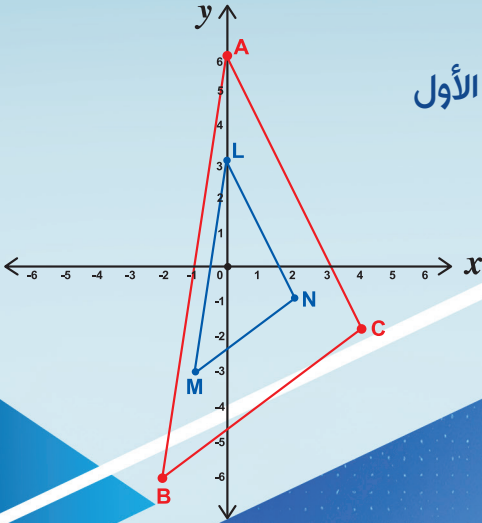




الرياضيات

الصف العاشر

الفصل الدراسي الأول - القسم الأول



IXI



فكرة
الدرس



مسألة
الدرس



لنعمل معاً
لنستكشف



استخدام
النماذج



تحقق
من فهمك



أنتدرب
وأحل المسائل



مهارات
تفكير عليا



الرياضيات

الصف العاشر

الفصل الدراسي الأول - القسم الأول

كتاب الطالب

تأليف

أ. دلال مبارك فلاح الحجر (رئيساً)

أ. محمد عبدالله الحمد المجرن
أ. هيا محمد فالح العازمي
أ. ضحى إبراهيم مزعل الدوسري
أ. حصة مضحي عبدالله الهاجري
أ. ثريا غدير مربد الشمري

الطبعة الأولى

١٤٤٨ هـ

٢٠٢٦ - ٢٠٢٧ م

الطبعة الأولى: 2026 / 2027 م

الفريق العلمي



أ. سمير عبدالله أحمد مرسي
أ. خالد صاوي سيد شحاته

عضو الشروحات التعليمية المعززة بالذكاء الاصطناعي



أ. نهال هاشم عبدالحميد هاشم

عضو التصميم والإخراج



أ. خلود خالد مهدي الشمري

المراجعة اللغوية



أ. عبدالله محمد الذروة
أ. عباس فيصل الصراف
أ. أماني عبدالكريم العريفي



الناشر: دار الفين

24797888

أودع في مكتبة الكويت الوطنية - ردمك: 0-124-33-9921-978

أودع في مكتبة وزارة التربية تحت رقم (531) بتاريخ 9 / 8 / 2026 م





حضرة صاحب السمو الشيخ مشعل آل أحمد آل جابر الصباح
أمير دولة الكويت

H.H. Sheikh Meshal AL-Ahmad AL-Jaber AL-Sabah
Amir Of The State Of Kuwait



سَمُو الشَّيْخِ صَبَّاحٍ كَهْدٍ الْحَمَادِ الصَّبَّاحِ
وَلِيِّ مَعْهُدِ دَوْلَةِ الْكُوَيْتِ

H. H. Sheikh Sabah Khaled Al-Hamad Al-Sabah
Crown Prince Of The State Of Kuwait

المحتوى

الوحدة الأولى	الجبر وحل المعادلات	الصفحة
(1-1)	دالة القيمة المطلقة	16
(2-1)	حل معادلة القيمة المطلقة	33
(3-1)	حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد «جبرياً وبيانياً»	42
(4-1)	إيجاد مجموع وناتج ضرب جذريّ معادلة تربيعية - تكوين المعادلة التربيعية بمعلومية جذريها	54
(5-1)	حل متباينة من الدرجة الثانية	62

الوحدة الثانية	الهندسة المستوية	الصفحة
(1-2)	التناسب	82
(2-2)	تشابه المضلعات	96
(3-2)	تشابه المثلثات	104
(4-2)	التشابه في المثلثات القائمة الزاوية	116
(5-2)	التناسب والمثلثات المتشابهة	123

أيقونات الكتاب



انتبه

تكون في هامش الدرس يعرض فيها معلومة رياضية لتجنب الوقوع بالخطأ



لنستكشف
أو فكر معي

تعتمد على التفكير المنطقي للوصول لمعلومة أو تعميم أو نظرية



استخدام
النماذج أو تدريب

استخدام النماذج: مسائل حياتية للدرس
تدرب: اتباع خطوات للتوصل للحل



تحقق من
فهمك

تطبيق للمثال في الدرس



أدرب وأحل

يتضمن أسئلة موضوعية ومقالية للدرس



فكرة الدرس

يبين ما ستتعلم بهذا الدرس



مصطلحات

التعرف على المفاهيم الجديدة المستخدمة في الرياضيات



مسألة الدرس

مدخل الدرس من خلاله
يتم التعرف على الدرس



ملحوظة

تكون في هامش الدرس يعرض فيها معلومة تم استنتاجها من الدرس الحالي أو عرضها سابقاً



تذكر

تكون في هامش الدرس يعرض فيها معلومة نحتاج إليها في الدرس



مهارات تفكير
عليا

يتضمن أسئلة موضوعية ومقالية فيها تحدي للمتعلّم

المقدمة

مرحباً بكم في كتاب الرياضيات للصف العاشر؛ حيث نأخذك في رحلة تعليمية ممتعة عبر وحدات دراسية مترابطة تشمل الجبر وحل المعادلات، والهندسة المستوية، وحساب المثلثات والمنطق والإحصاء، وهندسة الدائرة، والمصفوفات، والهندسة الإحداثية، والمتتاليات. ويقدم الكتاب الرياضيات بوصفها لغة للتفكير وأداة لفهم الحياة وحل المشكلات، من خلال مواقف وتطبيقات تساعدك على اكتشاف أهمية ما تتعلمه وتوظيفه في مجالات متنوعة. كما يتضمن الكتاب رموز الـ (QR) في بداية عدد من الدروس تقودك إلى فيديوهات جاذبة تربط المفاهيم الرياضية بالحياة اليومية، ورموزاً أخرى عند بعض التمارين تقدم شرحاً مرئياً يساعدك على فهم طريقة التفكير والوصول إلى الحل.

وفي بداية كل وحدة ستجد مشروعاً تكاملياً وفق منهجية STEAM، يتيح لك توظيف معارفك ومهاراتك في العلوم والتقنية والهندسة والفنون والرياضيات لمعالجة مشكلة أو تنفيذ مهمة واقعية؛ بما يعزز قدرتك على البحث والاستقصاء والتصميم والإبداع والعمل التعاوني، ويجعل تعلم الرياضيات تجربة حية تتجاوز حدود الصف الدراسي إلى مواقف الحياة والعالم من حولك.

ويحرص هذا الكتاب على تنمية مهارات القرن الحادي والعشرين، وفي مقدمتها التفكير الناقد والإبداعي، وحل المشكلات، والتواصل والتعاون، والتعلم الذاتي، وتوظيف التقنية؛ لإعداد متعلم يمتلك المعرفة والمهارة والقدرة على المبادرة وصناعة الحلول. فالغاية ليست أن تتعلم الرياضيات فحسب، بل أن تسهم في بناء مواطن واع ومبدع وقادر على المشاركة الفاعلة في نهضة وطنه وبناء مستقبل دولة الكويت. فكّر، اكتشف، جرّب، وأبدع... فكل فكرة تبدأ اليوم قد تكون خطوة نحو مستقبل أفضل للكويت.



المؤلفون

الإطار التنظيمي للكتاب

ما أهمية هذه الوحدة؟

تعد المعادلات والقيمة المطلقة والمتباينات من المفاهيم المهمة في الرياضيات، لأنها تساعدنا على وصف المواقف الحياتية وتمثيلها باستخدام الرموز الرياضية، فمن خلال المعادلات نستطيع إيجاد القيم المجهولة، ومن خلال القيمة المطلقة نفهم المسافة أو مقدار البعد عن قيمة معينة بغض النظر عن الاتجاه، أما المتباينات فنستطيع دراستها من خلال علاقة الترتيب.



سأتعلمُ في هذه الوحدة:

- تحديد مجال ومدى دالة المطلق.
- تمثيل دالة المطلق بيانياً.
- حل معادلات القيمة المطلقة.
- حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد «جبرياً وبيانياً».
- إيجاد مجموع الجذرين وحاصل ضرب الجذرين في معادلة تربيعية.
- حل متباينة من الدرجة الثانية.



تعلمتُ سابقاً:

- حل المعادلات التي تحتوي متغيرات في طرفيها.
- إيجاد قيمة مقدار جبري يتضمن قيمة مطلقة.
- مفهوم الدالة والذي يحتل مكاناً رئيسياً في دراسة الرياضيات.
- حل متباينة خطية بأكثر من خطوة وتمثيلها على خط الأعداد.



استعد للوحدة



عزيزي المعلم ، عزيزي المتعلم :
يحتوي رمز الـ (QR) الموجود في بداية الوحدة على مفاهيم علمية وتمرين تساعد في الاستعداد للوحدة وتعزز المفاهيم الواردة فيها.

الجبر وحل المعادلات

حل متباينة من
الدرجة الثانية

دالة القيمة
المطلقة

حل معادلة
القيمة المطلقة

إيجاد مجموع وناتج
ضرب جذريّ معادلة
تربيعية - تكوين
المعادلة التربيعية
بمعلومية جذريها

حل معادلة من الدرجة
الثانية في متغير
واحد «جبرياً وبيانياً»

حل المعادلة على الصورة:
 $|ax+b|=|cx+d|$

حل المعادلة على الصورة:
 $|ax+b|=cx+d$



تناغم الظلال والأنوار (Harmony of Light & Shadows)



هدف المشروع



يهدف المشروع إلى مساعدة المتعلمين على فهم العلاقة بين الرياضيات والظواهر الضوئية، من خلال توظيف المعادلات التربيعية ومفاهيم مجموع الجذرين وحاصل ضربهما في تفسير أبعاد الظلال وشدة الضوء. كما يهدف إلى تنمية مهارات التفكير العلمي والإبداعي لدى المتعلمين، وربط المفاهيم الرياضية بتطبيقات واقعية في العلوم والهندسة والفن والتكنولوجيا.

فكرة المشروع



تقوم فكرة المشروع على استكشاف كيفية تحكم الأرقام والمسافات والأبعاد في الضوء والظل. فعند وضع حاجز أو فتحة بين مصدر الضوء والجدار تتغير مساحة الظل وشكله تبعاً لأبعاد الفتحة والمسافات، ويمكن تمثيل ذلك رياضياً باستخدام معادلات تربيعية. ومن خلال دراسة مجموع الجذرين وحاصل ضربهما، يستطيع المتعلمون توقع أبعاد الفتحة أو الظل، ثم توظيف هذه المعرفة في تصميم صندوق ضوئي ولوحات فنية تبرز أثر الضوء والظل بطريقة إبداعية.

خطوات تنفيذ المشروع



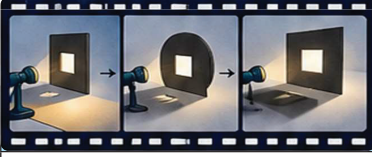
- ملاحظة أثر مصدر الضوء عند سقوطه على حاجز أو فتحة بين المصباح والجدار، وتسجيل تغير شكل الظل ومساحته.
- تحويل الموقف العملي إلى نموذج رياضي باستخدام معادلة تربيعية تمثل العلاقة بين أبعاد الفتحة أو المسافات.
- استخدام مجموع الجذرين وحاصل ضربهما لتحديد الأبعاد المناسبة، مثل المعادلة: $x^2 - 6x + 8 = 0$ ، حيث يمثل الجذران بعدين أو مسافتين.
- تصميم فتحة مثالية تحقق التماثل الضوئي، مثل حالة مجموع البعدين 6 وحاصل ضربهما 9، فينتج مربع أبعاده 3×3 .
- تجربة فكرة المعكوس الضوئي، بحيث يكون أحد البعدين معكوساً ضربياً للآخر، ودراسة أثر ذلك على توزيع الضوء والظل.
- استخدام الهاتف أو تطبيق حساس الضوء لقياس شدة الإضاءة ومقارنة النتائج العملية بالنتائج الرياضية.
- إعداد عرض بصري أو بطاقات تعليمية توضح كيف تتحكم الأبعاد والمسافات في أحجام الظلال وشدة الضوء.

الموارد والأدوات

Mathematics	Art	Engineering	Technology	Science
الرياضيات التعبير عن شدة الضوء والمساحة كدالة تربيعية واستخدام مجموع وناتج ضرب الجذرين.	الفن ابتكار لوحات "خيال الظل" التي تعتمد على تناسب الأبعاد.	الهندسة تصميم "صندوق الضوء" بفتحات متغيرة الأبعاد (مربعة ومستطيلة).	التكنولوجيا استخدام كشاف الهاتف وحساس الضوء (Light Sensor) في تطبيقات الهواتف الذكية.	العلوم دراسة "قانون التربيع العكسي" للضوء وكيف تتوزع الطاقة الضوئية.

- مصدر ضوء مناسب مثل كشاف أو مصباح صغير.
- حواجز وفتحات مربعة ومستطيلة بأبعاد مختلفة.

- صندوق ضوئي أو نموذج هندسي بسيط لتثبيت الفتحات والحواف.
- جدار أو شاشة بيضاء لاستقبال الظلال.
- هاتف ذكي يحتوي على تطبيق قياس شدة الضوء أو حساس الضوء.
- مسطرة، ورق مقوى، مقص، لاصق، وأدوات رسم وتلوين.
- بطاقات تعليمية لكتابة المعادلات التربيعية وتحليل الجذور.



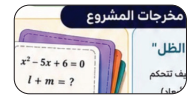
عرض النتائج

الرقم	البند	التفاصيل
1	عرض جزء من نتائج المشروع	
2	الصعوبات التي واجهت فريق العمل وكيفية التغلب عليها	
3	المعلومات الجديدة التي تم إضافتها لخبرات المتعلمين السابقة	
4	كيفية تطوير المشروع وتعزيز المهارات	
5	تقييم المشروع	

أداة تقييم المشروع

يستخدم الجدول التالي لتقييم أداء المتعلمين في المشروع، بوضع علامة في مستوى الأداء المناسب لكل معيار.

الرقم	المعيار	1	2	3
1	وضوح فكرة المشروع وأهدافه			
2	دقة توظيف المعادلات التربيعية			
3	فهم العلاقة بين الضوء والظل والمسافات			
4	تنظيم خطوات تنفيذ المشروع			
5	استخدام الموارد والأدوات بطريقة مناسبة			
6	عرض النتائج وتفسيرها بوضوح			



دالة القيمة المطلقة Absolute Value Function

1-1

فكرة الدرس:



التعرف على دالة القيمة المطلقة، وتمثيلها بيانياً، والتعرف على خواص دالة القيمة المطلقة، واستخدام هندسة التحويلات لرسم بعض دوال القيمة المطلقة.

المصطلحات:



Function	2. الدالة	Absolute Value	1. القيمة المطلقة
Vertex	4. رأس المنحنى	Domain	3. المجال
Range	6. المدى	Graph	5. التمثيل البياني
		Axis of Symmetry	7. محور التماثل

مسألة الدرس:



في معرض العلوم بالمدرسة صمم أحمد وزملاؤه تجربة باستخدام شعاع الليزر ومرآة مستوية، لوحظ أن شعاع الليزر انطلق من المصدر واصطدم بالمرآة عند النقطة (0,0) ثم انعكس ليصيب الهدف.



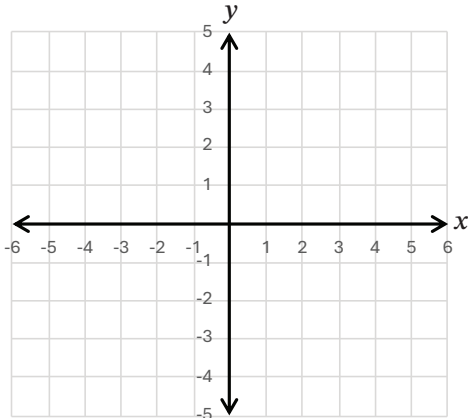
المطلوب:

كتابة قاعدة الدالة الناتجة من انعكاس شعاع الليزر.

والآن: ارسم كل من الدوال التالية:

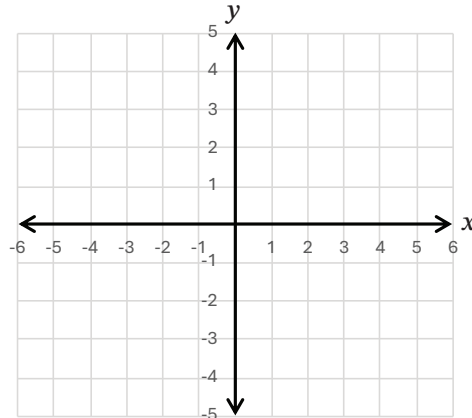
a) $y_1 = x : x \geq 0$

x	0		
y	0		



b) $y_2 = -x : x < 0$

x			0
y			0



! انتبه

سنرمز لمحور السينات

x بـ x-axis

وسنرمز لمحور

الصادات

y بـ y-axis

أعد تعريف الدالة : $y_3 = |x|$

وما علاقة y_3 بكل من y_1, y_2 ؟

مما سبق: فإن الصورة الأساسية لدالة القيمة المطلقة هي :

$$f: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|$$

(المجال) (المجال المقابل)

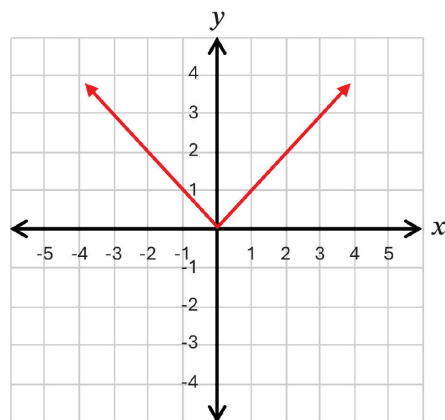
والتي مكوناتها هي :

1. المجال $\mathbb{R}$

2. المجال المقابل $\mathbb{R}$

3. قاعدة اقترانها $f(x) = |x|$

$$f(x) = \begin{cases} x & : x > 0 \\ 0 & : x = 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases} \Rightarrow \therefore f(x) = \begin{cases} x & : x \geq 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$$



x	-2	-1	0	1	2
y	2	1	0	1	2

نستنتج أن :

1. تمثيل الدالة $y = |x|$ بيانياً ينتج من

اتحاد شعاعين لهما نفس نقطة البداية

(رأس المنحنى) وهي نقطة الأصل ويشبهان الحرف V.

2. رأس المنحنى هو (0,0) وعنده توجد أصغر قيمة للدالة.

3. متماثلة حول محور الصادات ($x=0$) نسميها فيما بعد دالة زوجية

4. مدى الدالة هو $[0, \infty)$

ومن التعريف:

إذا كانت $a, b, x \in \mathbb{R}$ عددين حقيقيين فإن :

$$1. |x| = \begin{cases} x & : x \geq 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$$

$$2. |x+a| = \begin{cases} x+a & : x \geq -a \\ -x-a & : x < -a \end{cases}$$

$$3. |ax+b| = \begin{cases} ax+b & : x \geq \frac{-b}{a} \\ -ax-a & : x < \frac{-b}{a} \end{cases}$$

① معلومة

محور التماثل :

هو خط يقسم التمثيل
البياني إلى جزأين
متطابقين تمامًا (يحول
التمثيل البياني إلى نفسه).

$$1. |x| \geq 0$$

$$2. |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$3. |a + b| \leq |a| + |b|$$

خواص القيمة المطلقة:

$$1. |a|^2 = a^2$$

ملحوظات هامة:

$$2. \sqrt{x^2} = |x|$$

رسم بيان دالة القيمة المطلقة باستخدام رأس المنحنى ومحور التماثل

$$f(x) = |2x + 4|$$

ارسم بيان الدالة:

مثال (1)

الحل:

مجال الدالة هو $\mathbb{R}$

$$2x + 4 = 0$$

أولاً: باستخدام محور التماثل لرسم بيان الدالة نضع

$$\therefore 2x = -4 \Rightarrow x = -2$$

$$f(-2) = |2(-2) + 4| = 0$$

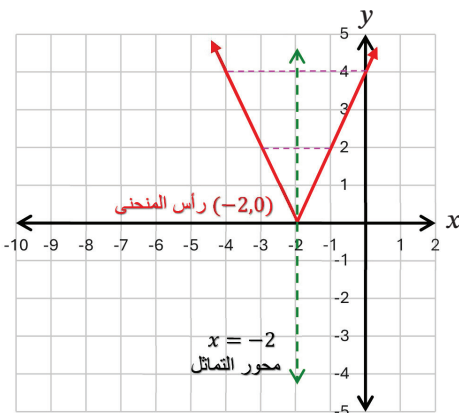
$\therefore$ تسمى النقطة $(-2, 0)$ رأس المنحنى

نكون جدول بأخذ قيمتين لـ x على يمين $x = -2$

$$f(-1) = |2(-1) + 4| = 2, \quad f(0) = |2(0) + 4| = 4$$

ومن التماثل حول المستقيم $x = -2$ نوجد قيمتين لـ x على يسار $x = -2$

$$f(-3) = f(-1) = 2, \quad f(-4) = f(0) = 4$$



x	-4	-3	-2	-1	0
y	4	2	0	2	4

ومن التماثل:

- نرسم الدالة:

نلاحظ أن:

رأس المنحنى هو $(-2, 0)$ ومحور التماثل هو $x = -2$ ومنحنى الدالة مفتوح للأعلى

انتبه!

مجال دالة القيمة

المطلقة هو $\mathbb{R}$ ما لم

يذكر غير ذلك

معلومة

يمكن الاستعانة

بالآلة الحاسبة لإيجاد

قيم الدالة $f(x)$



! انتبه

عند رسم بيان أي
دالة اكتب مجال
الدالة أولاً.

ثانياً : باستخدام إعادة تعريف القيمة المطلقة

$$2x + 4 = 0 \quad \text{نضع}$$

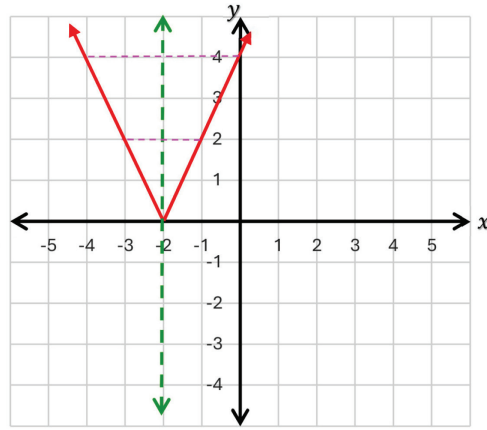
$$2x = -4 \quad \Rightarrow \quad x = -2$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & : x \geq -2 \\ -2x - 4 & : x < -2 \end{cases}$$

- نكون جدولاً من إعادة تعريف القيمة المطلقة

$$f(-1) = 2(-1) + 4 = 2, \quad -1 > -2$$

$$f(-3) = -2(-3) - 4 = 2, \quad -3 < -2$$



$$f(x) = -2x - 4 \mid f(x) = 2x + 4$$

x	0	-1	-2	-3	-4
y	4	2	0	2	4

نرسم الدالة

مما سبق نلاحظ :

$$f(x) = |2x + 4| + 0$$

بفرض أن

$$a = 2, \quad b = 4, \quad c = 0$$

$$1. \text{ رأس المنحنى هو } \left(\frac{-b}{a}, c \right) = (-2, 0)$$

$$2. \text{ معادلة محور التماثل هو } x = \frac{-b}{a} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$3. \text{ مدى الدالة هو } [c, \infty) = [0, \infty)$$

تحقق من فهمك (1)

ارسم بيان الدالة : $f(x) = |3x + 6|$

تعميم:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

(المجال) (المجال المقابل)

الصورة القياسية لدوال القيمة المطلقة:
 $f(x) = |ax+b| + c$

مجال الدالة هو $\mathbb{R}$ ، ومجالها المقابل هو $\mathbb{R}$

1. رأس المنحنى هو النقطة $\left(\frac{-b}{a}, c\right)$

2. معادلة محور التماثل هو $x = \frac{-b}{a}$

3. مدى الدالة هو $[c, \infty)$

4. مدى الدالة يتغير إذا كانت الدالة على الصورة $f(x) = -|ax+b| + c$ ويصبح $(-\infty, c]$ حيث منحنى الدالة في هذه الحالة يكون مفتوحاً للأسفل

أوجد رأس المنحنى ومعادلة محور التماثل ومدى كل من الدوال التالية ثم ارسم بيان كل منها

مثال (2)

a $y = |x - 2| + 1$

b $y = -|2x + 3|$

الحل:

مجال الدالة هو $\mathbb{R}$

بفرض أن $a=1$, $b=-2$, $c=1$

رأس المنحنى هو $\left(\frac{-b}{a}, c\right) = (2, 1)$

معادلة محور التماثل هو $x = \frac{-b}{a} = \frac{2}{1} = 2$

مدى الدالة هو $[c, \infty) = [1, \infty)$

يتضمن رأس منحنى الدالة (x, y) نضع جدول قيم الأزواج المرتبة

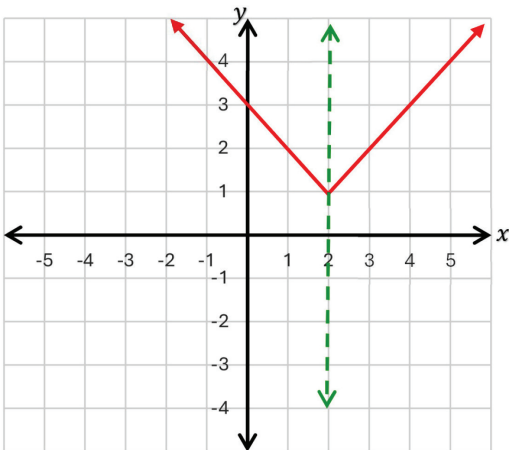
نرسم الدالة

x	1	2	3
y	2	1	2

نلاحظ أن:

أن عند رأس منحنى $(2, 1)$ توجد

أصغر قيمة للدالة.



تذكروا

$$f(x) = |ax + b| + c$$

$$ax + b = 0$$

$$x = \frac{-b}{a}$$

$$f\left(\frac{-b}{a}\right) = c$$

رأس المنحنى هو

$$\left(\frac{-b}{a}, c\right)$$

ملحوظة

الإشارة السالبة خارج
القيمة المطلقة لا
تؤثر على نقطة رأس
المنحنى والمنحنى الدالة
يكون مفتوحاً للأسفل

b $y = -|2x + 3|$

مجال الدالة هو $\mathbb{R}$

بفرض أن $a = 2$, $b = 3$, $c = 0$

رأس المنحنى هو $\left(\frac{-b}{a}, c\right) = \left(\frac{-3}{2}, 0\right)$

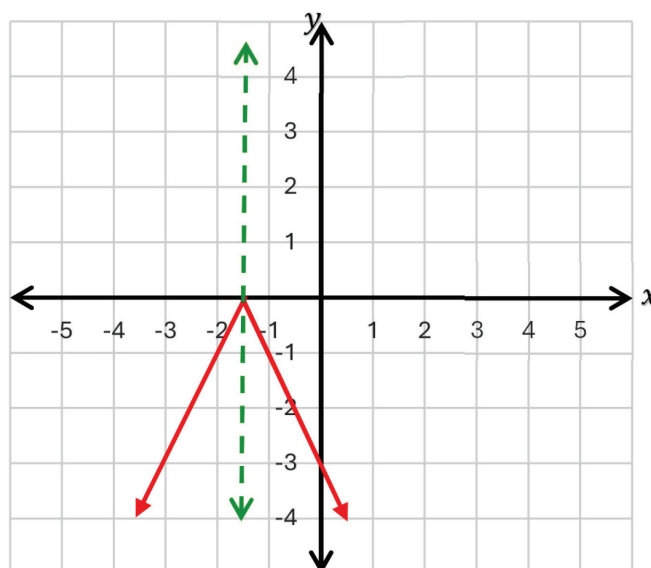
معادلة محور التماثل هي $x = \frac{-b}{a} = \frac{-3}{2}$

مدى الدالة هو $(-\infty, c) = (-\infty, 0]$

- نضع جدول قيم الأزواج المرتبة (x, y) يتضمن رأس منحنى الدالة

- نرسم الدالة

x	-2	$\frac{-3}{2}$	-1
y	-1	0	-1



نلاحظ أن :

عند رأس منحنى $\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$

توجد أكبر قيمة للدالة.

تحقق من فهمك (2)



أوجد رأس المنحنى ومعادلة محور التماثل ومدى كل من الدوال التالية
ثم ارسم بيان كل منها

- a $f(x) = |x + 1| + 3$ b $y = -|x + 1|$
c $g(x) = \left| \frac{1}{2}x + 1 \right|$ d $f(x) = 1 - |x - 2|$

رسم بيان دوال القيمة المطلقة باستخدام بعض التحويلات الهندسية
Graph of Absolute Value Function using same
Geometric Transformations

التحويلات الهندسية لمنحنى الدالة الأساسية $f(x) = |x|$

1. الانسحاب في اتجاه محور السينات (إزاحة أفقية)

$$f(x) = |x - 3|$$

ارسم بيان الدالة :

استكشف

الحل:

$$f(x) = |x + 3|$$

مجال الدالة هو $\mathbb{R}$

1 - لإيجاد صفر المطلق نضع $f(x) = 0$

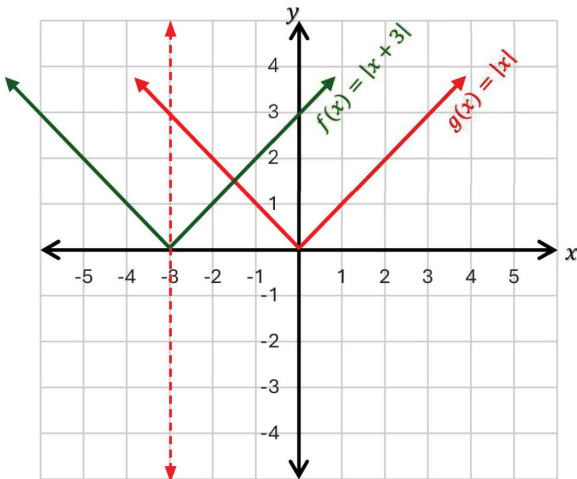
$$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

وهو محور التماثل

2 - نكون جدول القيم

x	-4	-3	-2
y	1	0	1

3 - نرسم الدالة



ملحوظة

معامل x هو الواحد
دائمًا في الدالة
الأساسية.

تذكروا

$$|x| = \begin{cases} x & : x \geq 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$$

معلومة

الدالة الأساسية:
هي دالة المرجع
 $g(x) = |x|$

4 - نلاحظ أن:

بيان الدالة $f(x) = |x + 3|$ يمكن الحصول عليه بانسحاب بيان الدالة الأساسية $g(x) = |x|$ بمقدار ثلاث وحدات في الاتجاه السالب لمحور السينات (جهة اليسار)

ارسم بيان كل من الدالة $f(x) = |x - 1|$ باستخدام التحويلات الهندسية

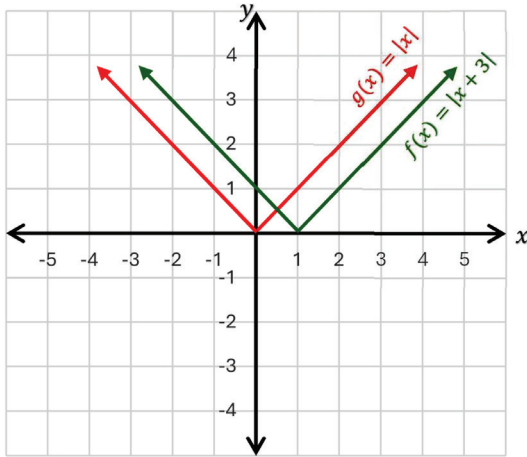
مثال (3)

مجال الدالة هو $\mathbb{R}$

1 - لإيجاد صفر المطلق نضع $f(x) = 0$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ وهو محور التماثل}$$

2 - نكون جدول القيم لدالة المرجع $g(x) = |x|$

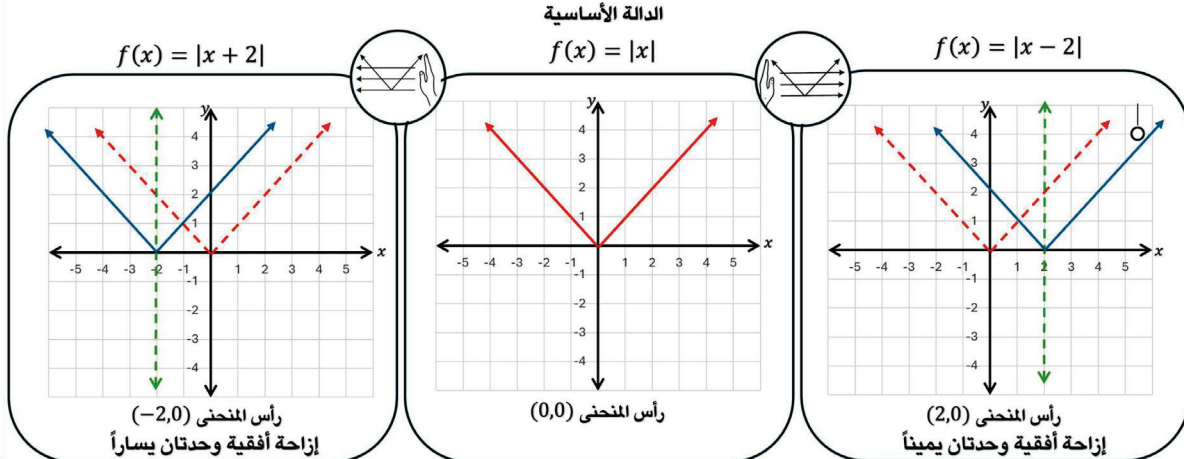


x	-1	0	1
y	1	0	1

3 - نرسم الدالة

بإزاحة مقدارها وحدة واحدة جهة اليمين.

ملخص:



تعميم:

يكون منحنى الدالة $f(x) = |x + a|$ هو نفس منحنى الدالة الأساسية $g(x) = |x|$ وبإزاحة أفقية مقدارها $|a|$ وحدة في الاتجاه:

1 - الموجب لمحور السينات (جهة اليمين) عندما $a < 0$

2 - السالب لمحور السينات (جهة اليسار) عندما $a > 0$

تحقق من فهمك (3)

لكل من الدوال التالية حدد مسافة الانسحاب ، ثم ارسم بيان كل منها مستخدماً الإزاحة لبيان الدالة الأساسية $g(x) = |x|$:

a $f(x) = |x - 3|$

b $y = |x + 2|$

c $f(x) = |x - 3.5|$

d $y = |x - 1.5|$

2. الانسحاب في اتجاه محور الصادات (إزاحة رأسية)

$f(x) = |x| - 1$

ارسم بيان الدالة :

استكشف

$f(x) = |x| - 1$

الحل:

1 - لإيجاد صفر المطلق

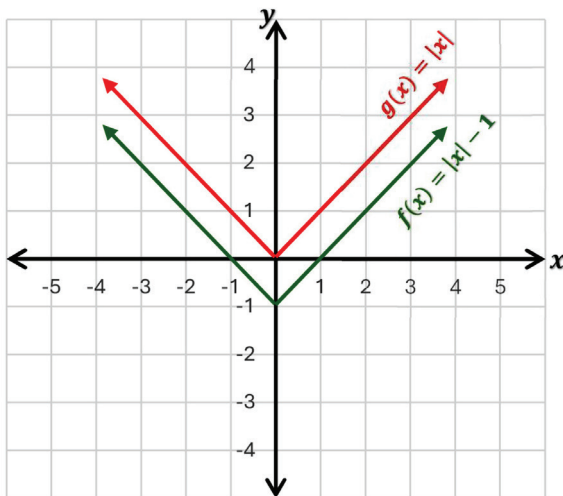
نلاحظ أن صفر المطلق هو $x = 0$ وهي معادلة محور

التماثل ، رأس المنحنى $(0, -1)$

2 - نكون جدول القيم

x	-1	0	1
y	0	-1	0

3 - نرسم الدالة



4 - نلاحظ أن:

بيان الدالة $f(x) = |x| - 1$ يمكن الحصول عليه بانسحاب بيان الدالة الأساسية $g(x) = |x|$ بمقدار وحدة واحدة في الاتجاه السالب لمحور الصادات رأسياً (لأسفل).

ارسم بيان الدالة $f(x) = |x| + 2$
باستخدام التحويلات الهندسية

مثال (4)

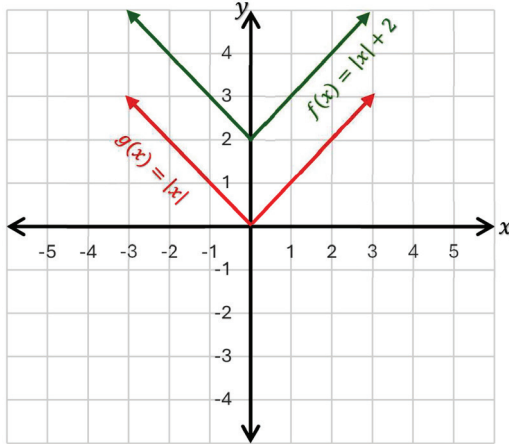
$$f(x) = |x| + 2$$

1 - لإيجاد صفر المطلق

نلاحظ أن صفر المطلق هو $x = 0$ وهي معادلة محور التماثل ، رأس المنحنى (0 ، 2)

2 - نكون جدول القيم.

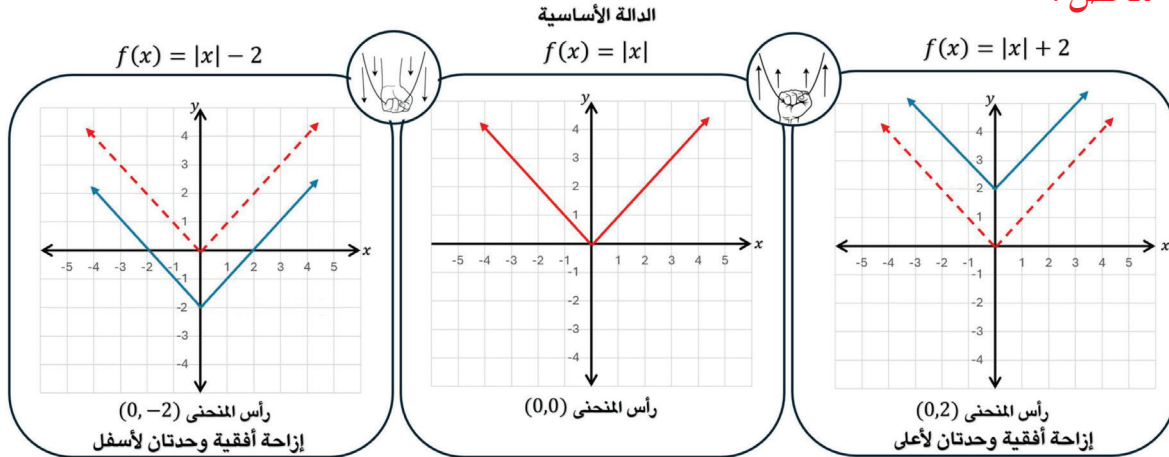
x	-1	0	1
y	1	0	1



3 - نرسم الدالة

بيان الدالة $f(x) = |x| + 2$ يمكن الحصول عليه بانسحاب بيان الدالة الأساسية $g(x) = |x|$ بمقدار وحدتين في الاتجاه الموجب لمحور الصادات رأسياً (لأعلى).

ملخص :



تعميم:

يكون منحني الدالة $f(x) = |x| + a$ هو نفس منحني الدالة الأساسية $g(x) = |x|$ وبإزاحة رأسية مقدارها $|a|$ وحدة في الاتجاه:

1. الموجب لمحور الصادات (رأسيًا للأعلى) عندما $a > 0$
2. السالب لمحور الصادات (رأسيًا للأسفل) عندما $a < 0$

تحقق من فهمك (4)

ارسم بيان كل من الدوال التالية باستخدام التحويلات الهندسية والدالة الأساسية $g(x) = |x|$:

- | | |
|----------------------|-----------------|
| a $f(x) = x + 3$ | b $y = x - 2$ |
| c $f(x) = x - 2.5$ | d $y = x - 1$ |

3. الانسحاب المركب: إزاحة أفقية تليها إزاحة رأسية لمنحني الدالة $f(x) = |x|$

ارسم بيان كل دالة مما يلي باستخدام دالة المرجع والإزاحة:

- | | |
|------------------------|------------------------|
| a $f(x) = x - 4 + 2$ | b $f(x) = x + 3 - 1$ |
|------------------------|------------------------|

مثال (5)

- a $f(x) = |x - 4| + 2$

الحل:

بيان الدالة $f(x) = |x - 4| + 2$ يمكن الحصول عليه بإزاحة لبيان الدالة الأساسية $g(x) = |x|$

1 - لإيجاد صفر المطلق أربع وحدات في الاتجاه الموجب لمحور السينات (إزاحة أفقية).

2 - إزاحة وحدتين للأعلى في الاتجاه الموجب

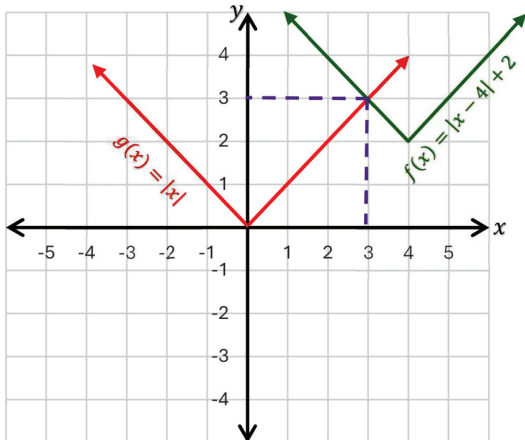
لمحور الصادات (إزاحة رأسية).

3 - نرسم الدالة.

4 - ملحوظة: نقطة تقاطع منحني الدالة $f(x)$

مع الدالة الأساسية $g(x)$ هي $(3, 3)$

اذكر ما تعبر عنه هذه النقطة ؟



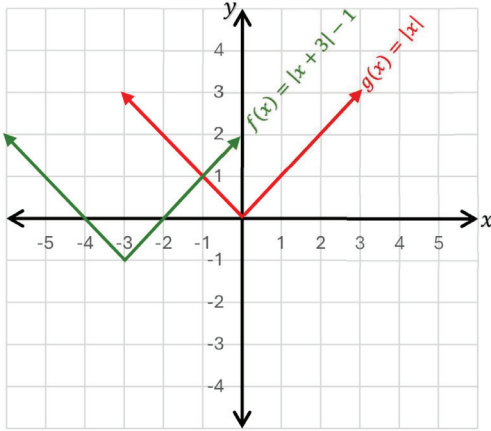
b $f(x) = |x + 3| - 1$

بيان الدالة $f(x) = |x + 3| - 1$ يمكن الحصول عليه بإزاحة لبيان الدالة الأساسية $g(x) = |x|$

1 - ثلاث وحدات في الاتجاه السالب لمحور السينات (إزاحة أفقية).

2 - إزاحة وحدة واحدة للأسفل في الاتجاه السالب لمحور الصادات (إزاحة رأسية).

3 - نرسم الدالة.



ملحوظة:

منحنى الدالة $f(x) = |x + 3| - 1$ يقطع محور السينات عند $x = -4$ ، $x = -2$

تعميم:

منحنى الدالة $f(x) = |x + a| + b$ هو نفس منحنى الدالة الأساسية $g(x) = |x|$ بإزاحة:

1 - أفقية (محور السينات) مقدارها $|a|$ مع مراعاة الاتجاه يميناً أو يساراً.

2 - رأسية (محور الصادات) مقدارها $|b|$ مع مراعاة الاتجاه للأعلى أو للأسفل.

تحقق من فهمك (5)

ارسم بيان الدوال التالية باستخدام دالة المرجع والإزاحة :

a $f(x) = |x + 3| + 2$

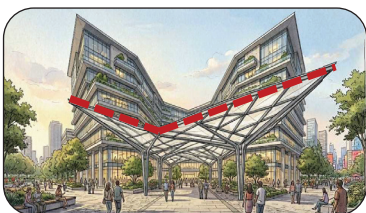
b $y = |x - 2| - 1$

c $f(x) = |x + 2| - 2$

d $y = |x - 1| + 3$

استخدام النماذج

صمم مهندس مظلة مدخل مبنى على شكل حرف V ، ويمكن تمثيل شكلها بالدالة $y = |x|$ ثم عدّل المظلة بإزاحة 3 وحدات إلى اليمين و4 وحدات إلى الأعلى.

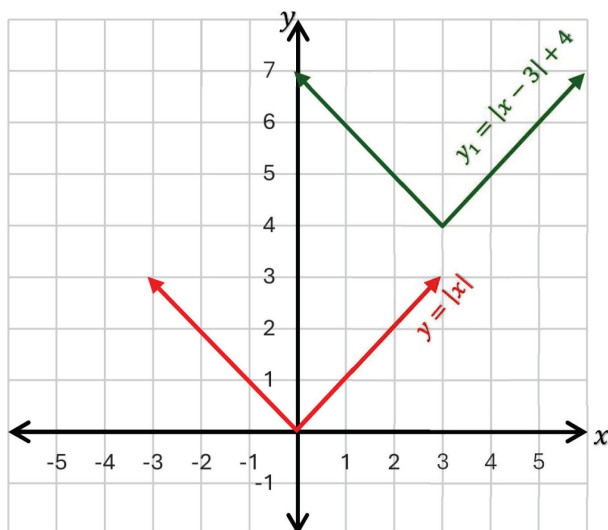


المطلوب:

- اكتب الدالة الجديدة.
- حدّد إحداثيات رأس المنحنى.
- ارسم الدالة الجديدة.

الحل:

- ∴ الدالة $y = |x|$ ثم تحريكها 3 وحدات إلى اليمين ، 4 وحدات إلى الأعلى ∴ الدالة الجديدة هي : $y_1 = |x - 3| + 4$
- إحداثيات رأس المنحنى هو (3,4)
- التمثيل البياني للدالة الجديدة هي:



تذكروا!

رأس دالة القيمة المطلقة

$$f(x) = |ax + b| + c$$

هو $\left(-\frac{b}{a}, c\right)$

الانعكاس في محور السينات للدالة الأساسية $g(x) = |x|$ Reflection across the x-axis of the parent function $g(x) = |x|$

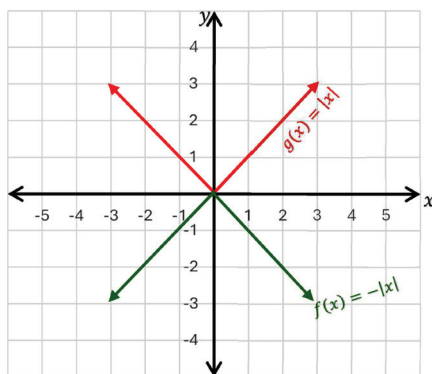
$$f(x) = -|x|$$

ارسم بيان دالة:

استكشف

الحل:

$$f(x) = \begin{cases} -(x) & : x \geq 0 \\ -(-x) & : x < 0 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} -x & : x \geq 0 \\ x & : x < 0 \end{cases}$$



x	-1	0	1
y	-1	0	-1

نلاحظ أن:

بيان الدالة $f(x) = -|x|$ هو انعكاس في محور السينات لبيان الدالة الأساسية $g(x) = |x|$

انتبه!

$$|a-x| = |x-a|$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$|-x| = |x|$$

$$|-ax| = |ax|$$

$$\sqrt{(x+a)^2} = |x+a|$$

تعميم:

• إذا كانت $g(x) = |x|$ ، $f(x) = -|x+b|$ يجب مراعاة

ترتيب التحويلات الهندسية لرسم بيان الدالة $f(x)$:

1 - انعكاس في محور السينات أولاً للدالة الأساسية.

2 - إزاحة أفقية (يميناً أو يساراً).

3 - إزاحة رأسية (للأعلى أو للأسفل).

4 - تحديد الرأس للمنحنى و محور التماثل.

ارسم بياناً منحنى الدالة $f(x) = -|x+1| + 2$

مستخدمًا منحنى الدالة الأساسية $g(x) = |x|$

مثال (6)

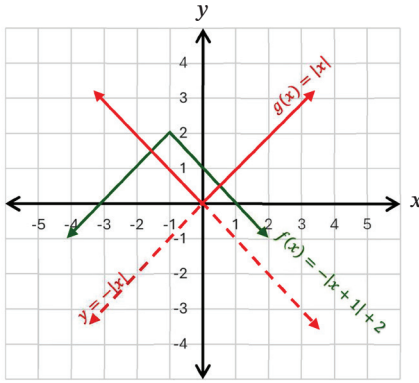
الحل:

بيان الدالة $f(x) = -|x+1| + 2$ يمكن الحصول عليه بـ

1 - انعكاس لبيان الدالة الأساسية $g(x) = |x|$

2 - ثم إزاحة أفقية مقدارها وحدة واحدة لجهة اليسار

3 - ثم إزاحة رأسية مقدارها وحدتان للأعلى



ملحوظة :

منحنى الدالة $f(x) = -|x+1| + 2$

يقطع محور السينات

عند $x = -3$ ، $x = 1$

تحقق من فهمك (6)

ارسم بيانيًا كلا من الدوال التالية مستخدمًا بيان منحنى الدالة الأساسية $g(x) = |x|$:

a $f(x) = -|x - 2| + 3$

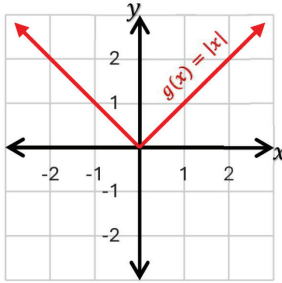
b $f(x) = -|x + 1| - 2$

c $f(x) = -|x - 1| - 1$

d $f(x) = -|x + 2| + 1$

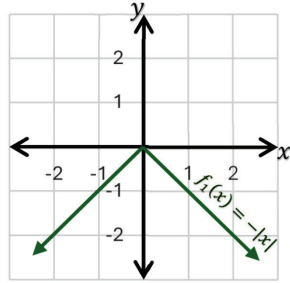
فكر معي: هل يمكن رسم بيان الدالة $f(x) = |2x - 4| + 3$ باستخدام التحويلات الهندسية؟

من منحنى الدالة الأساسية $g(x) = |x|$ ونحصل على منحنى الدالة $f(x) = -|x + 1| + 2$ كالآتي :



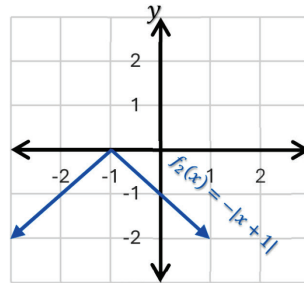
من منحنى الدالة الأساسية

$g(x) = |x|$



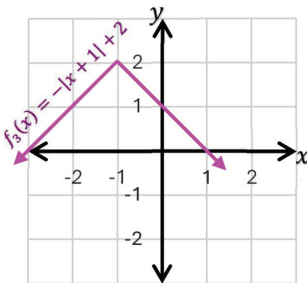
الانعكاس في محور السينات

$f_1(x) = -|x|$



إزاحة أفقية وحدة واحدة إلى اليسار

$f_2(x) = -|x + 1|$

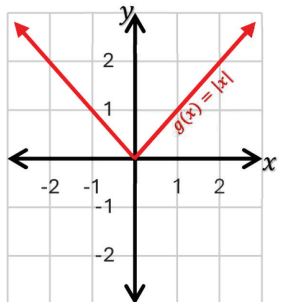


إزاحة رأسية وحدتان للأعلى

$f_3(x) = -|x + 1| + 2$

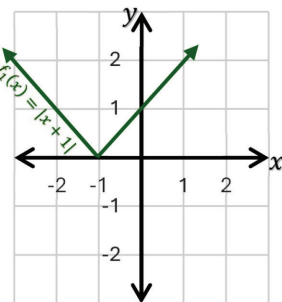
سؤال : هل يمكن أن نعكس الترتيب بإجراء الإزاحة الرأسية أو الإزاحة الأفقية قبل إجراء الانعكاس في محور السينات؟

بالطبع لا يمكننا لأننا سوف نحصل على منحنى آخر غير المنحنى المطلوب ، وسيكون على الصورة التالية.



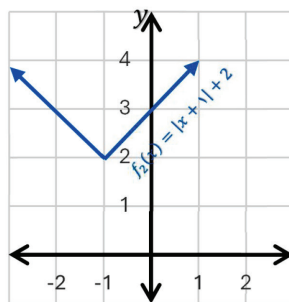
من منحنى الدالة الأساسية

$g(x) = |x|$



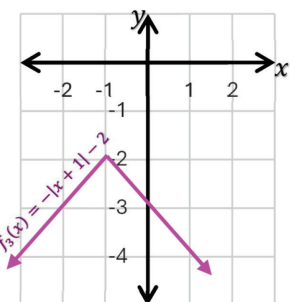
إزاحة أفقية وحدة واحدة إلى اليسار

$f_1(x) = |x + 1|$



إزاحة رأسية وحدتان للأعلى

$f_2(x) = |x + 1| + 2$



الانعكاس في محور السينات

$f_3(x) = -|x + 1| + 2$

وهذا المنحنى ستكون معادلته هي $f(x) = -|x + 1| + 2$ ، يمكننا التحقق :

بإعادة تعريف القيمة المطلقة ثم رسم بيان الدالة ، أو تحديد الرأس ومحور التماثل وفتحه بيان الدالة.

أولاً - البنود الموضوعية :

■ في البنود من (1-5) اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة:

(1) بيان الدالة $f(x)=|x|$ ينطبق على بيان الدالة $g(x)=x$ (a) (b)

(2) بيان الدالة $f(x)=|x|$ هو انعكاس لبيان الدالة $g(x)=-|x|$ حول (a) (b)

محور السينات

(3) بيان الدالة $f(x)=|x-4|+2$ يمكن الحصول عليه بانسحاب بيان (a) (b)

الدالة $g(x)=|x|$ في الاتجاه المحدد 4 وحدات جهة اليمين ووحدتان للأعلى

(4) محور التماثل للدالة $f(x)=|x-3|$ هو $x=3$ (a) (b)

(5) مدى الدالة $f(x)=|x+3|-3$ هو $[-3, \infty)$ (a) (b)

■ في البنود من (1-2) اختر الإجابة الصحيحة :

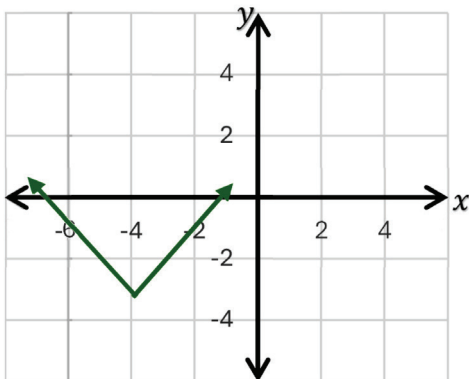
(1) أي من الدوال التالية رأس مُنَحْنَاهَا $(-3, 2)$:

(a) $y=|x+3|+2$

(b) $y=|x-3|+2$

(c) $y=|x+3|-2$

(d) $y=|x-3|-2$



(2) أي من قواعد الدوال التالية تمثل منحنى الدالة المرسوم :

(a) $y=|x-4|-3$

(b) $y=|x-4|+3$

(c) $y=|x+4|+3$

(d) $y=|x+4|-3$

ثانيًا - أسئلة المقال :

(1) مثل بيانيًا فيما يلي كلاً من الدوال التالية ثم حدّد كلاً من مجالها ومداها :

(a) $g(x) = |-3x|$

(d) $f(x) = 2|x|$

(b) $h(x) = |x+4|$

(e) $g(x) = |x|+3$

(c) $f(x) = 2|x-4|-6$

(2) ارسم بيانيًا كلاً من الدوال التالية مستخدماً التحويلات الهندسية للدالة الأساسية $g(x) = |x|$:

(a) $f(x) = |x+5|$

(d) $h(x) = -|x+3|$

(b) $h(x) = |x-2|$

(e) $f(x) = -|x-4|+3$

(c) $h(x) = |x|-2$

(f) $f(x) = |1-x|+2$



2(e)

(3) ارسم بيانيًا كلاً من الدالتين على نفس المستوى الإحداثي ، ثم أوجد الإحداثيات السينية

لنقاط تقاطعهم

(a) $f(x) = |x-2|$

, $g(x) = -|x-1|+3$

(b) $f(x) = |x-3|$

, $g(x) = 3-|x|$

(c) $f(x) = |x-2|-3$

, $g(x) = 4-|x-2|$

مهارات تفكير عليا



■ ارسم بيان الدالة : $f(x) = \sqrt{(x-2)^2}$

■ مَثِّلْ كُلَّ دَالَةٍ مِمَّا يَلِيَّ بيانيًا ، ثم حدّد كلاً من مجالها و مداها:

(a) $f(x) = 3 - |2x|$

(b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$

■ اختر الإجابة الصحيحة:

المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x) = |x+2|-2$

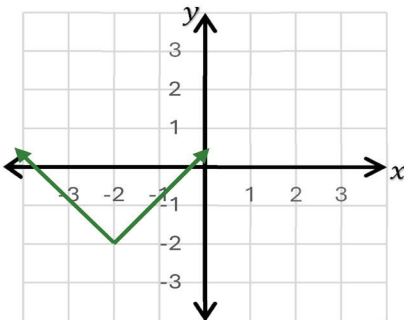
ومحور السينات تساوي وحدة مربعة

(a) 2

(b) 3

(c) 5

(d) 4



فكرة الدرس:



حل معادلة القيمة المطلقة جبرياً على الصورة :

$$1. \quad |ax+b| = |cx+d|$$

$$2. \quad |ax+b| = cx+d$$

المصطلحات:



1. معادلة القيمة المطلقة Absolute Value Equation

2. مجموعة الحل Solution Set (S.S.)

مسألة الدرس:



أراد حمد أن يشتري كرة قدم للمباراة التي ستقام في ملعب المدرسة فلنساعد حمداً لإيجاد الكرة المناسبة ، علماً بأن الكتلة المثالية لكرة القدم هي 430g ، ويسمح أن تزيد أو تنقص عن هذه الكتلة بمقدار 20g .



1. ما أكبر كتلة يمكن أن تكون لكرة القدم ؟

2. ما أقل كتلة يمكن أن تكون لكرة القدم ؟

3. اكتب معادلة قيمة مطلقة تمثل الموقف .

معادلات القيمة المطلقة (Absolute Value Equation)

معادلة القيمة المطلقة : هي معادلة تتضمن تعبيراً جبرياً داخل رمز القيمة المطلقة. ومن تعريف القيمة المطلقة فيمكن تحويل معادلة القيمة المطلقة إلى معادلتين مرتبطتين بها لا تحتويان على رمز القيمة المطلقة ، وذلك بجعل العبارة التي داخل القيمة المطلقة موجبةً مرةً وسالبةً مرةً أخرى .

مفهوم أساسي « حل معادلات القيمة المطلقة »

لحل المعادلة $|ax+b|=c$ حيث $c \geq 0$

نحل المعادلتين المرتبطتين بها وهما :

$$ax+b=c$$

أو

$$ax+b=-c$$

تعلمنا
فيما سبق:

- حل معادلات من

الدرجة الأولى.

- حل معادلات تربيعية.

- حل معادلات القيمة

المطلقة.

ملحوظة

مجموعة حل المعادلة
ويرمز لها بالرمز S.S.
هي مجموعة جميع قيم
المتغيرات التي تجعل
المعادلة صحيحة.

حل المعادلة على الصورة $|ax+b|=c, c \geq 0$

تعلّمنا فيما سبق أن حل معادلة القيمة المطلقة :

1 $|x|=A$

إذا كان $A > 0$ ، فإن
للمعادلة حلان هما :

$$x=A \quad \text{or} \quad x=-A$$

$$S=\{-A, A\}$$

2 $|x|=0$

إذا كان $A=0$ ، فإن
للمعادلة حل وحيد وهو :

$$x=0$$

$$S=\{0\}$$

3 $|x|=A$

إذا كان $A < 0$ ، فإن
للمعادلة ليس لها حل :

$$S=\emptyset$$

أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات التالية:

مثال توضيحي: **a** $|x-3|=2$ **b** $|3x+2|=0$ **c** $|5x+2|=-4$

الحل:

a $|x-3|=2$

$$\therefore |x-3|=2$$

$$\therefore x-3=2 \quad \text{or} \quad x-3=-2$$

$$\therefore x=5 \quad x=1$$

$\therefore$ مجموعة الحل هي :

$$S.S. = \{1, 5\}$$

b $|3x+2|=0$

$$\therefore |3x+2|=0$$

$$\therefore 3x+2=0$$

$$3x=-2$$

$$x = \frac{-2}{3}$$

$\therefore$ مجموعة الحل هي :

$$\therefore S.S. = \left\{ \frac{-2}{3} \right\}$$

c $|5x+2|=-4$

$$\therefore |5x+2|=-4$$

$$-4 < 0$$

$\therefore$ مجموعة الحل هي :

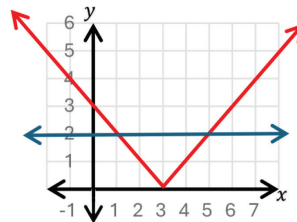
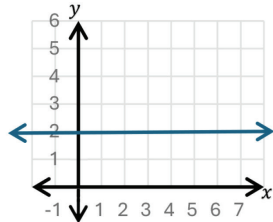
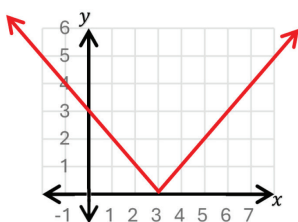
$$\therefore S.S. = \emptyset$$

من المثال التوضيحي:

$$f_1(x) = |x+3|$$

$$f_2(x) = 2$$

$$f_1(x) = f_2(x)$$



ملحوظة

1. $|A| \geq 0$ دائماً

2. $|A|=0 \Leftrightarrow A=0$

تذكر!

1. إذا كان $|x|=x$

فإن $x \geq 0$

$$x \in [0, \infty)$$

2. إذا كان $|x|=-x$

فإن $x \leq 0$

$$x \in (-\infty, 0]$$

ملحوظة

$$|a|=|b| \Leftrightarrow a^2=b^2$$

انتبه !

$$|a|=|b| \Leftrightarrow a=b$$

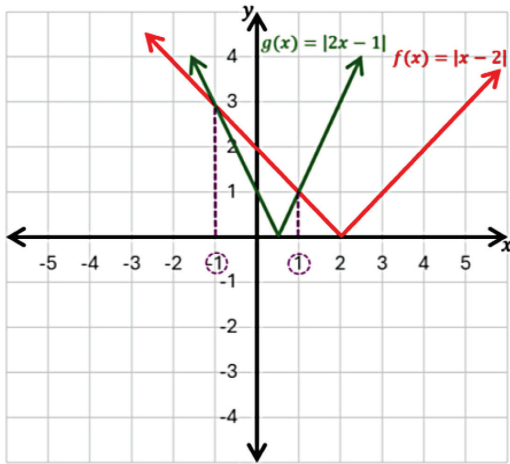
$$\text{or } a=-b$$

خواص القيمة المطلقة

لكل $a, b \in \mathbb{R}$ فإن :

1. $|a| \geq 0$
2. $|a+b| \leq |a| + |b|$
3. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
4. $|x-a| = |a-x|$
5. $\frac{|a|}{|b|} = \left| \frac{a}{b} \right|$, $b \neq 0$
6. $|x| = |-x|$
7. $|n|^2 = n^2$ حيث n عدد زوجي
8. $\sqrt{x^2} = |x|$ لأي عدد حقيقي x يكون

أولاً : حل المعادلة على الصورة $|ax+b| = |cx+d|$



1. ارسم بيان الدالة $f(x) = |x-2|$ وبيان الدالة $g(x) = |2x-1|$ على نفس المستوى الإحداثي، مستخدماً إحداثي رأس المنحنى ومحور التماثل في كل منهما:

x		2	
$f(x)$		0	
x		?	
$g(x)$		0	

2. من الرسم أوجد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع المنحنيين $f(x)$ ، $g(x)$

$$x_1 = \dots\dots\dots x_2 = \dots\dots\dots$$

3. تسمى مجموعة الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع المنحنيين

- مجموعة حل المعادلة

أي أن: مجموعة حل المعادلة $|x-2| = |2x-1|$

هي { ، }

وهذه الطريقة تسمى الطريقة البيانية لحل المعادلة $|x-2| = |2x-1|$

مثال (1) أوجد مجموعة حل المعادلة: $|x-2| = |2x-1|$

*** الحل الأول (باستخدام خواص القيمة المطلقة)**

نعلم أن $|a| = |b| \Leftrightarrow a = \pm b$
 $\therefore$ أي أن أحد المقدارين $\pm$ المقدار الآخر
 $\therefore |x-2| = |2x-1|$
 $\therefore x-2 = +(2x-1) \quad \text{or} \quad x-2 = -(2x-1)$
 $x-2 = 2x-1 \quad \quad \quad x-2 = -2x+1$
 $x-2x = 2-1 \quad \quad \quad x+2x = 2+1$
 $-x = 1 \quad \quad \quad 3x = 3$
 $x = -1 \quad \quad \quad x = 1$
 $\therefore S.S. = \{-1, 1\}$

*** الحل الآخر (بتربيع الطرفين)**

$\therefore |x-2| = |2x-1|$
 $\therefore (|x-2|)^2 = (|2x-1|)^2$
 $x^2 - 4x + 4 = 4x^2 - 4x + 1$
 $4x^2 - 4x + 1 - x^2 + 4x - 4 = 0$
 $3x^2 - 3 = 0$
 $3(x^2 - 1) = 0$
 $3(x-1)(x+1) = 0$
 $x-1 = 0 \quad \text{or} \quad x+1 = 0$
 $x = 1 \quad \quad \quad x = -1$
 $\therefore S.S. = \{-1, 1\}$

تحقق من فهمك (1)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $|x-1| = |x+2|$

ملحوظة: سوف تقتصر دراستنا على الحل الجبري والذي يعتمد على خواص القيمة المطلقة أو بعض العمليات الجبرية

أوجد مجموعة حل كل معادلة مما يلي:

(a) $|x+4| = |x+3|$ (b) $|2y+1| = |3y+4|$

تذكر!

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
 2. $|a| = |b|$
 فإن $|a|^2 = |b|^2$
 3. $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$

انتبه!

$x^2 - 1 = 0$
 $\therefore x^2 = 1$
 $\therefore \sqrt{x^2} = \sqrt{1}$
 $\therefore |x| = 1$
 $\therefore x = \pm 1$

انتبه!

$|a| = |b| \Leftrightarrow a = b$
 or $a = -b$

! انتبه

يمكنك حل المعادلة باستخدام:
 • خواص القيمة المطلقة.
 • بتربيع الطرفين.
 وهذا ما يسمى بالحل الجبري.

a) $|x+4| = |x+3|$

$\therefore |x+4| = |x-3|$

$\therefore x+4=x-3 \quad \text{or} \quad x+4=-(x-3)$

$x-x=-4-3$

$0x = -7$

عبارة خاطئة

لا يوجد حل

$x+4=-x+3$

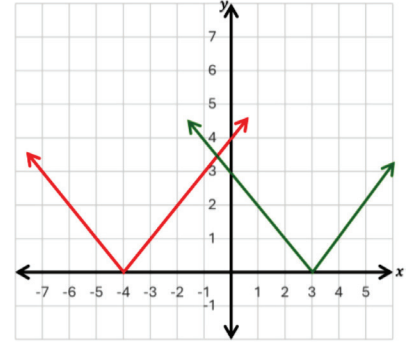
$x+x=-4+3$

$2x = -1$

$x = \frac{-1}{2}$

$\therefore S.S. = \left\{ \frac{-1}{2} \right\}$

الحل:
 باستخدام خواص القيمة المطلقة
 نعلم أن $|a| = |b| \Leftrightarrow |a| = \pm |b|$



a) $|2y+1| = |3y+4|$

$\therefore (|2y+1|)^2 = (|3y+4|)^2$

$4y^2 + 4y + 1 = 9y^2 + 24y + 16$

$9y^2 + 24y + 16 - 4y^2 - 4y - 1 = 0$

$5y^2 + 20y + 15 = 0$

$5(y^2 + 4y + 3) = 0$

$5(y+1)(y+3) = 0$

(÷5)

$5 \neq 0 \quad \text{or} \quad y+1=0 \quad \text{or} \quad y+3=0$

$y = -1$

$y = -3$

$\therefore S.S. = \{-1, -3\}$

بتربيع الطرفين

تحقق من فهمك (2)

أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية:

a) $|y-4| = |2y-5|$

b) $|2x-3| = |x+1|$

c) $|3y+1| = |y-2|$

d) $|x-4| = |2x-5|$

ثانيًا: حل المعادلة على الصورة $|ax+b|=cx+d$

مثال (3) أوجد مجموعة حل المعادلة: $|x-3|=3x-1$

الحل:

∴ القيمة المطلقة دائماً غير سالبة

∴ يجب أن يكون $3x-1 \geq 0$ وهذا ما نسميه شرط الحل

$$3x \geq 1$$

$$x \geq \frac{1}{3} \quad \therefore x \in \left[\frac{1}{3}, \infty \right)$$

∴ نقبل كل قيم x التي أكبر من أو تساوي $\frac{1}{3}$

أي أن مجموعة التعويض هي $\left[\frac{1}{3}, \infty \right)$ ويكون:

$$x-3 = +(3x-1)$$

or

$$x-3 = -(3x-1)$$

$$x-3 = 3x-1$$

$$x-3 = -3x+1$$

$$x-3x = 3-1$$

$$x+3x = 3+1$$

$$-2x = 2$$

$$4x = 4$$

$$x = -1$$

$$x = 1$$

$$-1 \notin \left[\frac{1}{3}, \infty \right)$$

$$1 \in \left[\frac{1}{3}, \infty \right)$$

∴ $x = -1$ ليس حلاً للمعادلة

∴ $x = 1$ حلاً للمعادلة

$$\therefore S.S. = \{ 1 \}$$

تحقق من فهمك (3)

أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية:

a $|2x-1|=x+2$

b $|2x+5|=x+5$

أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية:

a $|4x+2|=1-2x$

b $|x+4|+2x+3=0$

مثال (4)

الحل:

a $|4x+2|=1-2x$

$$|4x+2|=1-2x$$

$$1-2x \geq 0$$

∴ نوجد شرط الحل:

$$-2x \geq -1$$

$$x \leq \frac{-1}{-2}$$

$$x \leq \frac{1}{2}$$

$$\therefore x \in \left(-\infty, \frac{1}{2} \right]$$

تذكروا

1. $|x|=c, c \geq 0$ دائماً

2. $cx+d \geq 0$

$\Rightarrow x \geq \frac{-d}{c}, c \geq 0$

3. شرط الحل هو: ما يسمى بمجموعة التعويض (مجال الدالة)

4. $|ax+b|$

$$= \begin{cases} (ax+b) : x \geq \frac{-b}{a} \\ -(ax+b) : x < \frac{-b}{a} \end{cases}$$

! انتبه

إذا كانت $a > b, c < 0$
فإن $a \cdot b < b \cdot c$

! انتبه

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} |4x+2| \\ &= \left| \frac{1}{4} \cdot |4x+2| \right| \\ &= \left| \frac{1}{4} (4x+2) \right| \\ &= \left| x + \frac{1}{2} \right| \end{aligned}$$

! انتبه

1. $|3x-9|=3|x-3|$
2. $|3-x|=|x-3|$
3. $\sqrt{x^2-4x+4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$
4. $x^2 = |x|^2$

$$\begin{aligned} 4x+2 &= 1-2x \\ 4x+2x &= 1-2 \\ 6x &= -1 \end{aligned}$$

$$\therefore x = \frac{-1}{6}$$

$$x = \frac{-1}{6}, \frac{-1}{6} \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$$

or

$$\begin{aligned} 4x+2 &= -1+2x \\ 4x-2x &= -1-2 \\ 2x &= -3 \end{aligned}$$

$$\therefore x = \frac{-3}{2}$$

$$x = \frac{-3}{2}, \frac{-3}{2} \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$$

$$\therefore S.S. = \left\{ \frac{-1}{6}, \frac{-3}{2} \right\}$$

b) $|x+4| + 2x + 3 = 0$

$$|x+4| = -2x-3$$

∴ نوجد شرط الحل:

$$-2x-3 \geq 0$$

$$\therefore -2x \geq 3$$

$$x \leq \frac{-3}{2}$$

$$\therefore x \in \left(-\infty, \frac{-3}{2}\right]$$

$$\therefore x+4 = -2x-3$$

$$x+2x = -4-3$$

$$3x = -7$$

نتحقق من شرط الحل

$$x = \frac{-7}{3}, \frac{-7}{3} \in \left(-\infty, \frac{-3}{2}\right]$$

or

$$x+4 = 2x+3$$

$$x-2x = -4+3$$

$$x = 1$$

نتحقق من شرط الحل

$$x = 1, 1 \notin \left(-\infty, \frac{-3}{2}\right]$$

$$\therefore S.S. = \left\{ \frac{-7}{3} \right\}$$

تحقق من فهمك (4)

- أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية:

a) $|2\ell-3| = |4\ell-1|$

b) $|3x-1| + 4x - 13 = 0$



استخدام النماذج

يقع منزل سعد بين مدرسته و النادي الرياضي في منطقتة كما في الشكل :



وتوجد هذه المواقع الثلاثة على خط مستقيم يمر بحديقة الأحمدى ، تبعد المدرسة عن الحديقة 2 km ويبعد النادي الرياضي عن الحديقة 7 km في الاتجاه المعاكس، كم يبعد منزل سعد عن الحديقة إذا كان البعد بين المنزل والنادي الرياضي ضعف البعد بين المنزل والمدرسة ؟

الحل:



ليكن x موقع منزل سعد على خط الأعداد:

$$\therefore |x - (-2)| = |x + 2|$$

البعد بين المنزل والمدرسة

$$|7 - x| = |x - 7|$$

البعد بين المنزل والنادي الرياضي

$$\therefore |x - 7| = 2|x + 2|$$

$$|x - 7| = |2x + 4|$$

خواص القيمة المطلقة

$$\therefore x - 7 = 2x + 4$$

$$2x - x = -7 - 4$$

$$x = -11$$

مرفوضة لماذا؟

or

$$x - 7 = -(2x + 4)$$

$$x - 7 = -2x - 4$$

$$x + 2x = 7 - 4$$

$$3x = 3$$

$$x = 1$$

∴ يبعد منزل سعد عن الحديقة 1 km في اتجاه النادي الرياضي

أدرب وأحل المسائل

أولاً - البنود الموضوعية:

■ في البنود من (1-7) ظلل دائرة الإجابة الصحيحة :

حل المعادلة $|2x - 1| = x + 3$ هو (1)

(a) $x = 1$

(b) $x = 2$

(c) $x = -1$

(d) لا يوجد حل

أهمية الرياضة في حياة المتعلم

تساعد الرياضة على تحسين صحته الجسدية وزيادة نشاطه وتركيزه داخل الصف، كما تعزز ثقته بنفسه وتنمي لديه روح التعاون والانضباط مما يعكس إيجاباً على تحصيله الدراسي.

تذكر!

$$\forall a, b \in \mathbb{R}$$

$$|a - b| = |b - a|$$

$$|a| \cdot |b| = |a \cdot b|$$

انتبه!

$$2|A| = |2| \cdot |A|$$

$$= |2A|$$

من معالم بلادي:

«حديقة الأحمدى»

تعد حديقة الأحمدى من أبرز المعالم في محافظة الأحمدى وتتميز بمساحتها الخضراء وتصميمها الجميل، وهي مكان مناسب لممارسة الرياضة والتنزه للعائلات، وتعد من أقدم الحدائق المنظمة في الكويت.

(2) حل المعادلة $|x+2|=x+2$ هو

- (a) $x=-2$ (b) $x \in (-2, \infty)$ (c) $x \in [-2, \infty)$ (d) $\emptyset$

(3) حل المعادلة $|x-3|=|x+1|$ هو

- (a) $x=\pm 1$ (b) $x=-1$ (c) $x=1$ (d) $x=2$

(4) مجموعة حل المعادلة $|x-3|=|3-x|$ هي

- (a) $\{3\}$ (b) $\{-3, 3\}$ (c) $\mathbb{R}$ (d) $\emptyset$

(5) حل المعادلة $|x-4|=|4-x|$ هو

- (a) $x=-4$ (b) $x=4$ (c) $\mathbb{R}$ (d) لا يوجد حل

(6) حل المعادلة $|2x-3|=|x+3|$ هو

- (a) $x=0, x=6$ (b) $x=-5, x=0$ (c) $x=5, x=6$ (d) $x=\pm 6$

(7) مجموعة حل المعادلة $|x-2|+x=2$ هي

- (a) $\emptyset$ (b) $(-\infty, 2)$ (c) $(-\infty, 2]$ (d) $\{2\}$

ثانيًا - أسئلة المقال:

■ أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية:

(a)



(a) $|x-2|=|x+4|$

(c) $|4-5x|+|3x+1|=0$

(e) $|2y+3|=3y-2$

(g) $|2i-3|=4i-1$

(j) $|x+4|+23=17$

(k) $|2x+6|=x-3$

(b) $|x-4|=|x+2|$

(d) $|x-3|=2x-1$

(f) $|x-1|=5x+10$

(h) $|3y-7|=2y-5$

(i) $\frac{1}{2}|8x-2|=x+2$



مهارات تفكير عليا



(1) حل المعادلة مستخدمًا خواص القيمة المطلقة: $(x+5)^2=9$

(2) أوجد مجموعة حل المعادلتين التاليتين: (a) $|3x-9|-|3-x|=10$ (b) $\sqrt{x^2-2x+1}+x=5$

(3) اختر الإجابة الصحيحة:

إذا كانت مجموعة حل المعادلة $|x-a|=b$ هي $\{5, 11\}$ فإن (a, b)

- (a) $(-8, 3)$ (b) $(-3, 8)$ (c) $(8, 3)$ (d) $(3, 8)$

حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد «جبرياً وبيانياً» Solving a Quadratic Equation in one Variable Algebraically and Graphically

فكرة الدرس:



حل المعادلة التربيعية باستخدام القانون - بيانياً.

المصطلحات:



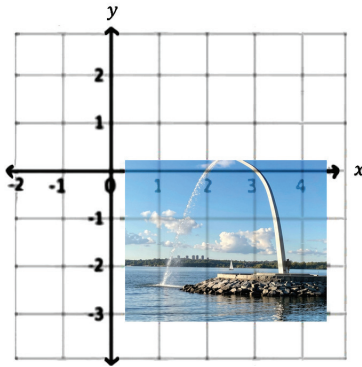
Discriminant

Quadratic Formula

1. المميز

2. القانون العام

مسألة الدرس:



في الشكل المقابل يُمثل الماء الخارج من النافورة منحنى قطع مكافئ ، ويمكن تمثيل هذا المسار بالدالة التربيعية :

$$y = -x^2 + 5x - 6$$

1. أوجد الإحداثيات السينية لنقطتي تقاطع المنحنى مع المحور السيني ؟
2. أوجد إحداثيات الرأس (أعلى نقطة للمنحنى) ؟

مفاهيم أساسية:

1. الدالة الثابتة : $c \in \mathbb{R}$, $f(x) = c$ (دالة من الدرجة الصفرية) وتمثيلها البياني يكون خط مستقيم أفقي يوازي محور السينات ويقطع محور الصادات عند القيمة c .

2. الدالة الخطية : $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $f(x) = ax + b$

(دالة من الدرجة الأولى) وتمثيلها البياني على شكل خط مستقيم.

3. الدالة التربيعية : $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $f(x) = ax^2 + bx + c$

(دالة من الدرجة الثانية) تمثل قطع مكافئ

مفتوحاً للأعلى إذا كانت $a > 0$ ، ومفتوحاً للأسفل إذا كانت $a < 0$

تذكروا!

$$(a \pm b)^2 =$$

$$a^2 \pm 2ab + b^2$$

ملحوظة

الدالة التربيعية تسمى
(دالة القطع المكافئ)
تتغير فتحة القطع
المكافئ للأسفل إذا
كان المعامل الرئيسي
لها عددًا سالبًا.

ملحوظة

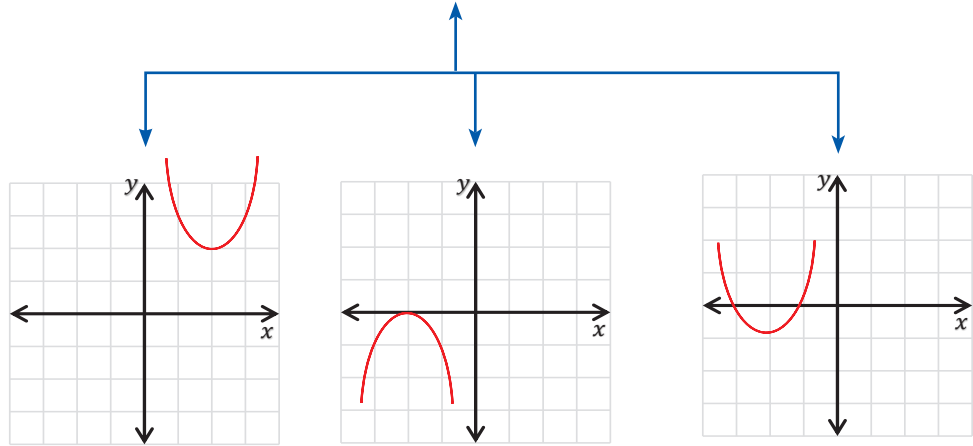
مجموعة الحل هي :
الإحداثيات السينية
لتقاطع المنحنى مع
محور السينات.

* حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد (المعادلة التربيعية) بيانياً:

لحل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد (المعادلة التربيعية) بيانياً نتبع الخطوات التالية:

1. ضع المعادلة على الصورة: $ax^2+bx+c=0$
2. افرض أن: $f(x)=ax^2+bx+c$ ، ثم ارسم منحنى الدالة f
3. عين نقاط تقاطع منحنى الدالة f مع محور السينات فتكون الاحداثيات السينية لنقاط التقاطع هي:

حلول المعادلة $f(x)=0$



المنحنى لا يقطع
محور السينات، لا
يوجد حل للمعادلة
في $\mathbb{R}$

عدد الحلول = 0

المنحنى يقطع محور
السينات في نقطة واحد،
يوجد حلان حقيقيان
متساويان للمعادلة في $\mathbb{R}$

عدد الحلول = 1 مكرر

المنحنى يقطع
محور السينات
في نقطتين، يوجد
حلان مختلفان
للمعادلة في $\mathbb{R}$

عدد الحلول = 2

أوجد بيانياً مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية في $\mathbb{R}$
مستعيناً بالفترة الموضحة:

- a) $x^2-2x-3=0$, $[-2, 4]$
- b) $-x^2-4x-4=0$, $[-4, 0]$
- c) $x^2+2=0$, $[-2, 2]$

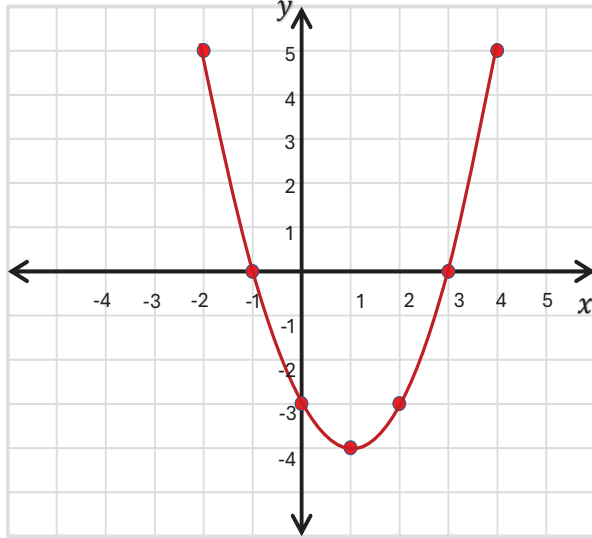
مثال (1)

a $x^2 - 2x - 3 = 0$, $[-2, 4]$

نفرض أن $f(x) = x^2 - 2x - 3$

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	5	0	-3	-4	-3	0	5

نكون جدول القيم



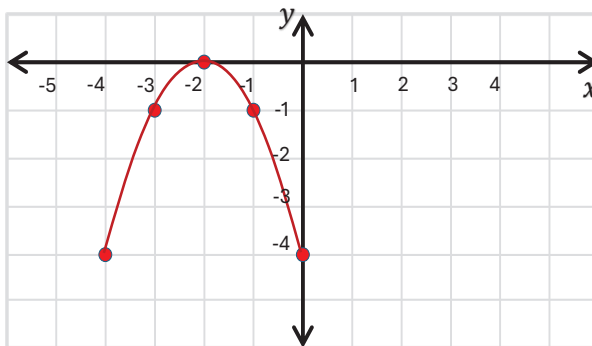
من الرسم :
نلاحظ أن الإحداثيات السينية
لنقاط تقاطع المنحنى مع
محور السينات هي $x = -1$
 $x = 3$ ، وبالتالي:
فإن مجموعة الحل هي
 $S.S. = \{-1, 3\}$

b $-x^2 - 4x - 4 = 0$, $[-4, 0]$

نفرض أن $f(x) = -x^2 - 4x - 4$

نكون جدول القيم

x	-4	-3	-2	-1	0
$f(x)$	-4	-1	0	-1	-4



من الرسم :
نلاحظ أن الإحداثيات
السينية لنقاط تقاطع المنحنى
مع محور السينات هي
 $x = -2$ ، وبالتالي:
فإن مجموعة الحل هي
 $S.S. = \{-2\}$

! إنتبه

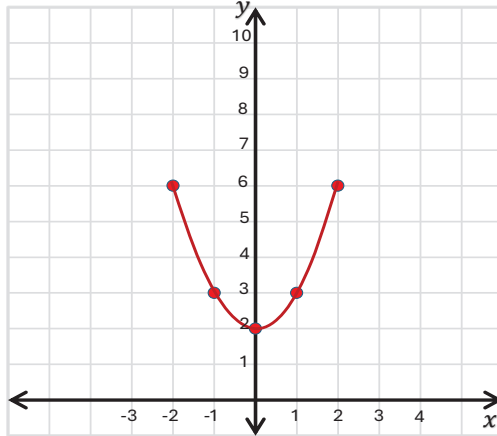
الإحداثيات السينية
لنقاط تقاطع المنحنى
مع محور السينات هي
التي عندها $f(x) = 0$

c $x^2 + 2 = 0$, $[-2, 2]$

نفرض أن $f(x) = x^2 + 2$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	6	3	2	3	6

نكون جدول



من الرسم :
نلاحظ أن المنحنى لا يقطع
محور السينات نهائياً وبالتالي :
فإن مجموعة حل المعادلة هي

$$S.S. = \emptyset$$

تحقق من فهمك (1)

أوجد بياناً مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية في $\mathbb{R}$ مستعيناً بالفترة الموضحة :

- a $x^2 - 6x + 8 = 0$, $[1, 5]$
b $x^2 + 4x + 4 = 0$, $[-4, 0]$
c $x^2 + 4x + 5 = 0$, $[-4, 0]$

تعلمنا سابقاً :

إيجاد حل المعادلة التربيعية باستخدام التحليل إلى عاملين وباستخدام إكمال المربع، ولكن يوجد قانون عام لحل المعادلة التربيعية.
والآن سنقوم باستنتاج القانون العام لحل أي معادلة تربيعية.

استنتاج القانون العام لحل المعادلة التربيعية:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad , a \neq 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$ax^2 + bx = -c$$

إضافة المعكوس الجمعي لـ c للطرفين

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

قسمة الطرفين على a

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

بإكمال المربع

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = +\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

بتوحيد المقام

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}, \quad b^2 - 4ac \geq 0$$

ب طرح $\frac{b}{2a}$ للطرفين

$$x = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} - \frac{b}{2a}$$

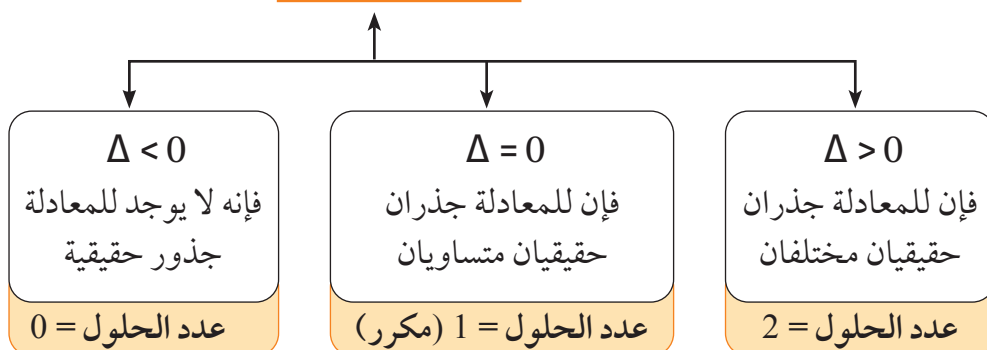
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

القانون العام لحل المعادلات التربيعية في متغير واحد وهو:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad b^2 - 4ac \geq 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

يُسمى المقدار $b^2 - 4ac$ مميز المعادلة التربيعية ، ويرمز له بالرمز Δ ويقرأ (دلتا) ، والمميز هو الذي يميز نوع الجذرين ويحدد عدد الحلول الحقيقية للمعادلة بدون حلها ، أي أن

$$\Delta = b^2 - 4ac$$



حدد عدد الحلول الحقيقية لكل معادلة من المعادلات التالية بدون حل المعادلة:

(a) $4x^2 - 4x - 3 = 0$

(b) $2x^2 - 4x + 2 = 0$

(c) $x^2 + 2x + 3 = 0$

مثال (2)

تذكروا!

المربع الكامل:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$\sqrt{x^2} = |x|^2$$

$$\sqrt{(x+a)^2} = |x+a|$$

$$|x+a| = c, \quad c > 0$$

$$\therefore x+a = \pm c$$

إنتبه!

المعادلة التربيعية مثل القفل له مفتاح ثابت والقانون العام هو المفتاح الذي يفتح أي معادلة تربيعية مهما كانت صعبة، وهو خطه إنقاذ ثابت لحل المعادلة التربيعية التي يستحيل حلها بالتحليل.

الحل:

a $4x^2 - 4x - 3 = 0$

$a=4$ نوجد a, b, c

$b=-4$

$c=-3$

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac$ المميز

$= (-4)^2 - 4(4)(-3)$

$= 64$

$\therefore \Delta > 0$

$\therefore$ عدد الحلول = 2

b $2x^2 - 4x + 2 = 0$

$a=2$ نوجد a, b, c

$b=-4$

$c=2$

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac$ المميز

$= (-4)^2 - 4(2)(2)$

$= 0$

$\therefore \Delta = 0$

$\therefore$ عدد الحلول = 1 (مكرر)

c $x^2 + 2x + 3 = 0$

$a=1$ نوجد a, b, c

$b=2$

$c=3$

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac$ المميز

$= (2)^2 - 4(1)(3)$

$= -8$

$\therefore \Delta < 0$

$\therefore$ عدد الحلول = 0

تحقق من فهمك (2)

حدد عدد الحلول الحقيقية لكل معادلة من المعادلات التالية بدون حل المعادلة:

a $2x^2 - 7x - 4 = 0$

b $x^2 - 10x + 25 = 0$

c $3x^2 - 2x + 2 = 0$

d $x^2 = 15$

e $x^2 - x = 0$

f $2x^2 - 8x + 8 = 0$

أوجد مجموعة حل المعادلات التالية باستخدام القانون:

a $x^2 - x - 5 = 0$

b $x^2 - 8 = 0$

c $x^2 = x + 1$

d $x^2 - 6x + 9 = 0$

مثال (3)

a $x^2 - x - 5 = 0$

الحل:

$a=1, b=-1, c=-5$

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac$

$= (-1)^2 - 4(1)(-5) = 21$

$\therefore \Delta > 0$

1. نوجد قيم a, b, c

2. نوجد المميز Δ

3. نحدد نوع الجذرين

$\therefore$ للمعادلة حلان حقيقيان مختلفان هما:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

4. نوجد الجذرين باستخدام القانون

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{21}}{(2)(1)}$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \quad \text{or} \quad x = \frac{1 - \sqrt{21}}{2}$$

$$\therefore \text{S.S.} = \left\{ \frac{1 + \sqrt{21}}{2}, \frac{1 - \sqrt{21}}{2} \right\}$$

b) $x^2 - 8 = 0$

$\therefore x^2 - 8 = 0$

$a = 1, b = 0, c = -8$

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac$

$= (0)^2 - 4(1)(-8) = 32$

$\therefore \Delta > 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x = \frac{-(0) \pm \sqrt{32}}{(2)(1)}$

$x = \frac{\sqrt{32}}{2} = 2\sqrt{2} \quad \text{or} \quad x = \frac{-\sqrt{32}}{2} = -2\sqrt{2}$

$\therefore \text{S.S.} = \{ 2\sqrt{2}, -2\sqrt{2} \}$

c) $x^2 = x + 1$

$x^2 - x - 1 = 0$

$a = 1, b = -1, c = -1$

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac$

$= (-1)^2 - 4(1)(-1) = 5$

$\therefore \Delta > 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{5}}{(2)(1)}$

$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{or} \quad x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

$\therefore \text{S.S.} = \left\{ \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right\}$

d) $x^2 - 6x + 9 = 0$

$a = 1, b = -6, c = 9$

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac$

$= (-6)^2 - 4(1)(9) = 0$

$\therefore \Delta = 0$

1. نوجد قيم a, b, c

2. نوجد المميز Δ

3. نحدد نوع الجذرين

$\therefore$ للمعادلة حلان حقيقيان مختلفان هما :

4. نوجد الجذرين باستخدام القانون

! انتبه

توضع المعادلة دائماً

على الصورة العامة :

$ax^2 + bx + c = 0$

نوجد قيمة المميز Δ

فإن :

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

! انتبه

في المعادلة التربيعية :

$ax^2 + bx + c = 0$

إذا كانت $b = 0$

نوجد قيمة المميز Δ

فإن :

$x = \frac{\pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

معلومة i

معلومة :

العدد الذهبي يساوي

$1.618 \approx x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

تقريباً

ملحوظة

$$\begin{aligned}x^2 - 8 &= 0 \\x^2 &= 8 \\\sqrt{x^2} &= \sqrt{8} \\|x| &= 2\sqrt{2} \\x &= \pm 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

إنتبه !

إذا كانت $\Delta = 0$
فإن حل المعادلة هو
 $x = \frac{-b}{2a}$

إنتبه !

مجموعة حل المعادلة
يرمز له بالرمز $S.S.$

ملحوظة

إذا كان معامل x^2 عدد
سالِب فإن منحنى الدالة
التربيعية يكون مفتوحًا
للأسفل.

$$\begin{aligned}x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\x &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{(2)(1)}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$$

$$\therefore S.S. = \{ 3 \}$$

4. نوجد الجذرين باستخدام القانون

تحقق من فهمك (3)

أوجد مجموعة حل المعادلات التالية باستخدام القانون :

a $x^2 - 4x + 2 = 0$

b $4x^2 - 5x + 1 = 0$

c $x^2 - 2x + 1 = 0$

d $x^2 - 6x + 8 = 0$

حل المعادلة التالية باستخدام القانون : $x^2 - 3x = 0$

مثال (4)

$$x^2 - 3x = 0$$

الحل: 1. الصورة العامة للمعادلة

$$a = 1, b = -3, c = 0$$

2. نوجد قيم a, b, c

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac$$

3. نوجد المميز Δ

$$= (-3)^2 - 4(1)(0) = 9$$

4. نحدد نوع الجذرين

$$\therefore \Delta > 0$$

∴ للمعادلة حلان حقيقيان مختلفان هما :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

5. نوجد الجذرين باستخدام القانون

$$x = \frac{3 + \sqrt{9}}{2} \quad \text{or} \quad x = \frac{3 - \sqrt{9}}{2} \quad \therefore \text{حل المعادلة:}$$

تحقق من فهمك (4)

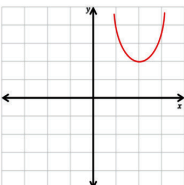
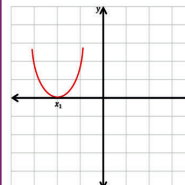
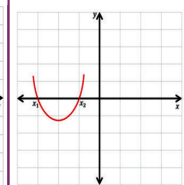
حل المعادلتين التاليتين باستخدام القانون .

a $x^2 + 7x + 10 = 0$

b $2x^2 - 5x - 52 = 0$

تعميم :

للدالة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ حيث $a, b, c \in \mathbb{R}$ حيث $a \neq 0$

المميز	$b^2 - 4ac < 0$ سالِب	$b^2 - 4ac = 0$ صفر	$b^2 - 4ac > 0$ موجب
عدد الحلول	لا يوجد حلول حقيقية	حلان حقيقيان متساويان	حلان حقيقيان مختلفان
التمثيل البياني			

عدنان فرديان متتاليان مجموع مربعيهما 34 فما العدنان؟

مثال (5)

الحل: نفرض أن العدد الفردي الأول $x =$

$\therefore$ العدد الفردي الثاني $x+2 =$

$\therefore$ مجموع مربعي العددين $34 =$

$$(x)^2 + (x+2)^2 = 34$$

$$x^2 + x^2 + 4x + 4 - 34 = 0$$

$$2x^2 + 4x - 30 = 0$$

$$2(x^2 + 2x - 15) = 0$$

$$2 \neq 0, \therefore x^2 + 2x - 15 = 0 \text{ بالتحليل}$$

$$(x-3)(x+5) = 0$$

$$x-3=0$$

or

$$x+5=0$$

$$\therefore x=3$$

or

$$x=-5$$

العدد الفردي الأول 3

العدد الفردي الثاني 5

العدد الفردي الأول -5

العدد الفردي الثاني -3

$\therefore$ العدنان فرديان هما 3, 5 أو -5 و -3

هل يمكن الحل بطريقة أخرى؟

تحقق من فهمك (5)

a أوجد عددين زوجيين متتاليين مجموع مربعيهما 100

b مستطيل يزيد طوله عن عرضه بمقدار 3cm ومساحته $40cm^2$

أوجد بعدي المستطيل .

استخدام النماذج

ملعب كرة القدم في استاد جابر الدولي في الكويت مستطيل الشكل ، إذا كان عرض الملعب x متراً ، وكان طوله يزيد عن عرضه بمقدار 37 متراً ، فإذا علمت أن مساحة الملعب 7140 متراً مربعاً:



أوجد عرض الملعب و طوله ؟

الحل:

مساحة المنطقة المستطيلة = الطول $\times$ العرض

$$\text{مساحة الملعب : } x(x+37) = 7140$$

إنتبه !

إذا كان العدد هو x فإن :

- ضعف العدد $2x =$

- ثلاثة أمثال العدد $3x =$

- العدد الذي يليه $x+1 =$

- مربع العدد $x^2 =$

- عدد فردي فإن العدد

الفردي الذي يليه هو

$x+2$

- عدد زوجي فإن العدد

الزوجي الذي يليه هو

$x+2$

ملحوظة

الأبعاد لا يمكن أن تكون قيمها بالسالب

من معالم
بلادي:

«استاد جابر»

استاد جابر الأحمد الدولي هو أكبر ملعب رياضي في دولة الكويت ويعد من أهم المنشآت الرياضية ويسمى بهذا الاسم تكريماً للأمير الراحل الشيخ جابر الأحمد الصباح ، رحمه الله .



$$x^2 + 37x - 7140 = 0$$

تحويل المساحة إلى الصورة العامة للدالة التربيعية

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

نستخدم القانون العام

$$x = \frac{-37 \pm \sqrt{(37)^2 - 4(1)(7140)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-37 + \sqrt{173}}{2} \quad \text{or} \quad x = \frac{-37 - \sqrt{173}}{2}$$

$$x = 68 \quad (\text{مقبولة}) \quad \text{or} \quad x = -105 \quad (\text{مرفوضة})$$

عرض الملعب هو 68 متراً $\Leftarrow 68 + 37 = 105$
 $\therefore$ طول الملعب يساوي 105 متراً

أتدرب وأحل المسائل

أولاً - البنود الموضوعية :

■ في البنود من (1-3) اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة :

- (1) جذرا المعادلة $x^2 - 5x + 6 = 0$ هما جذران حقيقيان متساويان (a) (b)
- (2) المعادلة $x^2 - 4x + 4 = 0$ لها جذران حقيقيان متساويان (a) (b)
- (3) جذرا المعادلة $x^2 + 9 = 0$ هما 3 ، -3 (a) (b)

■ في البنود من (1-7) اختر الإجابة الصحيحة :

$$(1) \text{ المعادلة } x^2 - 6x + 9 = 0$$

- (a) لها جذران حقيقيان مختلفان (b) لها جذران حقيقيان متساويان
- (c) ليس لها جذور حقيقية (d) ليس أيّاً مما سبق
- (2) المعادلة $x^2 + 4x + 5 = 0$

- (a) لها جذران حقيقيان مختلفان (b) لها جذران حقيقيان متساويان
- (c) ليس لها جذور حقيقية (d) ليس أيّاً مما سبق

$$(3) \text{ جذرا المعادلة } x^2 - 3x - 4 = 0 \text{ هما:}$$

- (a) -1,4 (b) 1,4 (c) -2,2 (d) -1,3

(4) حل المعادلة $x^2=9$ هو:

- (a) 3 (b) -3 (c) ± 3 (d) لا يوجد حل

(5) جذرا المعادلة $2x^2-7x+3=0$ هما:

- (a) $\frac{1}{2}, 3$ (b) 1, 3 (c) 2, 3 (d) 1, $\frac{3}{2}$

(6) حل المعادلة $x^2-25=0$ هو:

- (a) 5 (b) -5 (c) ± 5 (d) لا يوجد حل

(7) المعادلة التي مجموع جذريها يساوي 5 فيما يلي:

- (a) $(x+1)(x+4)=0$ (b) $x(x-5)=0$
(c) $(x-1)(x+6)=0$ (d) $(x-5)(x+1)=0$

ثانيًا - أسئلة المقال :

(1) أوجد حل كل معادلة من المعادلات التالية باستخدام القانون العام:

- (a) $x^2-3x-10=0$ (b) $2x^2-5x-3=0$
(c) $\frac{1}{2}x^2-3=0$ (d) $3x^2+x-2=0$



(b) 1

(2) أوجد نوع الجذرين للمعادلتين التاليتين ثم تحقق باستخدام القانون :

- (a) $x^2-4x-5=0$ (b) $2x^2-4x+2=0$

(3) أوجد حل كل معادلة من المعادلات التالية:

- (a) $\frac{1}{2}x(x+6)=8$ (b) $2x(x+1)=2$

(4) ثلاثة أعداد موجبة متتالية مربع أكبرهم يساوي مجموع مربعي العددين الآخرين، أوجد هذه الأعداد.

(5) عدنان زوجيان متتاليان مجموع مربعيهما يزيد عن حاصل ضربيهما بمقدار 28، فما العدنان ؟

! إنتبه

مربع العدد x هو x^2
ضعف العدد x هو $2x$

مهارات تفكير عليا



■ اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة:

(1) إذا كانت المعادلة $x^2 - 6x - k = 0$ لها جذران حقيقيان متساويان

فإن قيمة k هي 3

(a) (b)

■ في البنود من (2 - 5) اختر الإجابة الصحيحة:

(2) إذا كانت المعادلة $x^2 - kx + 4 = 0$ ليس لها جذور حقيقية فإن k تحقق:

(a) $k^2 > 16$ (b) $k^2 = 16$ (c) $k^2 < 16$ (d) $k > 16$

(3) مجموعة حل المعادلة $x^2 = 2 - |x|$ هي:

(a) $\{1, -1\}$ (b) $\{2, -2\}$ (c) $\{1, -2\}$ (d) $\{-1, 2\}$

(4) مجموعة حل المعادلة $x^2 - 2|x| = 8$ هي:

(a) $\{2, -2\}$ (b) $\{4, -4\}$ (c) $\{2, 4\}$ (d) $\emptyset$

(5) إذا كانت $|x| > x$ ، $x^2 + 2x - 3 = 0$ فإن $2x + 4$ تساوي:

(a) -2 (b) 2 (c) 6 (d) 8

(6) أوجد قيمة k بحيث يكون للمعادلة التالية جذران حقيقيان متساويان:

$$x^2 + kx + 4 = 0$$

(7) حل كلا من المعادلتين التاليتين:

(a) $x^2 - 3|x| - 28 = 0$

(b) $|x - 3|^2 - |x - 3| - 6 = 0$

إيجاد مجموع وناتج ضرب جذريّ معادلة تربيعية - تكوين المعادلة التربيعية بمعلومية جذريها

Sum and Product of Roots of a Quadratic Equation – Forming a Quadratic Equation

فكرة الدرس:



- إيجاد مجموع الجذرين وحاصل ضرب الجذرين من معادلة تربيعية
- تكوين المعادلة التربيعية بمعلومية جذريها

المصطلحات:



1. مجموعة الجذرين Sum of the Roots
2. حاصل ضرب الجذرين Product of the Roots

مسألة الدرس:



إذا علمت أن جذريّ المعادلة: $x^2 - 5x + 6 = 0$ هما $m=3$, $\ell=2$ فأجب عن الأسئلة التالية:

1. أوجد مجموع جذري المعادلة
2. أوجد ناتج ضرب جذري المعادلة
3. أوجد $a = \dots$, $b = \dots$, $c = \dots$
4. أوجد $\frac{-b}{a} = \dots$, $\frac{c}{a} = \dots$
5. هل توجد علاقة بين مجموع جذري المعادلة ومعاملات حدودها؟
6. هل توجد علاقة بين ناتج ضرب جذري المعادلة ومعاملات حدودها؟

مما سبق:

أولاً : إيجاد مجموع الجذرين وحاصل ضرب الجذرين للمعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ بدون حلها

∴ جذري المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ هما:

$$x_1 = \ell = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = m = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

فإن: ① $x_1 + x_2 = \ell + m = \frac{-b}{a}$ ② $x_1 \cdot x_2 = \ell \cdot m = \frac{c}{a}$

③ $x_1 - x_2 = \ell - m = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} = \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \right|$

تعلمنا
فيما سبق:

كيفية إيجاد جذري
المعادلة التربيعية في متغير
واحد بعدة طرق
التحليل - إكمال مربع -
القانون العام لحل المعادلة
التربيعية - بيانياً.

تذكروا!

الصورة العامة للمعادلة
التربيعية هي:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

حيث:

a	معامل x^2
b	معامل x
c	الحد الثابت

! إنتبه

- يجب وضع المعادلة في الصورة العامة
- استخراج قيم كل من a, b, c
- التأكد من حفظ قانون مجموع جذريّ المعادلة وناتج ضربيهما
- دائماً نرسم لجذريّ المعادلة بالرمز ℓ, m

💡 تذكرنا

- مجموع جذريّ المعادلة التربيعية هو $-\frac{b}{a}$
- حاصل ضرب جذريّ المعادلة هو $\frac{c}{a}$

أكمل الجدول التالي:

تدرب

المعادلة	المعاملات	مجموع الجذرين	حاصل ضرب الجذرين
$2x^2 + 5x - 12 = 0$	$a = 2$ $b = 5$ $c = -12$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{-12}{2} = -6$
$3x^2 = 23x - 30$	$a =$ $b =$ $c =$		
$(2x - 3)(x + 2) = 0$	$a =$ $b =$ $c =$		
$2x^2 + x - 6 = 0$	$a =$ $b =$ $c =$		
$ax^2 + bx + c = 0$, $a = 1$	$a =$ $b =$ $c =$		

إذا علمت أن ℓ, m هما جذرا المعادلة

$$ax^2 + bx + c = 0$$

أوجد: $\ell + m$ ، $\ell \cdot m$ في الحالتين التاليتين:

(a) عندما $a = b$

(b) عندما $a = c$

فكر معي

إذا كان حاصل ضرب جذرا المعادلة $2x^2 - 3x + c = 0$

يساوي -1 أوجد قيمة c .

مثال (1)

الحل:

من المعادلة نوجد: $a = 2$, $b = -3$, $c = c$

بفرض أن ℓ, m هما جذريّ المعادلة

فإن ناتج ضرب الجذرين: $\ell \cdot m = \frac{c}{a}$

$$\therefore -1 = \frac{c}{2} \implies \therefore c = -2$$

تحقق من فهمك (1)

إذا كان حاصل ضرب جذريّ المعادلة $3x^2 + 10x - c = 0$ يساوي $-\frac{8}{3}$ أوجد قيمة c .

مثال (2) إذا كان مجموع جذريّ المعادلة: $2x^2 + bx - 5 = 0$ هو $\frac{3}{2}$ ، فأوجد قيمة b .

الحل:

من المعادلة نوجد: $a=2$, $b=b$, $c=-5$

∴ مجموع جذريّ المعادلة هو: $\ell + m = \frac{3}{2}$

$$\therefore \frac{-b}{a} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{-b}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \therefore -b = 3 \Rightarrow \therefore b = -3$$

تحقق من فهمك (2)

إذا كان حاصل ضرب جذريّ المعادلة $ax^2 - 5x + 2 = 0$ يساوي $\frac{3}{2}$ أوجد قيمة a ، ثم حل المعادلة.

إذا كان ℓ , m هما جذريّ المعادلة $2x^2 - 8x + 5 = 0$ ، فأوجد القيم العددية لكل مما يلي:

- مثال (3) (a) $\ell^2 + m^2$ (b) $\frac{1}{\ell} + \frac{1}{m}$ (c) $\ell - m$

الحل:

من المعادلة نوجد: $a=2$, $b=-8$, $c=5$

$$\ell + m = \frac{-b}{a} = 4$$

$$\ell \cdot m = \frac{c}{a} = \frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{(a) } \ell^2 + m^2 &= (\ell + m)^2 - 2\ell \cdot m \\ &= (4)^2 - 2\left(\frac{5}{2}\right) = 11 \end{aligned}$$

ملحوظة Q

تستخدم قانون حاصل ضرب الجذرين.

! إنتبه

عندما $c=0$ في المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ فإن الجذران أحدهما نظير ضربي للآخر.

ملحوظة Q

تستخدم قانون جمع الجذرين

! إنتبه

1. $(\ell+m)^2$
 $=\ell^2+m^2+2\ell m$
2. ℓ^2+m^2
 $=(\ell+m)^2-2\ell m$
3. $\ell-m = \left| \frac{\Delta}{a} \right|$
4. $(\ell-m)^2$
 $=(\ell+m)^2-4\ell m$
5. ℓ^3+m^3
 $=(\ell+m)[(\ell+m)^2-3\ell m]$
6. $xy+xz=x(y+z)$
7. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$
 $= \frac{(a.d+c.d)}{(b.d)}$

$$\text{b) } \frac{1}{\ell} + \frac{1}{m} = \frac{m + \ell}{\ell \cdot m} = \frac{4}{\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{8}{5}$$

$$\text{c) } \ell - m = \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \right| = \left| \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} \right|$$

$$= \left| \frac{\sqrt{(-8)^2 - 4(2)(5)}}{2} \right|$$

$$= \left| \frac{2\sqrt{6}}{2} \right| = \sqrt{6}$$

تحقق من فهمك (3)

إذا علمت أن جذريّ المعادلة $x^2 - 7x + 9 = 0$ هما ℓ ، m ، فأوجد قيمة كل من:

- a) $\ell + m$ b) $\ell \cdot m$ c) $\ell^2 + m^2$

ثانيًا: إيجاد المعادلة التربيعية إذا عُلِمَ جذراها

استكشف

بفرض أن ℓ, m هما جذرا المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ ، $a \neq 0$

1. أوجد $\ell + m = \dots\dots\dots$ = مجموع الجذرين
2. أوجد $\ell \cdot m = \dots\dots\dots$ = حاصل ضرب الجذرين
3. من المعادلة التربيعية قسّم طرفي المعادلة على a :
4. قارن بين النتائج في (1) ، (2) ، (3) ماذا تلاحظ ؟
تكون المعادلة على الصورة :

$$x^2 - (\dots\dots\dots)x + (\dots\dots\dots) = 0$$

يعبر عن

يعبر عن

تعميم

إذا كان l, m هما جذرا المعادلة التربيعية فإن المعادلة التربيعية تكون على الصورة:

$$x^2 - (l + m)x + (l \cdot m) = 0$$

↓ ↓
حاصل ضرب الجذرين مجموع الجذرين

كُون معادلة تربيعية في متغير واحد والتي جذراها 4 , -3 بطريقتين مختلفتين.

مثال (4)

الحل:

ليكن l, m هما جذرا المعادلة التربيعية:

$$l + m = (-3) + 4 = 1 \text{ مجموع الجذرين}$$

$$l \cdot m = (-3) \cdot (4) = -12 \text{ ناتج الضرب}$$

والمعادلة التربيعية تكون على الصورة:

$$x^2 - (l + m)x + (l \cdot m) = 0$$

$$x^2 - (1)x + (-12) = 0$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

* الحل الآخر:

عندما يكون l, m هما جذرا المعادلة فإن المعادلة تكون على الصورة:

$$(x - l)(x - m) = 0$$

$$(x - (-3))(x - 4) = 0$$

$$(x + 3)(x - 4) = 0$$

$$x^2 - 4x + 3x - 12 = 0$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

تحقق من فهمك (4)

أوجد المعادلة التربيعية التي جذراها معلومان في الحالات التالية:

a 3, 5

b 4, $-\frac{1}{3}$

c 2, -2

معلومة

المعادلة التربيعية على

الصورة:

$$(x - l)(x - m) = 0$$

جذراها l, m

ملحوظة

$$(a + b)(c + d)$$

$$= ac + ad + bc + bd$$

ملحوظة

$$1. (x-y)(x+y)$$

$$= x^2 - y^2$$

$$2. a.b=0$$

$$\Leftrightarrow a=0 \text{ or } b=0$$

تذكر!

المعادلة التربيعية في متغير واحد تسمى: معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد

إنتبه!

إذا كانت $\ell + m = 0$ فإن: ℓ, m نظير جمعي للآخر $b = 0$

إذا كانت $\ell.m = 1$ فإن: ℓ, m نظير ضربى للآخر $a = c$

فكر معي

هل المعادلة التربيعية التي جذراها 3, -3 هي معادلة تربيعية وحيدة؟

ملحوظة هامة جدًا (بصورة عامة):

إذا كان جذرا المعادلة التربيعية هما m, ℓ فإنه يوجد عدد غير منته من المعادلات والتي لها الجذرين نفسها ويمكن كتابتها على الصورة العامة:

$$k[x^2 - (\ell + m)x + (\ell.m)] = 0, k \in \mathbb{R}^*$$

فمثلاً: حل المعادلة $x^2 - 5x + 6 = 0$ هو نفس حل المعادلات التالية:

$$2(x^2 - 5x + 6) = 0$$

$$3(x^2 - 5x + 6) = 0$$

و هكذا

كُون المعادلة التربيعية التي جذراها:

(a) $\frac{4}{3}, \frac{3}{4}$

(b) $5\sqrt{3}, -5\sqrt{3}$

مثال (5)

الحل:

لتكن ℓ, m هما جذرا المعادلة فإن:

$$\ell + m = \frac{4}{3} + \frac{3}{4} = \frac{25}{12}$$

$$\ell.m = \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = 1$$

∴ المعادلة التربيعية هي: $x^2 - (\ell + m)x + (\ell.m) = 0$

$$x^2 - \left(\frac{25}{12}\right)x + 1 = 0$$

$$\therefore 12x^2 - 25x + 12 = 0$$

(b) $5\sqrt{3}, -5\sqrt{3}$

لتكن ℓ, m هما جذرا المعادلة فإن:

$$\ell + m = 5\sqrt{3} + (-5\sqrt{3}) = 0$$

$$\ell.m = (5\sqrt{3}) \cdot (-5\sqrt{3}) = -75$$

∴ المعادلة التربيعية هي: $x^2 - (\ell + m)x + (\ell.m) = 0$

$$x^2 - 0x + (-75) = 0$$

$$x^2 - 75 = 0$$

تحقق من فهمك (5)

كُون المعادلة التربيعية التي جذراها: $3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}$

ثالثاً: تكوين معادلة تربيعية بمعلومية معادلة أخرى

إذا كان l, m هما جذرا المعادلة التربيعية $2x^2 - 3x - 1 = 0$ كون المعادلة

مثال (6)

التربيعية التي جذراها $2l, 2m$

الحل:

من المعادلة المعلومة: $a = 2, b = -3, c = -1$

$$l+m = \frac{-b}{a}, \frac{-(-3)}{2} = \frac{3}{2}, l \cdot m = \frac{c}{a} = \frac{-1}{2}$$

$$2l+2m = 2(l+m) = 2\left(\frac{3}{2}\right) = 3 \quad \text{مجموع جذريّ المعادلة المطلوبة}$$

$$2l \cdot 2m = 4(l \cdot m) = 4\left(\frac{-1}{2}\right) = -2 \quad \text{حاصل ضرب جذريّ المعادلة المطلوبة}$$

$$x^2 - (2l+2m)x + (2l \cdot 2m) = 0 \quad \text{المعادلة التربيعية هي:}$$

$$x^2 - 3x - 2 = 0$$

تحقق من فهمك (6)

إذا كان l, m هما جذرا المعادلة التربيعية $2x^2 + 15x - 8 = 0$ كون المعادلة التربيعية التي جذراها $2l, 2m$

ملحوظة هامة: في المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ إذا علمت أن $l+m$ هما جذرا المعادلة:

1. عند $b = 0$ فإن $l+m = 0$ والجذرين أحدهما نظير جمعيّ للآخر

2. عند $c = a$ فإن $l \cdot m = 1$ والجذرين أحدهما نظير ضربيّ للآخر

أولاً - البنود الموضوعية :

أندرب وأحل المسائل

■ في البنود (1-6) اختر الإجابة الصحيحة:

(1) إذا كان ناتج ضرب جذريّ المعادلة التربيعية $x^2 - 3x + c = 0$ يساوي 2 فإن c يساوي:

- (a) -4 (b) -2 (c) 4 (d) 2

(2) إذا كان مجموع جذريّ المعادلة $x^2 - ax + 6 = 0$ يساوي 5 فإن a يساوي:

- (a) -6 (b) -5 (c) 5 (d) 6

(3) إذا كان أحد جذريّ المعادلة $x^2 - (m+2)x + 3 = 0$ هو معكوس جمعيّ للآخر فإن m تساوي:

- (a) 3 (b) 2 (c) -2 (d) -3

(4) عدنان حقيقيان مجموعهما 2 و حاصل ضربهما -35 هما:

- (a) 5, 7 (b) -5, -7 (c) -7, 5 (d) 7, -5

(5) حاصل ضرب جذريّ المعادلة $x(2x-3)=7$ يساوي:

(a) $-\frac{3}{2}$

(b) $\frac{3}{2}$

(c) $-\frac{7}{2}$

(d) $\frac{7}{2}$

ثانيًا - أسئلة المقال :



(1) كَوّن كلاً من المعادلات التربيعية التالية والتي جذراها:

(a) 2, 3

(b) -5, -7

(c) $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$

(d) $2a$, $-\frac{1}{2}a$



(2) كَوّن معادلة الدرجة الثانية التي جذراها متساويان وكل منهما يساوي $-\frac{1}{2}$

(3) إذا كان مجموع جذريّ المعادلة $x^2-5\ell x+m=0$ هو 10 وحاصل ضربهما يساوي 6 فما قيمة كل من ℓ , m ؟ ثم أوجد قيمة الجذرين.

(4) إذا كان ℓ , m هما جذرا المعادلة $x^2-5x-4=0$ فأوجد المعادلة التي جذراها ℓ^2 , m^2

(5) إذا كان ℓ , m هما جذريّ المعادلة $x^2-3x+1=0$ ، فأوجد المعادلة التي جذراها $\ell+m$, $\ell \cdot m$

(6) إذا كان ℓ , m هما جذرا المعادلة $x^2-7x+5=0$ ، فأوجد المعادلة التي جذراها $\frac{1}{\ell}$, $\frac{1}{m}$

(7) إذا كان ℓ , m هما جذرا المعادلة $x^2-4x+1=0$ فما قيمة ؟

(a) $\frac{4}{\ell}$, $\frac{4}{m}$

(b) $\ell - m$

سؤال تحدي:

(8) أوجد قيمة k التي تجعل مجموع جذريّ المعادلة $x^2-(k+2)x+2=0$ يساوي حاصل ضرب جذريّ

المعادلة $x^2-3kx+k^2=0$

مهارات تفكير عليا



(1) إذا كان ℓ , m جذرا المعادلة $x^2+2x-3=0$ ، فأوجد معادلة من الدرجة

الثانية جذريها $\ell + \frac{1}{\ell}$, $m + \frac{1}{m}$

(2) لتكن المعادلة $-4x^2+5x+7=0$ جذراها ℓ , m أوجد:

(a) $(2\ell-3)(2m-3)$

(b) كون معادلة تربيعية جذراها $\ell+1$, $m+1$

(c) كون معادلة تربيعية جذراها 2ℓ , $2m$

(3) اختر الإجابة الصحيحة:

إذا كان أحد جذريّ المعادلة: $2x^2+6x+c=0$ هو 3 ، فإن c تساوي:

(a) 18

(b) 36

(c) -6

(d) -36

حل متباينة من الدرجة الثانية Solving Quadratic Inequalities

1-5

فكرة الدرس:



- حل متباينة تربيعية في متغير واحد.
- دراسة إشارة الدالة التي ترتبط بهذه المتباينة .
- تحديد قيم المتغير التي تجعل الدالة التربيعية موجبة أو سالبة باستخدام التمثيل البياني والطرق الجبرية .

المصطلحات:



1. متباينة من الدرجة الثانية
Quadratic Inequality
2. الفترة
Interval
3. أقل من ، أقل من أو يساوي
Less than , less than or equal to
4. أكبر من ، أكبر من أو يساوي
Greater than, greater than or equal to



مسألة الدرس:



في مطار الكويت الدولي الجديد T4 ، تم تخصيص منطقة مستطيلة لوضع شاشة إلكترونية جديدة .
إذا كان عرض المنطقة x متر ، وطولها يزيد عن عرضها بمقدار 6 متر ويريد مشرفي المطار أن تكون مساحة المنطقة لا تزيد عن 40 مترًا مربعًا .

∴ عرض المنطقة x ، فإن الطول هو $x+6$

- 1 . اكتب عبارة تمثل مساحة المنطقة بدلالة x
- 2 . كيف تترجم عبارة: مساحة المنطقة أصغر من 40 مترًا مربعًا إلى متباينة رياضية؟
- 3 . بعد كتابة المتباينة قم بتبسيطها إلى الصورة العامة $ax^2+bx+c<0$
- 4 . هل تعتقد أن الحل سيكون قيمة واحدة أم مجموعة قيم؟ ولماذا؟

نلاحظ أن:

$$x(x+6) \leq 40$$

$$x^2 + 6x - 40 \leq 0 \text{ هي}$$

تعلمنا فيما سبق:

متباينة الدرجة الأولى
في متغير واحد، وعلمت
أن حل المتباينة هي
إيجاد جميع قيم المتغير
التي تحقق هذه المتباينة.
وتكتب على صورة فترة.

تذكر!

مساحة المنطقة
المستطيلة =
الطول × العرض

! إنتبه

إذا كان حاصل ضرب
عددين حقيقيين أكبر
من الصفر فإما العددين
موجبان معاً أو العددين
سالبان معاً

أولاً: حل المتباينة من الدرجة الثانية باستخدام التحليل

«خواص المتباينات في الأعداد الحقيقية» :

1 . عندما : $a.b \geq 0$ فإن : $a \geq 0, b \geq 0$ or $a \leq 0, b \leq 0$

2 . عندما : $a.b \leq 0$ فإن : $a \leq 0, b \geq 0$ or $a \geq 0, b \leq 0$

حل كلاً من المتباينات التالية جبرياً ومثل الحل على خط الأعداد :

مثال (1)

a) $x^2 - 2x - 8 \geq 0$

b) $x^2 - 2x - 8 \leq 0$

الحل:

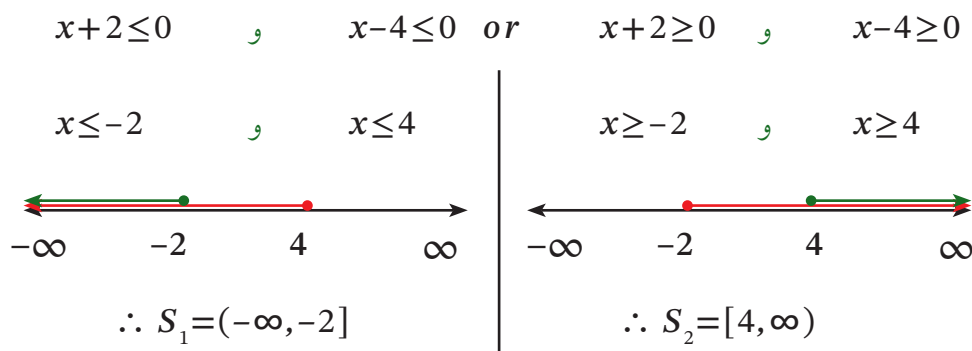
1 . نضع المتباينة على الصورة $ax^2 - bx + c \geq 0$

$$x^2 - 2x - 8 \geq 0$$

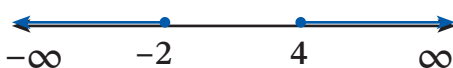
2 . نحلل

$$(x+2)(x-4) \geq 0$$

3 . باستخدام خواص المتباينات



$$\therefore S = (-\infty, -2] \cup [4, \infty)$$



4 . مثل على خط الأعداد

$$\therefore S = S_1 \cup S_2 = (-\infty, -2] \cup [4, \infty) = \mathbb{R} - (-2, 4)$$

b) $x^2 - 2x - 8 \leq 0$

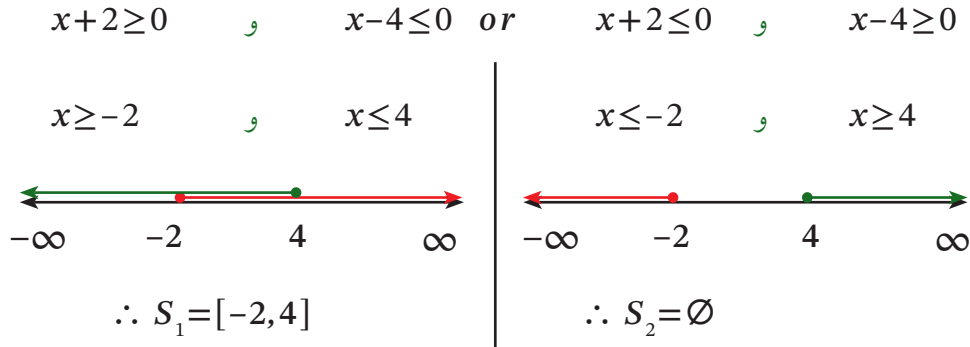
1. نضع المتباينة على الصورة $ax^2 - bx + c \leq 0$

$$x^2 - 2x - 8 \leq 0$$

2. نحلل

$$(x+2)(x-4) \leq 0$$

3. باستخدام خواص المتباينات



$$\therefore S = [-2, 4] \cup \emptyset$$

4. مثل على خط الأعداد



$$\therefore S = S_1 \cup S_2 = [-2, 4] \cup \emptyset = [-2, 4]$$

ملحوظة: حل المتباينة: $x^2 - 2x - 8 > 0$ هو

هو $x^2 - 2x - 8 < 0$

تحقق من فهمك (1)

حل كلاً من المتباينات التالية جبرياً ومثل الحل على خط الأعداد :

a) $x^2 + x - 12 \leq 0$

b) $x^2 + 4x - 5 \geq 0$

c) $x^2 - x - 6 < 0$

d) $(x-3)(2x+5) < 0$

e) $x^2 - 2x + 1 > 0$

f) $x^2 + 6x + 9 < 0$

ثانيًا: حل المتباينة من الدرجة الثانية بدراسة الإشارة

هناك طرق عديدة لحل متباينة من الدرجة الثانية تعرضنا على طريقة توظيف خواص التباين والآن سنتعرف معًا على حل المتباينة من الدرجة الثانية بالبحث عن إشارة المقدار الثلاثي ax^2+bx+c بإيجاد مجموعة جميع الأعداد الحقيقية x التي تجعل المقدار سالبًا أو موجبًا ، **لنتعرف أولاً على دراسة مقدار من الدرجة الأولى :**

مثال (2)

ادرس إشارة كل من : (a) $f(x)=2x-8$ (b) $g(x)=-3x+6$

الحل:

(a) $f(x)=2x-8$

$$2x-8 = 0$$

1. نضع $f(x)=0$

$$2x=8$$

2. نحل المعادلة

$$\therefore x=4$$

3. اختر $f(x)$ باختبار قيم مختلفة للمتغير x في كل فترة من الفترات

عندما $x < 4$	عندما $x > 4$
1 قيمة اختيارية فمثلاً $f(1)=2(1)-8=-4$ فإن $f(x) < 0$	5 قيمة اختيارية فمثلاً $f(5)=2(5)-8=2$ فإن $f(x) > 0$



(b) $g(x)=-3x+6$

$$-3x+6 = 0$$

1. نضع $g(x)=0$

$$-3x = -6$$

2. نحل المعادلة

$$\therefore x=2$$

2. اختبر $g(x)$ باختيار قيم مختلفة للمتغير x في كل فترة من الفترات

عندما $x > 2$	عندما $x < 2$
فمثلاً $g(3) = -3(3) + 6 = -3$ فإن $g(x) < 0$	فمثلاً $g(1) = -3(1) + 6 = 3$ فإن $g(x) > 0$



قاعدة هامة

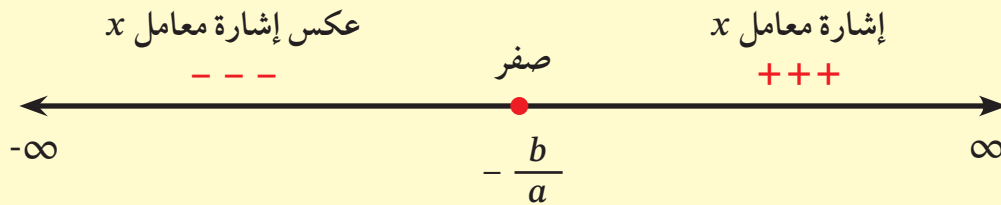
لدراسة إشارة $g(x) = ax + b$, $a \neq 0$ تتبع التالي :

1. نضع $x = -\frac{b}{a} \iff ax + b = 0 \iff g(x) = 0$

2. نحدد العدد $x = -\frac{b}{a}$ على خط الأعداد

3. تكون إشارة $g(x)$: • ماثلة للإشارة a على يمين العدد $-\frac{b}{a}$

• ومخالفة للإشارة a على يسار العدد $-\frac{b}{a}$



كيف يمكنك حل متباينة $x^2 - 4 < 0$ بيانياً؟

لنستكشف

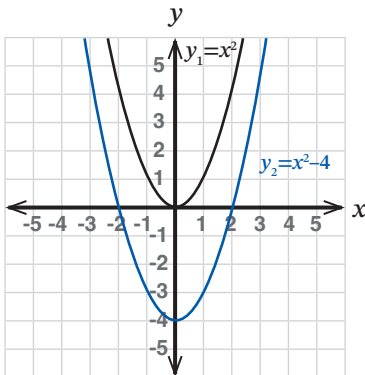
الحل:

الخطوة (1): مثل بيانياً $g(x) = x^2$

x					
$g(x)$					

الخطوة (2): مثل بيانياً $f(x) = x^2 - 4$

x					
$f(x)$					



ملحوظة

حل المتباينة:

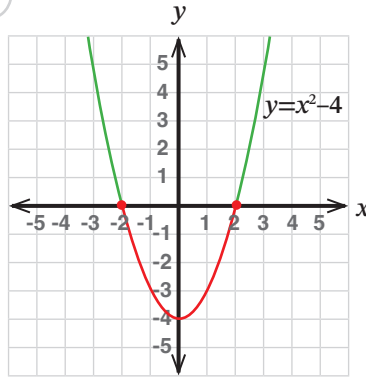
هي إيجاد قيم x التي يكون عندها منحنى الدالة أعلى أو أسفل محور السينات (x -axis)

الفترة:

هي طريقة التعبير عن مجموعة من الأعداد الحقيقية ويمكن تمثيلها على خط الأعداد.

! انتبه

بما أن $x^2 - 4 < 0$ فإن الطرفين 2, -2 لا يتبعان إلى مجموعة الحل.



ماذا تلاحظ ؟

بيان الدالة $f(x)$ هو إزاحة لبيان الدالة $g(x) = x^2$ بمقدار لجهة

الخطوة (2):

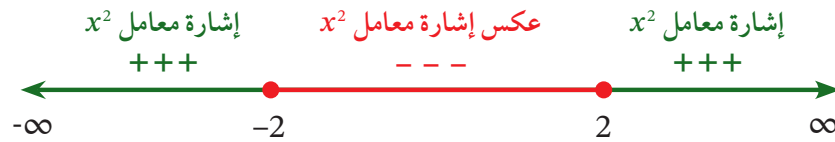
حدد قيم x الناتجة عن تقاطع المنحنى مع المحور x -axis
 $x = -2$, $x = 2$

الخطوة (3):

متى تكون الدالة $f(x) < 0$ ؟ (أي سالبة)
 متى تكون الدالة $f(x) > 0$ ؟ (أي موجبة)

نلاحظ أن:

$f(x) < 0$ عندما x تنحصر بين العددين -2, 2 ومنحنى الدالة أسفل محور السينات
 $f(x) > 0$ عندما $x > 2$ ، عندما $x < -2$



تحقق من فهمك (2)

من السؤال السابق أكمل الجدول التالي وحدد الفترات التي تعبر عن حل المتباينات في كل مما يلي:

$f(x)$	المتباينة	الفترة	التمثيل على خط الأعداد
$f(x)$	$x^2 - 4 \leq 0$		
$f(x)$	$x^2 - 4 > 0$		
$f(x)$	$x^2 - 4 \geq 0$		

قاعدة هامة

لدراسة إشارة $a \neq 0$ ، $f(x) = ax^2 + bx + c$ نتبع التالي:

1. نوجد المعادلة المناظرة: $f(x) = 0$
2. نوجد قيم x التي تجعل $f(x) = 0$ إما بالتحليل أو باستخدام المميز عندما يصعب التحليل
3. لدينا ثلاثة احتمالات:

للمعادلة $f(x)=0$ حلان حقيقيان مختلفان $x_1 < x_2$	$\Delta > 0$	
للمعادلة $f(x)=0$ حلان حقيقيان متساويان $x_1 = x_2$	$\Delta = 0$	
ليس للمعادلة $f(x)=0$ جذور حقيقية	$\Delta < 0$	

حل كلاً من المتباينات التالية :

(a) $x^2 - 2x - 8 \leq 0$

(b) $x^2 - x \leq 5$

(c) $x^2 - 10x + 25 > 0$

(d) $-3x^2 + 4x - 2 \geq 0$

مثال (3)

(a) $x^2 - 2x - 8 \leq 0$

الحل:

$f(x) = x^2 - 2x - 8$

1. نضع

$f(x) = 0$

2. نضع

3. حل المعادلة

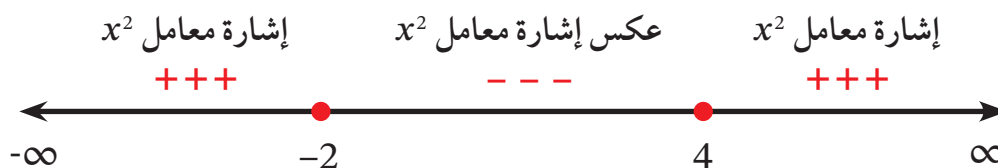
$x^2 - 2x - 8 = 0$

$(x-4)(x+2) = 0$

$x = 4 \quad \text{or} \quad x = -2$

∴ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان

4. دراسة الإشارة:



نلاحظ أن $f(x) \leq 0$ عندما $-2 \leq x \leq 4$

5. ∴ مجموعة حل المتباينة هي :

$S = [-2, 4]$

b) $x^2 - x \leq 5$

$$f(x) = x^2 - x - 5$$

1. نضع

$$f(x) = 0$$

2. نضع

3. نحل المعادلة التربيعية باستخدام القانون

$$a = 1, \quad b = -1, \quad c = -5$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-1)^2 - 4(1)(-5)$$

$$\Delta = 1 + 20 = 21 > 0$$

∴ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان هما :

$$\therefore x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

or

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$$

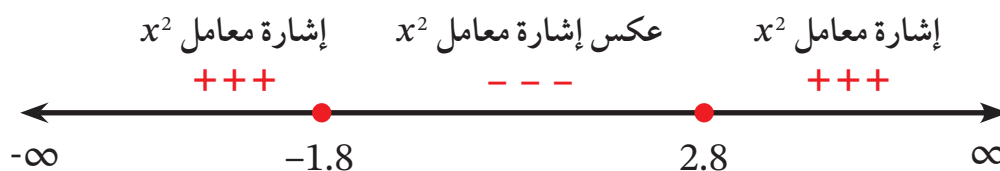
$$= \frac{1 - \sqrt{21}}{2}$$

$$x_1 \approx 2.8$$

$$x_2 \approx -1.8$$

4. دراسة الإشارة:

$$a = 1 > 0$$



نلاحظ عندما $a > 0$ فإن إشارة الدالة موجبة أطراف الجذرين وسالبة بينهما .

5. ∴ مجموعة حل المتباينة :

$$f(x) \leq 0$$

$$S = \left[\frac{1 - \sqrt{21}}{2}, \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \right] \text{ هي}$$

من السؤال السابق و مستعيناً بالحل السابق و بدراسة الإشارة، اكمل الجدول التالي حيث $\Delta > 0$:

التمثيل	الحل	المتباينة
$x^2 - x < 5$		$\longleftrightarrow$
$x^2 - x \geq 5$		$\longleftrightarrow$
$x^2 - x > 5$		

c $x^2 - 10x + 25 > 0$

$$f(x) = x^2 - 10x + 25$$

1. نضع

$$f(x) = 0$$

2. نضع

3. نحل المعادلة التربيعية باستخدام القانون

$$a = 1$$

$$b = -10$$

$$c = 25$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-10)^2 - 4(1)(25)$$

$$\Delta = 100 - 100 = 0$$

∴ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان هما :

$$\therefore x_1 = x_2$$

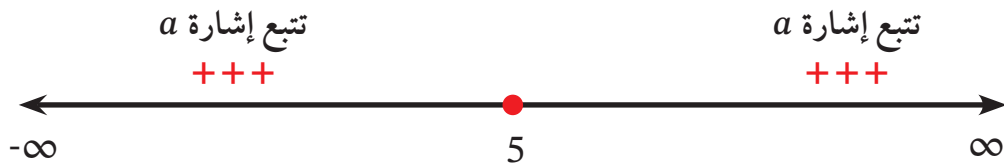
$$= \frac{-b}{2a}$$

$$= \frac{-(-10)}{2(1)}$$

$$= \frac{10}{2}$$

$$= 5$$

4. دراسة الإشارة:



أي إن $x^2 - 10x + 25$ موجب دائماً لكل قيم $x \in \mathbb{R}$ ما عدا $x = 5$

5. ∴ مجموعة حل المتباينة

$$S = \mathbb{R} \setminus \{5\}$$

من السؤال السابق و مستعينا بالحل السابق و بدراسة الإشارة، اكمل الجدول التالي حيث $\Delta = 0$:

التمثيل	الحل	المتباينة
$\longleftrightarrow$		$x^2 - 10x + 25 \geq 0$
$\longleftrightarrow$		$x^2 - 10x + 25 < 0$
		$x^2 - 10x + 25 \leq 0$

d) $-3x^2 + 4x - 2 \geq 0$

$f(x) = -3x^2 + 4x - 2$

1. نضع

$f(x) = 0$

2. نضع

3. نحل المعادلة التربيعية باستخدام القانون

$a = -3$

$b = 4$

$c = -2$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (4)^2 - 4(-3)(-2)$

$\Delta = 16 - 24$

$= -8 < 0$

∴ المعادلة ليس لها جذر حقيقي

4. دراسة الإشارة للمقدار ثابتة على طول خط الأعداد كما هو في الشكل التالي:



بما أن الدالة لا تقطع محور x فإن إشارتها ثابتة وتعتمد على إشارة a

$-3x^2 + 4x - 2 \geq 0$

5. حل المتباينة:

∴ $S = \emptyset$

هي:

لحل المتباينة التربيعية بصورها المختلفة التي على الصورة $ax^2 + bx + c \geq 0$ ، $a \neq 0$ ، يجب ملاحظة إشارة $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، $a \neq 0$ لايجاد قيمة Δ

تحقق من فهمك (3)

حل كل من المتباينات التالية جبرياً ومثل الحل على خط الأعداد :

a) $2x^2 + 3x - 2 < 0$

b) $-x^2 - x + 6 > 0$

c) $x^2 - 6x + 9 \geq 0$

حالة خاصة : حل المتباينة من الدرجة الثانية باستخدام القيمة المطلقة

خاصية

إذا كان a, b عددين حقيقيين موجبين فإن: $a \leq b \iff a^2 \leq b^2$

يمكن استبدال الرمز $<$ بالرمز $\leq$ أو الرمز $>$ بالرمز $\geq$
تستخدم هذه الخاصية لحل متباينات مثل $x^2 > 4$ ، $x^2 < 9$
فمثلاً لحل المتباينة $x^2 < 9$

$$\sqrt{x^2} < \sqrt{9} \quad \text{نوجد الجذر التربيعي للطرفين}$$

$$\therefore |x| < 3$$

$$-3 < x < 3$$

$\therefore$ مجموعة الحل $(-3, 3)$



ملحوظة:

عند حل المتباينة $x^2 < 0$ فإننا نلاحظ أنه لا يوجد أي عدد حقيقي بحيث يكون مربعه أصغر من الصفر.

أي إن المتباينة $x^2 < 0$ ليس لها أي حل ، وبالتالي فإن مجموعة حل هذه المتباينة هي المجموعة الخالية $\emptyset$.

وبالمقابل فإن المتباينة $x^2 \geq 0$ صحيحة لأي عدد حقيقي و بالتالي فإن مجموعة حل هذه المتباينة هي مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

بصفة عامة : إذا كان a, b, c أعداداً حقيقية بحيث $a \neq 0, c < 0$ فإن :

1. مجموعة حل المتباينة $(ax+b)^2 < c$ هي المجموعة الخالية $\emptyset$
 2. مجموعة حل المتباينة $(ax+b)^2 > c$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$
 3. مجموعة حل المتباينة $(ax+b)^2 < 0$ هي $\emptyset$
- مجموعة حل المتباينة $(ax+b)^2 > 0$ هي $\mathbb{R} - \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$

ملحوظة:

المتباينة	مجموعة الحل
$x^2 < 0$	$\emptyset$
$x^2 \leq 0$	$\{0\}$
$x^2 \geq 0$	$\mathbb{R}$
$x^2 > 0$	$\mathbb{R} - \{0\}$

تذكروا!

بفرض أن a, b, c أعداد حقيقية:

1. إذا كان $a < b$ فإن

$$a + c < b + c$$

2. إذا كان $a < b$ و كان

$$a \cdot c < b \cdot c \quad \text{فإن } c > 0$$

3. إذا كان $a < b$ و كان

$$a \cdot c > b \cdot c \quad \text{فإن } c < 0$$

4. إذا كان $a > 0$ فإن:

$$|x| < a \quad \text{تكافئ}$$

$$-a < x < a$$

$$|x| > a \quad \text{تكافئ}$$

$$x > a \quad \text{or} \quad x < -a$$

تذكروا!

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

تذكروا

- $\sqrt{x^2} = |x|$
- $|x| \leq a$, $a > 0$
 $\therefore -a \leq x \leq a$
- $|x| \geq a$, $a > 0$
 $\therefore x \geq a$ or $x \leq -a$

تذكروا

مجموعة حل كل من المتبايتين:

- $|x| < 0$
- $x^2 < 0$

هو $\emptyset$

أوجد مجموعة حل المتباينة ومثل الحل على خط الأعداد :

مثال (4)

(a) $2x^2 + 5 \geq 23$ (b) $(5x+7)^2 + 3 < 2$

الحل:

(a) $2x^2 + 5 \geq 23$

$$2x^2 \geq 18$$

$$\left(\frac{1}{2}\right) \cdot 2x^2 \geq \left(\frac{1}{2}\right) 18$$

$$x^2 \geq 9$$

$$|x| \geq 3$$

$$x \geq 3 \quad \text{or} \quad x \leq -3$$

$$\therefore S.S. = (-\infty, 3] \cup [3, \infty)$$

$$= \mathbb{R} \setminus (-3, 3)$$



بإضافة (-5) لطرفين المتباينة

بضرب طرفي المتباينة بـ $\frac{1}{2}$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

من خواص القيمة المطلقة

(b) $(5x+7)^2 + 3 < 2$

حسب الخاصية التالية :

$$(5x+7)^2 + 3 + (-3) < 2 + (-3)$$

$$(5x+7)^2 < -1$$

$$\therefore S.S. = \emptyset$$

تحقق من فهمك (4)

أوجد مجموعة حل المتباينة ومثل الحل على خط الأعداد :

(a) $3x^2 - 4 \leq 8$

(b) $(4x-3)^2 + 2 > -3$

(c) $(2-3x)^2 < 1$

(d) $(2x+1)^2 - 3 \geq 1$



استخدام النماذج



قام قسم الرياضيات في إحدى مدارس منطقة الفروانية التعليمية في دولة الكويت بتجهيز مسرح المدرسة لتقديم دورة للمعلمات الجدد، حيث وزعت الكراسي على شكل مربع مكون من 20 صفًا أفقيًا وعموديًا ترغب الإدارة في تقليل عدد الصفوف أفقيًا وعموديًا مع الحفاظ على الشكل المربع، بحيث لا يزيد عدد الكراسي عن 225 كرسياً.

كم صفًا من الكراسي يجب على الإدارة إزالته؟

الحل:

ليكن x عدد صفوف الكراسي المراد إزالتها حيث $0 < x < 20$
 $\therefore$ عدد الصفوف المتبقية: $20 - x$ ، عدد الصفوف الكلي $= (20 - x)^2$
 1. اكتب المتباينة التي تمثل الموقف وحلها:

$$(20 - x)^2 = 225$$

2. المعادلة التربيعية المرتبطة:

$$(20 - x)^2 = 225$$

$$(x - 20)^2 = (15)^2$$

$$(x - 20)^2 - (15)^2 = 0$$

$$(20 - x - 15)(20 - x + 15) = 0$$

$$(5 - x)(35 - x) = 0$$

فرق بين مربعين



3. بما أن الصفوف الأفقية والعمودية هي في الأصل 20 صفًا وعمودًا فإن عدد الصفوف الممكن إزالتها 5 صفوف على الأقل.

هل يمكن أن يكون عدد الصفوف المحذوفة عددًا كسريًا. ولماذا؟

أجب عن الأسئلة التالية :

- 1 . ما الفرق بين حل معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد وحل متباينة من الدرجة الثانية في متغير واحد ؟
- 2 . ما علاقة بحث إشارة الدالة التربيعية بحل متباينات الدرجة الثانية في متغير واحد ؟

أندرب وأحل المسائل

أولاً - البنود الموضوعية :

■ في البنود من (1-5) اختر الإجابة الصحيحة:

(1) مجموعة حل المتباينة $(x+2)(x-5) > 0$ هي:

- | | |
|--------------------------------------|------------------|
| (a) $(-2,5)$ | (b) $[-2,5]$ |
| (c) $(-\infty, -2) \cup (5, \infty)$ | (d) $\mathbb{R}$ |

(2) مجموعة حل المتباينة $x^2 - 2x < 0$ هي:

- | | |
|-------------------|--------------------|
| (a) $(0,2)$ | (b) $[-\infty, 0]$ |
| (c) $(2, \infty)$ | (d) $[0,2]$ |

(3) مجموعة حل المتباينة $x^2 + 6x + 9 \leq 0$ هي:

- | | |
|--------------------------------------|------------------|
| (a) $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$ | (b) $\{-3\}$ |
| (c) $[-3,3]$ | (d) $\mathbb{R}$ |

(4) أي مما يلي ليس حلاً للمتباينة $4x^2 - 4x - 5 > 0$

- | | | | |
|--------|---------|-------|-------|
| (a) 60 | (b) -20 | (c) 2 | (d) 0 |
|--------|---------|-------|-------|

(5) أي من المتباينات التالية حلها نفس حل المتباينة $-2x^2+5x-3>0$:

(a) $x^2-5>2x^2$

(b) $-x^2-x>x^2-4x$

(c) $2x^2+3<5x$

(d) $x^2-3x>2x-x^2$

ثانياً - أسئلة المقال :

(1) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات التالية:

(a) $x^2-25>0$

(b) $x^2-5x+6<0$

(c) $x^2-6x+9>0$

(d) $3x^2-6x-10<-10$

(e) $(3x-7)(2x+9)\leq 0$

(f) $2x^2+5x-3<-10$

(g) $-2x^2+x+21<0$

(h) $3x^2+x+7<0$

(k) $x^2-6x+8<0$

(l) $-2x^2+6x+8\geq 0$

(m) $(x-4)(3-x)>0$

(n) $x^2+2x-8\leq 0$

(o) $9x^2+1\geq 0$

(p) $-16x^2+24x-7>0$



1 (b)

(2) اكتشف الخطأ :

تقول نور: إن المتباينة $-x^2+2x-7<0$ لا حلول لها بين الخطأ في حل نور ثم صححه.

(3) اكتب متباينة تربيعية يكون حلها مجموعة الأعداد الحقيقية .



(1) أوجد مجموعة حل المتباينة :

$$(x+3)^2 \leq 10-3(x+3)$$

(2) إذا علمت أن $\Delta=0$ ، فما حل المتباينة $-2x^2+8x+c<0$ ؟

(3) تقول هديل: إن المتباينة $2x^2+x-3<0$ و $\frac{2x^2+x-3}{x^2+1}$ لهما الحل نفسه هل توافقها الرأي؟ وضح إجابتك.



استعد للاختبار

1

عزيزي المعلم ، عزيزي المتعلم :

يحتوي رمز الـ (QR) الخاص باختبار الوحدة على أسئلة مهمة، يجب الاستفادة منها في التقييم البنائي والنهائي وتدريب المتعلم عليها جيداً.

ما أهمية هذه الوحدة؟

تعتبر النسبة والتناسب من أكثر المفاهيم الرياضية التي نستخدمها بشكل تلقائي ويومي ، فهي الإدارة التي تساعدنا في مقارنة الكميات و ضمان التوازن في مختلف المجالات . ودراسة التشابه مهمه جداً فهي الرابط الرياضي الذي يحفظ « جوهر الشكل » مع تغيير « حجمه » مما يجعله المحرك الأساسي لكل عمليات التصميم والبناء و فهم أسرار الطبيعة حولنا .



سأتعلمُ في هذه الوحدة:

- النسبة والتناسب واستخدامهما في حل المسائل ، خواص التناسب المتسلسل .
- التشابه من حيث المفهوم بين الأشكال الهندسية المستوية .
- حالات تشابه المثلثات و التطبيق في مواقف حياتية .
- تطبيق التشابه على المثلث القائم الزاوية والخصائص الناتجة من العمود المرسوم من رأس القائمة إلى الوتر المقابل .
- نظرية المستقيم الموازي .
- نظرية طاليس .
- خصائص منصف الزاوية الداخلية في المثلث .



تعلمتُ سابقاً:

- التناسب وبعض خواصه .
- حالات تطابق المثلثات .
- نظرية فيثاغورث وتطبيقاتها في المثلثات القائمة الزاوية .
- علاقة الزوايا الناتجة من تقاطع مستقيم مع مستقيمات متوازية .
- منصف الزاوية والمنصف العمودي للقطعة المستقيمة في المثلث والعمود المرسوم من الرأس إلى الضلع المقابل في المثلث .



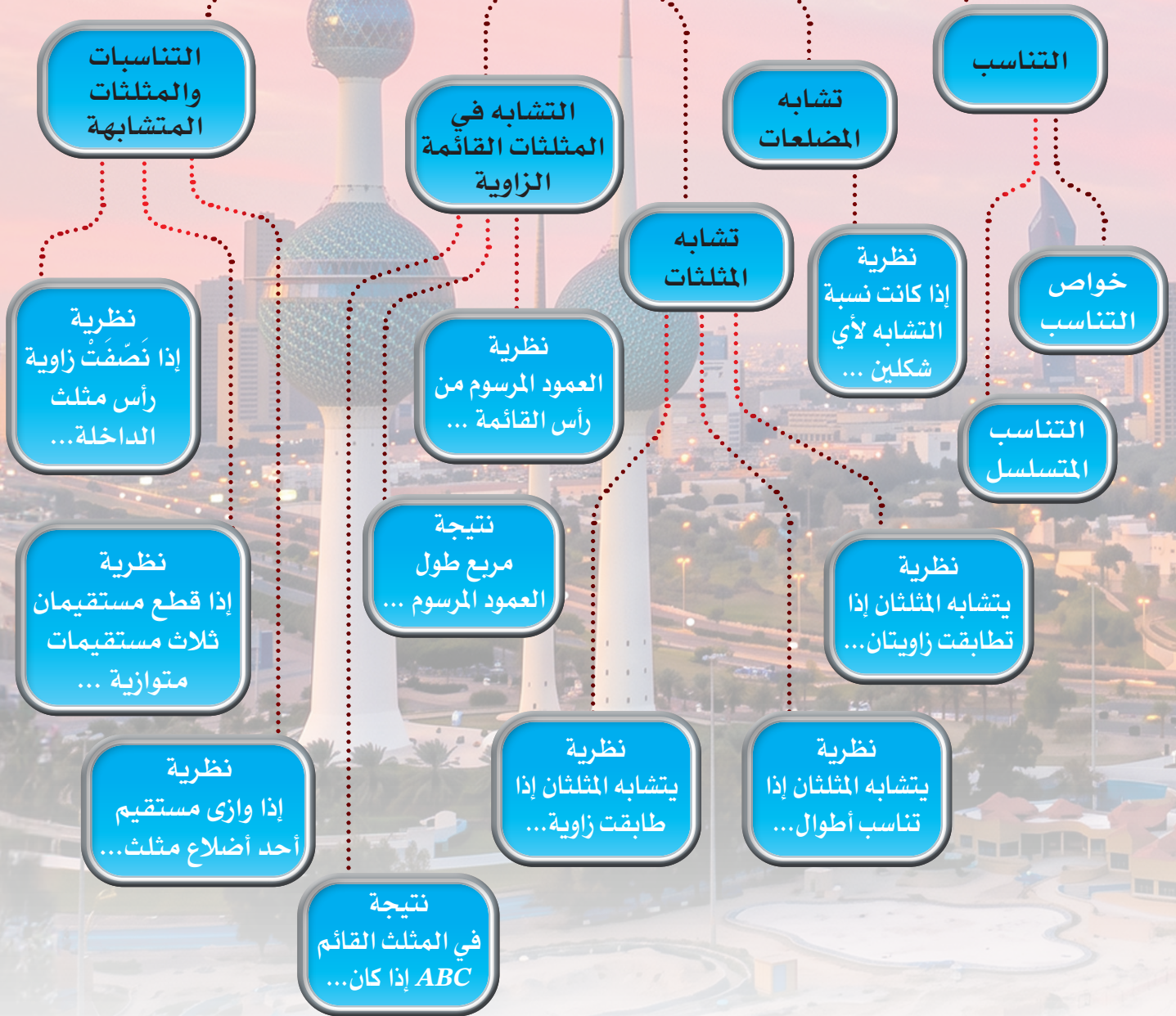
استعد للوحدة



عزيزي المعلم ، عزيزي المتعلم :

يحتوي رمز الـ (QR) الموجود في بداية الوحدة على مفاهيم علمية وتمارين تساعد في الاستعداد للوحدة وتعزز المفاهيم الواردة فيها .

الهندسة المستوية



التشابه الهندسي والنمذجة الرقمية لأبراج الكويت Geometric similarity and digital modeling of the Kuwait Towers



فكرة المشروع:

يقوم المتعلمين بدراسة الأبعاد الحقيقية لأبراج الكويت (Kuwait Towers)، ثم استخدام التكنولوجيا لإنشاء نموذج رقمي ثلاثي الأبعاد للأبراج. يعتمد المشروع على تطبيق مفهوم التشابه الهندسي ومقياس الرسم لتحويل الأبعاد الحقيقية إلى نموذج مصغر مع الحفاظ على نفس النسب بين الأبعاد.

أهداف المشروع:

- يتعلم المتعلم من خلال هذا المشروع ما يلي:
- تطبيق مفهوم التشابه الهندسي والنسبة في الرياضيات.
- استخدام البرمجيات الهندسية في تصميم النماذج.
- تحويل القياسات الحقيقية إلى نماذج رقمية مصغرة باستخدام مقياس الرسم.
- الربط بين الرياضيات والتكنولوجيا والهندسة.
- الأدوات التكنولوجية المقترحة: يمكن للطلاب استخدام أحد البرامج التالية لإنشاء النموذج الرقمي:
- SketchUp - GeoGebra - Tinkercad - AutoCAD

مراحل تنفيذ المشروع:

(1) جمع البيانات



الارتفاع الحقيقي	البرج
m187	البرج الرئيسي
m147	البرج الأوسط
m113	البرج الصغير

يبحث المتعلمين عن الأبعاد الحقيقية لأبراج الكويت

(2) تحديد مقياس الرسم 1:500

أي 1 سم في النموذج = 5 متر في الواقع

(3) الحسابات الرياضية:

يحسب الطلاب ارتفاع النموذج باستخدام التناسب مثال: $187 \div 5 = 37.4 \text{ cm}$

(6) مخرجات المشروع :

- يقوم المتعلمين بتقديم
- (a) نموذج ثلاثي الأبعاد للأبراج
- (b) تقرير يوضح الحسابات الرياضية
- (c) عرض تقديمي يشرح خطوات المشروع

(5) التحليل الرياضي :

- يقوم المتعلمين بتحليل :
- (a) نسبة التشابه
- (b) معامل التكبير أو التصغير
- (c) العلاقة بين المساحة والحجم
- في النماذج المتشابهة

(4) بناء النموذج الرقمي :

- يقوم المتعلمين باستخدام أحد البرامج :
- رسم الأبراج
- إنشاء الكرات الخاصة بالأبراج
- ضبط الأبعاد حسب مقياس الرسم
- مقارنة النموذج بالحجم الحقيقي

المشروع يطور

- التفكير التحليلي
- استخدام التكنولوجيا
- حل المشكلات
- العمل الجماعي

كويت مصغرة: اكتشاف النسبة والتشابه من خلال نماذج المعالم

Miniature Kuwait: Discovering Ratio and Similarity Through Iconic Landmarks

Real Measurements vs. Scale Model

Real Kuwait Towers

- Male Tower height: 187 meters
- Male Tower height: 187 meters
- Male Tower height: 187 meters
- Male Tower: 137 meters
- Male Tower height: 87 meters

Scale	Height	Scale	Scale Equal
1	187	1.00	1.100
2	167	1.50	1.100
3	163	1.50	1.100
4	162	1.50	1.100
5	163	1.40	1.100
6	163	2.50	1.100
7	196	1.50	1.100
8	176	1.250	1.700

The table shows how the heights of the model compare to the real towers using different scale ratios.

Similarity Conditions

- Equal angles

vs.

- Largest sphere vs. its model version

Similarity Conditions

■ Hawet's Voglers ■ Central Voglers

■ Angha Rogles

Objective: Understanding ratio and similarity by comparing real landmarks with their scale models.

التناسب Proportion

فكرة الدرس:



التعرف على خواص التناسب وكذلك التناسب المتسلسل (الهندسي) واستخدامه في حل التمارين الرياضية .

المصطلحات:

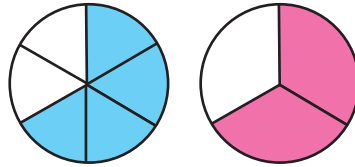


النسبة	Ratio
التناسب	Proportion
خواص التناسب	Properties of Proportion
تناسب المتسلسل	Continued Proportion

مسألة الدرس:



لدى ديما وخلود دوائر متطابقة، قامت ديما بتقسيم دائرتها إلى ثلاثة أجزاء متساوية ولونت جزئين، بينما خلود جزأت دائرتها إلى ستة أجزاء متساوية ولونت أربعة أجزاء.



هل $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ ؟

تعلمت في دراستك السابقة :

النسبة : هي مقارنة بين كميتين من النوع نفسه ولهما نفس وحدة القياس ويمكن التعبير عن النسبة بصورة a إلى b ، وتكتب $a:b$ أو $\frac{a}{b}$

التناسب : هو تساوي نسبتين أو أكثر .

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{12}{20} = \dots \quad \text{فمثلاً:}$$

ويمكن أن يُكتب كالتالي :

$$3:5 = 6:10 = 12:20 = \dots$$

إذا كان : $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$

وكانت $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

فإن a, b, c, d تسمى أعدادًا متناسبة

تعلمنا
فيما سبق:

- النسبة والتناسب
- التقسيم التناسبي
- تطبيقات حياتية (الزكاة ، الميراث ، مقياس الرسم)

تذكروا

$\mathbb{R}^*$: هي مجموعة الأعداد الحقيقية ماعدا الصفر.

ويسمى

الأول المتناسب a الثاني المتناسب b الثالث المتناسب c الرابع المتناسب d

طرفي المتناسب a, d وسطي المتناسب b, c

أي أن :

$$\begin{array}{c} \text{طرفي المتناسب} \\ \overbrace{a : b = c : d} \\ \text{وسطي المتناسب} \end{array}$$

ملحوظة :

إذا كان $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ أعداد متناسبة فإن $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ حيث $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$

خواص التناسب :

لنستكشف

إذا كان : $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ حيث $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

1. ضرب التناسب في $(b.d)$ $\frac{a}{b} (b.d) = \frac{c}{d} (b.d)$

$$a.d = c.b$$

2. قم بالاختصار والتبسيط

هل نستطيع أن نضع قاعدة ؟

خاصية (1) : « الضرب التقاطعي »

إذا كان : $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ وكان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$$a.d = c.b$$

أي إن : حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين وتسمى هذه الخاصية «قاعدة الضرب التقاطعي»

مثال (1) إذا كانت : $2, x, 4, 6$ أعدادًا متناسبة ، أوجد قيمة x

الحل :

$\therefore 2, x, 4, 6$ أعداد متناسبة

باستخدام الملاحظة السابقة

خاصية الضرب التقاطعي

بالضرب بالنظير الضربي للعدد 4

$$\therefore \frac{2}{x} = \frac{4}{6}$$

$$4x = 12$$

$$x = 3$$

تحقق من فهمك (1)

إذا كانت : $3, 5, 6, x$ أعدادًا متناسبة ، أوجد قيمة x

مثال (2) أوجد الرابع المتناسب للأعداد : 1, 3, 9, ...

الحل: نفرض أن الرابع للمتناسب هو x

$$\therefore \frac{1}{3} = \frac{9}{x}$$
$$x = (3)(9)$$
$$x = 27$$

تحقق من فهمك (2) 

أوجد الثالث المتناسب للأعداد : 4, 7,, 35

مثال (3) أوجد العدد الذي إذا طُرح من حدّي النسبة $\frac{7}{9}$ أصبحت $\frac{4}{5}$

الحل: نفرض أن العدد x

$$\therefore \frac{7-x}{9-x} = \frac{4}{5}$$
$$4(9-x) = 5(7-x)$$
$$36 - 4x = 35 - 5x$$
$$-4x + 5x = 35 - 36$$
$$x = -1$$

بالضرب التقاطعي
بتوزيع الضرب على الطرح
بتجميع الحدود الجبرية المتشابهة

تحقق من فهمك (3) 

أوجد العدد الذي إذا طُرح من حدّي النسبة $\frac{5}{6}$ أصبحت $\frac{9}{4}$

مثال (4) إذا كان $(x+4) : (5x-1) = 4:5$ أوجد قيمة x

الحل:

$$\frac{5x-1}{x+4} = \frac{4}{5}$$
$$5(5x-1) = 4(x+4)$$
$$25x-5 = 4x+16$$
$$25x-4x = 16+5$$
$$21x = 21$$
$$x = 1$$

بالضرب التقاطعي
بتوزيع الضرب على الطرح والجمع
بتجميع الحدود الجبرية المتشابهة

ملحوظة

إذا كانت :

$$ax = by$$

ويكون :

$$\frac{x}{y} = \frac{b}{a}$$

حيث :

$$a, b, x, y \in \mathbb{R}^*$$

تحقق من فهمك (4)

أوجد قيمة x إذا كان : $(2x+3) : (3x-5) = 3 : 4$

هل عكس الخاصية (1) صحيح ؟

لنستكشف

إذا كان : $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ وكانت $a.d = b.c$

$$\frac{a.d}{b.d} = \frac{b.c}{b.d} \quad (b.d)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{قم بالاختصار والتبسيط}$$

هل نستطيع أن نضع قاعدة ؟

خاصية (2): "عكس الخاصية 1"

إذا كان : $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ وكان $a.d = b.c$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{فإن :}$$

هل يمكن استنتاج (2) ؟

مثال (5) إذا كان $5a = 4b$ فأوجد $\frac{a}{b}$ حيث $a, b \in \mathbb{R}^*$

$$\therefore 5a = 4b$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{4}{5}$$

الحل:

تحقق من فهمك (5)

إذا كان : $2a = 7b$ ، فأوجد $\frac{a}{b}$



استخدام النماذج

استخدام التناسب في الرياضيات

يمارس إبراهيم رياضة كرة السلة لمدة 30 دقيقة ليفقد 300
ساعة حرارية فإذا أراد إبراهيم أن يفقد 450 ساعة حرارية فكم
دقيقة يحتاج إبراهيم ليمارس لعبة كرة السلة ؟

الحل: نفرض أن x يمثل عدد الدقائق

$$\frac{300}{450} = \frac{30}{x} \quad \text{فيكون:}$$

بالضرب التقاطعي

$$(300)(x) = (30)(450)$$

$$x = 45 \text{ دقيقة}$$

لماذا؟

لنعمل معاً لنستكشف

عزيزي المتعلم إذا كان لدينا التناسب التالي :

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$$

هل تستطيع التحقق مما يلي ؟

$$(1) \frac{5}{3} = \frac{10}{6} \quad (2) \frac{3}{6} = \frac{5}{10} \quad (3) \frac{6}{3} = \frac{10}{5}$$

اكتب تناسباً آخراً وطبق ما سبق مرة أخرى ، ماذا تستنتج ؟

خاصية (3): إذا كان : $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ وكان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

فإن :

$$(1) \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

$$(2) \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$(3) \frac{c}{a} = \frac{d}{b}$$

خواص التناسب

هل يمكن برهان خاصية (3) ؟

معلومة

"كرة السلة"

تُعد كرة السلة في الكويت
من أبرز الألعاب
الجماعية ، حيث تأسس
الاتحاد الكويتي لكرة
السلة عام 1959 وشارك
المنتخب الوطني في
عدة بطولات آسيوية ،
وكانت أفضل مشاركة له
عام 1983 بالحصول على
المركز الرابع في بطولة
أمم آسيا لكرة السلة التي
أقيمت في هونج كونج.



معلومة

فصل المتغيرات :
بوضع الحدود الجبرية
التي تحتوي على
المتغير x في أحد
الأطراف للمساوية
والحدود الجبرية التي
تحتوي على المتغير
 y في الطرف الآخر
للمساوية.

أوجد $\frac{x}{y}$ في كل مما يلي حيث : $y \neq 0, x \neq 0$

مثال (6)

(a) $3x = 4y$

(b) $\frac{2x+y}{5x-3y} = \frac{1}{2}$

الحل:

(a) $3x = 4y$

$$\therefore 3x = 4y$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{4}{3}$$

(b) $\frac{2x+y}{5x-3y} = \frac{1}{2}$

$$5x - 3y = 2(2x + y)$$

$$5x - 3y = 4x + 2y$$

$$5x - 4x = 2y + 3y$$

$$x = 5y$$

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{1}$$

$$x:y = 5:1$$

بالضرب التقاطعي
فصل المتغيرات

تحقق من فهمك (6) 

أوجد $\frac{x}{y}$ في كل مما يلي حيث : $y \neq 0, x \neq 0$

(a) $5x = 7y$

(b) $\frac{5x-2y}{5x+2y} = \frac{1}{4}$

لنستكشف 

إذا كان : $\frac{x}{y} = \frac{3}{7}$

هل يمكن القول إن : $y=7, x=3$ ؟

تذكر أن : إذا كان ... $\frac{x}{y} = \frac{3}{7} = \frac{3 \times 2}{7 \times 2} = \frac{3 \times 3}{7 \times 3} =$

فما قيمة x, y ؟

أي أن : إذا كان : $\frac{x}{y} = \frac{3}{7}$

فإن : $x=3k, y=7k$

خاصية (4): إذا كان : $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ وكان $k \in \mathbb{R}^*$

حيث k عدد ثابت $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$

فإن $a = bk, c = dk$

مثال (7) إذا كان : $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ أوجد $\frac{2a+5b}{3b+2a}$

الحل:

نفرض أن : $a=3k$, $b=4k$

, $k \neq 0$

$$\therefore \frac{2a+5b}{3b+2a} = \frac{2(3k)+5(4k)}{3(4k)+2(3k)}$$

استخدام خاصية 4

تجميع الحدود الجبرية

$$= \frac{6k+20k}{12k+6k}$$

$$= \frac{26k}{18k} = \frac{13}{9}$$

المتشابهة بسطاً ومقاماً

* الحل الآخر:

$$\therefore \frac{2a+5b}{3b+2a}$$

$$= \frac{\frac{2a}{b} + \frac{5b}{b}}{\frac{3b}{b} + \frac{2a}{b}}$$

بقسمة كل من البسط والمقام على b

$$= \frac{2\left(\frac{3}{4}\right) + 5}{3 + 2\left(\frac{3}{4}\right)}$$

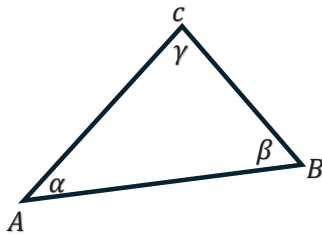
بالتعويض بقيمة $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$

$$= \frac{\frac{3}{2} + 5}{3 + \frac{3}{2}} = \frac{\frac{13}{2}}{\frac{9}{2}} = \frac{13}{9}$$

تحقق من فهمك (7)

إذا كان : $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ ، فأوجد القيمة العددية للمقدار : $\frac{2x+3y}{5x+2y}$

استخدام التناسب في الهندسة



إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا المثلث هي 4:5:6

احسب قياس كل زاوية من زوايا المثلث

نرسم شكلاً تخطيطياً للمثلث

نفرض أن قياسات زوايا المثلث تمثلها α, β, γ وتكون : $\alpha : \beta : \gamma = 4 : 5 : 6$

$$\frac{\alpha}{4} = \frac{\beta}{5} = \frac{\gamma}{6} = k, \quad k \neq 0$$

$$\therefore \alpha = 4k, \quad \beta = 5k, \quad \gamma = 6k$$

لماذا ؟

$$\therefore 4k + 5k + 6k = 180^\circ$$

لماذا ؟

$$15k = 180^\circ \rightarrow \therefore k = 12^\circ$$

$$\therefore m(\hat{A}) = (4)(12^\circ) = 48^\circ, \quad m(\hat{B}) = (5)(12^\circ) = 60^\circ,$$

$$m(\hat{C}) = (6)(12^\circ) = 72^\circ$$

* تحقق من الحل وفكر بطريقة أخرى للحل .

تذكروا

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلية يساوي 180°

معلومة

α, β, γ

هي حروف

لاتينية

تُستخدم للتعبير

عن الزوايا

α تُقرأ ألفا

γ تُقرأ جاما

β تُقرأ بيتا

معلومة (i)

$$\frac{x}{y} \text{ النسبة}$$

يسمى x مقدم النسبة
يسمى y تالي النسبة

لنعمل معاً لنستكشف

$$\text{إذا كان } \frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12}$$

1. (اجمع مقدمات النسب الثلاث)

(اجمع توالي النسب الثلاث)

$$\frac{3+6+9}{4+8+12} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \text{إحدى النسب} = \frac{\text{(مجموع مقدمات النسب الثلاث)}}{\text{(مجموع توالي النسب الثلاث)}}$$

2. (اجمع مقدمات النسبتين الأولى والثانية)

(اجمع توالي النسبتين الأولى والثانية)

$$\frac{3+6}{4+8} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \text{إحدى النسب} = \frac{\text{(مجموع المقدمات النسبتين الأولى والثانية)}}{\text{(مجموع التوالي للنسبتين الأولى والثانية)}}$$

3. جرب ذلك على النسبتين الأولى والثالثة

كرر العمل مرة أخرى باستخدام تناسب آخر
ماذا تستنتج ؟

4. إذا كان لدينا النسبة $\frac{3}{4}$ وتم ضرب حديها في العدد 3 هل تتغير النسبة ؟
وإذا تم ضرب حدي النسبة في (-2) هل تتغير النسبة ؟

«النسبة لا تتغير إذا تم ضرب حديها في عدد حقيقي لا يساوي الصفر»

مما سبق نستنتج أن :

إذا كان لدينا مجموعة من النسب المتساوية فإنه يمكننا الحصول على العديد من النسب الأخرى التي كل منها يساوي أي نسبة من النسب الأصلية ، وذلك عن طريق جمع المقدمات والتوالي لكل النسب أو بعضها سواء مباشرة أو بعد ضرب حدي كل نسبة في أي عدد حقيقي لا يساوي الصفر .

خاصية (4): إذا كان : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{\ell}{s} = \dots$ وكانت $k_1, k_2, k_3, \dots \in \mathbb{R}^*$

$$\text{فإن: إحدى النسب} = \frac{ak_1 + ck_2 + \ell k_3 + \dots}{bk_1 + dk_2 + sk_3 + \dots}$$

إذا كانت الأعداد 5, 6, 3 متناسبة مع a, b, c ،
أوجد قيمة المقدار : $\frac{a+2b+c}{3a+b+c}$

مثال (8)

الحل:

∴ الأعداد 5, 6, 3 متناسبة مع a, b, c ،
بضرب حدي النسبة الثانية في 2 ، وجمع المقدمات والتوالي للنسب الثلاث

$$\frac{a+2b+c}{5+12+3} = \text{إحدى النسب}$$

$$\frac{a+2b+c}{20} = \text{إحدى النسب} \Rightarrow (1)$$

بضرب حدي النسبة الأولى في 3 ، وجمع المقدمات والتوالي للنسب الثلاث

$$\frac{3a+b+c}{15+6+3} = \text{إحدى النسب}$$

$$\frac{3a+b+c}{24} = \text{إحدى النسب} \Rightarrow (2)$$

$$\therefore \frac{a+2b+c}{20} = \frac{3a+b+c}{24} = \text{إحدى النسب}$$

$$\frac{a+2b+c}{3a+b+c} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$$

* الحل الآخر: (باستخدام خاصية 4)

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{3} = k, k \neq 0 \text{ نفرض أن:}$$

$$\therefore a=5k, b=6k, c=3k$$

$$\frac{a+2b+c}{3a+b+c}$$

$$\frac{5k+2(6k)+3k}{3(5k)+6k+3k} = \frac{5k+12k+3k}{15k+6k+3k}$$

$$\frac{20k}{24k} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$$

تحقق من فهمك (8)



إذا كان : $\frac{a}{2} = \frac{b}{7} = \frac{c}{5}$ ، أوجد : $\frac{a+2b}{3b+c}$ (بطريقتين مختلفتين).

! إنتبه

إذا كانت a, b, c متناسبة مع E, F, G فإن :
 $\frac{a}{E} = \frac{b}{F} = \frac{c}{G} = k$
حيث $k \neq 0$ عدد ثابت

عرض المعلم السؤال التالي على المتعلمين في الفصل
إذا كان : $2a=3b=5c$ أوجد $a:b:c$
قام فهد وإبراهيم بحل السؤال بطريقتين مختلفتين

طريقة (إبراهيم)

$$2a=3b=5c$$

بالقسمة على 30

$$\frac{2a}{30} = \frac{3b}{30} = \frac{5c}{30}$$

$$\frac{a}{15} = \frac{b}{10} = \frac{c}{6}$$

$$a:b:c$$

$$15:10:6$$

طريقة (فهد)

$$2a=3b=5c$$

$$a:b:c$$

$$2:3:5$$

أي الطريقتين تؤيد ؟ دلل على إجابتك .

التناسب المتسلسل (الهندسي)

تعريف:

الكميات : a, b, c, d في تناسب متسلسل إذا وفقط إذا كان :

$$b^2=ac \text{ أو } \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

ويسمى : a الأول المتناسب ، b الوسط المتناسب ، c الثالث المتناسب

$$b = \pm \sqrt{a \cdot c}$$

ملحوظة : a, c إما أن يكونا موجبين معاً أو سالبين معاً

$$\frac{\text{مربع الوسط المتناسب}}{\text{الأول المتناسب}} = \frac{\text{الثالث المتناسب}}{\text{الوسط المتناسب}}, \quad \frac{\text{مربع الوسط المتناسب}}{\text{الثالث المتناسب}} = \frac{\text{الأول المتناسب}}{\text{الوسط المتناسب}}$$

مثال (9) أوجد الوسط المتناسب بين العددين 9, 16

الحل: نفرض أن b هو الوسط المتناسب بين العددين 9, 16

$$b = \pm \sqrt{(9)(16)}$$

$$= \pm \sqrt{144} = \pm 12$$

أوجد الوسط المتناسب بين العددين -27 ، -3

فكر معي

عزيزي المتعلم إذا كان لدينا $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ في تناسب متسلسل ،فإن : $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k$ حيث k عدد ثابتمن التناسب $c = \dots\dots$ استبدل $c = d \cdot k$ $\therefore b = \dots\dots$ استبدل $b = d \cdot k^2$ $\therefore a = \dots\dots$

نستطيع استنتاج التالي :

إذا كان $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ ، k عدد ثابت لا يساوي الصفر وكان :

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k$$

فإن : $a = dk^3$ ، $b = dk^2$ ، $c = dk$ مثال (10) إذا كان : a, b, c في تناسب متسلسل أثبت أن : $\frac{2a+3b}{2b+3c} = \frac{a}{b}$ الحل : $\therefore a, b, c$ في تناسب متسلسل فإن

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k \quad \therefore b = ck , a = ck^2$$

بالتعويض

$$\text{الطرف الأيسر} = L.H.S = \frac{2a+3b}{2b+3c} = \frac{2ck^2+3ck}{2ck+3c} = \frac{ck(2k+3)}{c(2k+3)} = k \longrightarrow (1)$$

$$\text{الطرف الأيمن} = R.H.S = \frac{a}{b} = \frac{ek^2}{ek} = k \longrightarrow (2)$$

من (1) ، (2) يتبع أن : $\frac{2a+3b}{2b+3c} = \frac{a}{b}$

تذكروا

إذا كان :

في a, b, c تناسب

متسلسل فإن :

$$(1) \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

$$(2) b^2 = ac$$

تحقق من فهمك (10)

إذا كان : a, b, c في تناسب متسلسل أثبت أن : $\frac{a+3b}{b+3c} = \frac{a-2b}{b-2c}$ حيث المقام $\neq$ صفر

مثال (11)

إذا كان : $\frac{2a+3b}{2b+3a} = \frac{2+2b}{b+2c}$ أثبت أن : b وسط متناسب بين a, c

الحل:

$$\frac{2a+3b}{2b+3c} = \frac{a+2b}{b+2c}$$

$$(2a+3b)(b+2c) = (a+2b)(2b+3c)$$

بالضرب التقاطعي

$$2ab + 4ac + 3b^2 + 6bc = 2ab + 3ac + 4b^2 + 6bc$$

$$4ac - 3ac = 4b^2 - 3b^2$$

بالتبسيط وجمع الحدود الجبرية المتشابهة

$$ac = b^2$$

$\therefore b$ وسط متناسب بين a, c

تحقق من فهمك (11)

إذا كان : $\frac{a+b}{b+c} = \frac{a}{b}$ أثبت أن b وسط بين a, c

فكر معي

عرض المعلم السؤال التالي على المتعلمين في الفصل إذا كانت الأعداد : $6, x, 54, 162$ في تناسب متسلسل أوجد قيمة x وكان هناك إجابتين لفهد وإبراهيم.

طريقة (إبراهيم)

$\therefore$ الأعداد في تناسب متسلسل

$$\frac{6}{x} = \frac{x}{54} = \frac{54}{162}$$

$$\frac{6}{x} = \frac{x}{54}$$

$$x^2 = 324$$

$$x = \pm \sqrt{324}$$

$$x = \pm 18$$

طريقة (فهد)

$\therefore$ الأعداد في تناسب متسلسل

$$\frac{6}{x} = \frac{x}{54} = \frac{54}{162}$$

$$\frac{6}{x} = \frac{54}{162}$$

$$(x)(54) = (6)(162)$$

$$x = \frac{972}{54}$$

$$x = 18$$

أي الطريقتين تؤيد ؟ دلل على إجابتك .

تعميم: الكميات : $a, b, c, d, \dots$ في تناسب متسلسل إذا وفقط إذا كان : $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \dots$

أولاً - البنود الموضوعية :

■ في البنود (1-4) اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة :

- (1) إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ فإن $ab = 3 \times 4$ (a) (b)
- (2) إذا كان $\frac{x}{3} = \frac{14}{23}$ فإن $x = \frac{23}{42}$ (a) (b)
- (3) إذا كان $\frac{x-7}{7} = \frac{1}{8}$ فإن $x = \frac{63}{8}$ (a) (b)
- (4) زوج النسب التالي: $\frac{9}{12} = \frac{4}{5}$ لا يكون تناسباً (a) (b)

■ في البنود (1-5) اختر الإجابة الصحيحة :

- (1) إذا كانت $a, 3x, 2b, 4x$ في تناسب فإن $\frac{a}{b}$ تساوي :
- (a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{4}{3}$ (d) $\frac{3}{4}$
- (2) إذا كان $\frac{x}{y} = 7$ فإن $x + 7y$ تساوي :
- (a) $7x$ (b) $8x$ (c) $2x$ (d) $10x$
- (3) إذا كان $2x - 5y = 0$ فإن $\frac{x}{y}$ تساوي :
- (a) $\frac{5}{2}$ (b) $\frac{2}{5}$ (c) $\frac{3}{2}$ (d) $\frac{2}{3}$
- (4) إذا كان $\frac{x}{2y} = \frac{3}{5}$ فإن $\frac{x+2y}{2x-y}$ تساوي :
- (a) $\frac{15}{9}$ (b) $\frac{16}{7}$ (c) $\frac{7}{16}$ (d) $\frac{9}{15}$

(5) إذا كان $20, x, 32$ في تناسب متسلسل فإن x تساوي :

(a) $\pm 2\sqrt{10}$

(b) $\pm 4\sqrt{10}$

(c) $\pm 8\sqrt{10}$

(d) $\pm \frac{1}{8\sqrt{10}}$

ثانيًا - أسئلة المقال :

(1) أوجد الرابع المتناسب للأعداد $5, 7, 10, \dots$

(2) أوجد الثالث المتناسب للأعداد $4, 6, \dots, 9$

(3) أوجد قيمة x إذا كانت الأعداد $5, 20, 25, x$ متناسبة.

(4) أوجد العدد الحقيقي الذي إذا أضيف إلى حدي النسبة $\frac{4}{5}$ أصبحت $\frac{2}{3}$.

(5) أوجد العدد الذي إذا طرح من كل الأعداد $16, 10, 11, 7$ بالترتيب نفسه أصبحت متناسبة.



(6) إذا كان : $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$, $\frac{c}{d} = \frac{3}{4}$ أوجد $\frac{3ac+2bd}{bc-2ad}$



(7) إذا كانت الأعداد : $1, \frac{1}{2}, x-2, 4$ في تناسب متسلسل أوجد قيمة x .

(8) إذا كانت الأعداد : a, b, c تكون تناسبًا متسلسلاً ، أثبت أن $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \frac{a}{c}$ حيث المقام $\neq$ صفر

(9) إذا كانت الأعداد $3, 5, 11$ متناسبة مع a, b, c أوجد القيمة العددية للمقدار : $\frac{a+3b}{5b+c}$

مهارات تفكير عليا



(1) إذا كان : $4x^2 - 12xy + 9y^2 = 0$ أوجد $\frac{x}{y}$

(2) إذا كان : $9x^2 - 25y^2 = 0$ أوجد $\frac{x}{y}$

تشابه المضلعات Similar Polygons

2-2

فكرة الدرس:



سوف نتعلم دراسة تشابه المضلعات .

المصطلحات:

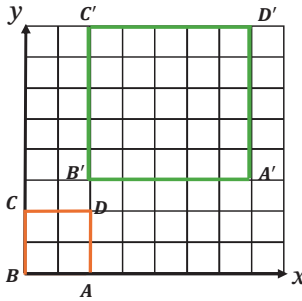


Similar Polygons	مضلعات متشابهة
Corresponding Sides	أضلاع متناظرة
Corresponding Angles	زوايا متناظرة
Similar Ratio	نسبة التشابه

مسألة الدرس:



قام عبدالله بتكبير صورة شخصية له من 2×3 إلى 4×6
لإرفاقها في السيرة الذاتية للتقديم بوظيفة حكومية
ما الذي اختلف في الصورتين ؟
ما الذي ظل ثابتاً ؟



لنعمل معاً لنستكشف



يوضح الشكل المقابل المضلع $ABCD$

وصورته $A'B'C'D'$ بتحويل هندسي «تكبير»

1. قارن بين قياسات الزوايا المتناظرة. **ماذا تستنتج؟**
2. أوجد النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة. **ماذا تلاحظ ؟**

تعريف تشابه المضلعين :

تعميم (1) : يقال لمضلعين (لهما العدد نفسه من الأضلاع) انهما متشابهان

إذا تحقق الشرطان التاليان معا :

1. قياسات زواياهما المتناظرة متساوية .
2. أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة .

«والعكس صحيح»

وتسمى النسبة بين طولي أي ضلعين متناظرين **نسبة التشابه** ، ويستخدم الرمز $(\sim)$ للتعبير عن تشابه المضلعين .

تعلّمنا فيما سبق:

التحويلات الهندسية:

- التكبير
- الدوران
- الانعكاس
- الانسحاب

تذكروا

التكبير تحويل هندسي
يحافظ على قياسات
الزوايا ولا يحافظ على
الأطوال .

تذكر!

يستخدم الرمز $\cong$ للتعبير عن التطابق

معلومة

- المضلع المنتظم : هو شكل هندسي جميع زواياه متطابقة وجميع أضلاعه متطابقة.
- جميع الأشكال الهندسية المنتظمة والتي لها نفس العدد من الأضلاع متشابهة.

لنعمل معاً لنستكشف

- هل جميع المستطيلات متشابهة ؟
- هل جميع المعينات متشابهة ؟
- هل جميع المربعات متشابهة ؟
- هل جميع المثلثات القائمة الزاوية متشابهة ؟
- هل جميع المثلثات المتطابقة الأضلاع متشابهة ؟

تعميم (2) :

المضلعان المتطابقان متشابهان.

إذا كان المضلع $ABCD \cong MNHK$ فإن :

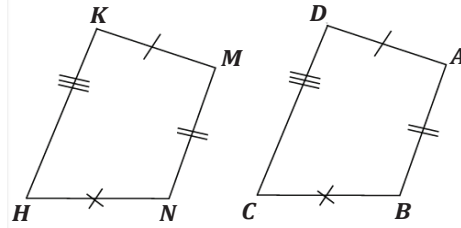
$$m(\hat{A}) = m(\hat{M}) \quad (1)$$

$$m(\hat{B}) = m(\hat{N})$$

$$m(\hat{C}) = m(\hat{H})$$

$$m(\hat{D}) = m(\hat{K})$$

$$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NH} = \frac{CD}{HK} = 1 \quad (2)$$



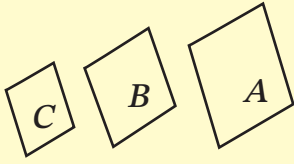
ماذا تستنتج ؟

أي أن المضلع $ABCD \sim MNHK$

ملحوظة :

يراعى ترتيب كتابة الرؤوس المتناظرة للأشكال الهندسية المتشابهة حتى يسهل كتابة التناسب بين الأضلاع المتناظرة .

تعميم (3) :



إذا كان المضلع A يشابه المضلع B ، وكان المضلع B يشابه المضلع C
فإن المضلع A يشابه المضلع C
أي أنه : إذا كان $A \sim B, B \sim C$ فإن $A \sim C$

من تعميم 1، 2، 3 :

نستطيع القول إن الشكلين الهندسيين متشابهان إذا كان أحدهما تكبيراً أو تصغيراً أو مطابقاً للآخر .

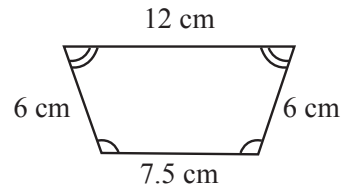
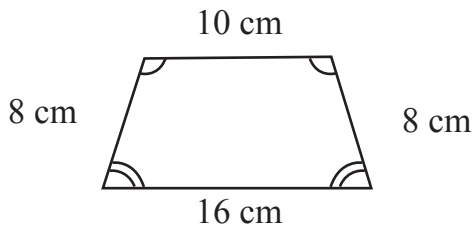
■ المضلعات المتشابهة يكون لها نفس عدد الأضلاع وليس بالضرورة أن يكون لها نفس القياس بالأطوال .

لنعمل معاً لنستكشف

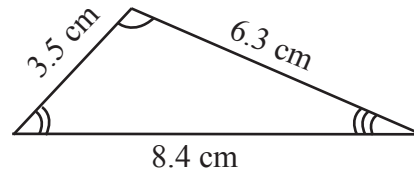
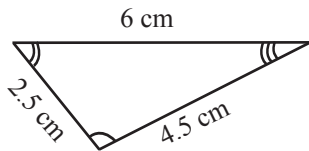
نشاط

في كل من الأشكال التالية:

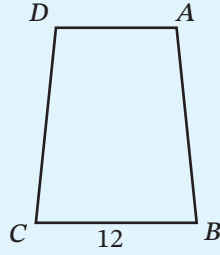
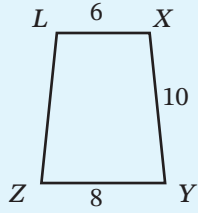
ابحث تشابه المضلعين، فإذا كان المضلعان متشابهين اكتب عبارة التشابه ونسبة التشابه،
فيما عدا ذلك اشرح السبب.



1



2



في الشكل المقابل :
 $XYZL \sim ABCD$ إذا كان :
 أوجد : **AB, DA**

مثال (1)

الحل:

$\therefore XYZL \sim ABCD$ المثلع

$$\therefore \frac{XY}{AB} = \frac{YZ}{BC} = \frac{LX}{DA}$$

باستخدام تعريف التشابه

$$\frac{10}{AB} = \frac{8}{12} = \frac{6}{DA}$$

$$\frac{10}{AB} = \frac{8}{12}$$

باستخدام الضرب التقاطعي

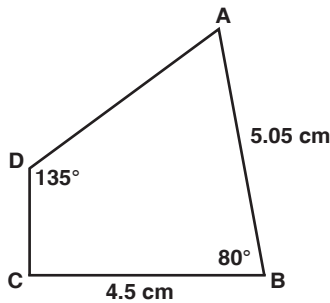
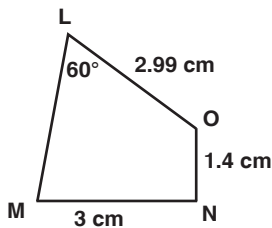
$$AB = \frac{10 \times 12}{8} = 15$$

$$\frac{6}{DA} = \frac{8}{12}$$

وبالمثل

$$DA = \frac{6 \times 12}{8} = 9$$

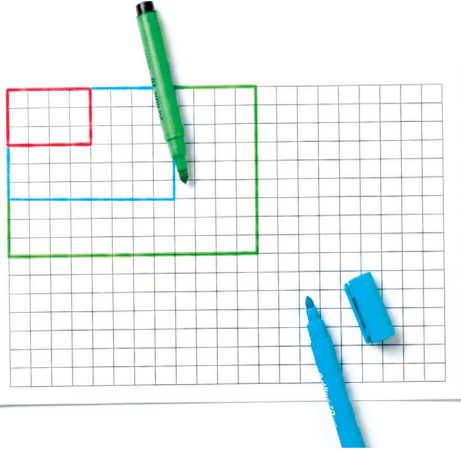
تحقق من فهمك (1)



في الشكل المقابل :
 المثلعتان **$LMNO, ABCD$** متشابهتان
 أوجد قياسات الزوايا المجهولة وأطوال
 الأضلاع المجهولة في كلا من المثلعتين

لنعمل معاً لنستكشف

- من خلال العمل التعاوني سوف نتوصل إلى العلاقة بين محيطي شكلين متشابهين والعلاقة بين مساحتهما . اتبع الخطوات التالية:
- (1) على ورقة المربعات ارسم مستطيلاً أبعاده 3 وحدات ، 4 وحدات .
 - (2) حدد وليكن 3 مستطيلات مشابهة للمستطيل الأصلي .
 - (3) من خلال ما تم رسمه أكمل الجدول رقم (1)
 - (4) أكمل الجدول رقم (2) بالاستعانة من معلومات جدول رقم (1) .
 - (5) ماذا تعني النسبة التي حصلت عليها مع نسبة التشابه ؟
 - (6) هل يوجد اختلاف بين نتيجتك ونتيجة زملائك ؟



المستطيل	العرض	الطول	المحيط	المساحة
الأصلي				
I				
II				

المستطيل	النسبة بين العرضين	النسبة بين الطولين	النسبة بين المحيطين	نسبة التشابه	النسبة بين المساحتين
I : الأصلي					
II : الأصلي					

حاول مرة أخرى
مع أشكال هندسية
أخرى

نظرية :

إذا كانت نسبة التشابه لأي شكلين متشابهين هي $\frac{a}{b}$ فإن :

1 . النسبة بين محيطي الشكلين $= \frac{a}{b}$ و هي نسبة التشابه

2 . النسبة بين مساحتي الشكلين $= \left(\frac{a}{b}\right)^2$ و هي مربع نسبة التشابه

ملاحظة :

إذا كان المضلع A يشابه المضلع B (كانت k نسبة تشابه المضلع A : المضلع B) :
(1) $k > 1$

فإن المضلع A هو تكبير للمضلع B وتسمى K معامل التكبير
(2) $0 < k < 1$

فإن المضلع A هو تصغير للمضلع B وتسمى K معامل التصغير
(3) $k = 1$

فإن المضلع A يطابق المضلع B

مثال (2) إذا كانت نسبة التشابه لمضلعين متشابهين تساوي $\frac{5}{6}$ ، وكان محيط المضلع الأصغر يساوي 14.5 cm ، أوجد محيط المضلع الأكبر.

الحل:

النسبة بين محيطي المضلعين = نسبة التشابه

$$\frac{5}{6} = \frac{\text{محيط المضلع الأصغر}}{\text{محيط المضلع الأكبر}}$$

$$\frac{6 \times 14.5}{5} = \text{محيط المضلع الأكبر}$$

$$17.4 \text{ cm} =$$

تحقق من فهمك (2)

لدينا شكلان رباعيان متشابهان ونسبة التشابه بينهما $\frac{5}{4}$ ، فإذا كانت مساحة الشكل الرباعي الأكبر هي 30 cm^2 فما مساحة الشكل الرباعي الأصغر ؟

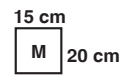
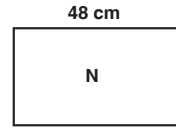
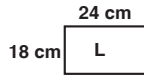
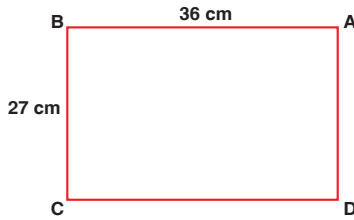
أولاً - البنود الموضوعية :

■ في البنود من (1-3) ظل (a) إذا كانت العبارة صحيحة أو (b) إذا كانت العبارة خاطئة :

- (1) كل مضلعين متطابقين هما مضلعان متشابهان . (a) (b)
 (2) كل مضلعين متشابهين هما مضلعان متطابقان . (a) (b)
 (3) إذا تساوت الزوايا المتناظرة في مضلعين فإن المضلعين متشابهان . (a) (b)

■ في البنود من (1-6) ظل دائرة الإجابة الصحيحة .

(1) المستطيلات المشابهة للمستطيل $BADC$ هي



- (a) فقط L (b) فقط N
 (c) L, N, M (d) فقط N, L

(2) المضلعان المتشابهان يكونان متطابقين إذا كانت نسبة التشابه x ، فإن x تساوي:

- (a) $x = 1$ (b) $x > 1$
 (c) $0 < x < 1$ (d) $x = \frac{1}{2}$

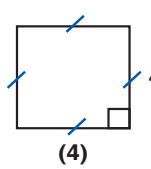
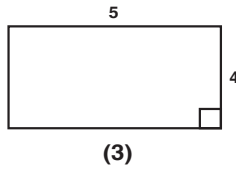
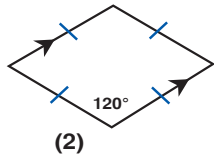
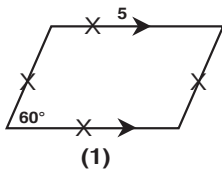
(3) مضلعان متشابهان النسبة بين محيطيهما 36:25 ، فإن النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما تساوي:

- (a) 6 : 5 (b) 5 : 6
 (c) 36 : 25 (d) 4 : 5

(4) إذا كانت النسبة بين مساحتي سطحي مضلعين متشابهين 16 : 25 طولي ضلعين متناظرين فيهما تساوي:

- (a) 2 : 5 (b) 4 : 5
 (c) 16 : 25 (d) 16 : 41

(5) أي من المضلعين التاليين متشابهان ؟



- (a) المضلعان (1), (2) (b) المضلعان (1), (3)
 (c) المضلعان (3), (4) (d) المضلعان (2), (4)

(6) إذا كان : $\Delta ABC \sim \Delta LMN$, $LM=6cm$, $AB=3cm$, $MN=8cm$ فإن BC تساوي:

- (a) 4 cm
(c) 2 cm

- (b) 3 cm
(d) 1.5 cm

ثانياً - أسئلة المقال :

(1) إذا كانت نسبة التشابه بين مستطيلين هي 3:2 ، وكان محيط المستطيل الأكبر يساوي 75 ، أوجد محيط المستطيل الأصغر؟

(2) النسبة بين مساحتي مضلعين متشابهين هي $\frac{16}{9}$ ، ما محيط المضلع الأكبر إذا كان محيط المضلع الأصغر 24 cm ؟

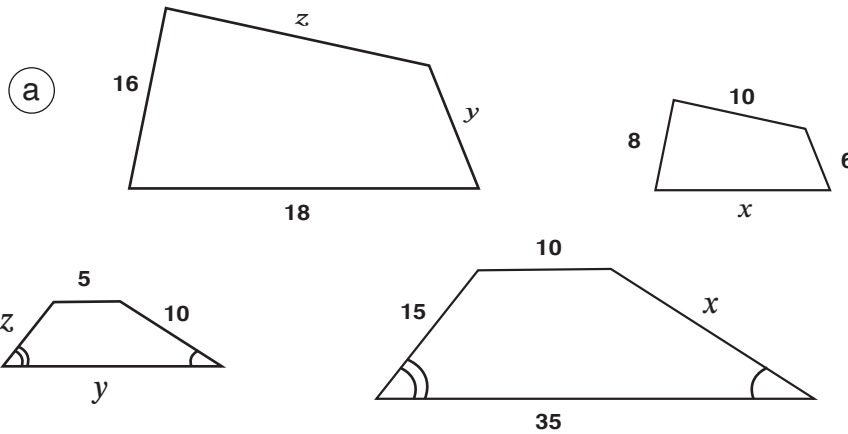


(3)

(3) مستطيلان متشابهان. بُعدا الأول 8 cm , 12 cm ، ومحيط الثاني 200 cm .
- أوجد نسبة التشابه .

- أوجد مساحة المستطيل الثاني .

(4) احسب x, y, z في الحالات التالية علماً بأن المضلعين متشابهان .



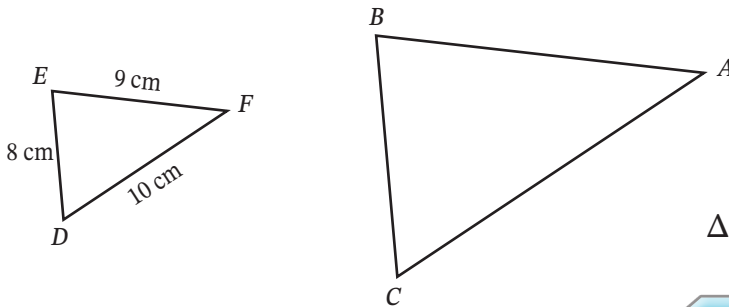
(5) في الشكل المقابل :

$\Delta DEF \sim \Delta ABC$

إذا كان محيط :

$\Delta ABC = 81 cm$

أوجد أطوال أضلاع ΔABC



مهارات تفكير عليا



■ النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين هي 3:4 ، إذا كان مجموع مساحتي سطحيهما

تساوي $225 cm^2$ ، فأوجد مساحة كل منهما ؟

تشابه المثلثات

Similar Triangles

فكرة الدرس:



سوف نتعلم في هذا البند حالات تشابه المثلثات.

المصطلحات:

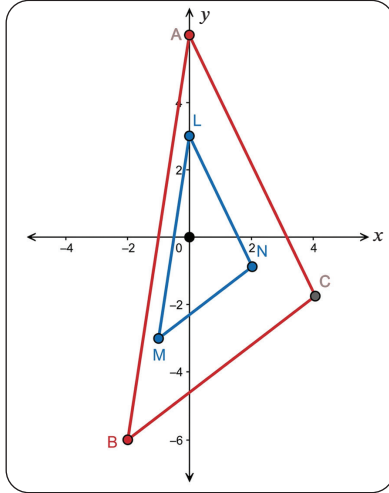


رمز التشابه ~

مسألة الدرس:



في الشكل المقابل :
 ΔABC هو صورة ΔLMN
 تحت تأثير تكبير مركزه نقطة
 الأصل معاملته 2 .



من خواص التكبير أنه يحافظ على قياسات الزوايا :

$$m(\hat{A}) = m(\dots\dots)$$

$$m(\hat{B}) = m(\dots\dots)$$

$$m(\hat{C}) = m(\dots\dots)$$

(1) قياسات الزوايا المتناظرة في المثلثين متساوية

من خواص التكبير أنه يحافظ على تناسب أطوال الأضلاع :

$$\therefore \frac{AB}{LM} = \frac{AC}{LN} = \frac{BC}{MN} = \frac{2}{1} \quad (\text{معامل التكبير})$$

(2) أطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة

(1، 2) هذان الشرطان أساسيان لتشابه أي مضلعين.

ونكتفي بشرط واحد لإثبات تشابه مثلثين حيث إن تشابه المثلثات يعتبر حالة خاصة من تشابه المضلعات .

– هل كل مثلثين متطابقين متشابهان؟ وضح إجابتك

عزيزي المتعلم من مسألة اليوم نستطيع إيجاد طرق أخرى لإثبات تشابه مثلثين حيث إن تشابه المثلثات هو حالة خاصة من حالات تشابه المضلعات .

في أي مثلثين متشابهين تكون قياسات الزوايا المتناظرة متساوية ، والنسب بين طولي كل ضلعين متناظرين متساوية .

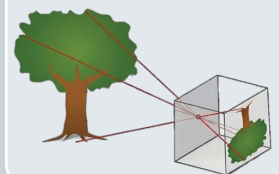
النظريات التالية تبين أنه إذا توافر أحد الشرطين يكفي لإثبات أن المثلثين متشابهان حيث إن الشرط الآخر سيكون محققاً أيضاً .

تعلمنا فيما سبق:

- التكبير
- التصغير
- التطابق

معلومة

الفكرة التي بنيت عليها فكرة التصوير الفوتوغرافي عند وضع جسم وليكن مثلاً كما هو موضع (شجرة) أمام صندوق يحتوي على ثقب صغير والثقب يقابله على الوجه الآخر للصندوق لوح شفاف فإن الأشعة تسقط على الثقب في خطوط مستقيمة وتتقاطع عنده فيظهر أسفل الجسم من الأعلى ويظهر رأس الجسم في الأسفل وكلما اقترب الجسم من الثقب تكبر الصورة والعكس صحيح وتعد هذه الظاهرة أساس عمل الغرفة المظلمة (Camera Obscura) والتي بنيت عليها فكرة التصوير الفوتوغرافي.



تذكروا

يتشابه المضلعان إذا
وفقاً إذا كان :
(1) زواياها المتناظرة
متطابقة .
(2) أطوال أضلاعها
المتناظرة متناسبة .

ملحوظة

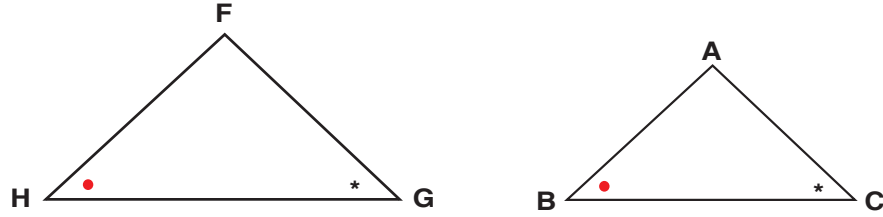
يراعى ترتيب رؤوس
المثلثين عند كتابة عبارة
التشابه .

تذكروا

إذا تطابقت زاويتان في
مثلث مع زاويتين في
مثلث آخر فإن الزاوية
الثالثة في المثلث الأول
تطابق الزاوية الثالثة في
المثلث الآخر.

نظرية (1) :

يتشابه المثلثان إذا تطابقت زاويتان في أحد المثلثين مع زاويتين في المثلث الآخر.



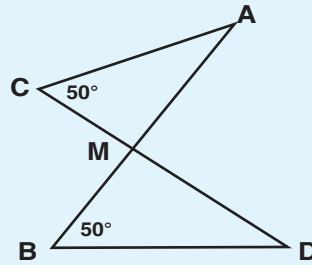
$$m(\hat{H}) = m(\hat{C})$$

$$m(\hat{G}) = m(\hat{B})$$

$$\Delta FGH \sim \Delta ABC$$

وينتج من التشابه أن :

$$\frac{FG}{AB} = \frac{GH}{BC} = \frac{FH}{AC}$$



في الشكل المقابل :

$$m(\hat{C}) = m(\hat{B}) = 50^\circ$$

أثبت أن: $\Delta DBM \sim \Delta ACM$

مثال (1)

الحل: ΔDBM , ΔACM وفيهما :

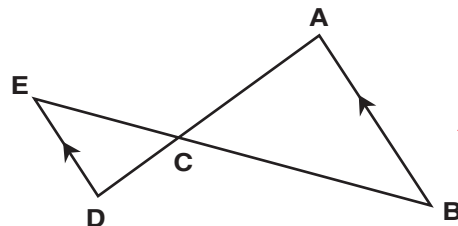
$$m(\hat{C}) = m(\hat{B}) = 50^\circ \quad \text{معطى} \quad \longrightarrow (1)$$

$$m(\hat{CMA}) = m(\hat{BMD}) \quad \text{بالتقابل بالرأس} \quad \longrightarrow (2)$$

من (1) ، (2) ينتج أن :

$$\Delta DBM \sim \Delta ACM$$

تحقق من فهمك (1)



في الشكل المقابل :

أثبت أن المثلثين DEC , ABC

متشابهان ثم اكتب عبارة التشابه

في الشكل المقابل :

$m(\hat{A})=45^\circ, m(\hat{C})=50^\circ$
 $m(\hat{L})=85^\circ, m(\hat{M})=50^\circ$
 أثبت أن: $\Delta ABC \sim \Delta NLM$

مثال (2)

الحل: $\Delta ABC, \Delta NML$ وفيهما :

$m(\hat{M}) = m(\hat{C}) = 50^\circ$ $\longrightarrow$ (1)

$m(\hat{B}) = 180^\circ - (50^\circ + 45^\circ) = 85^\circ$
 $m(\hat{L}) = m(\hat{B}) = 85^\circ$ $\longrightarrow$ (2)

من (1)، (2) ينتج أن :

$\Delta ABC \sim \Delta NML$

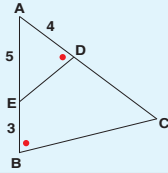
تحقق من فهمك (2)

المثلث ABC قائم الزاوية في A فيه $m(\hat{B}) = 55^\circ$ ، والمثلث NLM قائم الزاوية في L فيه $m(\hat{M}) = 35^\circ$ ، أثبت أن المثلثين متشابهان .

في الشكل المقابل :

1. أثبت أن: $\Delta ACB \sim \Delta AED$
 2. أوجد طول $\overline{DC}$

مثال (3)



الحل: $\Delta ACB, \Delta AED$ فيهما :

$\hat{A}$ $\longrightarrow$ (1) زاوية مشتركة

$m(\hat{D}) = m(\hat{B})$ $\longrightarrow$ (2) معطى

$\Delta ACB \sim \Delta AED$

$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE}$

$\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD}$

$\frac{AC}{5} = \frac{8}{4}$

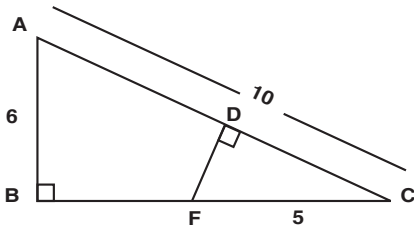
$AC = \frac{8 \times 5}{4} \longrightarrow AC = 10$

$DC = 10 - 4 = 6$

تحقق من فهمك (3)

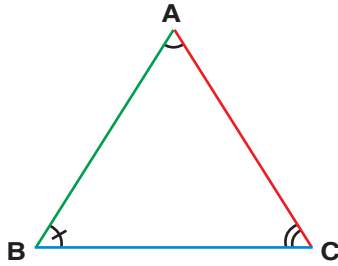
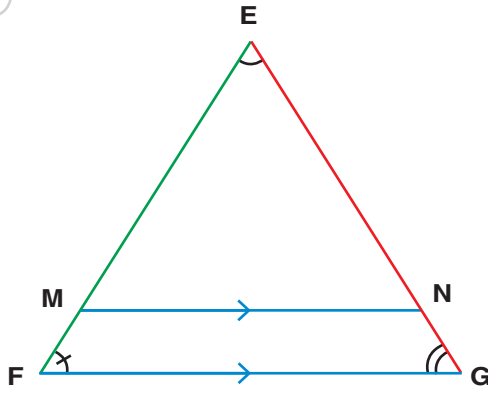
في الشكل المقابل :

(1) أثبت أن المثلثين ABC, FDC متشابهان
 (2) أوجد طول $\overline{FD}$



لنعمل معاً لنستكشف

نشاط



المعطيات : $\Delta ABC, \Delta EFG$ فيهما

$$\frac{AC}{EG} = \frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG}$$

المطلوب : إثبات أن $\Delta ABC \sim \Delta EFG$

عزيزي المتعلم لإثبات المطلوب تحتاج لوسيلة مساعدة وهي :

العمل : 1. نأخذ النقطة $M \in \overline{EF}$ بحيث $EM=AB$ (فرضاً)

2. نرسم $\overline{MN} \parallel \overline{FG}$

البرهان : نبدأ البرهان بالسؤال التالي :

هل يمكن إثبات أن $\Delta EMN \sim \Delta EFG$

وإذا استطعنا ذلك ... هل يمكن كتابة التناسب

$$\frac{EM}{EF} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$$

وحيث إن : $AB=EM$

يمكن كتابة التناسب السابق كالاتي :

$$\frac{AB}{EF} = \frac{EN}{EG} = \frac{MN}{FG}$$

$$\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{EG} = \frac{BC}{FG}$$

بمقارنة التناسب الموجود داخل المستطيل المتقطع نستنتج أن :

$$EN=AC, MN=BC, \dots\dots$$

يمكننا القول إن : $\Delta ABC \cong \Delta EMN$

$$\therefore \Delta ABC \sim \Delta EMN \longrightarrow (1)$$

لماذا ؟

وفي بداية البرهان تم إثبات أن :

$$\Delta EMN \sim \Delta EFG \longrightarrow (2)$$

من (1)، (2) ينتج أن :

$$\Delta ABC \sim \Delta EFG$$

وهذا الاستكشاف يقودنا إلى :

نظرية (2) :

يتشابه المثلثان إذا تناسب أطوال أضلاعهما المتناظرة .

في الشكل المقابل :

مثال (4) أثبت أن المثلثين ABC, LMN متشابهان.

الحل: $\Delta ABC, \Delta LMN$ وفيهما :

$$\frac{LM}{AB} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \longrightarrow (1)$$

$$\frac{LN}{AC} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \longrightarrow (2)$$

$$\frac{MN}{BC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \longrightarrow (3)$$

من 1، 2، 3 ينتج أن :

$$\frac{LM}{AB} = \frac{LN}{AC} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \Delta ABC \sim \Delta NLM$$

تحقق من فهمك (4)

a في الشكل المقابل :
أثبت أن المثلثين ABC, QRS متشابهان.

b في الشكل المقابل :
المثلثان ABC, LMN متشابهان.
أوجد طول كل من $\overline{MN}$ ، $\overline{LN}$

معلومة i

عندما نقول :
(بالتوازي والتناظر) نعني
وجود مستقيمين متوازيين
وقاطع لهما وزاويتان في
وضع تناظر .

لنعمل معاً لنستكشف

نشاط

المعطيات: المثلثان ΔABC , ΔEFG فيهما:

$$\frac{AC}{EG} = \frac{AB}{EF}, m(\hat{A}) = m(\hat{E})$$

المطلوب: إثبات أن $\Delta ABC \sim \Delta EFG$

عزيزي المتعلم تحتاج للوصول إلى هذا الإثبات أن تستخدم

وسيلة مساعدة وهي:

العمل: 1. نأخذ النقطة $M \in \overline{EF}$ بحيث $EM = AB$ (فرضاً)

2. نرسم $\overline{MN} \parallel \overline{FG}$

البرهان: نبدأ البرهان بالسؤال التالي:

هل يمكن إثبات أن $\Delta EMN \sim \Delta EFG$

وإذا استطعنا ذلك ... هل يمكن كتابة التناسب

$$\frac{EM}{EF} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$$

$\therefore AB = EM$ (فرضاً)

$$\therefore \frac{AB}{EF} = \frac{EN}{EG} = \frac{MN}{FG}$$

$$\therefore \frac{AB}{EF} = \frac{AC}{EG}$$

بمقارنه التناسب الموجود داخل المستطيل المتقطع نستنتج أن:

$$EN = AC$$

يمكننا القول أن: $\Delta ABC \cong \Delta EMN$

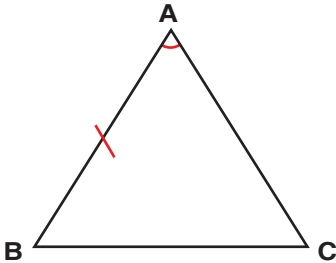
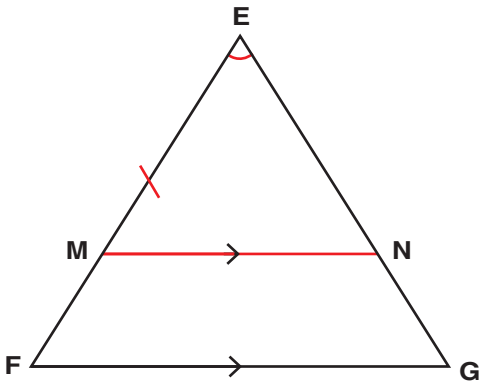
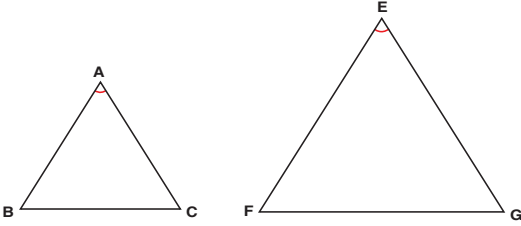
$$\therefore \Delta ABC \sim \Delta EMN \longrightarrow (3)$$

وفي بداية البرهان تم إثبات أن:

$$\Delta EMN \sim \Delta EFG \longrightarrow (4)$$

من 3، 4 ينتج أن:

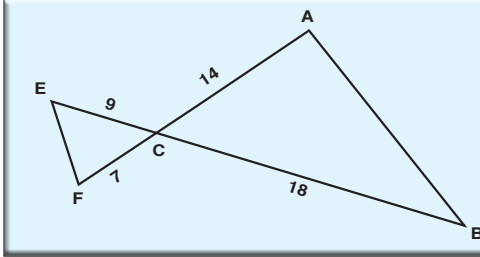
$$\Delta ABC \sim \Delta EFG$$



وهذا الاستكشاف يقودنا إلى :

نظرية (3) :

يتشابه المثلثان إذا طابقت زاوية في أحدهما زاوية في المثلث الآخر، وتناسب طولوا الضلعين المحددين لهاتين الزاويتين .



في الشكل المقابل :
أثبت أن المثلثين FEC , ABC متشابهان.
ثم اكتب عبارة التشابه .

مثال (5)

الحل: المثلثان ΔABC , ΔEFC فيهما :

$$\therefore m(\widehat{ECF}) = m(\widehat{BCA}) \longrightarrow (1)$$

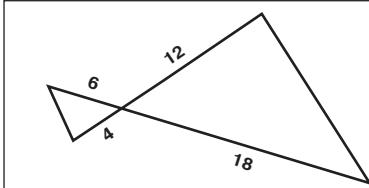
$$\therefore \frac{FC}{AC} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{EC}{BC} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

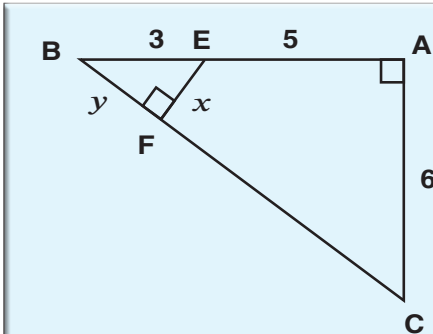
$$\therefore \frac{FC}{AC} = \frac{EC}{BC} \longrightarrow (2)$$

من (1), (2) ينتج أن : $\Delta ABC \sim \Delta EFC$

تحقق من فهمك (5)



في الشكل المقابل :
أثبت أن المثلثين متشابهان .



في الشكل المقابل :
أثبت أن المثلثين BAC , BFE متشابهان.
ثم أوجد كلا من x, y

مثال (6)

الحل: المثلثان ΔBAC , ΔBFE فيهما :

$\hat{B} \longrightarrow (1)$ زاوية مشتركة

$m(\hat{BFE}) = m(\hat{BAC}) = 90^\circ \longrightarrow (2)$ معطى

من (1), (2) ينتج أن :

$$\Delta BFE \sim \Delta BAC$$

في ΔABC القائم في A $(BC)^2 = (AC)^2 + (BA)^2$

$$= (6)^2 + (8)^2 = 100$$

$$BC = \sqrt{100}$$

$$\therefore BC = 10$$

$$\frac{BF}{BA} = \frac{FE}{AC} = \frac{BE}{BC}$$

$$\frac{y}{8} = \frac{x}{6} = \frac{3}{10}$$

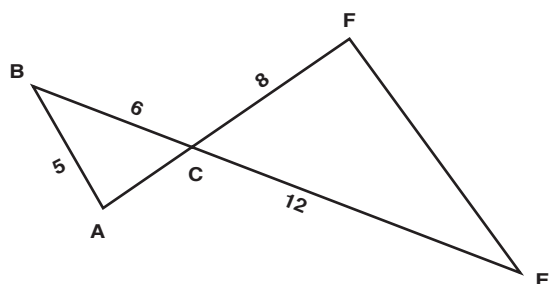
$$\frac{x}{6} = \frac{3}{10} \longrightarrow x = \frac{3 \times 6}{10}$$

$$\therefore x = 1.8 \text{ cm}$$

$$\frac{y}{8} = \frac{3}{10} \longrightarrow y = \frac{3 \times 8}{10}$$

$$\therefore y = 2.4 \text{ cm}$$

تحقق من فهمك (6)



في الشكل المرسوم :

a أثبت أن $\Delta FEC \sim \Delta ABC$

b أوجد $\overline{EF}$

استخدام المرايا في حساب ارتفاع مبنى

استخدام النماذج

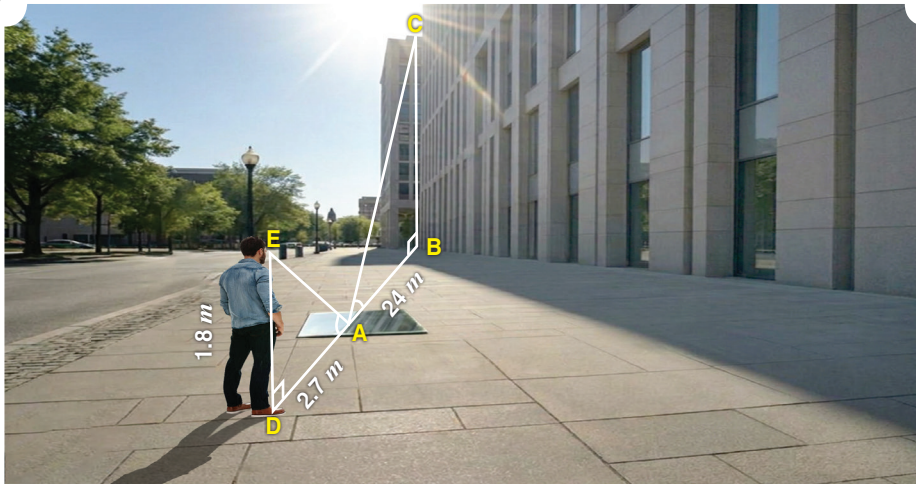
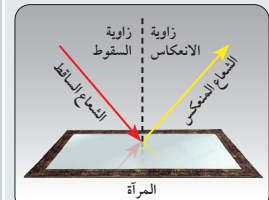
أراد فهد قياس ارتفاع مبنى فوضع مرآة على الرصيف عند النقطة A على مسافة 24 m ، ثم تراجع فهد مسافة 2.7 m من المرآة عندما شاهد قمة المبنى في المرآة ، هل يستطيع فهد حساب ارتفاع المبنى ؟
علمًا بأن طول فهد 1.8 m

معلومة

في بعض الحالات ، يصعب قياس مسافة أو ارتفاع معين مباشرة ، وفي هذه الحالة يمكن استخدام تشابه المثلثات لإيجاد هذا القياس بطريقة غير مباشرة إحدى الطرائق تستخدم خاصية انعكاس الضوء في المرآة المستوية فكما تعرف في الفيزياء ، إن قياس زاوية السقوط يساوي قياس زاوية الانعكاس .

تذكروا

قياس زاوية السقوط يساوي قياس زاوية الانعكاس



بفرض أن ارتفاع المبنى $BC = x$ ومن خلال دراستك لتشابه المثلثات أثبت أن $\Delta BCA \sim \Delta DEA$
اكتب التناسب

$$\frac{ED}{BC} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

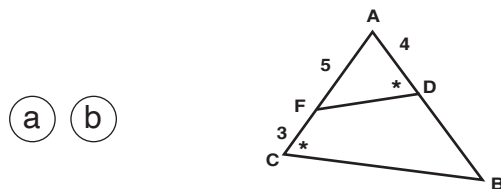
$$\frac{1.8}{x} = \frac{2.7}{24}$$

$$\therefore x = 16$$

أدرب وأحل المسائل

أولاً - البنود الموضوعية :

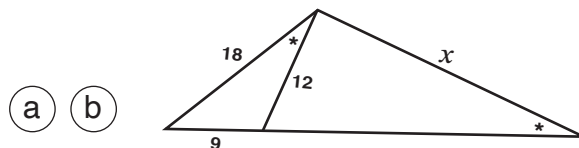
■ في البنود (1-3) اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة :



(1) في الشكل المقابل :
طول $(\overline{BD})$ يساوي 6

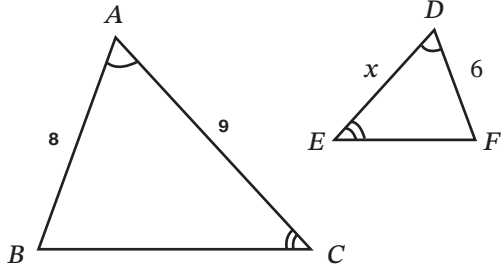


(2) في الشكل المقابل :
 x يساوي 2



(3) في الشكل المقابل :
 x يساوي 24

■ في البنود (1-5) اختر الإجابة الصحيحة :



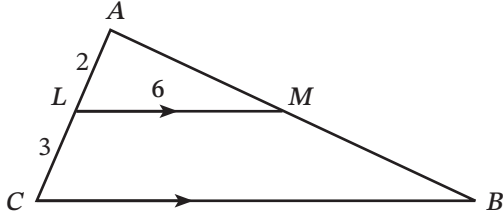
(1) في الشكل المرسوم قيمة x بوحدات الطول تساوي :

- (a) 6 (b) $5\frac{1}{3}$
(c) 7 (d) 6.75

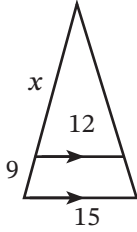
(2) في الشكل المقابل :

$(\overline{LM}) \parallel (\overline{BC})$, $AL=2cm$, $LC=3cm$

$LM=6cm$, فإن BC تساوي :

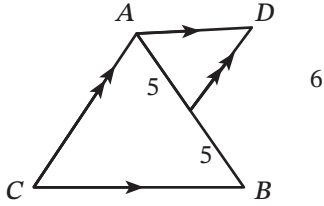


- (a) 9 cm (b) 12 cm
(c) 15 cm (d) 10 cm



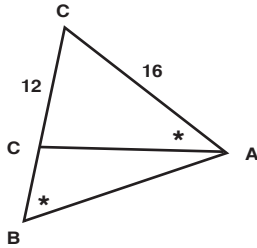
(3) في الشكل المقابل : قيمة x تساوي :

- (a) 12 (b) 24
(c) 36 (d) 48



(4) في الشكل المقابل : طول $\overline{AC}$ تساوي :

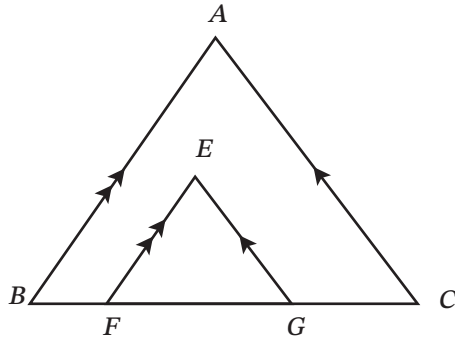
- (a) 6 (b) 9
(c) 12 (d) 15



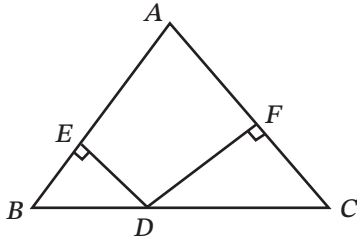
(5) في الشكل المقابل : طول $\overline{BC}$ تساوي :

- (a) 16 (b) 12
(c) $9\frac{1}{3}$ (d) $23\frac{1}{3}$

ثانياً - أسئلة المقال



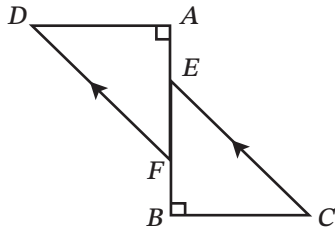
(1) في الشكل المرسوم $\overline{EG} \parallel \overline{AC}$, $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$
أثبت أن المثلث ABC يشابه المثلث EFG



(2) في الشكل المرسوم ABC مثلث فيه

$$\frac{ED}{DF} = \frac{5}{7} , BC = 48cm , AB = AC$$

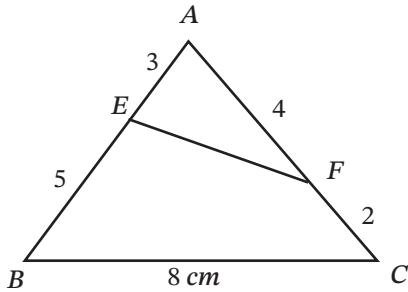
أوجد طول $\overline{DC}$



(3) في الشكل المرسوم $m(\hat{A}) = m(\hat{B}) = 90^\circ$

$$\overline{DF} \parallel \overline{EC}$$

أثبت أن $\Delta ADF \sim \Delta BCE$



(4)

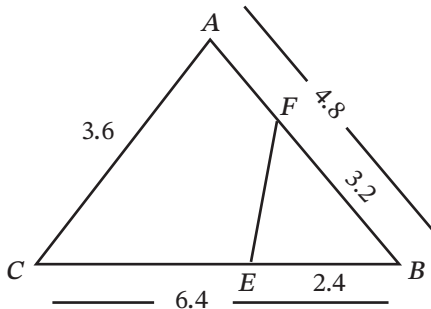
(4) في الشكل المرسوم ABC مثلث فيه

$$BE=5cm , BC=8cm , EA=3cm$$

$$AF=4cm , FC=2cm$$

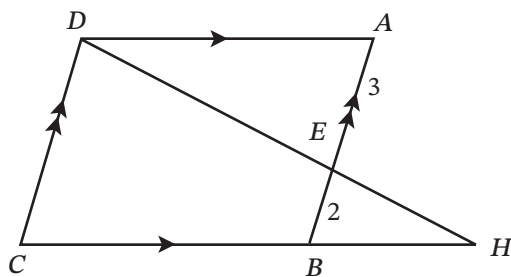
(a) أثبت أن $\Delta AEF \sim \Delta ACB$

(b) أوجد طول $\overline{EF}$.



(5) في الشكل المرسوم

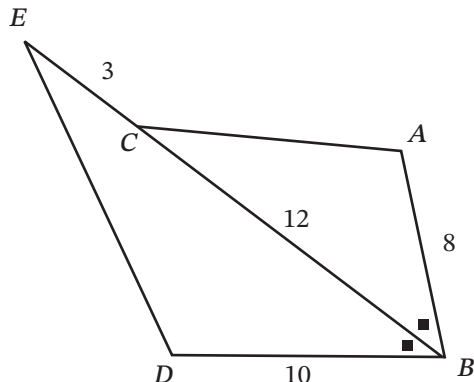
أثبت أن $\Delta BCA \sim \Delta BDE$



(6) في الشكل المقابل: $ABCD$ متوازي أضلاع
 $\overrightarrow{CB} \cap \overrightarrow{DE} = \{H\}$, $\frac{3}{2} = \frac{AE}{EB}$, $E \in (\overline{AB})$

(a) أثبت أن $\triangle EAD \sim \triangle DCH$

(B) أوجد : $\frac{\text{مساحة } \triangle DCH}{\text{مساحة } \triangle EAD}$



(7) في الشكل المقابل:

$\overrightarrow{BE}$ منصف $\triangle ABD$

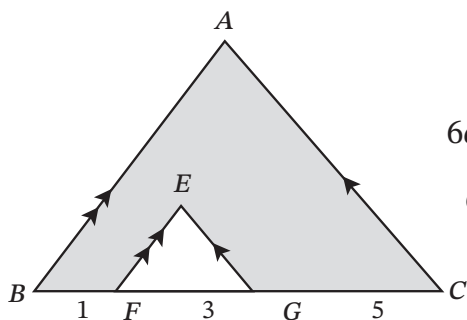
مساحة المثلث: $ABC = 48 \text{ cm}^2$

أوجد مساحة: $\triangle EBD$

مهارات تفكير عليا



■ اختر الإجابة الصحيحة :



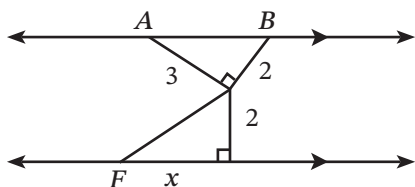
(1) في الشكل المقابل إذا كان مساحة المثلث EFG تساوي 6 cm^2
 فإن مساحة المنطقة المظللة بالشكل تساوي بالسنتيمتر المربع

(a) 27

(b) 36

(c) 48

(d) 54



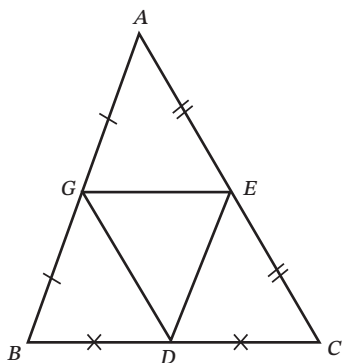
(2) في الشكل المرسوم قيمة x بوحدات الطول تساوي

(a) 3

(b) 2

(c) $\frac{4}{3}$

(d) $\frac{3}{4}$



(3) في المثلث ABC إذا كانت E منتصف AC , G منتصف AB

D منتصف BC

استخدم تشابه المثلثات في إثبات :

(a) كل من : $\triangle AGE$, $\triangle BGD$, $\triangle EDC$, $\triangle GED$ متطابقة

(b) $\triangle GED \sim \triangle CBA$

التشابه في المثلثات القائمة الزاوية

Similarity in Right Triangles

فكرة الدرس:



استخدام التشابه في المثلثات القائمة
«العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية»

المصطلحات:

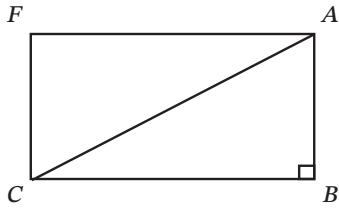


تعلمنا
فيما سبق:

- التشابه
- خواص المستطيل
- نظرية فيثاغورث

Similarity of Triangles

تشابه المثلثات



مسألة الدرس:



اشترك مع أحد زملائك في الآتي :

- أحضر قطعة ورق مستطيلة الشكل
- ارسم قطرًا للمستطيل

- اقطع الورقة عند القطر سوف تحصل على مثلثين قائمي الزاوية

- اختر $\triangle ABC$

- ارسم $\overline{BD} \perp \overline{AC}$

- قم بقص المثلث $\triangle ABC$

إلى مثلثين $\triangle DCB, \triangle DAB$

- في المثلثات الثلاثة

1. المثلث ABC

2. المثلث DAB

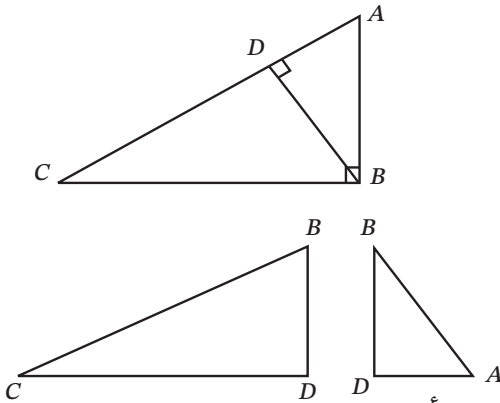
3. المثلث DCB

- فكّر وناقش مع زملائك كيف يمكن إثبات أن :

- المثلث DAB يشابه المثلث ABC

- المثلث DCB يشابه المثلث ABC

- المثلث DAB يشابه المثلث DCB



عزيزي المتعلم النشاط السابق يقودنا إلى :

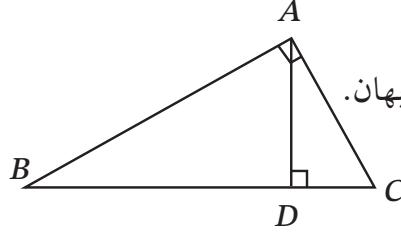
نظرية :

العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية يقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين وكل منهما يشابه المثلث الأصلي .

هل نستطيع إيجاد العلاقات بين DC ، AD ، BD ؟

نشاط

لنعمل معاً لنستكشف



عزيزي المتعلم من النشاط السابق :

- استطعنا إثبات أن ΔBDA ، ΔADC متشابهان.
- اكتب التناسب

$$\frac{AD}{BD} = \frac{DC}{AD} = \frac{AC}{BA}$$

بالضرب التقاطعي

$$(AD)^2 = DC \cdot DB$$

مما سبق نستطيع استنتاج أن :

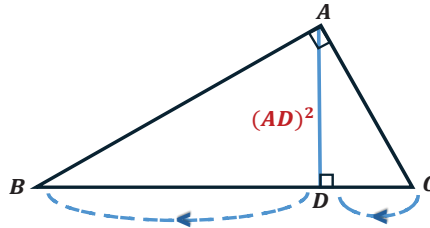
«نظرية إقليدس»

نتيجة (1) :

مربع طول العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية يساوي ناتج ضرب طولي القطعتين المستقيمين اللتين ينقسم إليهما الوتر بهذا العمود.

أي أن في المثلث ABC القائم الزاوية في (A) إذا كان $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ فإن :
 $(AD)^2 = DC \cdot BD$

يمكن تمثيل هذه العلاقة بالشكل المجاور



سأل عمر هل يمكن القول بأن

$\overline{AD}$ هو الوسط المتناسب لكل من $\overline{BD}$ ، $\overline{DC}$ ؟

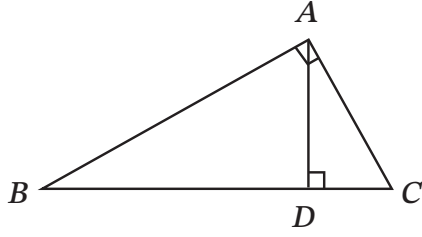
معلومة



إقليدس EUCLIDS

هو عالم رياضيات لقب
 بأبي الهندسة .
 اشتهر بكتابة (العناصر)
 عرض فيه مجموعة
 بديهيات وتطرق
 للعديد من مجالات
 الرياضيات.

هل نستطيع إيجاد العلاقات بين AC ، BC ، DC ؟



لنعمل معاً لنستكشف

نشاط

- حاول إثبات أن $\Delta BAC \sim \Delta ADC$
- اكتب التناسب

$$\frac{BA}{AD} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$$

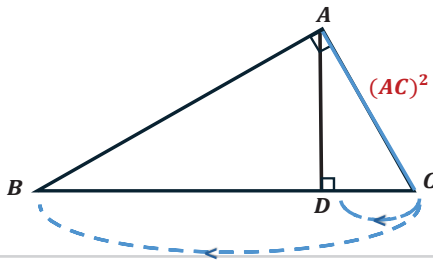
بالضرب التقاطعي

$$\therefore (AC)^2 = CD \cdot CB$$

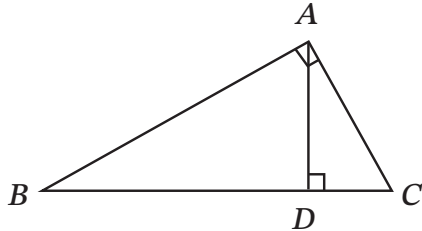
يمكن تمثيل هذه العلاقة بالشكل المجاور

هل يمكن القول أن :

AC وسط متناسب بين DC ، BC



هل نستطيع إيجاد العلاقات بين AC ، BC ، DC ؟



لنعمل معاً لنستكشف

نشاط

عزيزي المتعلم:

- حاول إثبات أن $\Delta CBA \sim \Delta ABD$
- اكتب التناسب

$$\frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{AD}{CA}$$

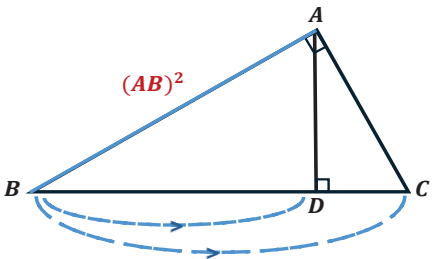
بالضرب التقاطعي

$$\therefore (AB)^2 = BD \cdot BC$$

يمكن تمثيل هذه العلاقة بالشكل المجاور

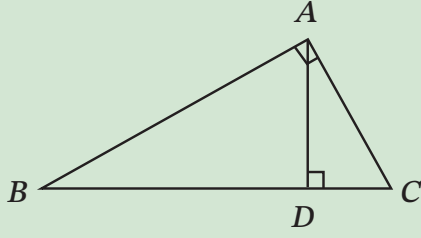
هل يمكن القول أن :

AB وسط متناسب بين BC ، BD



«نظرية إقليدس»

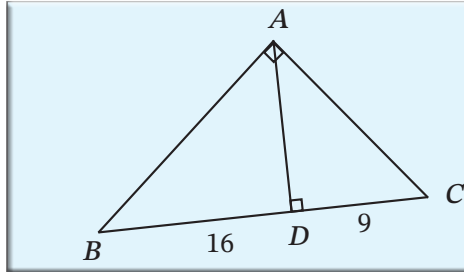
نتيجة (2) :



في المثلث القائم ABC إذا كان $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ فإن :

- ① $(AB)^2 = BD \cdot BC$
- ② $(AC)^2 = CD \cdot CB$
- ③ $(AB) \cdot (AC) = (AD) \cdot (BC)$

حاول إثبات أن : $(AB) \cdot (AC) = (AD) \cdot (BC)$ ؟



في الشكل المرسوم :

ABC مثلث قائم الزاوية في A ،

إذا كان $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ،

أوجد طول كل من : $\overline{AC}$ ، $\overline{AD}$

مثال (1)

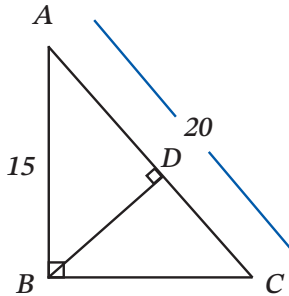
∴ المثلث ABC قائم الزاوية في A

∴ $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad (AD)^2 &= DC \cdot DB \\ (AD)^2 &= (9) \cdot (16) \\ (AD)^2 &= 144 \\ AD &= \sqrt{144} \\ AD &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad (AC)^2 &= CD \cdot CB \\ (AC)^2 &= (9) \cdot (25) \\ (AC)^2 &= 225 \\ AC &= \sqrt{225} \\ AC &= 15 \end{aligned}$$

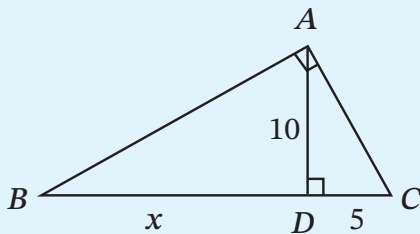
تحقق من فهمك (1)



في الشكل المرسوم :

a أوجد طول $\overline{BC}$

b أوجد طول $\overline{CD}$



في الشكل المرسوم : أوجد قيمة x

مثال (2)

$$\therefore \overline{AD} \perp \overline{BC}$$

الحل:

$$\therefore (AD)^2 = (DC)(DB)$$

$$(10)^2 = 5 \times (DB) \quad \text{باستخدام نتيجة 1}$$

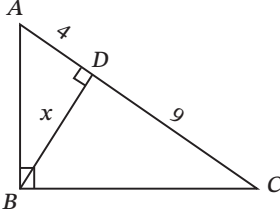
$$DB = \frac{100}{5} \quad \text{بقسمة الطرفين على 5}$$

$$\therefore DB = 20$$

تحقق من فهمك (2)



في الشكل المرسوم : أوجد قيمة x

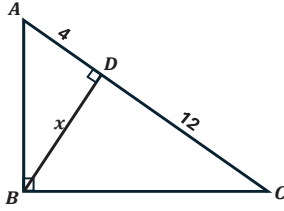


أولاً - البنود الموضوعية :

أتدرب وأحل المسائل

■ في البنود (1-5) ظل دائرة الإجابة الصحيحة :

(1) في الشكل المرسوم قيمة x تساوي :



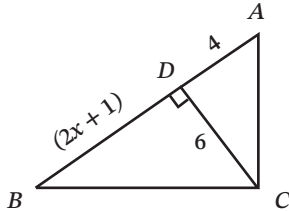
(a) $4\sqrt{3}$

(b) $3\sqrt{4}$

(c) 48

(d) 16

(2) في الشكل المرسوم قيمة x تساوي :



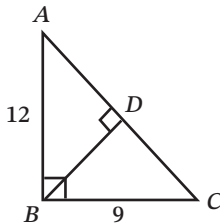
(a) 6

(b) 4.8

(c) 8

(d) 4

(3) في الشكل المرسوم طول $\overline{BD}$ تساوي :



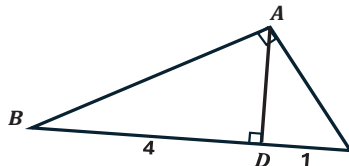
(a) 9.5

(b) 7.2

(c) 7.5

(d) 8

(4) في الشكل المرسوم طول $\overline{AD}$ تساوي :



(a) 2

(b) 4

(c) 5

(d) 16

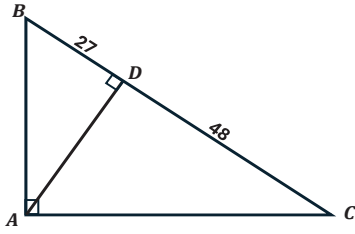
(5) في الشكل المرسوم طول $\overline{AD}$ تساوي :

(a) 24

(b) 12

(c) 36

(d) 75

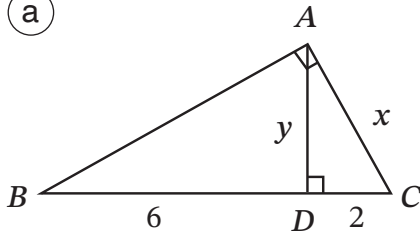


ثانياً - أسئلة المقال

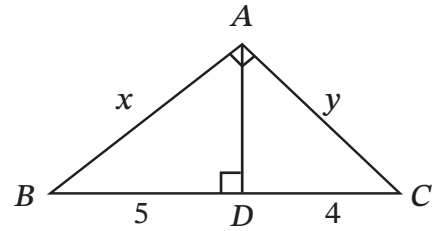
■ أجب عن الأسئلة التالية :

(1) أوجد قيمة x, y في كل من الأشكال التالية :

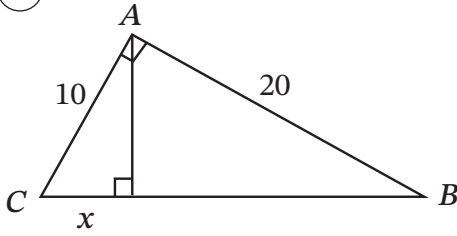
(a)



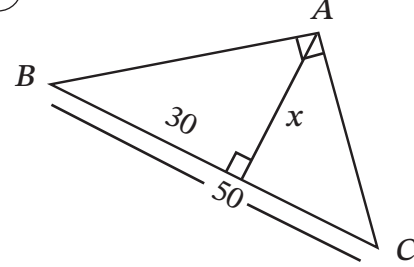
(b)



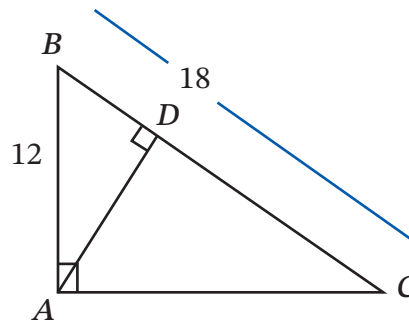
(c)



(d)

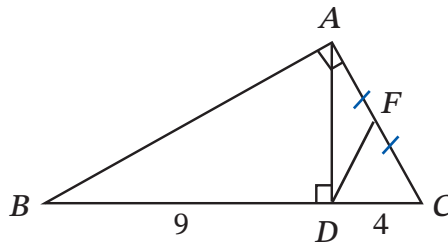


(2)



(2) في الشكل المقابل :

أوجد طول $\overline{DC}$

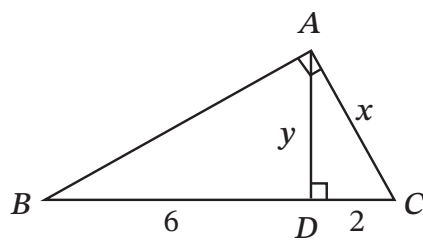


(3) في الشكل المقابل :

أوجد قيمة $\overline{DF}$

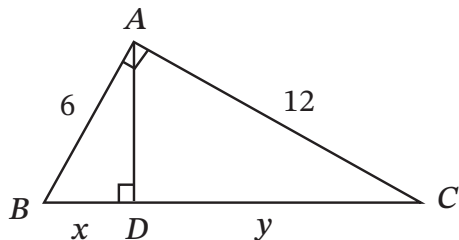


(4)



(4) في الشكل المقابل :

أوجد قيمة x, y



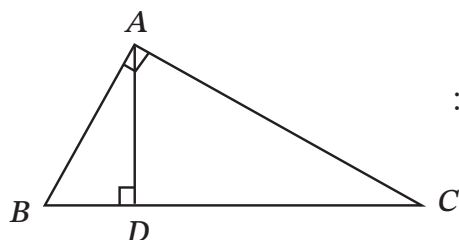
(5) في الشكل المقابل :

$\overline{AD} \perp \overline{BC}$, A قائم الزاوية في $\triangle ABC$

$AB=6cm, AC=12cm$

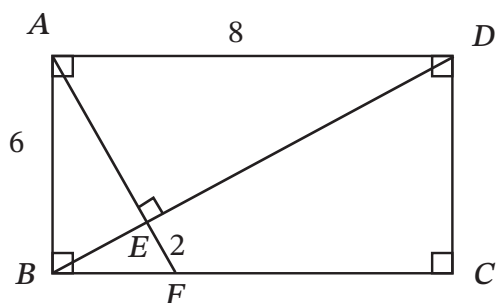
أوجد طول $\frac{x}{y}$

مهارات تفكير عليا

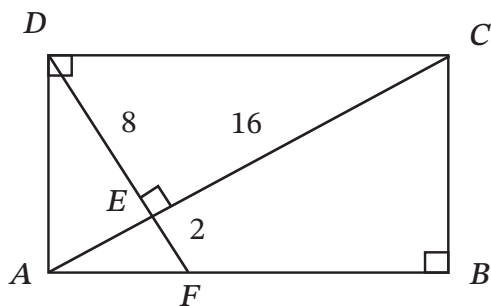


(1) في الشكل المرسوم استخدم نظرية إقليدس لإثبات أن :

$$(AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2$$



(2) في الشكل المرسوم أوجد طول $\overline{EF}$



(3) في الشكل المقابل :

$F \in \overline{AB}$ ، مستطيل $\triangle ABCD$

رسم $\overline{DF} \perp \overline{AC}$ ، فإذا كان

$EF=2cm, DE=8cm$

أوجد طول $\overline{DA}$

فكرة الدرس:



ستتعلم:

- (1) نظرية المستقيم الموازي لأحد أضلاع مثلث .
- (2) نظرية طاليس .
- (3) نظرية منتصف الزاوية الداخلي لمثلث .

تعلمنا
فيما سبق:

- تشابه المثلثات
- التناسب



مسألة الدرس:

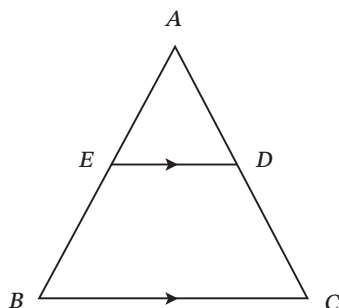


لنعمل معاً لنستكشف



معلومة رياضية

إذا كان
 $\overrightarrow{ED} // \overrightarrow{BC}$
فإن
 $\overline{ED} // \overline{BC}$
والعكس صحيح



عزيزي المتعلم في الشكل المرسوم

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC} \quad \text{المطلوب إثبات أن :}$$

حاول التفكير معي :

$$\therefore \overline{ED} // \overline{BC}$$

لماذا ؟ $\Delta ABC \sim \Delta AED$

من التشابه يمكن كتابته التناسب التالي :

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AE} \quad (1)$$

ومن هندسة الشكل فإن :

$$AC = AD + DC$$

$$AB = \dots + \dots$$

$$\frac{AD+DC}{AD} = \frac{\dots \dots \dots}{AE}$$

وبالتعويض في العلاقة (1)

$$\frac{AD}{AD} + \frac{DC}{AD} = \frac{AE}{AE} + \frac{EB}{AE}$$

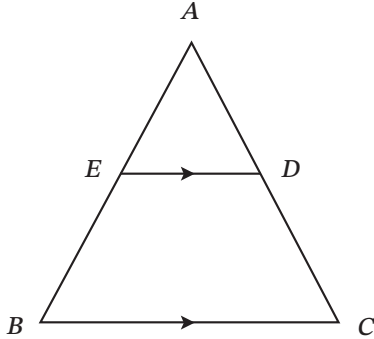
ويمكن كتابة هذا التناسب بالصورة

$$1 + \frac{DC}{AD} = 1 + \frac{EB}{AE} \implies \therefore \frac{DC}{AD} = \frac{EB}{AE}$$

ومن خلال الاستكشاف السابق نستطيع أن نصل إلى النظرية التالية :

نظرية (1) : « نظرية المستقيم الموازي » Parallel Line Theory

إذا وازى مستقيم أحد أضلاع مثلث وقطع ضلعيه الآخرين ، فإنه يقسم هذين الضلعين إلى أجزاء أطوالها متناسبة .



أي أن في المثلث ABC

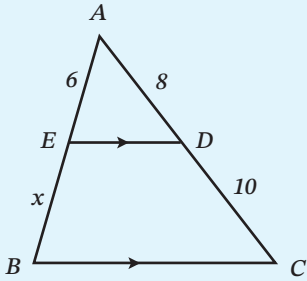
$$\overline{ED} \parallel \overline{BC}$$

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC}$$

فإن :

عكس النظرية صحيح

أي أنه إذا كان : $\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC}$ فإن : $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$



في الشكل المقابل : أوجد قيمة x

مثال (1)

الحل:

وباستخدام نظرية المستقيم الموازي نكتب التناسب :

$$\because \overline{ED} \parallel \overline{BC}$$

$$\frac{6}{x} = \frac{8}{10}$$

الأجزاء المتناسبة

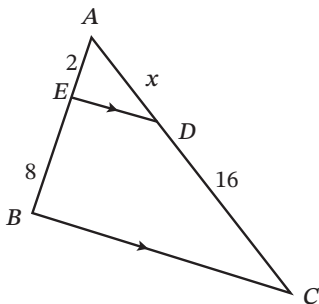
$$8x = 60$$

باستخدام الضرب التقاطعي والقسمة على 8

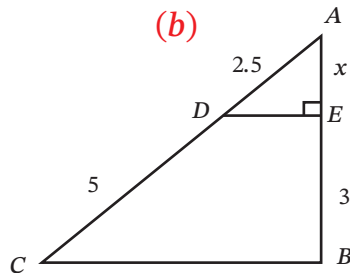
$$x = 7.5$$

تحقق من فهمك (1)

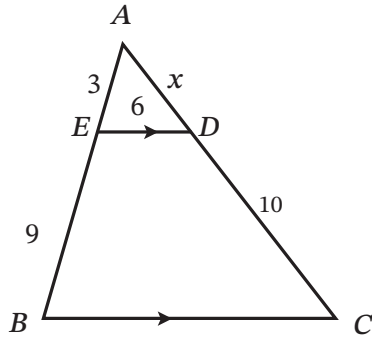
(a)



(b)



في الأشكال التالية :
أوجد قيمة x



في الشكل المرسوم

$\overline{ED} \parallel \overline{BC}$ مثلث فيه ABC

المطلوب :

1. طول $\overline{AD}$

2. طول $\overline{BC}$

- من خلال متابعة المعلم لطلابه وجد أن هناك طريقتين في التفكير للمتعلمين فهد وإبراهيم فعُرضت الطريقتان على متعلمي الفصل.

طريقة (إبراهيم)

$$\begin{aligned} \frac{AE}{EB} &= \frac{AD}{DC} = \frac{ED}{BC} \\ \frac{3}{9} &= \frac{AD}{10} = \frac{6}{BC} \\ \frac{3}{9} &= \frac{AD}{10} \\ 9AD &= 30 \rightarrow AD = \frac{10}{3} \\ \frac{3}{9} &= \frac{6}{BC} \\ \therefore 3BC &= (6)(9) \\ BC &= \frac{(6)(9)}{3} \\ BC &= 18 \end{aligned}$$

طريقة (فهد)

من تشابه المثلثين AED, ABC

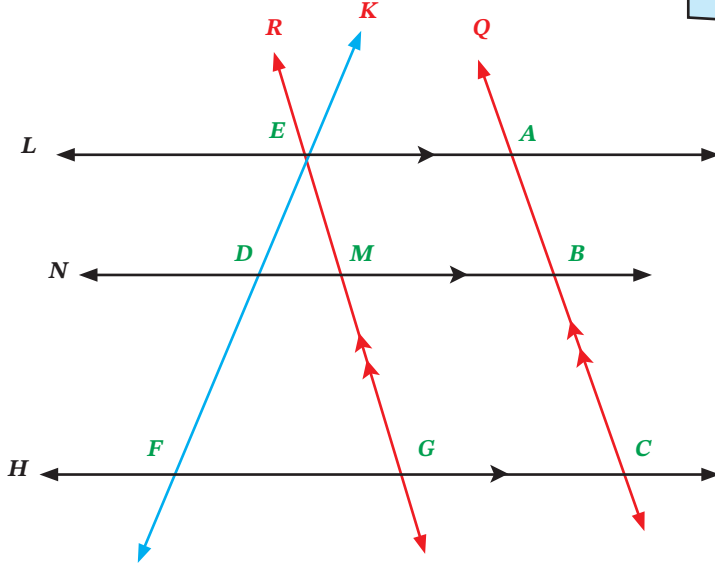
$$\begin{aligned} \frac{AE}{AB} &= \frac{AD}{AC} = \frac{ED}{BC} \\ \frac{3}{12} &= \frac{AD}{AD+10} = \frac{6}{BC} \\ 3AD + 30 &= 12AD \\ 12AD - 3AD &= 30 \\ 9AD &= 30 \\ AD &= \frac{10}{3} \\ \therefore \frac{3}{12} &= \frac{6}{BC} \\ 3BC &= 72 \rightarrow BC = 24 \end{aligned}$$

أي الرأيين تؤيد ؟ دلل على إجابتك.

نظرية (2) : Thales Theory « نظرية طاليس »

لنعمل معاً لنستكشف

نشاط



1. ارسم المستقيمات $L // N // H$

2. ارسم المستقيم k يقطع $\overline{H}$, $\overline{N}$, $\overline{L}$

في النقاط F, D, E على الترتيب

3. ارسم المستقيم Q يقطع $\overline{H}$, $\overline{N}$, $\overline{L}$

في النقاط C, B, A على الترتيب

4. ارسم $\overline{Q} // \overline{R}$ يقطع $\overline{H}$, $\overline{N}$, $\overline{L}$

في النقاط G, M, E على الترتيب

عزيزي المتعلم من هندسة الشكل :

الشكل $ABME$ متوازي الأضلاع

$$\therefore \overline{(AB)} // \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots = AB$$

وأيضاً الشكل $BCGM$ متوازي الأضلاع

$$\therefore \overline{(BC)} // \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots = BC$$

في المثلث EFG (من نظرية المستقيم الموازي)

$$\therefore \overline{(DM)} // \dots\dots\dots$$

$$\therefore \frac{ED}{DF} = \dots\dots\dots$$

$$\therefore \frac{ED}{DF} = \frac{AB}{BC}$$

والاستكشاف السابق يقودنا إلى النظرية التالية :

نظرية (2) : « نظرية طاليس » Thales Theory

إذا قطع مستقيمان ثلاث مستقيمات متوازية أو أكثر فإن أطوال القطع المستقيمة الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر .

أي أن

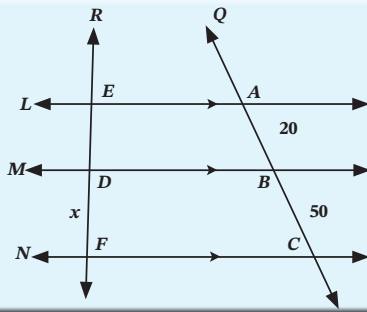
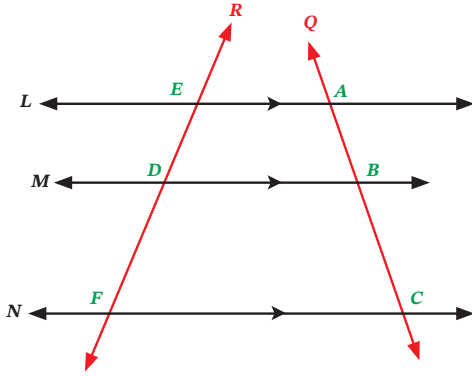
إذا كان

$$\vec{N} \parallel \vec{M} \parallel \vec{L}$$

$\vec{Q}, \vec{R}$ تقطع كلاً من

$$\vec{L}, \vec{M}, \vec{N}$$

$$\frac{ED}{DF} = \frac{AB}{BC} \quad \text{فإن :}$$



مثال (2) في الشكل المقابل : أوجد قيمة x

الحل:

باستخدام نظرية طاليس

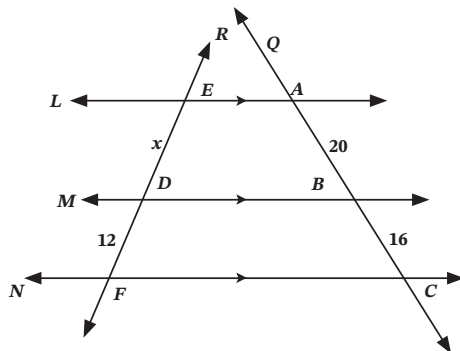
$$\frac{12}{x} = \frac{20}{50}$$

$$20x = (12)(50)$$

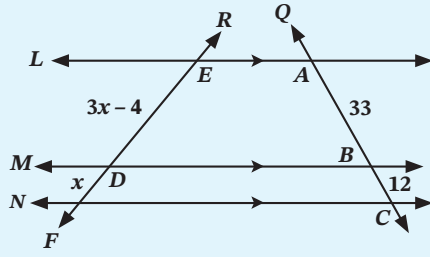
$$x = \frac{(12)(50)}{20}$$

$$x = 30$$

تحقق من فهمك (2)



في الأشكال المقابل : أوجد قيمة x



في الشكل المقابل : أوجد قيمة x

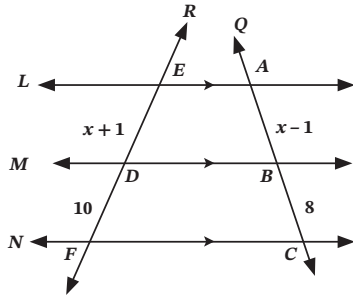
مثال (3)

الحل:

باستخدام نظرية طاليس

$$\begin{aligned}\frac{3x-4}{x} &= \frac{33}{12} \\ 12(3x-4) &= 33x \\ 36x-48 &= 33x \\ 36x-33x &= 48 \\ 3x &= 48 \\ x &= 16\end{aligned}$$

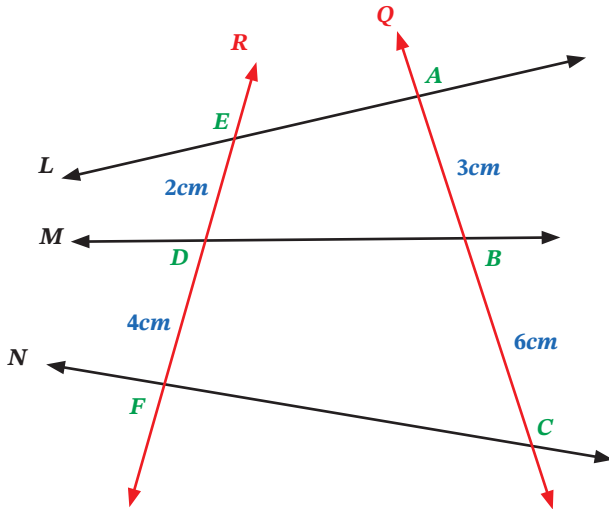
تحقق من فهمك (3)



في الأشكال المرسوم : أوجد قيمة x

ملحوظة:

في الشكل المرسوم نجد أن :



$$\frac{AB}{BC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{ED}{DF} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{ED}{DF} = \frac{1}{2}$$

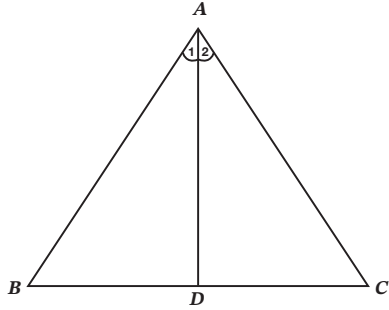
أي أن :

ولكن المستقيمات L, M, N ليست متوازية

إذا كانت أطوال القطع المستقيمة الناتجة من أحد القاطعين متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر فليس بالضرورة أن تكون المستقيمات متوازية .

∴ عكس نظرية طاليس ليس بالضرورة صحيح

نظرية (3) : « نظرية منصف الزاوية في مثلث » Angle Bisector Theoremina Triangle



نشاط
لنعمل معاً لنستكشف

1. ارسم المثلث ABC ، نصّف الزاوية A بالمنصف $\overline{AD}$
2. ارسم شعاع من c وهو $\overline{CM}$ يوازي $\overline{AD}$ ويقطع $\overline{BA}$ في M

من هندسة الشكل :

$$m(\hat{1}) = m(\dots)$$

بالتناظر والتوازي

$$m(\hat{2}) = m(\dots)$$

بالتبادل والتوازي

$$m(\hat{1}) = m(\hat{2})$$

من تنصيف $(\hat{A})$

$$m(\dots) = m(\dots)$$

$$\therefore \dots = \dots \quad (1)$$

من نظرية المستقيم الموازي

$$\therefore \frac{AB}{AM} = \frac{BD}{DC} \quad (2)$$

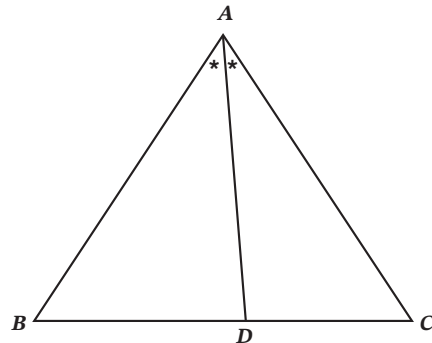
من (1)، (2) ينتج أن

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

والاستكشاف السابق يقودنا إلى النظرية التالية :

نظرية (3) : « نظرية منصف الزاوية في مثلث »

إذا نصّفت زاوية رأس مثلث الداخلة أو الزاوية الخارجة عند هذا الرأس، قسم المُنصف قاعدة المثلث من الداخل أو من الخارج إلى جزئين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين للمثلث .



أي أن

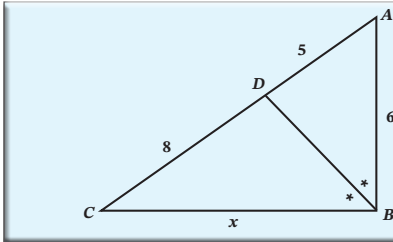
إذا كان $\overline{AD}$ مُنصف $(\hat{A})$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \quad \text{فإن :}$$

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC} \quad \text{أو :}$$

ملحوظة:

سنكتفي بدراسة حالة المُنصف الداخلي للزاوية في المثلث .



أوجد قيمة x في الشكل المبين حيث

مثال (4)

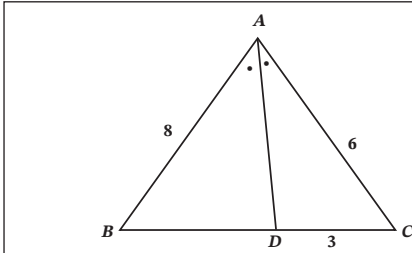
$\overline{BD}$ يُنصف $\hat{A}BC$

الحل: في المثلث ABC ، $\overline{BD}$ مُنصف $(\hat{A}BC)$
 $\therefore \frac{6}{x} = \frac{5}{8}$ $\therefore$ نظرية مُنصف الزاوية

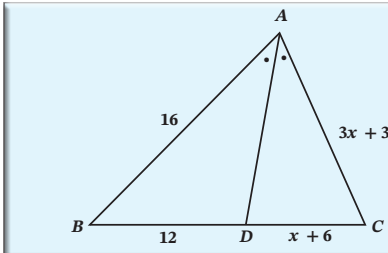
$$5x = (6)(8)$$

$$x = \frac{(6)(8)}{5} \rightarrow x = 9.6$$

تحقق من فهمك (4)



المثلث ABC فيه $AC = 6$ ،
 $AB = 8$ ، $\overline{AD}$ يُنصف $(\hat{B}AC)$
ويقطع $\overline{BC}$ في D إذا كان $BD = 3$
أوجد CD



أوجد قيمة x في الشكل المبين حيث

مثال (5)

$\overline{AD}$ يُنصف $(\hat{C}AB)$

الحل: في المثلث CAB ، $\overline{AD}$ مُنصف $(\hat{C}AB)$
 $\therefore$ نظرية مُنصف الزاوية

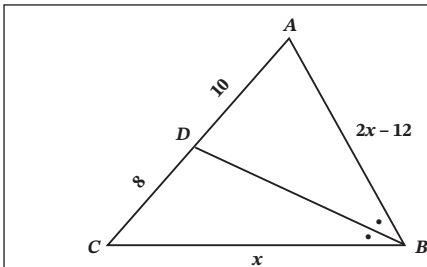
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \rightarrow \frac{16}{3x + 3} = \frac{12}{x + 6}$$

$$12(3x + 3) = 16(x + 6)$$

$$36x + 36 = 16x + 96 \rightarrow 36x - 16x = 96 - 36$$

$$20x = 60 \rightarrow x = 3$$

تحقق من فهمك (5)



المثلث ABC فيه $AD = 10$ ، $DC = 8$

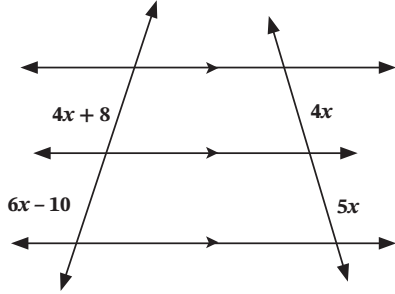
$\overline{BD}$ يُنصف الزاوية $(\hat{A}BC)$ ويقطع $\overline{AC}$

في D ، أوجد x

أولاً - البنود الموضوعية :

■ في البنود (1-2) اختر الإجابة الصحيحة :

(1) في الشكل المرسوم قيمة x تساوي :



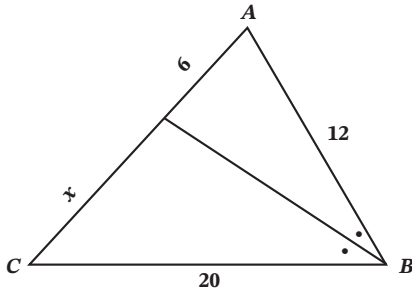
(a) 10

(b) 20

(c) 8

(d) 5

(2) في الشكل المرسوم قيمة x تساوي :



(a) 8

(b) 10

(c) 12

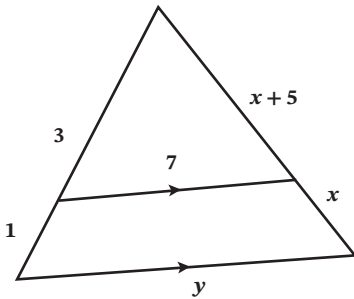
(d) 20

ثانياً - أسئلة المقال :

■ أجب عن الأسئلة التالية :

(1) في الشكل المقابل :

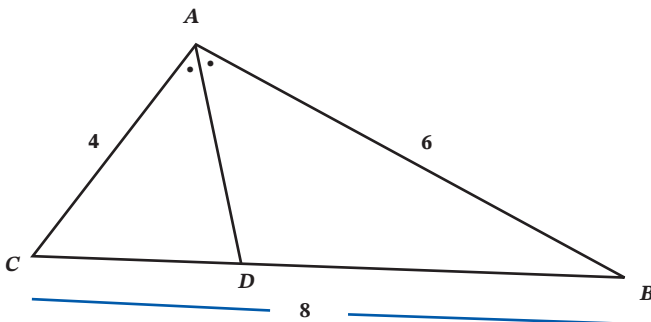
أوجد قيمة كل من x, y :



(2) في المثلث ABC ، $\overline{AD}$ نَصَفُ A

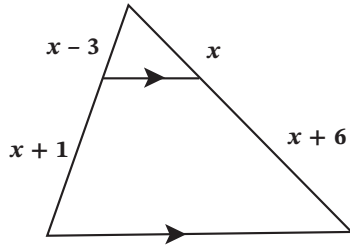
إذا كان $BC = 8$ ، $AC = 4$ ، $AB = 6$

فأوجد DB ، DC



(3) في البنود (3-10) أوجد قيمة x :

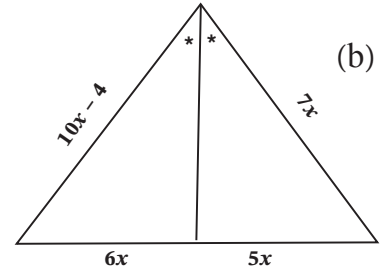
(a)



3 (a)

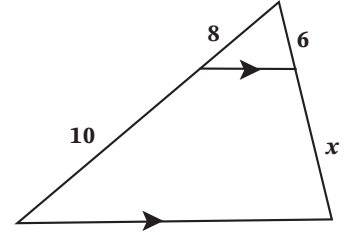
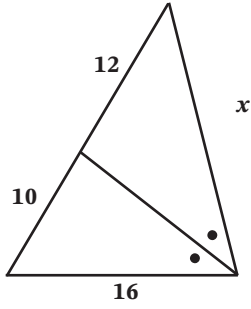


3 (b)



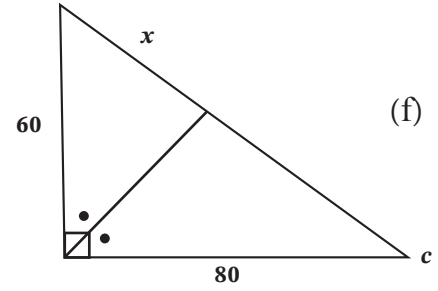
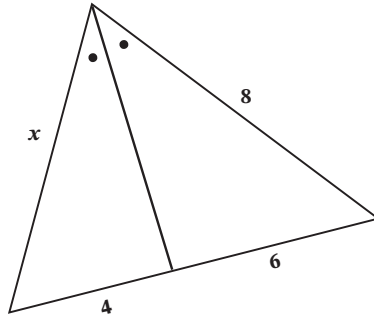
(b)

(c)



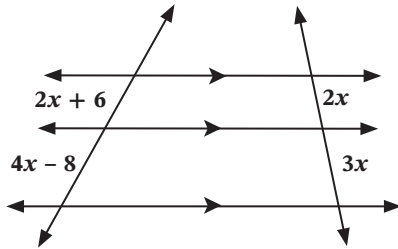
(d)

(e)

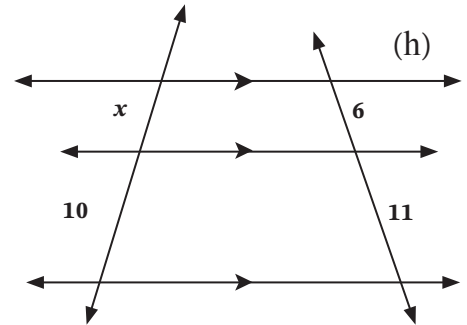


(f)

(g)



3 (h)



(h)

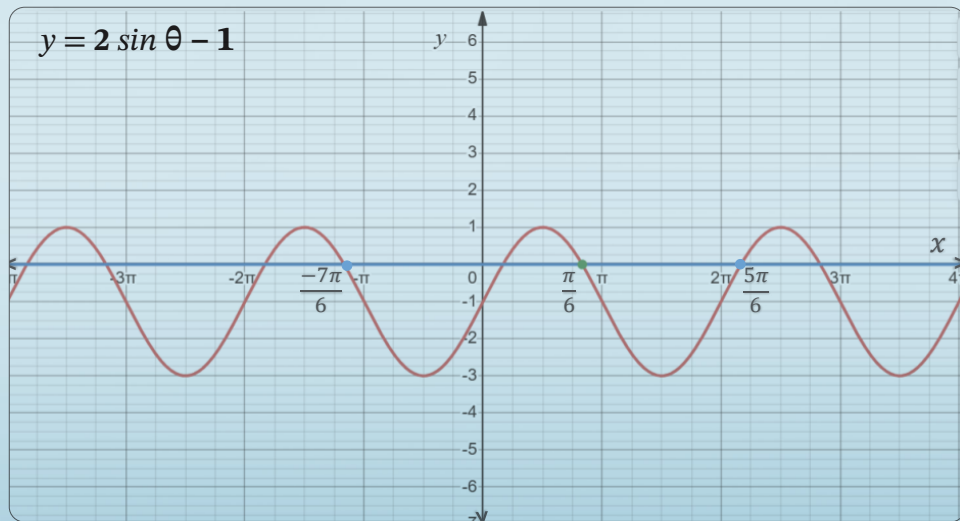


استعد للاختبار

2

عزيزي المعلم ، عزيزي المتعلم :

يحتوي رمز الـ (QR) الخاص باختبار الوحدة على أسئلة مهمة، يجب الاستفادة منها في التقييم البنائي والنهائي وتدريب المتعلم عليها جيداً.



قيّم مناهجنا



الكتاب كاملاً