + 0$$
$$= 1$$

حاول أن تحل

9 الجدول التالي يبيّن دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	0.43	0.29	0.17	0.09	0.02

إذا كانت F دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X.

فأوجد: $F(0)$, $F(1)$, $F(3.5)$, $F(4)$, $F(5)$, $F(8)$

بعض خواص دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X:

1. $P(X > a) = 1 - P(X \leqslant a) = 1 - F(a)$
2. $P(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a)$

مثال (10)

الجدول التالي يبيّن بعض قيم دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع X.

x	1	2	3	5
$F(x)$	0.15	0.2	0.6	1

أوجد:

a $P(1 < X \leqslant 3)$

b $P(2 < X \leqslant 5)$

c $P(X > 2)$

الحل:

a $P(1 < X \leq 3) = F(3) - F(1)$

$= 0.6 - 0.15$

$= 0.45$

b $P(2 < X \leqslant 5) = F(5) - F(2)$

$= 1 - 0.2$

$= 0.8$

c $P(X > 2) = 1 - P(X \leqslant 2)$

$= 1 - F(2)$

$= 1 - 0.2$

$= 0.8$

حاول أن تحل

10 يبيّن الجدول التالي بعض قيم دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع X.

x	1	2	3	4
$F(x)$	0.25	0.40	0.65	1

أوجد:

a $P(2 < X \leqslant 4)$

b $P(X > 3)$

توزيع ذات الحدين Binomial Distribution

نعلم من خلال دراستنا أن بعض التجارب العشوائية يكون لها ناتجان أو عدة نواتج يمكن اختزالها إلى ناتجين فقط أي أن فضاء العينة يصبح محتويًا على عنصرين فمثلًا:

- عند إلقاء قطعة نقود مرة واحدة يكون الناتج إما صورة أو كتابة.
- عند تأدية الطالب اختبارًا في مادة ما تكون النتيجة إما نجاح أو رسوب.
- عند دخول شخص اختبار الحصول على رخصة القيادة تكون النتيجة نجاح أو رسوب.

وهكذا فإننا قيد دراسة التجارب التي يكون لها ناتجان فقط وهي ما يسمى **بتجربة ذات الحدين**.

والتي تتبع دالة التوزيع الاحتمالي المتقطع.

تعريف: تجربة ذات الحدين

تجربة ذات الحدين هي تجربة عشوائية تحقق الشروط التالية:

1 تتكوّن التجربة من عدد n من المحاولات المستقلة والمتماثلة.

(المحاولات المستقلة تعني أن نتيجة كل محاولة لا تؤثر ولا تتأثر بنتائج المحاولات الأخرى).

2 كل محاولة يكون لها ناتجان فقط مثل (نجاح أو فشل).

3 احتمال الحصول على أحد الناتجين يكون ثابتًا من تجربة إلى أخرى. وسوف نرمز لهذا الاحتمال بالرمز P.

وتسمى كل محاولة من محاولات التجربة بمحاولة برنولي Bernoulli.

فمثلًا إذا أجريت تجربة برنولي عدد n من المرات وكان احتمال النجاح في المحاولة الواحدة P وكان X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد مرات النجاح في كل المحاولات فإن احتمال النجاح في x من المحاولات يعطى بالعلاقة التالية:

$$P(X=x)=f(x)={}_nC_x \cdot P^x \cdot (1-P)^{n-x} \quad , \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

حيث n عدد المحاولات

مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي $X = \{0,1,2,\dots,n\}$

x عدد مرات النجاح في n من المحاولات

P احتمال النجاح

$(1-P)$ احتمال الفشل

يسمى توزيع المتغير العشوائي X بتوزيع ذي الحدين للمعلمتين n , P.

مثال (11)

إذا كان X متغيرًا عشوائيًا ذو حدين ومعلمتيه هما: $n = 7$ ، $P = 0.1$. فأوجد:

a $P(X = 0)$

b $P(1 < X \leqslant 3)$

الحل:

a $\because \; P(X = x) = f(x) = {}_nC_x \, P^x (1 - P)^{n-x}$

$\because \; n = 7 \;,\; P = 0.1$

$\therefore \; P(X = 0) = f(0) = {}_7C_0 \times (0.1)^0 \times (0.9)^7$

$P(X = 0) \approx 0.4783$

حل آخر:

$P(X = 0) = f(0)$

$\because \; n = 7 \;,\; P = 0.1 \;,\; X = 0$

نبحث في جدول الاحتمالات في توزيع ذات الحدين صفحة (172) عن قيمة $f(0)$ (لأنها دالة توزيع احتمالي متقطع) فنجد أن:

$f(0) = 0.478$

الاحتمالات في توزيع ذات الحدين: $f(x)$

		P										
n	x	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
2	0	0.902	0.810	0.640	0.490	0.360	0.250	0.160	0.090	0.040	0.010	0.002
	1	0.095	0.180	0.320	0.420	0.480	0.500	0.480	0.420	0.320	0.180	0.095
	2	0.002	0.010	0.040	0.090	0.160	0.250	0.360	0.0490	0.0640	0.0810	0.0902
7	0	0.698	0.478	0.210	0.082	0.028	0.008	0.002				
	1	0.257	0.372	0.367	0.247	0.131	0.055	0.017	0.004			
	2	0.041	0.124	0.275	0.318	0.261	0.164	0.077	0.025			
	3	0.004	0.023	0.115	0.227	0.290	0.273	0.194	0.097	0.004		
	4		0.003	0.029	0.097	0.194	0.273	0.290	0.227	0.029	0.003	
	5			0.004	0.025	0.077	0.164	0.261	0.318	0.115	0.023	0.004
	6				0.004	0.017	0.055	0.131	0.247	0.275	0.124	0.041
	7					0.002	0.008	0.028	0.082	0.367	0.372	0.257
										0.210	0.478	0.698

b $P(1 < X \leqslant 3) = P(X = 2) + P(X = 3)$

$= f(2) + f(3)$

$f(2) = {}_7C_2 \times (0.1)^2 \times (0.9)^5 \Longrightarrow f(2) \approx 0.1240$

$f(3) = {}_7C_3 \times (0.1)^3 \times (0.9)^4 \Longrightarrow f(3) \approx 0.0230$

$P(1 < X \leqslant 3) \approx 0.1240 + 0.0230 \Longrightarrow P(1 < X \leqslant 3) \approx 0.1470$

حل آخر:

$P(1 < X \leqslant 3) = P(X = 2) + P(X = 3)$

$= f(2) + f(3)$

$\because\ n = 7\ ,\ P = 0.1$

نبحث في الجدول نفسه

عندما: $x = 2 \longrightarrow f(2) = 0.1240$

عندما: $x = 3 \longrightarrow f(3) = 0.0230$

$\therefore\ P(X \leqslant 3) = f(2) + f(3)$

$= 0.1240 + 0.0230 = 0.1470$

حاول أن تحل

11 إذا كان X متغيرًا عشوائيًا ذو حدين ومعلمتيه هما:

$P = 0.6$ ، $n = 6$ فأوجد:

a $P(X = 1)$

b $P(2 < X \leqslant 4)$

التوقع والتباين لتوزيع ذات الحدين Expectation and Variance for Binomial Distribution

درسنا كيفية إيجاد التوقع والتباين للمتغير العشوائي المتقطع والآن نتعرّض لإيجاد التوقع والتباين لتوزيع ذات الحدين.

التوقع: $\mu = nP$

التباين: $\sigma^2 = nP(1 - P)$

الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{nP(1 - P)}$

157

مثال (12)

ينتج مصنع سيارات 200 سيارة يوميًّا، إذا كانت نسبة إنتاج السيارات المعيبة 0.01 فأوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري لعدد السيارات المعيبة في يوم واحد.

الحل:

عدد السيارات المصنعة في اليوم الواحد $n = 200$

نسبة إنتاج السيارات المعيبة في اليوم الواحد $P = 0.01$

التوقع: $\mu = nP = 200(0.01) = 2$

التباين: $\sigma^2 = nP(1-P) = 200(0.01)(0.99) = 1.98$

الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{1.98}$

≈ 1.4071

حاول أن تحل

12 ينتج مصنع سيارات 350 سيارة يوميًّا، إذا كانت نسبة إنتاج السيارات المعيبة 0.02 فأوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري لعدد السيارات المعيبة في يوم واحد.

مثال (13)

في تجربة إلقاء قطعة نقود 5 مرات. أوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري إذا كان المتغير العشوائي X هو ظهور صورة.

الحل:

ظهور الصورة: X , $n = 5$

P هو احتمال ظهور صورة

$P = \frac{1}{2}$, $1 - P = \frac{1}{2}$

التوقع: $\mu = nP$

$= 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$

التباين: $\sigma^2 = nP(1-P)$

$= 5 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{5}{4}$

$= 1.25$

الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{nP(1-P)} = \sqrt{1.25}$

≈ 1.1180

حاول أن تحل

13 في تجربة إلقاء قطعة نقود 8 مرات. أوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري إذا كان المتغير العشوائي X هو ظهور كتابة.

158

المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة)

Continuous Random Variables

سوف تتعلم

- المتغيّر العشوائي المتصل.
- التوزيع الاحتمالي المتصل.
- التوزيع الاحتمالي المنتظم.
- التوزيع الاحتمالي الطبيعي.

المفردات والمصطلحات:

- متغيّر عشوائي متصل Continuous Random Variable
- توزيع احتمالي متصل Continuous Probability Distribution
- توزيع احتمالي منتظم Regular Probability Distribution
- توزيع احتمالي طبيعي Natural Probability Distribution

دعنا نفكر ونتناقش

a حدّد المتغير العشوائي المتقطع والمتغير العشوائي غير المتقطع فيما يلي:

1. عدد الأهداف في مباريات كرة القدم.
2. عدد الأولاد والبنات في الأسرة.
3. أطوال مجموعة من طلاب المرحلة الثانوية.
4. الحرارة القصوى في منطقة معينة.

b ما الفرق بين المدى للمتغير العشوائي المتقطع والغير المتقطع؟

من فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» تبيّن لنا أن مدى المتغير العشوائي المتقطع (المنفصل) X هو مجموعة قيم متقطعة قابلة للعد.

أما المدى للمتغير العشوائي غير المتقطع فهو مجموعة قيم غير قابلة للعد ويسمى هذا النوع من المتغير العشوائي بـ «**المتغير العشوائي المتصل**».

تعريف: المتغير العشوائي المتصل **Continuous Random Variable**

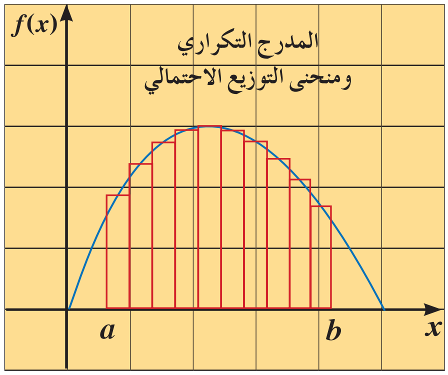
هو المتغير التي تكون مجموعة القيم الممكنة له عبارة عن فترة من الأعداد الحقيقية أي أن مدى المتغير العشوائي المتصل $X = \{x : a \leqslant x \leqslant b\}$ وهي مجموعة غير قابلة للعد.

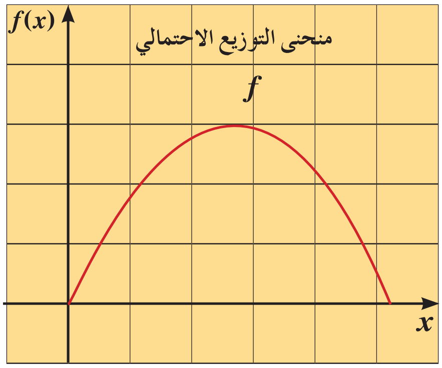
أمثلة عن المتغيرات العشوائية المتصلة:

- كتلة مجموعة طلاب بالكيلوجرام أعمارهم من (15−20) سنة.
- درجة حرارة جسم الإنسان خلال يوم كامل.
- المسافة المقطوعة لسيارة خلال وحدة الزمن.
- كمية الحليب التي تنتجها البقرة في اليوم باللتر.

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتصل (المستمر) Probability Distribution for a Continuous Random Variable

يمكن تمثيل بيانات المتغير العشوائي الكمي المستمر على شكل مدرج تكراري نسبي. فنجد أن شكل هذا المدرج هو أقرب وصف لمنحنى التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتصل. وكلما صغر طول الفئة حصلنا على رسم أدق للمنحنى الخاص بدالة احتمال المتغير المستمر كما في الشكل التالي:





والمساحة تحت منحنى التوزيع الاحتمالي هي عبارة عن مجموع الاحتمالات الكلية للمتغير العشوائي المتصل X، ولذلك فإن هذه المساحة **تساوي الواحد الصحيح**.

نسمي الدالة $f(x)$ **بدالة كثافة الاحتمال** للمتغير العشوائي المتصل (المستمر).

خواص دالة كثافة الاحتمال $f(x)$

1. $f(x)$ هي دالة متصلة على مجالها.
2. $f(x) \geqslant 0$ لكل قيم x التي تنتمي لمجال الدالة.
3. قيمة المساحة المحددة بمنحنى الدالة $f(x)$ ومحور السينات تساوي الواحد الصحيح.
4. يمكن إيجاد الاحتمال $P(a \leq X \leq b)$ بحساب المساحة تحت المنحنى f بين القيمة a, b من الشكل السابق.
5. تنعدم المساحة المظللة في الشكل السابق إذا كان $a = b$
أي أنه لأي متغير عشوائي متصل فإن: $P(X = a) = 0$

مثال (1)

إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & : 1 \leqslant x \leqslant 5 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

a) $P(1 < X \leqslant 5)$

b) $P(X < 3)$

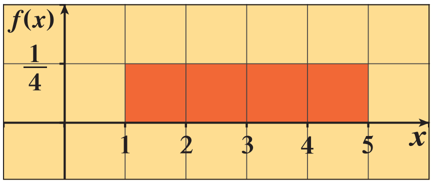
c) $P(X \geqslant 1.5)$

d) $P(X = 2)$

ملاحظة:
مساحة المنطقة تحت المنحنى لا تتأثر بنوع الفترة.

الحل:

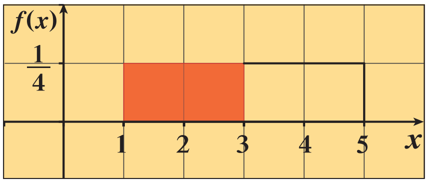
a نرسم بيان الدالة f



مساحة المنطقة المظللة (المنطقة المستطيلة): $P(1 < X \leqslant 5)$

$= (5-1) \times \frac{1}{4}$

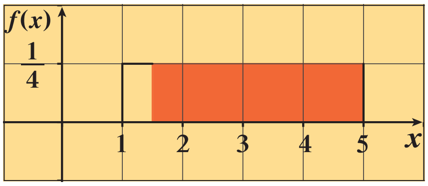
$= 4 \times \frac{1}{4} = 1$



b مساحة المنطقة المظللة: $P(X < 3)$

$= (3-1) \times \frac{1}{4}$

$= 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$



c مساحة المنطقة المظللة: $P(X \geqslant 1.5)$

$= (5-1.5) \times \frac{1}{4}$

$= \frac{7}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{8}$

d $P(X = 2) = 0$ (خاصية 5)

حاول أن تحل

1 إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متصلًا، فدالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & : -3 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

a $P(X < 2)$ b $P(-1 < X < 1)$ c $P(-1.5 < X < 2.5)$ d $P(X = 0)$

مثال (2)

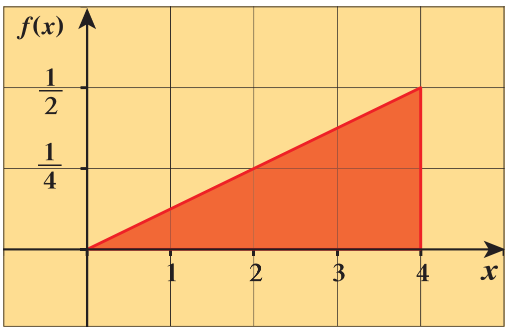
إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x & : 0 < x \leqslant 4 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

a $P(0 \leqslant X \leqslant 4)$ b $P(X \leqslant 2)$ c $P(X > 2)$

الحل:

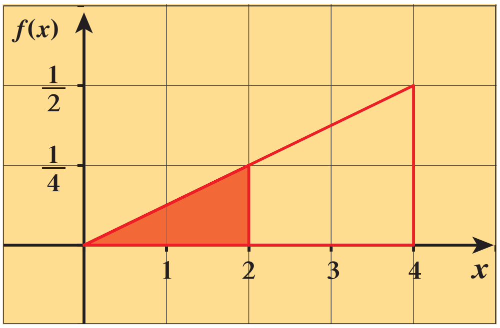


a مساحة المنطقة المظللة = $P(0 \leqslant X \leqslant 4)$

مساحة المنطقة المثلثية: $\frac{1}{2} \times 4 \times \frac{1}{2} = 1$

b مساحة المنطقة المظللة = $P(X \leqslant 2)$

مساحة المنطقة المثلثية: $\frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$



c مساحة المنطقة غير المظللة من المثلث: $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2)$

$$= 1 - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3}{4}$$

حاول أن تحل

2 إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متصلًا، ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & : 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

a $P(X < 1)$

b $P(X \geqslant 1)$

c $P(X = 1)$

التوزيع الاحتمالي المنتظم لمتغير عشوائي متصل (مستمر)

Regular Probability Distribution for a Random Continuous Variable

تعريف:

دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الاحتمالي المنتظم على $[a , b]$ هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & : a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

— التوقع (الوسط) للتوزيع الاحتمالي المنتظم هو:

$$\mu = \frac{a+b}{2}$$

— التباين للتوزيع الاحتمالي المنتظم هو:

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

مثال (3)

لتكن الدالة f:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & : 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

a أثبت أن الدالة هي دالة كثافة احتمال.

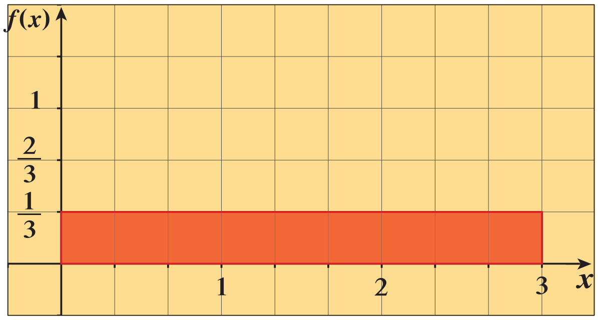
b أثبت أن الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم.

c أوجد $P(1 < X \leqslant 3)$

d أوجد التوقع والتباين للدالة f.

الحل:

a لإثبات أن الدالة f هي دالة كثافة احتمال يجب إثبات أن المساحة تحت المنحنى تساوي 1:



المساحة تحت المنحنى من الشكل هي

مساحة المنطقة المستطيلة = الطول × العرض

$$= 3 \times \frac{1}{3} = 1$$

$\therefore$ الدالة f هي دالة كثافة احتمال.

b لإثبات أن الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم يجب أن تكون الدالة على الصورة:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & : a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$\because \ a = 0 \ , \ b = 3 \Longrightarrow b - a = 3 - 0 = 3$$

$$\therefore \ \frac{1}{b-a} = \frac{1}{3}$$

وبالتالي:

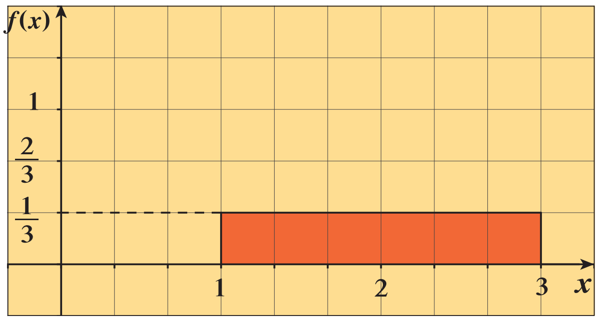
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} & : 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

أي أن f هي دالة تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم.

c مساحة المنطقة المظللة:

$$P(1 \leqslant X \leqslant 3)$$

$$= 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$



d التوقع:

$$\mu = \frac{a+b}{2} = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}$$

التباين:

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

حاول أن تحل

3 لتكن الدالة f:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & : 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

a أثبت أن الدالة f هي دالة كثافة احتمال.

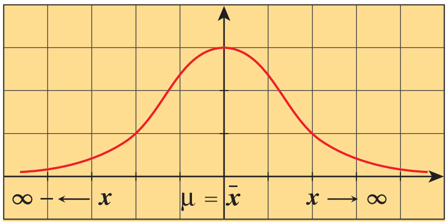
b أثبت أن الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم.

c أوجد: $P(2 < X \leqslant 3)$

d أوجد التوقع والتباين للدالة f .

Natural Probability Distribution $N(\mu , \sigma^2)$ — التوزيع الاحتمالي الطبيعي $N(\mu , \sigma^2)$

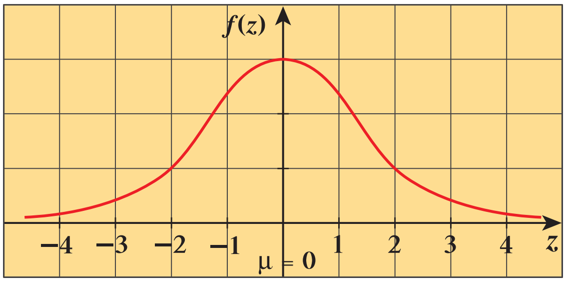
يعتبر التوزيع الاحتمالي الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة وقد سبق أن درسنا منحنى التوزيع الطبيعي وخواصه والتي منها:



منحنى التوزيع الطبيعي $N(\mu , \sigma^2)$

- المتوسط الحسابي = الوسيط = المنوال.
- يكون بيان المنحنى على شكل ناقوس (جرس) متماثل حول محوره $(x = \mu)$.
- يمتد المنحنى من طرفيه إلى $-\infty$ وإلى ∞ (لا يقطع محور السينات).
- المساحة تحت المنحنى تساوي الواحد الصحيح (وحدة مساحة).
- المستقيم الرأسي $\mu = \bar{x}$ يقسم المساحة تحت المنحنى إلى قطعتين متماثلتين مساحة كل منهما تساوي نصف (نصف وحدة مساحة).

التوزيع الطبيعي المعياري $N(0 , 1)$



منحنى التوزيع الطبيعي $N(0 , 1)$

إذا كان المتوسط الحسابي للتوزيع الطبيعي $\mu = 0$ والانحراف المعياري $\sigma = 1$ يسمى التوزيع الطبيعي **بالتوزيع الطبيعي المعياري.**

الشكل المرسوم يمثل بيان منحنى التوزيع الطبيعي المعياري.

نعلم أن منحنى التوزيع الطبيعي يتحدد بكل من التوقع μ والتباين لها σ^2 ونظرًا لاختلاف قيم σ^2، μ من توزيع لآخر فإننا نقوم بتحويل أي توزيع طبيعي إلى توزيع طبيعي معياري وفق التحويل $z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$

وتمّ وضع جداول التوزيع الطبيعي المعياري في نهاية الوحدة للتوزيع الطبيعي $N(\mu , \sigma^2)$.

حساب الاحتمالات للتوزيع الطبيعي $N(\mu , \sigma^2)$

إذا كان للمتغير العشوائي X التوزيع الطبيعي $N(\mu , \sigma^2)$ أي التوزيع الذي توقعه μ وتباينه σ^2 وأردنا حساب احتمالات تتعلق بالمتغير X فإننا نستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري المرفق آخر الوحدة باتباع الخطوات الموضحة التالية لإيجاد $P(a \leq X \leq b)$:

1. نوجد القيمة المعيارية المناظرة للقيمة a بالتعويض في العلاقة: $z_1 = \dfrac{a - \mu}{\sigma}$

   والقيمة المعيارية المناظرة للقيمة b بالتعويض في العلاقة: $z_2 = \dfrac{b - \mu}{\sigma}$
2. نستخدم العلاقة: $P(a < X \leqslant b) = P(z_1 < z < z_2)$
3. نستخدم أحد جدولي المساحة تحت المنحنى الطبيعي (5), (4) لحساب الطرف الأيسر من العلاقة السابقة.

حساب الاحتمالات للتوزيع الطبيعي المعياري $P(z)$

- إذا كانت $z \geqslant a$ أو $z \leqslant a$، حيث $a \geqslant 0$ نستخدم جدول z رقم (4).
- إذا كانت $z \geqslant a$ أو $z \leqslant a$، حيث $a < 0$ نستخدم جدول z رقم (5).

مثال (4)

إذا كان z هو التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X فأوجد:

a $P(z \leqslant 2.18)$ b $P(z \geqslant 2.43)$ c $P(1.4 \leqslant z \leqslant 2.6)$

الحل:

a $P(z \leqslant 2.18)$

لاحظ أن: $2.18 \geqslant 0$

نستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري z رقم (4) صفحة (177) الموجود في نهاية الوحدة.

$P(z \leqslant 2.18) = 0.98537$

b $P(z \geqslant 2.43) = 1 - P(z \leqslant 2.43)$

$= 1 - 0.99245$

$= 0.00755$

c $P(1.4 \leqslant z \leqslant 2.6)$

$= P(z \leqslant 2.6) - P(z \leqslant 1.4)$

$= 0.99534 - 0.91924$

$= 0.0761$

حاول أن تحل

4 إذا كان z هو التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X فأوجد:

a $P(z \leq 0.95)$ b $P(z > 0.71)$ c $P(1.45 \leqslant z \leqslant 3.26)$

مثال (5)

إذا كان z هو التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X فأوجد:

a $P(z \leqslant -0.55)$ b $P(-2.2 \leqslant z \leqslant -1.6)$ c $P(-1.3 \leqslant z \leqslant 0.28)$

الحل:

a $P(z \leqslant -0.55)$

لاحظ أن: $-0.55 \leqslant 0$

نستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري z رقم (5) صفحة (178).

$P(z \leqslant -0.55) = 0.29116$

b $P(-2.2 \leqslant z \leqslant -1.6) = P(z \leqslant -1.6) - P(z \leqslant -2.2)$

$= 0.0548 - 0.01390$

$= 0.0409$

c $P(-1.3 \leqslant z \leqslant 0.28) = P(z \leqslant 0.28) - P(z \leqslant -1.3)$

لاحظ أن: $0.28 \geqslant 0$ لذا نستخدم جدول رقم (4)

وأن $-1.3 \leqslant 0$ لذا نستخدم جدول رقم (5)

$$P(z \leqslant 0.28) = 0.61026$$
$$P(z \leqslant -1.3) = 0.09680$$
$$P(-1.3 \leqslant z \leqslant 0.28) = 0.61026 - 0.09680$$
$$= 0.51346$$

حاول أن تحل

5 إذا كان z هو التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X فأوجد:

a $P(z \leq -0.12)$

b $P(-3.2 \leq z \leq -0.1)$

c $P(-5.26 \leq z \leq 0.69)$

المرشد لحل المسائل

يتبع الراتب السنوي لموظفي شركة كبيرة التوزيع الطبيعي $N(50\,000\ ,\ 400\,000\,000)$

a أوجد التوقع والتباين.

b ما النسبة المئوية للموظفين الذين رواتبهم أقلّ من 40 000 دينار كويتي؟

c ما النسبة المئوية للموظفين الذين رواتبهم بين 45 000 وَ 65 000 دينار كويتي؟

d ما النسبة المئوية للموظفين الذين رواتبهم أكثر من 70 000 دينار كويتي؟

الحل:

a التوزيع الطبيعي: $N(50\,000\ ,\ 400\,000\,000)$

توقعه: $\mu = 50\,000$

تباينه: $\sigma^2 = 400\,000\,000$

b $P(x < 40\,000) = P\left(z < \dfrac{40\,000 - 50\,000}{\sqrt{400\,000\,000}}\right) = P\left(z < -\dfrac{1}{2}\right)$

باستخدام الجدول (5): $P\left(z < -\dfrac{1}{2}\right) = 0.30854$

$\therefore$ 30.85% من الموظفين راتبهم أقلّ من 40 000 دينار كويتي.

c $P(45\,000 < x < 65\,000) = P(-0.25 < z < 0.75)$

$= P(z < 0.75) - P(z < -0.25)$

$= 0.77335 - 0.40129$

$= 0.37206$

$\therefore$ 37.21% من الموظفين راتبهم بين 65 000 وَ 54 000 دينار كويتي.

d $P(x > 70\,000) = 1 - P(x \leq 70\,000)$

$= 1 - P(z < 1)$

$= 1 - 0.84134$

$= 0.15866$

$\therefore$ 15.87% من الموظفين راتبهم أكثر من 70 000 دينار كويتي.

مسألة إضافية

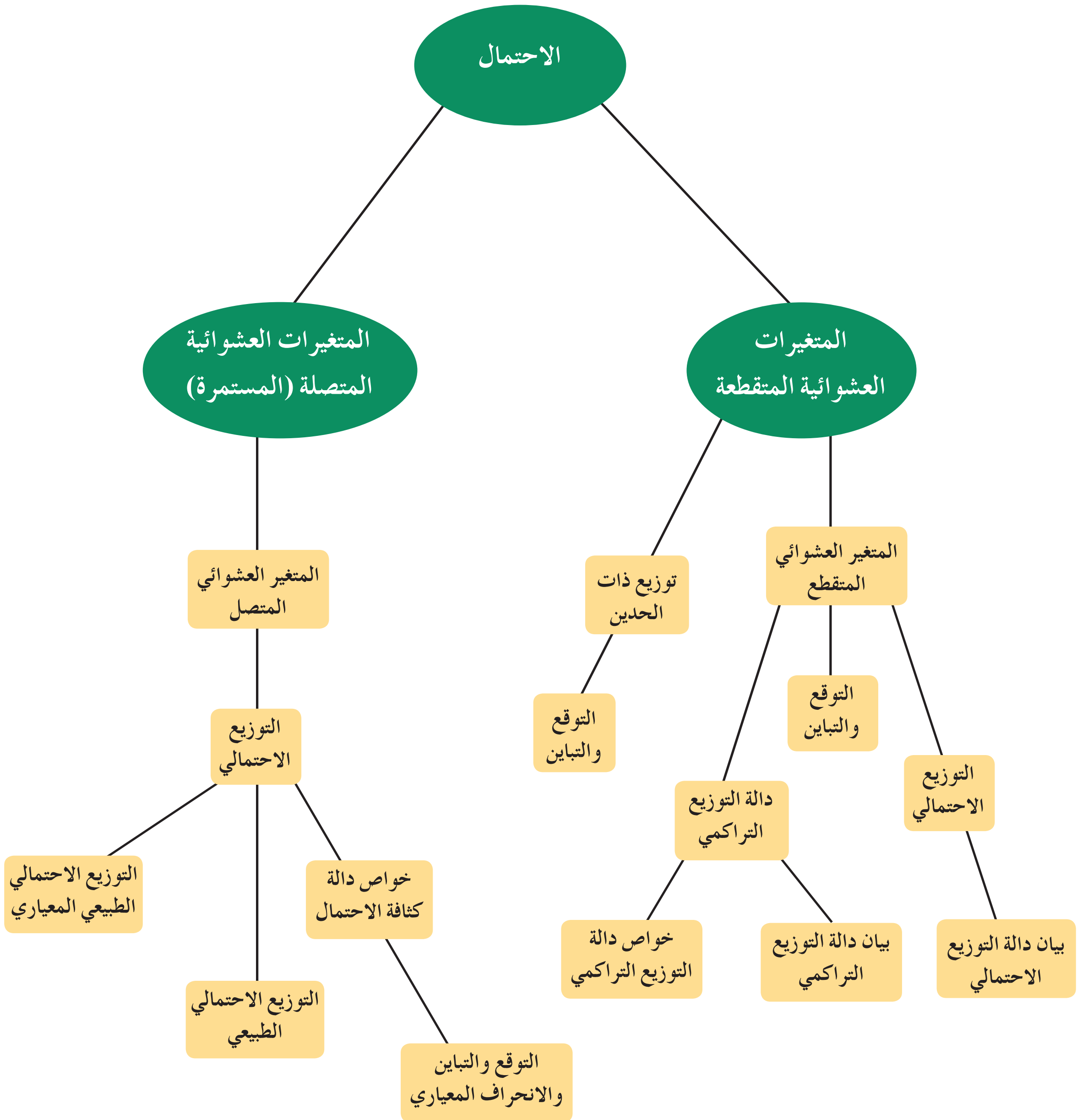
الوقت اللازم لتجميع مكونات سيارة في معمل يتبع التوزيع الطبيعي $N(20, 4)$

a أوجد التوقع والتباين.

b ما احتمال أن يتم تجميع السيارة بأقل من 19.5 ساعة؟

c ما احتمال أن يتم تجميع السيارة بوقت يتراوح بين 20 وَ 22 ساعة؟

مخطط تنظيمي للوحدة الثامنة



ملخص

المتغيّر العشوائي: هو دالة مجالها فضاء العينة S ومجالها المقابل هو $\mathbb{R}$ ومداها مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ حيث $X: S \to \mathbb{R}$
(X هو المتغير العشوائي، S فضاء العينة، $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية).

- يكون المتغير العشوائي X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا إذا كانت مجموعة القيم الممكنة له (المدى) $X(S)$: هي مجموعة متقطعة أي قابلة للعد، من الأعداد الحقيقية سواء أكانت منتهية أم غير منتهية.
- إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه $\{x_1 \; , \; x_2 \; , \; x_3 \; , \; ...\}$، فإن دالة التوزيع الاحتمالي f تعرّف كالتالي:
$f(x_i) = P(X = x_i), \;\; i = 1, 2, 3, 4, ...$
- دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X تحقق الشرطين:
  1. $0 \leq f(x) \leq 1$
  2. مجموع قيم دالة التوزيع الاحتمالي f تساوي الواحد الصحيح،
  أي أن: $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + ... = 1$
- إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا له دالة التوزيع الاحتمالي f،
مدى $X = \{x_1 \; , \; x_2 \; , \; x_3 \; , \; ...\}$
فإن التوقع للمتغير العشوائي X يكون:
التوقع: $\mu = \sum x_i \, f(x_i)$
أي أن: $\mu = x_1 \, f(x_1) + x_2 \, f(x_2) + x_3 \, f(x_3) + ...$
- إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا له دالة التوزيع الاحتمالي f ، فإن التباين للمتغير العشوائي يعطى بالصيغة:
التباين: $\sigma^2 = \sum x_i^2 \; f(x_i) - \mu^2$ حيث μ هو التوقع.
الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{\text{التباين}}$
- دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع عند القيمة a
هي احتمال وقوع المتغير العشوائي X بحيث يكون X أصغر من أو يساوي a. أي أن:

1. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
2. $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$
3. $P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$

• يمكن تحويل التوزيع الطبيعي إلى توزيع طبيعي معياري باستخدام:

1 القيمة المعيارية المناظرة للقيمة a: $z_1 = \frac{a - \mu}{\sigma}$

2 القيمة المعيارية المناظرة للقيمة b: $z_2 = \frac{b - \mu}{\sigma}$

- نستخدم الجدول (4) إذا كات a أو b قيمة موجبة.
- نستخدم الجدول (5) إذا كات a أو b قيمة سالبة.
- التوقع للتوزيع الاحتمالي المنتظم: $\mu = \frac{a + b}{2}$
- التباين للتوزيع الاحتمالي المنتظم: $\sigma^2 = \frac{(b - a)^2}{12}$

الاحتمالات في توزيع ذات الحدين: $f(x)$

						P						
n	***x***	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
2	0	0.902	0.810	0.640	0.490	0.360	0.250	0.160	0.090	0.040	0.010	0.002
	1	0.095	0.180	0.320	0.420	0.480	0.500	0.480	0.420	0.320	0.180	0.095
	2	0.002	0.010	0.040	0.090	0.160	0.250	0.360	0.0490	0.0640	0.0810	0.0902
3	0	0.857	0.729	0.512	0.343	0.216	0.125	0.064	0.027	0.008	0.001	
	1	0.135	0.243	0.384	0.441	0.432	0.375	0.288	0.189	0.096	0.027	0.007
	2	0.007	0.027	0.096	0.189	0.288	0.375	0.432	0.441	0.384	0.243	0.135
	3		0.001	0.008	0.027	0.064	0.125	0.216	0.343	0.512	0.729	0.857
4	0	0.815	0.656	0.410	0.240	0.130	0.062	0.026	0.008	0.002		
	1	0.171	0.292	0.410	0.412	0.346	0.250	0.154	0.076	0.026	0.004	
	2	0.014	0.049	0.154	0.265	0.346	0.375	0.346	0.265	0.154	0.049	0.014
	3		0.004	0.026	0.076	0.154	0.250	0.346	0.412	0.410	0.292	0.171
	4			0.002	0.008	0.026	0.062	0.130	0.240	0.410	0.656	0.815
5	0	0.774	0.590	0.328	0.168	0.078	0.031	0.010	0.002			
	1	0.204	0.328	0.410	0.360	0.259	0.156	0.077	0.028	0.006		
	2	0.021	0.073	0.205	0.309	0.346	0.312	0.230	0.132	0.051	0.008	0.001
	3	0.001	0.008	0.051	0.132	0.230	0.312	0.346	0.309	0.205	0.073	0.021
	4			0.006	0.028	0.077	0.156	0.259	0.360	0.410	0.328	0.204
	5				0.002	0.010	0.031	0.078	0.168	0.328	0.590	0.774
6	0	0.735	0.531	0.262	0.118	0.047	0.016	0.004	0.001			
	1	0.232	0.354	0.393	0.303	0.187	0.094	0.037	0.010	0.002		
	2	0.031	0.098	0.246	0.324	0.311	0.234	0.138	0.060	0.015	0.001	
	3	0.002	0.015	0.082	0.185	0.276	0.312	0.276	0.185	0.082	0.015	0.002
	4		0.001	0.015	0.060	0.138	0.234	0.311	0.324	0.246	0.098	0.031
	5			0.002	0.010	0.037	0.094	0.187	0.303	0.393	0.354	0.232
	6				0.001	0.004	0.016	0.047	0.118	0.262	0.531	0.735
7	0	0.698	0.478	0.210	0.082	0.028	0.008	0.002				
	1	0.257	0.372	0.367	0.247	0.131	0.055	0.017	0.004			
	2	0.041	0.124	0.275	0.318	0.261	0.164	0.077	0.025	0.004		
	3	0.004	0.023	0.115	0.227	0.290	0.273	0.194	0.097	0.029	0.003	
	4		0.003	0.029	0.097	0.194	0.273	0.290	0.227	0.115	0.023	0.004
	5			0.004	0.025	0.077	0.164	0.261	0.318	0.275	0.124	0.041
	6				0.004	0.017	0.055	0.131	0.247	0.367	0.372	0.257
	7					0.002	0.008	0.028	0.082	0.210	0.478	0.698

الاحتمالات في توزيع ذات الحدين: $f(x)$

						P						
n	x	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
8	0	0.663	0.430	0.168	0.058	0.017	0.004	0.001				
	1	0.279	0.383	0.336	0.198	0.090	0.031	0.008	0.001			
	2	0.051	0.149	0.294	0.296	0.209	0.109	0.041	0.010	0.001		
	3	0.005	0.033	0.147	0.254	0.279	0.219	0.124	0.047	0.009		
	4		0.005	0.046	0.136	0.232	0.273	0.232	0.136	0.046	0.005	
	5			0.009	0.047	0.124	0.219	0.279	0.254	0.147	0.033	0.005
	6			0.001	0.010	0.041	0.109	0.209	0.296	0.294	0.149	0.051
	7				0.001	0.008	0.031	0.090	0.198	0.336	0.383	0.279
	8					0.001	0.004	0.017	0.058	0.168	0.430	0.663
9	0	0.630	0.387	0.134	0.040	0.010	0.002					
	1	0.299	0.387	0.302	0.156	0.060	0.018	0.004				
	2	0.063	0.172	0.302	0.267	0.161	0.070	0.021	0.004			
	3	0.008	0.045	0.176	0.267	0.251	0.164	0.074	0.021	0.003		
	4	0.001	0.007	0.065	0.172	0.251	0.246	0.167	0.074	0.017	0.001	
	5		0.001	0.017	0.074	0.167	0.246	0.251	0.172	0.066	0.007	0.001
	6			0.003	0.021	0.074	0.164	0.251	0.267	0.176	0.045	0.008
	7				0.004	0.021	0.070	0.161	0.267	0.302	0.172	0.063
	8					0.004	0.018	0.060	0.156	0.302	0.387	0.299
	9						0.002	0.010	0.040	0.134	0.387	0.630
10	0	0.599	0.349	0.107	0.028	0.006	0.001					
	1	0.315	0.387	0.268	0.121	0.040	0.010	0.002				
	2	0.075	0.194	0.302	0.233	0.121	0.044	0.011	0.001			
	3	0.010	0.057	0.201	0.267	0.215	0.117	0.042	0.009	0.001		
	4	0.001	0.011	0.088	0.200	0.251	0.205	0.111	0.037	0.006		
	5		0.001	0.026	0.103	0.201	0.246	0.201	0.103	0.026	0.001	
	6			0.006	0.037	0.111	0.205	0.251	0.200	0.088	0.011	0.001
	7			0.001	0.009	0.042	0.117	0.215	0.267	0.201	0.057	0.010
	8				0.001	0.011	0.044	0.121	0.233	0.302	0.194	0.075
	9					0.002	0.010	0.040	0.121	0.268	0.387	0.315
	10						0.001	0.006	0.028	0.107	0.349	0.599

الاحتمالات في توزيع ذات الحدين: $f(x)$

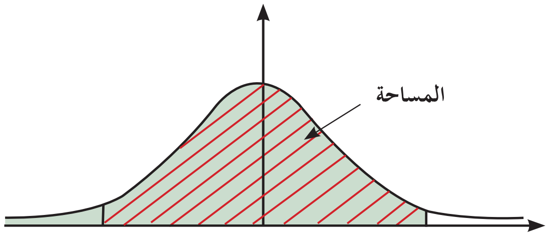
						P						
n	***x***	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
11	0	0.569	0.314	0.086	0.020	0.004						
	1	0.329	0.384	0.236	0.093	0.027	0.005	0.001				
	2	0.087	0.213	0.295	0.200	0.089	0.027	0.005	0.001			
	3	0.014	0.071	0.221	0.257	0.177	0.081	0.023	0.004			
	4	0.001	0.016	0.111	0.220	0.236	0.161	0.070	0.017	0.002		
	5		0.002	0.039	0.132	0.221	0.226	0.147	0.057	0.010		
	6			0.010	0.057	0.147	0.226	0.221	0.132	0.039	0.002	
	7			0.002	0.017	0.070	0.161	0.236	0.220	0.111	0.016	0.001
	8				0.004	0.023	0.081	0.177	0.257	0.221	0.071	0.014
	9				0.001	0.005	0.027	0.089	0.200	0.295	0.213	0.087
	10					0.001	0.005	0.027	0.093	0.236	0.384	0.329
	11							0.004	0.020	0.086	0.314	0.569
12	0	0.540	0.282	0.069	0.014	0.002						
	1	0.341	0.377	0.206	0.071	0.017	0.003					
	2	0.099	0.230	0.283	0.168	0.064	0.016	0.002				
	3	0.017	0.085	0.236	0.240	0.142	0.054	0.012	0.001			
	4	0.002	0.021	0.133	0.231	0.213	0.121	0.042	0.008	0.001		
	5		0.004	0.053	0.158	0.227	0.193	0.101	0.029	0.003		
	6			0.016	0.079	0.177	0.226	0.177	0.079	0.016		
	7			0.003	0.029	0.101	0.193	0.227	0.158	0.053	0.004	
	8			0.001	0.008	0.042	0.121	0.213	0.231	0.133	0.021	0.002
	9				0.001	0.012	0.054	0.142	0.240	0.236	0.085	0.017
	10					0.002	0.010	0.064	0.168	0.283	0.230	0.099
	11						0.003	0.017	0.071	0.206	0.377	0.341
	12							0.002	0.014	0.069	0.282	0.540

الاحتمالات في توزيع ذات الحدين: $f(x)$

		P										
n	x	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
13	0	0.513	0.254	0.055	0.010	0.001						
	1	0.351	0.367	0.179	0.054	0.011	0.002					
	2	0.111	0.245	0.268	0.139	0.045	0.010	0.001				
	3	0.021	0.100	0.246	0.218	0.111	0.035	0.005	0.001			
	4	0.003	0.028	0.154	0.234	0.184	0.087	0.024	0.003			
	5		0.006	0.069	0.180	0.221	0.157	0.066	0.014	0.001		
	6		0.001	0.023	0.103	0.197	0.209	0.131	0.044	0.006		
	7			0.006	0.044	0.131	0.209	0.197	0.103	0.023	0.001	
	8			0.001	0.014	0.066	0.157	0.221	0.180	0.069	0.006	
	9				0.003	0.024	0.087	0.184	0.234	0.154	0.028	0.003
	10				0.001	0.006	0.035	0.111	0.218	0.246	0.100	0.021
	11					0.001	0.010	0.045	0.139	0.268	0.245	0.111
	12						0.002	0.011	0.054	0.179	0.367	0.351
	13							0.001	0.010	0.055	0.254	0.513
14	0	0.488	0.229	0.044	0.007	0.001						
	1	0.359	0.356	0.154	0.041	0.007	0.001					
	2	0.123	0.257	0.250	0.113	0.032	0.006	0.001				
	3	0.026	0.114	0.250	0.194	0.085	0.022	0.003				
	4	0.004	0.035	0.172	0.229	0.155	0.061	0.014	0.001			
	5		0.008	0.086	0.196	0.207	0.122	0.041	0.007			
	6		0.001	0.032	0.126	0.207	0.183	0.092	0.023	0.002		
	7			0.009	0.062	0.157	0.209	0.157	0.062	0.0009		
	8			0.002	0.023	0.092	0.183	0.207	0.126	0.032	0.001	
	9				0.007	0.041	0.122	0.207	0.196	0.086	0.008	
	10				0.001	0.014	0.061	0.155	0.229	0.172	0.035	0.004
	11					0.003	0.022	0.085	0.194	0.250	0.114	0.026
	12					0.001	0.006	0.032	0.113	0.250	0.257	0.123
	13						0.001	0.007	0.041	0.154	0.356	0.359
	14							0.001	0.007	0.044	0.229	0.488

الاحتمالات في توزيع ذات الحدين: $f(x)$

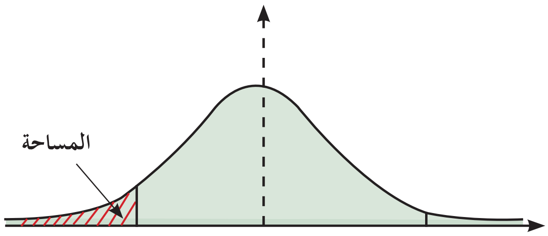
		P										
n	***x***	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
15	0	0.463	0.206	0.035	0.005							
	1	0.366	0.343	0.132	0.031	0.005						
	2	0.135	0.267	0.231	0.092	0.022	0.003					
	3	0.031	0.129	0.250	0.170	0.063	0.014	0.002				
	4	0.005	0.043	0.188	0.219	0.127	0.042	0.007	0.001			
	5	0.001	0.010	0.103	0.206	0.186	0.092	0.024	0.003			
	6		0.002	0.043	0.147	0.207	0.153	0.061	0.012	0.001		
	7			0.014	0.081	0.177	0.196	0.118	0.035	0.003		
	8			0.003	0.035	0.118	0.196	0.177	0.081	0.014		
	9			0.001	0.012	0.061	0.153	0.207	0.147	0.043	0.002	
	10				0.003	0.024	0.092	0.186	0.206	0.103	0.010	0.001
	11				0.001	0.007	0.042	0.127	0.210	0.188	0.043	0.005
	12					0.002	0.014	0.063	0.170	0.250	0.129	0.031
	13						0.003	0.022	0.092	0.231	0.267	0.135
	14							0.005	0.031	0.132	0.343	0.366
	15								0.005	0.035	0.206	0.463



جدول التوزيع الطبيعي المعياري (z) لحساب قيم المساحات من اليسار

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

جدول (4)



جدول التوزيع الطبيعي المعياري (z) لحساب قيم المساحات من اليسار

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
−3.9	0.00005	0.00005	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00003	0.00003
−3.8	0.00007	0.00007	0.00007	0.00006	0.00006	0.00006	0.00006	0.00005	0.00005	0.00005
−3.7	0.00011	0.00010	0.00010	0.00010	0.00009	0.00009	0.00008	0.00008	0.00008	0.00008
−3.6	0.00016	0.00015	0.00015	0.00014	0.00014	0.00013	0.00013	0.00012	0.00012	0.00011
−3.5	0.00023	0.00022	0.00022	0.00021	0.00020	0.00019	0.00019	0.00018	0.00017	0.00017
−3.4	0.00034	0.00032	0.00031	0.00030	0.00029	0.00028	0.00027	0.00026	0.00025	0.00024
−3.3	0.00048	0.00047	0.00045	0.00043	0.00042	0.00040	0.00039	0.00038	0.00036	0.00035
−3.2	0.00069	0.00066	0.00064	0.00062	0.00060	0.00058	0.00056	0.00054	0.00052	0.00050
−3.1	0.00097	0.00094	0.00090	0.00087	0.00084	0.00082	0.00079	0.00076	0.00074	0.00071
−3.0	0.00135	0.00131	0.00126	0.00122	0.00118	0.00114	0.00111	0.00107	0.00104	0.00100
−2.9	0.00187	0.00181	0.00175	0.00169	0.00164	0.00159	0.00154	0.00149	0.00144	0.00139
−2.8	0.00256	0.00248	0.00240	0.00233	0.00226	0.00219	0.00212	0.00205	0.00199	0.00193
−2.7	0.00347	0.00336	0.00326	0.00317	0.00307	0.00298	0.00289	0.00280	0.00272	0.00264
−2.6	0.00466	0.00453	0.00440	0.00427	0.00415	0.00402	0.00391	0.00379	0.00368	0.00357
−2.5	0.00621	0.00604	0.00587	0.00570	0.00554	0.00539	0.00523	0.00508	0.00494	0.00480
−2.4	0.00820	0.00798	0.00776	0.00755	0.00734	0.00714	0.00695	0.00676	0.00657	0.00639
−2.3	0.01072	0.01044	0.01017	0.00990	0.00964	0.00939	0.00914	0.00889	0.00866	0.00842
−2.2	0.01390	0.01355	0.01321	0.01287	0.01255	0.01222	0.01191	0.01160	0.01130	0.01101
−2.1	0.01786	0.01743	0.01700	0.01659	0.01618	0.01578	0.01539	0.01500	0.01463	0.01426
−2.0	0.02275	0.02222	0.02169	0.02118	0.02068	0.02018	0.01970	0.01923	0.01876	0.01831
−1.9	0.02872	0.02807	0.02743	0.02680	0.02619	0.02559	0.02500	0.02442	0.02385	0.02330
−1.8	0.03593	0.03515	0.03438	0.03362	0.03288	0.03216	0.03144	0.03074	0.03005	0.02938
−1.7	0.04457	0.04363	0.04272	0.04182	0.04093	0.04006	0.03920	0.03836	0.03754	0.03673
−1.6	0.05480	0.05370	0.05262	0.05155	0.05050	0.04947	0.04846	0.04746	0.04648	0.04551
−1.5	0.06681	0.06552	0.06426	0.06301	0.06178	0.06057	0.05938	0.05821	0.05705	0.05592
−1.4	0.08076	0.07927	0.07780	0.07636	0.07493	0.07353	0.07215	0.07078	0.06944	0.06811
−1.3	0.09680	0.09510	0.09342	0.09176	0.09012	0.08851	0.08691	0.08534	0.08379	0.08226
−1.2	0.11507	0.11314	0.11123	0.10935	0.10749	0.10565	0.10383	0.10204	0.10027	0.09853
−1.1	0.13567	0.13350	0.13136	0.12924	0.12714	0.12507	0.12302	0.12100	0.11900	0.11702
−1.0	0.15866	0.15625	0.15386	0.15151	0.14917	0.14686	0.14457	0.14231	0.14007	0.13786
−0.9	0.18406	0.18141	0.17879	0.17619	0.17361	0.17106	0.16853	0.16602	0.16354	0.16109
−0.8	0.21186	0.20897	0.20611	0.20327	0.20045	0.19766	0.19489	0.19215	0.18943	0.18673
−0.7	0.24196	0.23885	0.23576	0.23270	0.22965	0.22663	0.22363	0.22065	0.21770	0.21476
−0.6	0.27425	0.27093	0.26763	0.26435	0.26109	0.25785	0.25463	0.25143	0.24825	0.24510
−0.5	0.30854	0.30503	0.30153	0.29806	0.29460	0.29116	0.28774	0.28434	0.28096	0.27760
−0.4	0.34458	0.34090	0.33724	0.33360	0.32997	0.32636	0.32276	0.31918	0.31561	0.31207
−0.3	0.38209	0.37828	0.37448	0.37070	0.36693	0.36317	0.35942	0.35569	0.35197	0.34827
−0.2	0.42074	0.41683	0.41294	0.40905	0.40517	0.40129	0.39743	0.39358	0.38974	0.38591
−0.1	0.46017	0.45620	0.45224	0.44828	0.44433	0.44038	0.43644	0.43251	0.42858	0.42465
−0.0	0.50000	0.49601	0.49202	0.48803	0.48405	0.48006	0.47608	0.47210	0.46812	0.46414

جدول (5)

12

تطرح سلسلة الرَّياضيّات مواقف حياتيّة يوميّة، وتؤمّن فرص تعلُّم كثيرة. فهي تعزّز المهارات الأساسيّة، والحسّ العدديّ، وحلّ المسائل، والجهوزيّة لدراسة الجبر، والهندسة، وتنمّي مهارتَي التّعبير الشّفهيّ والكتابيّ ومهارات التفكير في الرَّياضيّات. وهي تتكامل مع الموادّ الدراسيّة الأخرى فتكون جزءًا من ثقافة شاملة متماسكة تحفّز الطلّاب على اختلاف قدراتهم وتشجّعهم على حبّ المعرفة.

تتكوّن السلسلة من:

- كتاب الطالب
- كتاب المعلّم
- كرّاسة التمارين
- كرّاسة التمارين مع الإجابات

ISBN 978-6-14406-643-0

9 786144 066430

PEARSON Scott Foresman

قيِّم مناهجنا

الكتاب كاملًا