



الرياضيات

الصف التاسع

الفصل الدراسي الثاني - القسم الأول





الرياضيات

الصف التاسع

الفصل الدراسي الثاني – القسم الأول

تأليف

أ. دلال مبارك الحجرف (رئيسًا)

أ. نوره عبد الله أبورقبة العتيبي أ. ساره زايد شينان العجمي

أ. وسميه بادي هادي الرشيدي أ. عصام عبد الهادي السيد حسن

أ. عفاف عبد العزيز يعقوب الصانع

الطبعة الأولى

١٤٤٧ هـ

٢٠٢٥ – ٢٠٢٦ م







حضرة صاحب السمو الشيخ مشعل آل أحمد آل جابر آل صباح
أمير دولة الكويت

H.H. Sheikh Meshal AL-Ahmad AL-Jaber AL-Sabah
Amir Of The State Of Kuwait



سَمُو الشَّيْخِ صَبَّاحٍ خَالِدٍ الْحَمَادِ السَّبَّاحِ
وَلِيِّ عَهْدِ دَوْلَةِ الْكُوَيْتِ

H. H. Sheikh Sabah Khaled Al-Hamad Al-Sabah
Crown Prince Of The State Of Kuwait

الحمد لله ربّ العالمين والصلاة والسلام على سيد المرسلين محمد بن عبدالله وصحبه أجمعين.

إنطلاقاً من التوجيهات السامية لحضرة صاحب السموّ أمير البلاد الشيخ مشعل الأحمد الجابر الصباح ، حفظه الله ورعاه ، بضرورة الإسراع في تنفيذ كافّة مشاريع الدولة التنموية ومن ضمنها على وجه الخصوص المشاريع التعليمية ، وتماشياً مع رؤية الكويت ٢٠٣٥ والتي تنادي بكويت جديدة فقد شرعت وزارة التربية في تطوير مناهجها التعليمية مستندة ، في ذلك إلى أهميّة رأس المال البشري كعنصر أساسي في تنمية الوطن ورفعته.

ولأنّ المناهج التعليمية هي قاعدة الهرم التعليمي إلى جانب المعلّم والمتعلّم ، وتعدّ أحد الروافد المهمّة في خلق جيل متعلّم وواعٍ ، قادر على المشاركة في بناء المجتمع ، ولأنّ المناهج عبارة عن كمّ الخبرات التربوية والتعليمية التي تُقدّم للمتعلّم ، فقد أولت الوزارة أهميّة بتطوير المناهج حسب المعايير العلمية وذلك لتحقيق نقلة نوعية في الشكل والمضمون ، وإيماناً بأهميّتها وإنطلاقاً من أنّها ذات صفة عالمية مع الأخذ في الاعتبار خصوصية المجتمع الكويتي وبيئته المحليّة ، ملتزمة بأن تصبّ جميعها في تعزيز الهوية الوطنية وبعقلية منفتحة على الآخرين مع احترام حقوق الإنسان وحرّياته الأساسية والتمسك بمبادئ الإسلام والتسامح من جهة ، وغزيرة بمهارات القرن الواحد والعشرين لتعزيز المفاهيم الرياضية لجميع المتعلّمين من جهة أخرى لكي يكونوا في طليعة المنافسين في المسابقات العلمية والدولية ، وذلك عبر بناء الخطط التعليمية المعتمدة من قطاع المناهج مؤكّدين على أهميّة التكامل بين الجوانب العلمية والتطبيقية حتّى تكون ذات طبيعة وظيفية مرتبطة بحياة المتعلّم ، متضمّنة في الكثير من بنودها التمارين ذات المستويات العليا في التفكير والفهم والتحليل والتركيب .

وقد تمّت صياغة وترتيب الكتاب المدرسي في منهجية خاصة ذات هيكل ومجالات معينة تتمحور حول العدّ والجبر والهندسة والقياس ، وأخيراً الإحصاء والاحتمال .

فقد تمّ بناء الكتاب وفق منهجية تربوية حديثة تراعي التدرّج المنطقي في المفاهيم والمهارات لبناء معرفة رياضية تراكمية تراعي الفروق الفردية بين المتعلّمين وتعزّز التفكير الرياضي العميق .

كما ويحوي الكتاب على وحدات تعليمية وموضوع محوري يتمّ إبرازه في مقدّمة كلّ وحدة ، تساعد على تنمية الفهم البنائي وربط المفاهيم الجديدة مع سياقات من واقع الحياة .

وحرصنا على إدراج التمارين المتنوعة مع نهاية كل درس ، والتي تنوّعت بين الأسئلة المباشرة والمسائل الحياتية وأسئلة مهارات تفكير عليا ، مثل التبرير والنقد وتعدّد طرق الحلّ والاستنتاج .

تنتهي كلّ وحدة بقسم خاصّ للتقويم لقياس مدى تحقيق الأهداف متضمّنة أسئلة شاملة للمفاهيم والمهارات التي تمّ تناولها ، حتّى تكون أداة تمكّنا من تحديد الاحتياجات التعليمية لاحقا .

ممّا سبق من معطيات وغيرها من الجوانب التعليمية والتربوية ، فقد تمّت صياغة وإعداد كتب الرياضيات لتحقيق نقلة نوعية ذات جودة عالية تلبيّ الطموحات المطلوبة وتكون نافذة واسعة تُطلّ على آمالنا وتطلّعاتنا في المستقبل لما نهدف إليه من تأسيس فكر رياضي في عقول أجيالنا القادمة تنهض بها أمّتنا وتضعها في مكانها المناسب في الصفوف المتقدّمة ، ويُشار إليها بالبنان مع كلّ محفل.

المحتويات

الجزء الأول :

الوحدة التعليمية الأولى :

الأعداد الحقيقية والعمليات عليها

الوحدة التعليمية الثانية :

التحليل والمعادلات

الوحدة التعليمية الثالثة :

الحدوديات النسبية - الهندسة الإحداثية

الوحدة التعليمية الرابعة :

هندسة التحويلات - الإحصاء والاحتمال

الجزء الثاني :

الوحدة التعليمية الخامسة :

العلاقات والدوال

الوحدة التعليمية السادسة :

المعادلات الخطية والمتباينات الخطية

الوحدة التعليمية السابعة :

هندسة المثلث

الوحدة التعليمية الثامنة :

النسبة المئوية - الهندسة والقياس

الوحدة التعليمية الخامسة

العلاقات والدوال

رقم الصفحة	المحتوى
١٦	معايير المنهج ومؤشرات الأداء للوحدة التعليمية الخامسة
١٧	مخطط تنظيمي للوحدة التعليمية الخامسة
١٨	هل أنت مستعدّ ؟ للوحدة التعليمية الخامسة
٢٠	(١ - ٥) العلاقة وخواصّها
٣٦	(٢ - ٥) التطبيق (الدالة)
٤٤	(٣ - ٥) أنواع التطبيق
٥٥	(٤ - ٥) الدالة الخطيّة
٦٠	(٥ - ٥) الدالة التربيعية
٦٩	تقويم الوحدة التعليمية الخامسة

الوحدة التعليمية السادسة

المعادلات الخطية والمتباينات الخطية

رقم الصفحة	المحتوى
٨٠	معايير المنهج ومؤشرات الأداء للوحدة التعليمية السادسة
٨١	مخطط تنظيمي للوحدة التعليمية السادسة
٨٢	هل أنت مستعدّ ؟ للوحدة التعليمية السادسة
٨٤	(١ - ٦) الميل
٩٥	(٢ - ٦) المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة
١٠٢	(٣ - ٦) حلّ معادلتين خطيتين في متغيّرين آنياً
١١٤	(٤ - ٦) المتباينات الخطية (منطقة الحلّ المشترك)
١٢٥	تقويم الوحدة التعليمية السادسة
١٣٢	المشروع الثالث

الوحدة التعليمية الخامسة



العلاقات والدوال

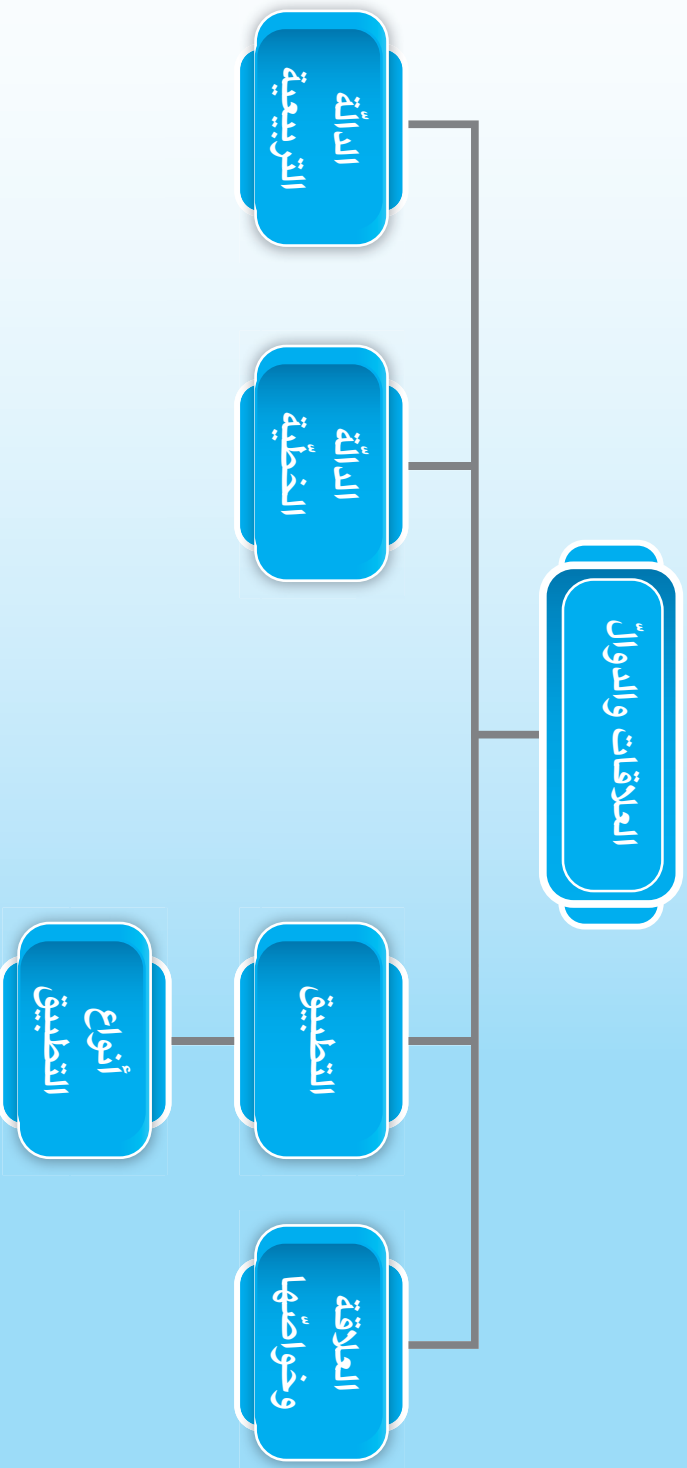
« الكويت ... وطن العلاقات المتينة »

الكويت ... تلك اللؤلؤة المضيئة على شاطئ الخليج ، تتشابك فيها
الطرق ، وتتواصل فيها القلوب .
فكلّ مدينة تمتدّ بجسور نحو الأخرى ، وكلّ إنسان فيها يرتبط مع
غيره بروابط المحبة والانتماء .



المجال	معايير المنهج	مؤشر الأداء
العدّ والجبر	إستخدام التمثيلات البيانية والجداول والتعابير الجبرية للقيام بالتوقعات وحلّ المسائل .	التذكّر - التعرّف - الفهم - الوسائط - التمثيل - المقارنة والتمييز - الاستكشاف والتقصّي - الاستدلال - العلاقات - الاستنتاج - حلّ المشكلات - التعاون - العمل الجماعي - الترميز والبرمجة - إتخاذ القرار
	فهم الأنماط والعلاقات والدوالّ .	

مخطط تنظيمية للوحدة التعليمية الخامسة



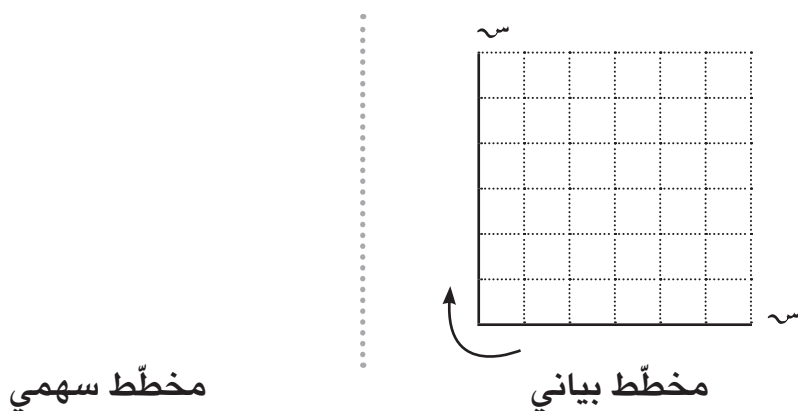
هل أنت مستعد؟

١ إذا كانت $\sim = \{2, 3, 4\}$

أ أوجد عدد عناصر $\sim \times \sim$.

ب أكتب $\sim \times \sim$ بذكر العناصر.

ج مثل $\sim \times \sim$ بمخطط بياني وآخر سهمي.



٢ فيما يلي مجموعة من العلاقات المعروفة على $\sim = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
أكتب كل علاقة بذكر عناصرها:

أ $\sim = \{(b, b) : b \in \sim, b + b = 8\}$

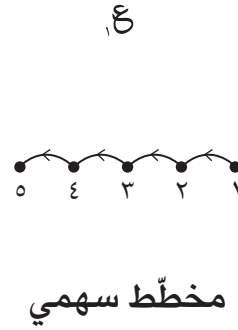
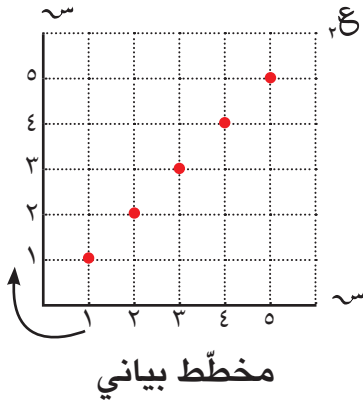
ب $\sim = \{(b, b) : b \in \sim, b = b\}$

ج $\sim = \{(b, b) : b \in \sim, b = 2b\}$

د $\sim = \{(b, b) : b \in \sim, \sqrt{b} = b\}$

هـ $\sim = \{(b, b) : b \in \sim, b < b\}$

٣ أكتب العلاقات $١ع$ ، $٢ع$ على $س$ التي يمثلها كل من المخططين السهمي والبياني
الآتين ، بذكر العناصر ثم بذكر الصفة المميزة . حيث $س = \{ ٥ ، ٤ ، ٣ ، ٢ ، ١ \}$

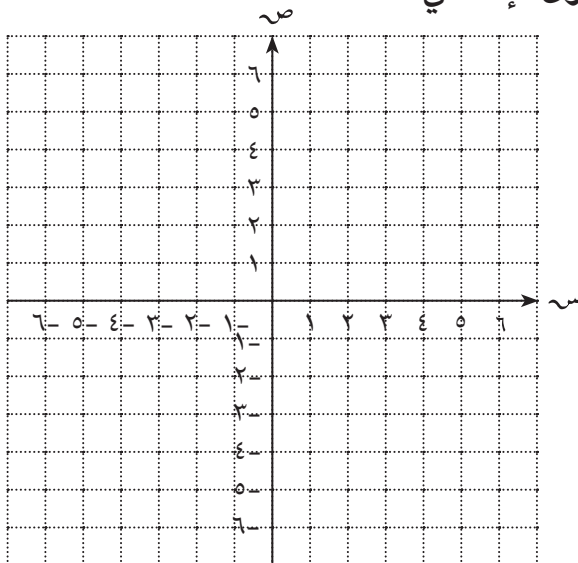


٤ أوجد قيمة $٦س + ٤$ إذا كانت $س = ١١$

٥ أوجد قيمة $٢س - ١$ إذا كانت $س = -٣$

٦ أوجد قيمة $١ - ٢س$ إذا كانت $س = -٤$

٧ مثل كل نقطة مما يلي في المستوى الإحداثي :



أ (٣ ، ١ -)

ب (٤ ، ٠)

ج (٠ ، ٢ -)

د (٥ - ، ٣)

هـ (١ ، ٤ -)

The Relation and its Properties

سوف تتعلّم : خواصّ العلاقة على مجموعة .

العبارات والمفردات :

Transitive Relation
Equivalence Relation

علاقة متعدّية
علاقة تكافؤ

Reflexive Relation
Symmetric Relation

علاقة انعكاسية
علاقة متناظرة

تذكّر



- الحاصل الديكارتي على المجموعة S هو $S \times S$
- $\{ (a, b) : a \in S, b \in S \} = S \times S$

تعلّمت سابقاً أنّ : العلاقة R على المجموعة S هي مجموعة جزئية من حاصل الضرب الديكارتي $S \times S$ ، أي أنّ : $R \subseteq S \times S$.
كما تمتلك بعض هذه العلاقات مجموعة من الخواصّ التي يعتمد عليها في التصنيف والتحليل وهي الانعكاسية ، المتناظرة ، المتعدّية والتكافؤ .

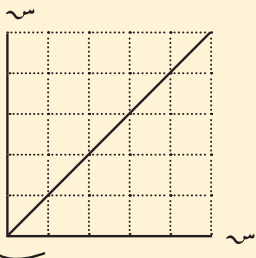
أولاً : خاصية الانعكاس

تظهر العلاقة الانعكاسية بشكل طبيعي في حياتنا اليومية والأنظمة من حولنا .
ومن استخدامات العلاقة الانعكاسية في الحياة الواقعية :
في التعليم وتقييم الذات : عندما يقيّم المتعلّم نفسه (تقييم ذاتي) ،
فالعلاقة هنا بين الشخص ونفسه .

لاحظ أنّ



في المخطّط البياني (Graph) الذي يمثّل العلاقة بين عناصر مجموعة ، يُسمّى « القطر » الذي يربط كلّ عنصر بنفسه .
ب : « القطر الرئيسي » .



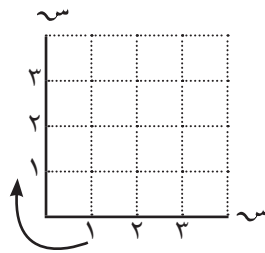
بشرط أن يكون ترتيب العناصر على المحورين هو نفسه .

حلّ وناقش (١)



لتكن $S = \{ 1, 2, 3 \}$

١ مثّل الحاصل الديكارتي $S \times S$ بمخطّط بياني .

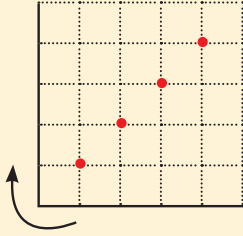


٢ أكتب R علاقة « يساوي » على S بذكر العناصر .

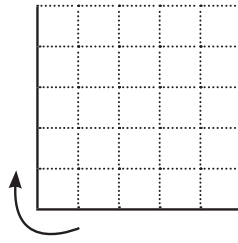
٣ أكتب $R = \{ (a, b) : a \in S, b \in S, a \neq b \}$ بذكر العناصر .

لاحظ أن

تكون العلاقة انعكاسية إذا شمل المخطط البياني الذي يمثلها جميع العناصر الواقعة على القطر الرئيسي.



٥ مثل E_1 بمخطط بياني .



٤ مثل E_1 بمخطط سهمي .

لاحظ أن :

$$1 \in E_1 \Rightarrow (1, 1), \quad 1 \in E_1 \Rightarrow (2, 2), \quad 1 \in E_1 \Rightarrow (3, 3)$$

$$2 \in E_1 \Rightarrow (2, 2), \quad 2 \in E_1 \Rightarrow (3, 3)$$

$$3 \in E_1 \Rightarrow (3, 3)$$

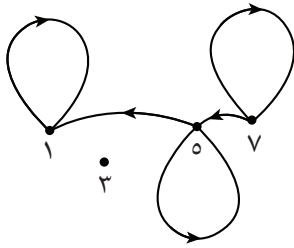
وبالمثل في العلاقة E_1 .

إذاً، كل عنصر من عناصر المجموعة S يرتبط بنفسه في العلاقة E .
نسَمي مثل هذه العلاقة علاقة « **انعكاسية** » .

تُسَمي العلاقة E المعرفة على المجموعة S علاقة **انعكاسية** إذا وفقط إذا كان لكل $p \in S$ ، يكون $(p, p) \in E$.

مثال (١) :

المخططات السهمية الآتية، تمثل علاقات على S حيث $S = \{1, 3, 5, 7\}$
اختبر ما إذا كانت كل من E_1 ، E_2 علاقات انعكاسية أم لا، مع ذكر السبب في كل حالة، ممّا يلي :



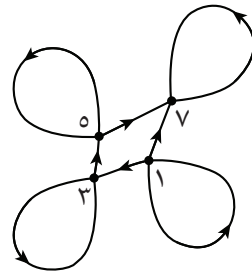
المخطط السهمي للعلاقة E_1

الحل :

$$E_1 = \{(1, 1), (3, 3), (5, 5), (7, 7), (1, 3), (3, 5), (5, 7), (7, 1)\}$$

E_1 علاقة ليست انعكاسية

لأن $3 \in S$ ، ولكن $(3, 3) \notin E_1$



المخطط السهمي للعلاقة E_2

الحل :

$$E_2 = \{(1, 1), (3, 3), (5, 5), (7, 7), (1, 3), (3, 5), (5, 7), (7, 1)\}$$

$$1 \in S \Rightarrow (1, 1) \in E_2$$

$$3 \in S \Rightarrow (3, 3) \in E_2$$

$$5 \in S \Rightarrow (5, 5) \in E_2$$

$$7 \in S \Rightarrow (7, 7) \in E_2$$

$\therefore E_2$ علاقة انعكاسية

لأن لكل $p \in S$ ، يكون $(p, p) \in E_2$

ملاحظة :



- للحكم على أنَّ العلاقة انعكاسية ، يلزم التحقق من أنَّ كلَّ عنصر من عناصر المجموعة يرتبط بنفسه في العلاقة .
- للحكم على أنَّ العلاقة ليست انعكاسية يكفي وجود عنصر واحد من عناصر المجموعة لم يرتبط بنفسه في العلاقة .

مثال (٢) :

إذا عُلِّم أنَّ $\sim = \{ ١-، ١، ٢-، ٢، ٤-، ٤ \}$.

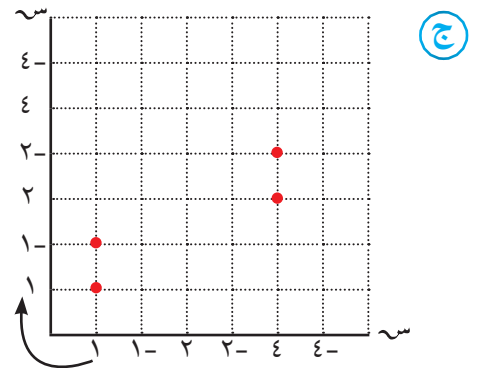
- أكتب العلاقة $\sim$ المعرفة على $\sim$ بذكر العناصر حيث $\sim = \{ (١، ١) : ١، ٢، ٤ \}$.
- ب) اختبر ما إذا كانت $\sim$ علاقة انعكاسية أم لا .
- ج) أرسم المخطط البياني الذي يمثلها .

الحل :

أ) $\sim = \{ (١، ١)، (١-، ١-)، (٢، ٢)، (٢-، ٢-) \}$

ب) $\because ١- \sim ١- \text{ ولكن } (١-، ١-) \notin \sim$

$\therefore \sim$ علاقة ليست انعكاسية



انتبه



$$١(١-) = ١$$

$$٢(١) = ١$$

$$٢(٢-) = ٤$$

$$٢(٢) = ٤$$

نلاحظ أنَّ المخطط البياني لم يشمل جميع عناصر القطر الرئيسي .

دورك الآن (١)

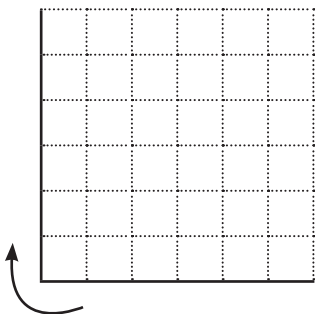


العلاقات الآتية معرفة على المجموعة $\sim = \{ ١-، ٠، ١ \}$. حدِّد أيًّا منها يمثل علاقة انعكاسية مع ذكر السبب ، ثمَّ مثِّل $\sim$ بمخطط بياني و $\sim$ بمخطط سهمي :

١) $\sim = \{ (١-، ١-)، (١، ١)، (٠، ٠)، (١-، ١-) \}$

$\because ١- \sim ١-، \sim \ni (.....،)$ ، $\sim \ni (.....،)$

$\because \sim ١-، \sim \ni (.....،)$ ، $\sim \ni (.....،)$



$\therefore \sim$ علاقة لأنَّ لكلَّ $١ \ni \sim$ ، يكون

$$٢ \text{ ع} = \{(١, ١), (١, ٠), (٠, ١), (٠, ٠)\}$$

∴ ١ ∉ سـ ولكن (.....,) ∉ عـ

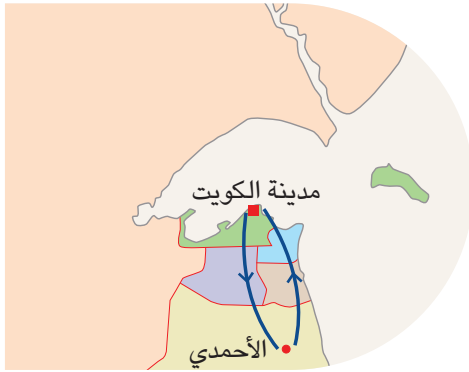
∴ عـ

عبر عن فهمك (١)

لتكن سـ = {١, ٢, ٣, ٤, ٥}، ع = {(١, ٢), (٢, ١)}، ب ∉ سـ، ب مضاعف من مضاعفات ١، هل ع علاقة انعكاسية؟ فسر إجابتك.

ثانيًا: خاصية التناظر

تسكن نور في مدينة الأحمدى، وذهبت يومًا لزيارة صديقتها في مدينة الكويت ثم عادت إلى منزلها بعد انتهاء الزيارة. نلاحظ في هذا المثال أن الذهاب يلزمه عودة، كما هو موضح في الشكل المقابل، مثل هذه العلاقات تُسمى «علاقة متناظرة».



حلّ وناقش (٢)

إذا كانت سـ = {١, ٢, ٣, ٤, ٥}،

$$\text{ع} = \{(١, ٢), (٢, ١), (٢, ٣), (٣, ٢), (٣, ٤), (٤, ٣)\}$$

أ) أكتب ع بذكر العناصر.

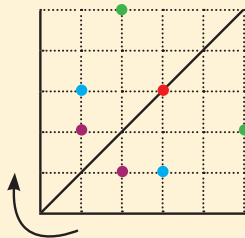
$$\text{ع} = \{(.....,), (٤, ١), (....., ٣), (....., ٢)\}$$

ب) مثل ع بمخطط سهمي.

لاحظ أن

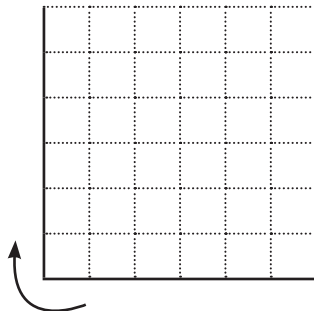
في المخطط السهمي:
تكون العلاقة متناظرة إذا وُجد سهم موجّه من ١ إلى ٢، فإنّه يلزم وجود سهم موجّه من ٢ إلى ١.

لاحظ أن



في المخطط البياني: تكون العلاقة متناظرة إذا كان القطر الرئيسي هو محور التناظر بالنسبة إلى النقاط التي تمثّل العلاقة في المخطط البياني.

مخطط بياني



مخطط سهمي

١ ٢ ٣ ٤ ٥

لاحظ أن:

$$\text{ع} \ni (١, ٤), \text{ع} \ni (٤, ١)$$

$$\text{ع} \ni (٢, ٣), \text{ع} \ni (٣, ٢)$$

نسمّي مثل هذه العلاقة علاقة «متناظرة».

تُسمَّى العلاقة $\mathcal{E}$ المعرَّفة على المجموعة S علاقة متناظرة إذا وفقط إذا كان لكل $(a, b) \in \mathcal{E}$ ، فإن $(b, a) \in \mathcal{E}$

مثال (٣) :

إذا كانت $S = \{1, 2, 3\}$ ، فأَيُّ العلاقات التالية متناظرة على S مع ذكر السبب ؟

أ $\mathcal{E}_1 = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$

ب $\mathcal{E}_2 = \{(3, 3)\}$

ج $\mathcal{E}_3 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (1, 3)\}$ ، مثَّل $\mathcal{E}_3$ بمخطَّط سهمي .

الحل :

أ العلاقة $\mathcal{E}_1$: $(1, 2) \in \mathcal{E}_1$ ، وأيضًا $(2, 1) \in \mathcal{E}_1$

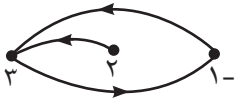
$(2, 3) \in \mathcal{E}_1$ ، وأيضًا $(3, 2) \in \mathcal{E}_1$

$\therefore \mathcal{E}_1$ علاقة متناظرة لأنَّ لكل $(a, b) \in \mathcal{E}_1$ ، فإن $(b, a) \in \mathcal{E}_1$

ب العلاقة $\mathcal{E}_2$: $(3, 3) \in \mathcal{E}_2$ ، وأيضًا $(3, 3) \in \mathcal{E}_2$

$\therefore \mathcal{E}_2$ علاقة متناظرة لأنَّ لكل $(a, b) \in \mathcal{E}_2$ ، فإن $(b, a) \in \mathcal{E}_2$

ج العلاقة $\mathcal{E}_3$ ليست متناظرة لأنَّ $(2, 3) \in \mathcal{E}_3$ ولكن $(3, 2) \notin \mathcal{E}_3$

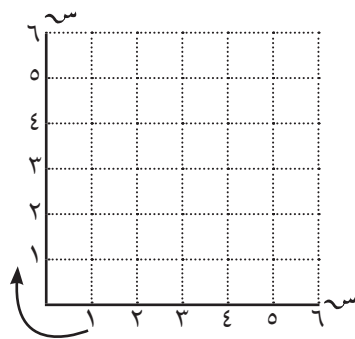


عبّر عن فهمك (٢)

هل كل علاقة انعكاسية على S هي علاقة متناظرة على S ؟ فسّر إجابتك .

ملاحظة :

تكون العلاقة $\mathcal{E}$ ليست متناظرة إذا وُجد $(a, b) \in \mathcal{E}$ ولكن $(b, a) \notin \mathcal{E}$ (عنصر واحد على الأقل) .



إذا كانت $س = \{١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦\}$ ، $ع$ ، علاقات معرفّة على $س$:

$$ع = \{(١, ١), (١, ٢), (٢, ١), (٢, ٢), (٣, ٣), (٤, ٤), (٥, ٥), (٦, ٦)\}$$

$$ع = \{(١, ١), (١, ٢), (٢, ١), (٢, ٢), (٣, ٣), (٤, ٤), (٥, ٥), (٦, ٦)\}$$

أ) أكتب $ع$ بذكر العناصر ومثلّها بمخطّط بياني ، ثمّ ابحث فيما إذا كانت

$ع$ ، علاقة متناظرة أم لا مع ذكر السبب .

$$ع = \{(١, ١), (١, ٢), (٢, ١), (٢, ٢), (٣, ٣), (٤, ٤), (٥, ٥), (٦, ٦)\}$$

$$\{(١, ١), (١, ٢), (٢, ١), (٢, ٢), (٣, ٣), (٤, ٤), (٥, ٥), (٦, ٦)\}$$

$$ع = \{(١, ١), (١, ٢), (٢, ١), (٢, ٢), (٣, ٣), (٤, ٤), (٥, ٥), (٦, ٦)\}$$

$$ع = \{(١, ١), (١, ٢), (٢, ١), (٢, ٢), (٣, ٣), (٤, ٤), (٥, ٥), (٦, ٦)\}$$

$$ع = \{(١, ١), (١, ٢), (٢, ١), (٢, ٢), (٣, ٣), (٤, ٤), (٥, ٥), (٦, ٦)\}$$

∴ $ع$ ، علاقة لأنّ لكلّ $(١, ٢) \in ع$ ، فإنّ $(٢, ١) \in ع$.

ب) أكتب $ع$ بذكر العناصر ومثلّها بمخطّط سهمي ، ثمّ ابحث فيما إذا كانت $ع$ ، علاقة متناظرة أم لا

مع ذكر السبب .

$$ع = \{(١, ١), (١, ٢), (٢, ١), (٢, ٢), (٣, ٣), (٤, ٤), (٥, ٥), (٦, ٦)\}$$

$$ع = \{(١, ١), (١, ٢), (٢, ١), (٢, ٢), (٣, ٣), (٤, ٤), (٥, ٥), (٦, ٦)\}$$

١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦

عبر عن فهمك (٣)



يقول فايز : إذا كانت $ع$ علاقة متناظرة ، فإنّ عدد عناصر العلاقة لا بدّ أن يكون عددًا زوجيًا . هل توافقه الرأي ؟ فسّر إجابتك .



معلومة مفيدة :

عن أبي هريرة رضي الله عنه
أنّ النبي صلى الله عليه وآله قال :

« لا تُشدّ الرحال إلّا إلى ثلاثة مساجد : المسجد الحرام ، ومسجدي هذا ، والمسجد الأقصى »
- رواه البخاري ومسلم .

ثالثاً : خاصية التعدّي

إذا كانت منارة المسجد الحرام أطول من منارة المسجد النبوي ، ومنارة المسجد النبوي أطول من منارة المسجد الأقصى ، فإنّ منارة المسجد الحرام أطول من منارة المسجد الأقصى .
مثل هذه العلاقة تُسمّى علاقة « متعدّيّة » .

حلّ وناقش (٣)

لاحظ أنّ



تكون العلاقة متعدّية إذا وُجد سهم موجّه من 'أ' إلى 'ب' وسهم آخر موجّه من 'ب' إلى 'ج'، فإنّه يلزم وجود سهم موجّه من 'أ' إلى 'ج'.

إذا كانت $s = \{5, 7, 8\}$ ، وكانت E علاقة معرفّة على s حيث $E = \{(a, b) : a \neq b, b \neq a, b > a\}$. اكتب E بذكر العناصر.

• • •
8 7 5

مثّل E بمخطّط سهمي.

لاحظ أنّ:

$(5, 7) \in E$ و $(7, 8) \in E$ كذلك $(5, 8) \in E$
هذه العلاقة تُسمّى علاقة «متعدّية».

تُسمّى العلاقة E المعرفة على المجموعة s علاقة متعدّية إذا وفقط إذا كان لكلّ $(a, b) \in E$ و $(b, c) \in E$ فإنّ $(a, c) \in E$.

لاحظ أنّ

$E \ni (2, 1)$
 $E \ni (2, 0)$
لا يوجد زوج مرتّب مسقطه الأوّل يساوي ٢، إذا لا يوجد ما ينفي شرط التعدّي.

مثال (٤):

لتكن $s = \{0, 1, 2\}$ ، E علاقة معرفّة على s حيث $E = \{(0, 1), (1, 2), (2, 0)\}$
اختبر ما إذا كانت العلاقة E متعدّية أم لا مع ذكر السبب.

الحلّ:

$\therefore (0, 1) \in E$ و $(1, 2) \in E$ ، $(2, 0) \in E$
 $\therefore E$ علاقة متعدّية لأنّ لكلّ $(a, b) \in E$ و $(b, c) \in E$ فإنّ $(a, c) \in E$.

مثال (٥):

لتكن $s = \{-1, 1, 2\}$ ، E علاقة معرفّة على s حيث $E = \{(-1, -1), (-1, 2), (1, -2), (2, -1)\}$
اختبر ما إذا كانت العلاقة E متعدّية أم لا مع ذكر السبب.

الحلّ:

$\therefore (-1, 2) \in E$ و $(2, -1) \in E$ ، $(-1, -1) \in E$
 $\therefore (-1, -1) \in E$ و $(-1, 2) \in E$ ، $(2, -1) \in E$
 $\therefore (-1, -1) \in E$ و $(2, -1) \in E$ ، $(-1, 2) \in E$
 $\therefore (-1, 2) \in E$ و $(2, -1) \in E$ ، $(-1, -1) \in E$
 $\therefore (-1, -1) \in E$ و $(2, -1) \in E$ ، $(-1, 2) \in E$
 $\therefore (-1, 2) \in E$ و $(2, -1) \in E$ ، $(-1, -1) \in E$

$\therefore E$ علاقة متعدّية لأنّ لكلّ $(a, b) \in E$ و $(b, c) \in E$ فإنّ $(a, c) \in E$.

لا يلزم كتابة هذه الخطوات لماذا؟

ملاحظة :



- وجود العنصر $(١, ١)$ في E ، لا يؤثر على خاصية التعدي .
- لبحث علاقة التعدي ، نختبر كل الأزواج المرتبة المختلفة المساقط .
- إذا وُجد العنصر $(١, ١)$ في E ، ولم يوجد العنصر $(ب, ج)$ في E ، فلا يوجد ما ينفي شرط التعدي .

مثال (٦) :

إذا كانت $S = \{١, ٢, ٣, ٤\}$ ، E علاقة معرفة على S حيث
 $E = \{(١, ٤), (٤, ٣), (٣, ١), (٣, ٢), (٢, ١)\}$ ، فهل E علاقة متعدية ؟ ولماذا ؟
 الحل :

$(٣, ٢) \in E$ و $(٤, ٣) \in E$ ، ولكن $(٤, ٢) \notin E$
 ∴ العلاقة E ليست متعدية .

ملاحظة :



تكون العلاقة E ليست متعدية إذا وُجد $(١, ب) \in E$ و $(ب, ج) \in E$ ، ولكن $(١, ج) \notin E$.

عبّر عن فهمك (٤)



إذا كانت $S = \{١, ٢, ٣, ٥, ٦\}$ ، E علاقة معرفة على S حيث $E = \{(١, ٣), (٣, ٥), (٥, ٦)\}$.
 ترى مريم أنّ العلاقة E هي علاقة ليست متعدية ، بينما ترى نورا أنّ E علاقة متعدية ،
 أيّ منهما على صواب ؟ فسّر إجابتك .

دورك الآن (٣)



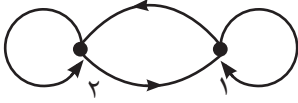
إذا كانت $S = \{٠, ٢, ٤\}$ ، E علاقة معرفة على S حيث $E = \{(٠, ٤), (٤, ٢), (٢, ٠)\}$.
 هل E علاقة متعدية ؟ ولماذا ؟

∴ $(.....,) \in E$ و $(.....,) \in E$ ، $(.....,) \in E$
 ∴ E علاقة
 لأن لكل $(١, ب) \in E$ و $(.....,) \in E$ ، فإن $(١, ج) \in E$.

رابعاً : خاصية التكافؤ

حلّ وناقش (٤)

لتكن $S = \{1, 2\}$ ، R علاقة معرفة على S موضحة في المخطط السهمي المقابل :



أ) هل R علاقة انعكاسية ؟ ولماذا ؟

.....

.....

.....

ب) هل R علاقة متناظرة ؟ ولماذا ؟

.....

.....

.....

ج) هل R علاقة متعدية ؟ ولماذا ؟

.....

.....

∴ العلاقة R تُسمى « علاقة تكافؤ » .

تكون العلاقة R المعرفة على مجموعة S علاقة تكافؤ إذا كانت انعكاسية ومتناظرة ومتعدية .

مثال (٧) :

إذا كانت $S = \{1, 2, 3\}$ ، R علاقة معرفة على S حيث

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

أ) أكتب R بذكر العناصر .

ب) اختبر العلاقة R من حيث كونها انعكاسية ، متناظرة ، متعدية ، تكافؤ .

الحل :

أ) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

ب) $1 \in S \Rightarrow (1, 1) \in R$ ، $2 \in S \Rightarrow (2, 2) \in R$ ، $3 \in S \Rightarrow (3, 3) \in R$

$1 \in S \Rightarrow (1, 2) \in R$ ، $2 \in S \Rightarrow (2, 1) \in R$

$3 \in S \Rightarrow (3, 3) \in R$

∴ R علاقة انعكاسية ، لأن لكل $x \in S \Rightarrow (x, x) \in R$

$$\because \mathcal{E} \ni (1, 3), \mathcal{E} \ni (3, 1)$$

$\therefore \mathcal{E}$ علاقة متناظرة، لأن لكل $(a, b) \in \mathcal{E}$ فإن $(b, a) \in \mathcal{E}$

$$\because \mathcal{E} \ni (1, 1), \mathcal{E} \ni (1, 3) \text{ و } \mathcal{E} \ni (3, 1)$$

$$\mathcal{E} \ni (1, 3), \mathcal{E} \ni (3, 1) \text{ و } \mathcal{E} \ni (3, 3)$$

$\therefore \mathcal{E}$ علاقة متعدية لأن لكل $(a, b) \in \mathcal{E}$ و $(b, c) \in \mathcal{E}$ فإن $(a, c) \in \mathcal{E}$.

$\therefore \mathcal{E}$ علاقة تكافؤ لأنها علاقة انعكاسية ومتناظرة ومتعدية.

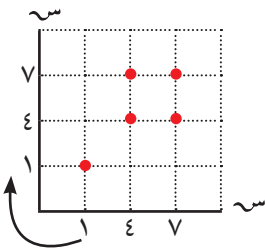
دورك الآن (٤)



إذا كانت $S = \{1, 4, 7\}$ ، $\mathcal{E}$ علاقة معرفة على S

كما هو موضح في المخطط البياني المقابل،

فاختبر ما إذا كانت $\mathcal{E}$ علاقة تكافؤ.



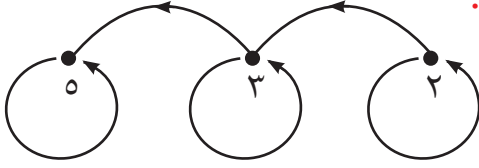
ملاحظة :



تكون العلاقة $\mathcal{E}$ ليست تكافؤاً إذا لم تكن $\mathcal{E}$ (انعكاسية أو متناظرة أو متعدية).

مثال (٨) :

في الشكل المقابل : $S = \{ ٥ , ٣ , ٢ \}$ ، ع علاقة معرفة على S .
 اختبر ع من حيث كونها انعكاسية ، متناظرة ، متعدية ،
 تكافؤ مع ذكر السبب .



الحل :

$$E = \{ (٥, ٥), (٥, ٣), (٣, ٣), (٣, ٢), (٢, ٢) \}$$

$$٢ \ni S, ٢ \ni E$$

$$٣ \ni S, ٣ \ni E$$

$$٥ \ni S, ٥ \ni E$$

∴ ع علاقة انعكاسية ، لأن لكل $٢ \ni S$ يكون $٢ \ni E$.

ع علاقة ليست متناظرة لأن $٣ \ni E$ ولكن $٢ \ni E$.

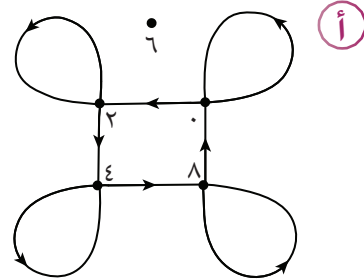
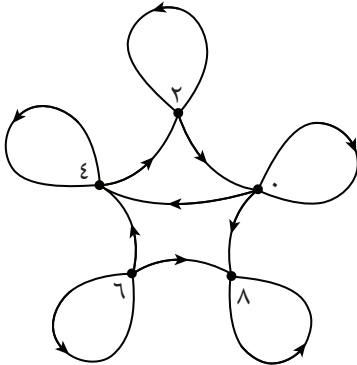
ع علاقة ليست متعدية لأن $٣ \ni E$ و $٥ \ni E$ ولكن $٥ \ni E$.

∴ ع علاقة ليست تكافؤاً لأن ع ليست متناظرة (أو لأنها ليست متعدية) .

تمارين ذاتية :



١ فيما يلي مجموعة من المخططات السهمية لعدة علاقات على $S = \{ ٨ , ٦ , ٤ , ٢ , ٠ \}$.
 أكتب كل علاقة بذكر العناصر ، ثم اختبر إذا كانت العلاقة انعكاسية أم لا مع ذكر السبب .



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

٢ إذا كانت $\sim = \{2, 3, 5, 6\}$ ، وكانت $\mathcal{E} = \{(b, a) : b \supset \sim, a \text{ عامل من عوامل } b\}$.

أ) اكتب $\mathcal{E}$ بذكر العناصر.

ب) تحقق من أن العلاقة $\mathcal{E}$ انعكاسية.

٣ اكتب كل علاقة مما يأتي بذكر العناصر، ومثلها بمخطط سهمي، ثم اختبر الخاصية الانعكاسية.

أ) $\sim = \{1, 2, 3, 5\}$

$\mathcal{E} = \{(b, a) : b \supset \sim, a + b = \text{عدداً زوجياً}\}$

ب) $\mathcal{L} = \{-1, 1, 2\}$

$\mathcal{E} = \{(b, a) : b \supset \mathcal{L}, a = b^2\}$

ج) $\mathcal{M} = \{-1, 0, 3\}$

$\mathcal{E} = \{(b, a) : b \supset \mathcal{M}, a \leq b\}$

٤ اكتب كل علاقة مما يأتي بذكر العناصر، ثم اختبر من حيث كونها متناظرة أم لا مع ذكر السبب.

أ) العلاقة $\mathcal{E}$ معرفة على $\sim = \{3, 4, 5\}$

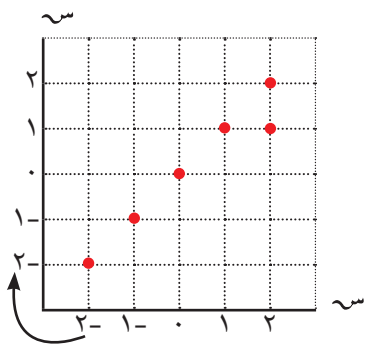
حيث $\mathcal{E} = \{(b, a) : b \supset \sim, a + b = 8\}$

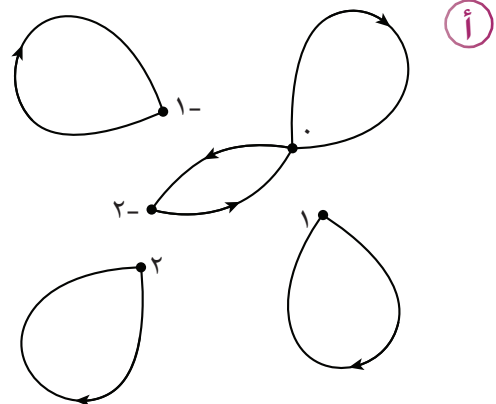
ب) ع علاقة « $\geq$ » معرفّة على $S = \{2, 4, 6\}$

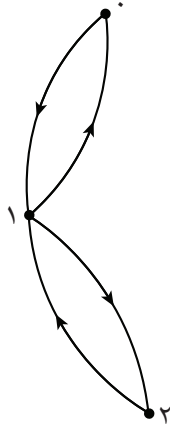
ج) ع علاقة « ضعف » معرفّة على $S = \{0, 1, 2, 3\}$

د) العلاقة ع معرفّة على $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
حيث $E = \{(a, b) : a \neq b, \exists c \in S, c + b = a \text{ صفراً}\}$

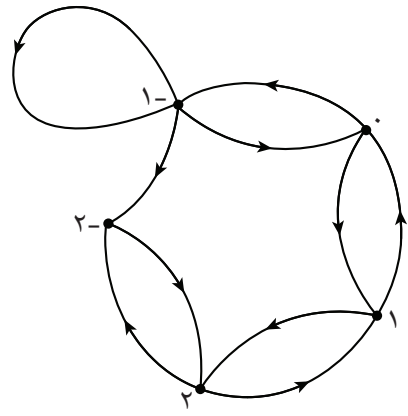
هـ) فيما يلي مخططات سهمية وبيانية لعلاقات معرفّة على $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
إختبر خاصيّة التناظر لكل شكل ممّا يلي :







د



ج

٦ العلاقات الآتية معرفّة على المجموعة $S = \{1, 2, 3, 4\}$. أيّ منها هو علاقة متعدّية؟ وأيّها غير متعدّية؟ مع ذكر السبب.

$$E_1 = \{(1, 3), (2, 3), (1, 2)\}$$

$$E_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$$

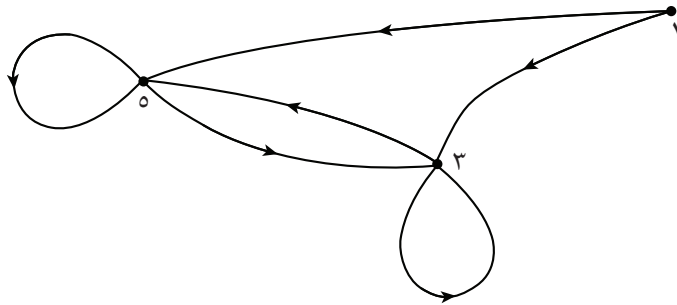
$$E_3 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 3), (2, 4), (1, 4)\}$$

٧ اعتبر $S = \{1, 2, 3\}$ ، $E = \{(a, b) : a \leq b, b \in S\}$

أ) أكتب E بذكر العناصر، ثمّ مثّلها بمخطط سهمي.

٨ (ب) اختبر $\mathcal{R}$ من حيث كونها متعدية أم لا مع ذكر السبب .

٩ إذا كانت $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، وكانت $\mathcal{R} = \{(s, s) : s \in \mathcal{S}, s \neq v\}$ ، أكتب $\mathcal{R}$ بذكر العناصر ، ثم ادرس خواص العلاقة $\mathcal{R}$ من حيث كونها انعكاسية ، متناظرة ، متعدية ، تكافؤ .



٩ في المخطط السهمي المقابل $\mathcal{R}$ علاقة معرفة على $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

أدرس خواص العلاقة $\mathcal{R}$ من حيث كونها انعكاسية ، متناظرة ، متعدية ، تكافؤ .



- ١٠ إذا كانت E علاقة معرفّة على P ، حيث P هي مجموعة الأعداد الكلّية ، وكانت $E = \{ (s, s) : s, v \in P, s = 6 - v \}$ ، فاختبر كون العلاقة E انعكاسية ، متناظرة ، متعدّية ، تكافؤ .

سوف تتعلّم : التطبيق ومكوّناته (المجال ، المجال المقابل ، قاعدة الاقتران) .

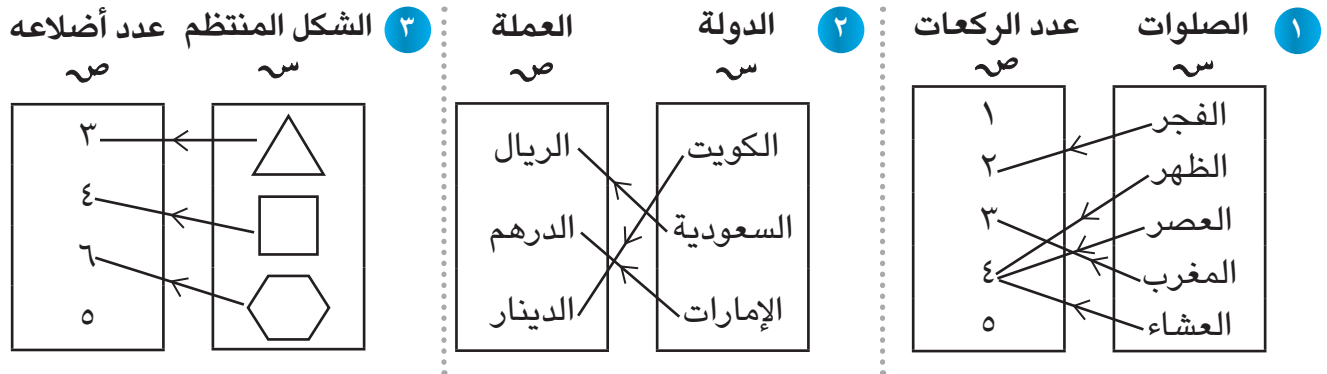
العبارات والمفردات :

Codomain	المجال المقابل	Function	التطبيق (الدالة)
Range	المدى	Domain	المجال

تعلّمت سابقاً أنّ ع علاقة من سـ إلى صـ عندما تكون ع مجموعة جزئية من الحاصل الديكارتى سـ × صـ ،
أي أنّ ع $\subseteq$ سـ × صـ

حلّ وناقش (١)

توضّح المخطّطات السهمية التالية علاقات من سـ إلى صـ ، من خلال هذه العلاقات أجب عمّا يلي :



أ هل جميع عناصر سـ مرتبطة بعناصر من صـ ؟

ب بكم عنصراً من صـ ارتبط كلّ عنصر من عناصر سـ ؟

من العلاقات ١ ، ٢ ، ٣ نلاحظ أنّ :

كلّ عنصر من عناصر المجموعة الأولى سـ يرتبط بعنصر واحد فقط من عناصر المجموعة الثانية صـ .

معلومة مفيدة :



في يوم ٢٦ فبراير من عام ١٧٩٧ م ، أصدرت

أول عملة ورقية حديثة الشكل في العالم وكانت من فئة الجنيه والجنيهين ، وقد أحدث ظهور العملات الورقية آنذاك ردّة فعل ضخمة ، ظهرت العملة الورقية ، لتلافي المشكلات المتعلقة بتخزين النقود المعدنية التي كانت تُصنع من الذهب والفضة والنحاس .

التطبيق (الدالة) : هو علاقة من $\sim$ إلى $\simeq$ بحيث يرتبط كل عنصر من عناصر $\sim$ بعنصر واحد $\simeq$ فقط من عناصر $\simeq$.

نرمز إلى التطبيق (الدالة) بأحد الرموز : t ، d ، h ، v ، ...
إذا كانت t تطبيق من $\sim$ إلى $\simeq$ ، نرمز إلى ذلك $t : \sim \rightarrow \simeq$

ملاحظة :

مكوّنات التطبيق (الدالة) $t : \sim \rightarrow \simeq$ هي :

- ١ $\sim$ تُسمّى **مجال التطبيق** (الدالة) .
- ٢ $\simeq$ تُسمّى **المجال المقابل للتطبيق** t .
- ٣ t هي قاعدة الاقتران .

دورك الآن (١)

تمثّل المخطّطات السهمية التالية علاقات من $\sim$ إلى $\simeq$ ، أيّ منها يمثّل تطبيقًا وأيّها لا يمثّل تطبيقًا مع ذكر السبب ؟

ج

العلاقة :

السبب :

ب

العلاقة :

السبب :

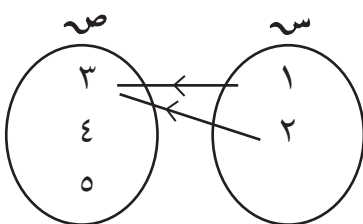
أ

العلاقة :

السبب :

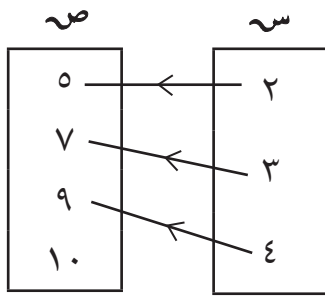
في المخطّط السهمي الذي يمثّل تطبيقًا : كلّ عنصر من عناصر $\sim$ يخرج منه سهم واحد فقط إلى أحد عناصر $\simeq$.

عبّر عن فهمك



هل تمثّل العلاقة الآتية تطبيقًا من $\sim$ إلى $\simeq$ ؟
وضّح إجابتك .

حلّ وناقش (٢)



لتكن ت : س إلى ص تطبيق مخطّطه السهمي مبين في الشكل المقابل .
أكمل :

المجال = { }

المجال المقابل = { }

مجموعة صور عناصر المجال = { }

تُسمّى مجموعة صور عناصر المجال بمدى التطبيق .

مدى التطبيق هو مجموعة صور عناصر مجال التطبيق .

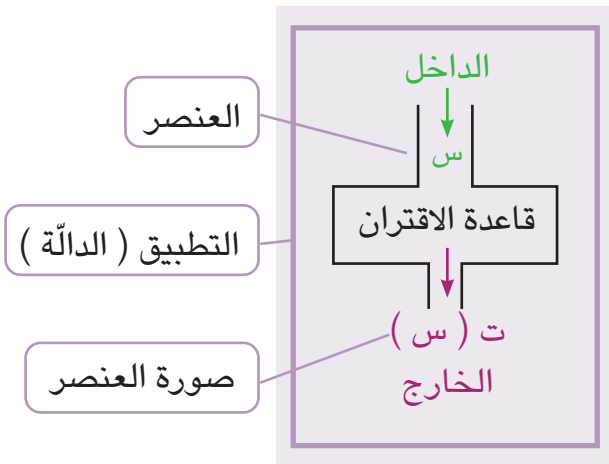
نلاحظ أنّ : $\{10, 9, 7, 5\} \supseteq \{9, 7, 5\}$

ملاحظة :

مدى التطبيق مجموعة جزئية من المجال المقابل .

إذا كان $u \in S$ والعنصر الذي يرتبط به من V هو b ، فإننا نعبّر عن ذلك بالصورة $T(u) = b$ وهي قيمة التطبيق (الدالة) T عند u .

من المخطّط السهمي في « حلّ وناقش (٢) » ، أكمل ما يلي للوصول إلى قاعدة الاقتران للتطبيق T .



$$T(2) = 5 = 1 + (2) \times 2$$

$$T(3) = 7 = 1 + (\dots) \times 2$$

$$T(4) = 9 = 1 + (\dots) \times 2$$

$$\therefore \text{قاعدة الاقتران هي : } T(u) = 1 + (u) \times 2$$

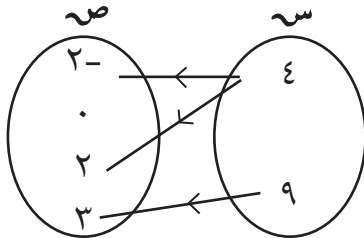
قاعدة الاقتران للتطبيق هي التعبير الرياضي الذي يربط كلّ عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المجال المقابل .

ب) $E = \{(1, 2) : 1 \in A, 2 \in B, \text{ الجذر التربيعي لـ } 1 = 2\}$ ،
 $A = \{3, 2, 0, -2\}$ ، $B = \{9, 4\}$

الحل:

$$E = \{(3, 9), (-2, 4), (2, 4)\}$$

∴ العنصر 4 من المجال ارتبط بعنصرين مختلفين من المجال المقابل .
 ∴ العلاقة ع₁ لا تمثل تطبيقًا .



انتبه



الجذر التربيعي للعدد الموجب 1 هو العدد الذي مربعه يساوي 1 .

في العلاقة التي تمثل تطبيقًا : كل عنصر من عناصر المجال يظهر مرة واحدة فقط كمسقط أول في أحد الأزواج المرتبة التي تنتمي إلى العلاقة .

دورك الآن (3)



ليكن ع علاقة من س إلى ص ، أكتب ع بذكر العناصر ، وحدد ما إذا كانت تمثل تطبيقًا أم لا ، مع ذكر السبب ، ثم مثلها بمخطط سهمي .

$$E = \{(1, 2) : 1 \in A, 2 \in B, \text{ الجذر التربيعي لـ } 1 = 2\}$$

$$A = \{6, 4, 2\}$$

$$B = \{3, 2, 1\}$$

مثال (٢) :

إذا كانت $s = \{ 3, 2, 1, 0, -1, -2 \}$

وكانت $t : s \leftarrow C$ (مجموعة الأعداد الحقيقية) ، حيث $t(s) = 3s + 1$

أ) أكمل الجدول التالي :

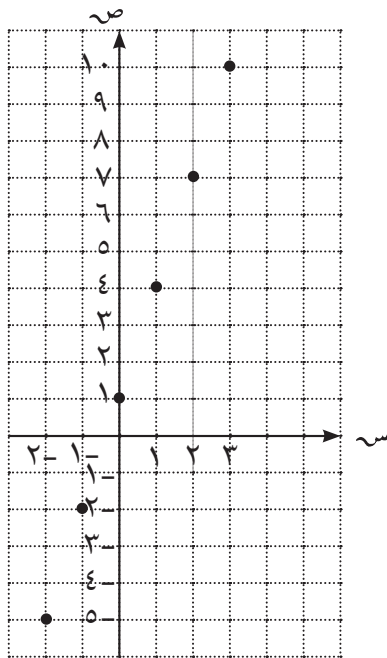
س	-٢	-١	٠	١	٢	٣
$3s + 1$	$1 + (-2 \times 3)$	$1 + (-1 \times 3)$	$1 + (0 \times 3)$	$1 + (1 \times 3)$	$1 + (2 \times 3)$	$1 + (3 \times 3)$
$t(s)$	-٥	-٢	١	٤	٧	١٠

ب) مدى $t = \{ -5, -2, 1, 4, 7, 10 \}$

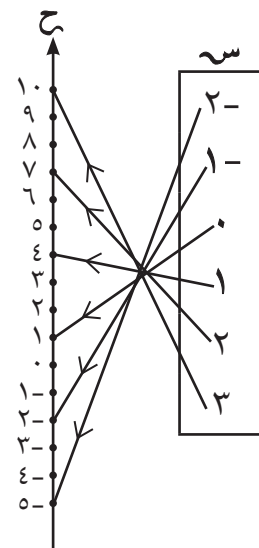
ج) أكتب t كمجموعة من الأزواج المرتبة .

$t = \{ (-5, -2), (-2, 1), (1, 4), (4, 7), (7, 10), (10, 3) \}$

د) أرسم مخططاً سهمياً وآخر بيانياً في المستوى الإحداثي .



مخطط بياني



مخطط سهمي

في المخطط البياني الذي يمثل تطبيقاً : كل خط رأسي يمر بنقطة واحدة على الأكثر من نقاط التطبيق .



إذا كانت $س = \{-1, 0, 1, 2\}$ ، $ح$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية .
 ت : $س \leftarrow ح$ حيث $ت (س) = س^2 + 2$

أ) أكمل الجدول التالي ، ثم أوجد مدى التطبيق ت :

س	-1	0	1	2
$س^2 + 2$	$(-1)^2 + 2$			
ت (س)	3			

مدى التطبيق = { ، ، }

ب) أكتب ت كأزواج مرتبة .

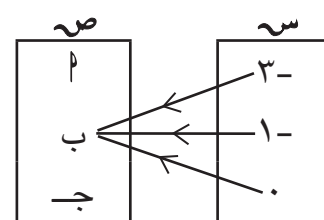
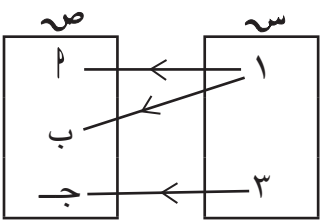
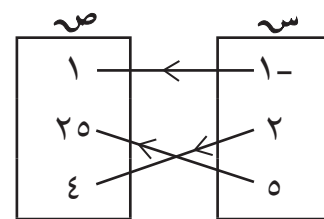
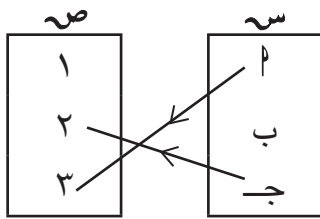
ت = { ، (3 ، -1) } ، {

ج) أرسم مخططاً بيانياً في المستوى الإحداثي .

تمارين ذاتية :



١) بين أيًا من المخططات السهمية التالية يمثل تطبيقًا من $س \leftarrow ص$ وأيها لا يمثل تطبيقًا ، مع ذكر السبب . إذا كان المخطط يمثل تطبيقًا فاذكر المجال والمدى .



٢ حدّد ما إذا كانت العلاقات أدناه تمثّل تطبيقاً من $\mathcal{S}$ إلى $\mathcal{S}$ أم لا ، مع ذكر السبب ، ثمّ مثلّها بمخطّط سهمي .

أ $\mathcal{E} = \{ (١, ٢) : ١ \in \mathcal{S}, ٢ \in \mathcal{S} \}$ ، $\mathcal{S} = \{ ٣, ٢, ١, ٠ \}$ ، $\mathcal{S} = \{ ٣, ٢, ١, ٠ \}$ حيث $\mathcal{S} = \{ ٥, ٤, ٣ \}$ ، $\mathcal{S} = \{ ٣, ٢, ١, ٠ \}$

ب $\mathcal{E} = \{ (١, ١), (١, ٢), (٢, ١) \}$ ، $\mathcal{S} = \{ ٣, ٢, ١, ٠ \}$ ، $\mathcal{S} = \{ ٣, ٢, ١, ٠ \}$ حيث $\mathcal{S} = \{ ٢, ١, ٠ \}$ ، $\mathcal{S} = \{ ٣, ٢, ١, ٠ \}$

٣ إذا كانت $\mathcal{S} = \{ ١, ٠, ١- \}$ ، $\mathcal{S} = \{ ١, ٠, ١- \}$ ، وكانت $\mathcal{S}$ تطبيقاً من $\mathcal{S}$ إلى $\mathcal{S}$

١	٠	١ -	س
			١ - س
			ت (س)

حيث $\mathcal{S} = \{ ١, ٠, ١- \}$

أ أكمل الجدول المقابل :

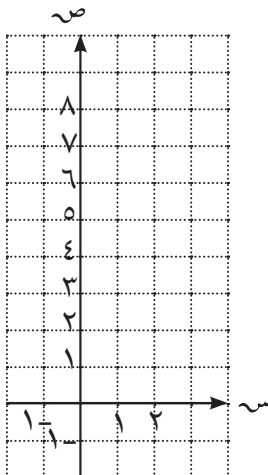
ب مدى $\mathcal{S}$ =

ج أكتب $\mathcal{S}$ كمجموعة من الأزواج المرتبة .

ت =

د أرسم مخطّطاً سهمياً .

٤ إذا كانت $\mathcal{S} = \{ ٢, ١, ١- \}$ ، $\mathcal{S} = \{ ٢, ١, ١- \}$ ، هي تطبيق معرف كما يلي :



هـ : $\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S}$ حيث $\mathcal{S} = \{ ٢, ١, ١- \}$ ، $\mathcal{S} = \{ ٢, ١, ١- \}$

أ أكمل الجدول التالي :

٢	١	١ -	س
			٢ س
			هـ (س)

ب مدى هـ =

ج أكتب هـ كمجموعة من الأزواج المرتبة .

هـ =

د أرسم مخطّطاً بيانياً في المستوى الإحداثي .

Types of Functions

سوف تتعلّم : أنواع التطبيق (الدالة) .

العبارات والمفردات :

Surjective Function (Onto Function)

تطبيق شامل

Injective Function (One-to-One Function)

تطبيق متباين

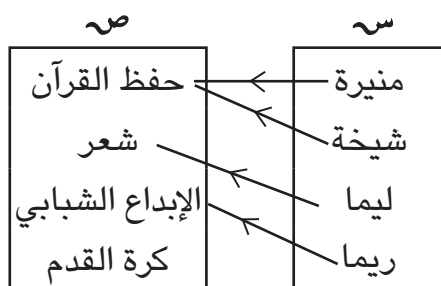
Bijjective Function

تطبيق تقابل

حلّ وناقش



تُقام عدّة مسابقات على مستوى المدارس في دولة الكويت التابعة لوزارة التربية ، منها مسابقات حفظ القرآن والشعر والإبداع الشبّابي للرياضيات وكرة القدم . تمثّل المخطّطات السهمية التالية المسابقات التي اشترك فيها المتعلّمون ، حيث سـ تمثّل أسماء المتعلّمين وصـ تمثّل نوع المسابقة التي اشترك فيها .



ت : سـ ← صـ

أكمل كلّ ممّا يلي :

في التطبيق ت : سـ ← صـ

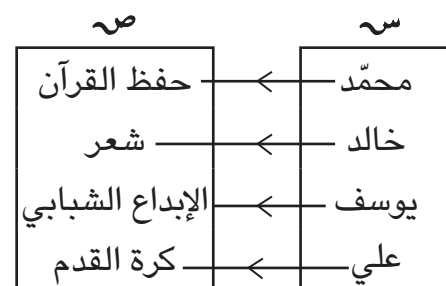
المجال = { منيرة ، ليما ، ريما ، شيخة }

المجال المقابل = { }

المدى = { }

١ هل المدى يساوي المجال المقابل ؟

٢ هل اشتركت متعلّمتان أو أكثر في المسابقة نفسها ؟



ت : سـ ← صـ

أكمل كلّ ممّا يلي :

في التطبيق ت : سـ ← صـ

المجال = { }

المجال المقابل = { حفظ القرآن ، شعر ، الإبداع

الشبّابي ، كرة القدم }

المدى = { }

١ هل المدى يساوي المجال المقابل ؟

٢ هل اشترك متعلّمان أو أكثر في المسابقة نفسها ؟

نسمي التطبيق الذي يكون فيه جميع عناصر المدى هي نفسها عناصر المجال المقابل (تطبيق شامل) .
 من ١ ، إذا ت تطبيق شامل ، ٧ تطبيق ليس شاملاً .

التطبيق الذي يتساوى فيه المدى والمجال المقابل يُسمى « **تطبيق شامل** » .

نسمي التطبيق الذي لا يرتبط فيه أي عنصرين من عناصر المجال بالعنصر نفسه في المجال المقابل (تطبيق متباين) .
 من ٢ ، إذا ت تطبيق متباين ، ٧ تطبيق ليس متبايناً .

التطبيق الذي لا يرتبط فيه عنصران أو أكثر من المجال بالعنصر نفسه من المجال المقابل يُسمى « **تطبيق متباين** » .

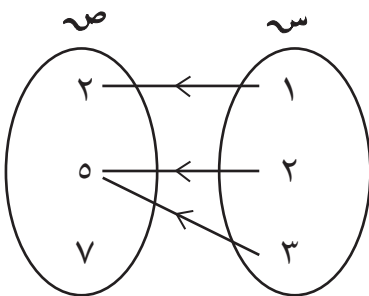
نلاحظ أن التطبيق ت شامل ومتباين . لذلك نطلق عليه اسم تطبيق تقابل ، بينما ٧ تطبيق ليس تقابلاً لأنه ليس شاملاً أو لأنه ليس متبايناً . (**عدم تحقق أحدهما يكفي ليكون التطبيق ليس تقابلاً**)
 من ١ ، ٢ ، إذا ت تطبيق تقابل ، ٧ تطبيق ليس تقابلاً .

التطبيق الشامل والمتباين يُسمى « **تطبيق تقابل** » .

مثال (١) :

بين نوع التطبيقات التالية فيما إذا كانت تطبيقاً شاملاً ، متبايناً ، تقابلاً ، مع ذكر السبب .

ج ه : س ← ص



هـ تطبيق ليس شاملاً

لأن المدى $\neq$ المجال المقابل

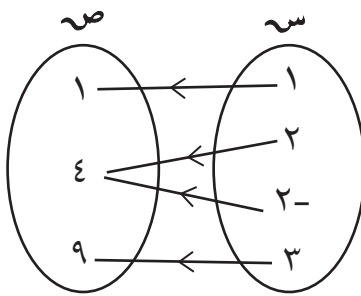
هـ تطبيق ليس متبايناً

لأن هـ (٢) = هـ (٣)

∴ هـ تطبيق ليس تقابلاً لأنه تطبيق

ليس شاملاً أو (لأنه ليس متبايناً) .

ب ٧ : س ← ص



٧ تطبيق شامل

لأن المدى = المجال المقابل

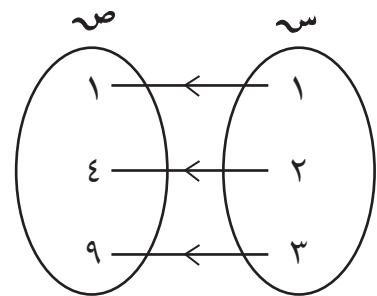
٧ تطبيق ليس متبايناً

لأن ٧ (٢) = ٧ (٣)

∴ ٧ تطبيق ليس تقابلاً لأنه

تطبيق ليس متبايناً .

أ ت : س ← ص



ت تطبيق شامل

لأن المدى = المجال المقابل

ت تطبيق متباين

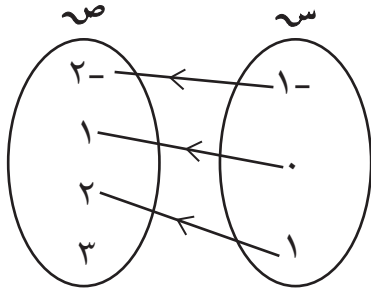
لأن ت (١) $\neq$ ت (٢) $\neq$ ت (٣)

∴ ت تطبيق تقابل لأنه تطبيق

شامل ومتباين .



من المخطط السهمي المقابل ، بيّن نوع التطبيق ت : $\sim \leftarrow \sim$ فيما إذا كان تطبيقاً شاملاً ، متبايناً ، تقابلاً ، مع ذكر السبب .



المجال =

المجال المقابل =

المدى =

تطبيق

السبب :

تطبيق

السبب :

تطبيق

السبب :

مثال (٢) :

إذا كانت $\sim = \{ ٢ , ٠ , ١ \}$ ، $\sim = \{ ٧ , ١ - , ٣ \}$

التطبيق د : $\sim \leftarrow \sim$ ، حيث د (س) = $\sim = ١ -$

أ) أوجد مدى التطبيق د .

ب) أكتب التطبيق د كمجموعة من الأزواج المرتبة .

ج) بيّن نوع التطبيق د ما إذا كان تطبيقاً شاملاً ، متبايناً ، تقابلاً ، مع ذكر السبب .

د) مثل التطبيق بمخطط سهمي .

هـ) مثل التطبيق بمخطط بياني في المستوى الإحداثي .

الحل :

أ) د (س) = $\sim = ١ -$

د (١) = $١ - ١ \times ٤ = ٣$

د (٠) = $١ - ٠ \times ٤ = ١ -$

د (٢) = $١ - ٢ \times ٤ = ٧$

مدى التطبيق = $\{ ٧ , ١ - , ٣ \}$

انتبه



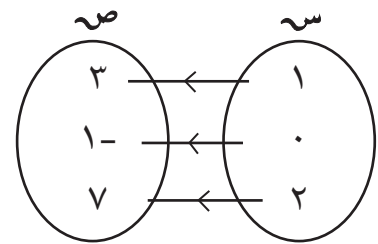
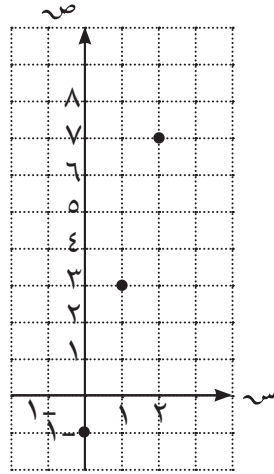
يجب مراعاة ترتيب العمليات الحسابية ، فالضرب والقسمة يسبقان الجمع والطرح .

ب) $D = \{(7, 2), (1, 0), (3, 1)\}$

ج) د تطبيق شامل ، لأنّ المدى = المجال المقابل .

د تطبيق متباين ، لأنّ د (١) $\neq$ د (٠) $\neq$ د (٢)

د تطبيق تقابل ، لأنّه شامل ومتباين .



دورك الآن (٢)

إذا كانت $S = \{2, 0, 2-\}$ ، $S' = \{7, 1, 5-\}$

التطبيق $U: S \leftarrow S'$ ، حيث $U (س) = 3س + 1$

أ) أوجد مدى التطبيق U .

$U (س) = 3س + 1$

$U (2-) = \dots$

$U (0) = \dots$

$U (2) = \dots$

المدى = $\dots$

ب) أكتب التطبيق U كمجموعة من الأزواج المرتبة .

ج) مثل التطبيق U بمخطّط سهمي .

د) بيّن نوع التطبيق ν من حيث كونه شاملاً ، متبايناً ، تقابلاً ، مع ذكر السبب .

ν تطبيق لأنّ :
 ν تطبيق لأنّ :
 ν تطبيق لأنّه :

مثال (٣) :

إذا كانت $\nu = \{ ٢- , ٠ , ١- , ٢- \}$ ، $\nu = \{ ١- , ٣ , ٠ \}$
 التطبيق ν : $\nu \leftarrow \nu$ ، حيث $\nu = \{ ١- , ٣ , ٠ \}$

أ) أوجد مدى التطبيق ν .

ب) مثل التطبيق ν بمخطط بياني في المستوى الإحداثي .

ج) بيّن نوع التطبيق ν من حيث كونه شاملاً ، متبايناً ، تقابلاً ، مع ذكر السبب .

الحل :

أ) ت (س) = $\nu = \{ ١- , ٣ , ٠ \}$

ت (٢-) = $\nu(٢-) = ١- = ١$

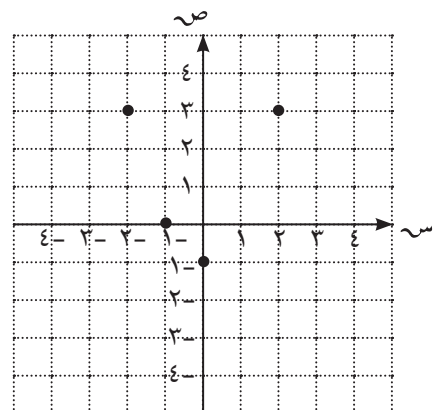
ت (١-) = $\nu(١-) = ٠ = ٠$

ت (٠) = $\nu(٠) = ٣ = ٣$

ت (٢) = $\nu(٢) = ٣ = ٣$

المدى = $\{ ١- , ٣ , ٠ \}$

ب)



ج) ت تطبيق شامل ، لأنّ المدى = المجال المقابل .

ت تطبيق ليس متبايناً ، لأنّ ت (٢-) = ت (٢)

∴ ت تطبيق ليس تقابلاً ، لأنّه ليس متبايناً .

تذكر

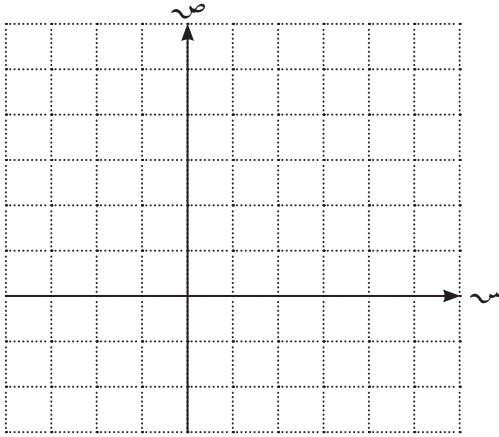


$$\nu(\nu) = \nu(\nu)$$



إذا كان التطبيق ν : $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ ، حيث $\mathcal{P}$ هي مجموعة الأعداد الكليّة ،
 ν (س) = $\mathcal{S}^2$ ، هل التطبيق ν تطبيق متباين ؟ فسّر إجابتك .

دورك الآن (٣)



إذا كانت $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4\}$ ، التطبيق ν : $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ ،
 حيث $\mathcal{D} = \{(1, 4), (1, 3), (3, 2), (2, 1)\}$
 أ) مثل التطبيق ν بمخطط بياني في المستوى الإحداثي .

ب) أكتب مدى التطبيق .

ج) هل التطبيق ν تطبيق تقابل ؟ لماذا ؟

مثال (٤) :

إذا كانت $\mathcal{S} = \{0, 1, 2\}$ ، $\mathcal{V} = \{0, 1, 8\}$ ،
 التطبيق ν : $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{V}$ ، حيث $\mathcal{D} = \{(0, 0), (1, 1), (2, 8)\}$

أ) أوجد مدى التطبيق ν .

$$\mathcal{D} = \{(0, 0)\} = \nu(0)$$

$$\mathcal{D} = \{(1, 1)\} = \nu(1)$$

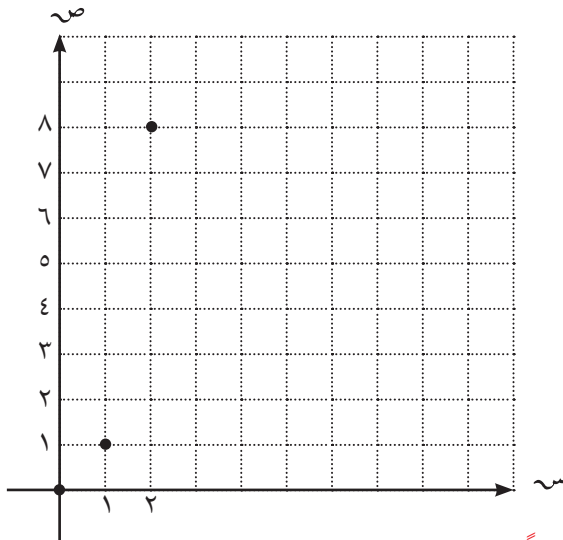
$$\mathcal{D} = \{(2, 8)\} = \nu(2)$$

$$\mathcal{D} = \{(0, 0), (1, 1), (2, 8)\} = \nu$$

ب) أكتب التطبيق ν كمجموعة من الأزواج المرتبة .

$$\mathcal{D} = \{(0, 0), (1, 1), (2, 8)\}$$

ج) مثل التطبيق د بمخطط بياني في المستوى الإحداثي .



د) بين نوع التطبيق د من حيث كونه شاملاً ، متبايناً ، تقابلاً ، مع ذكر السبب .

د : تطبيق شامل ، لأنّ المدى = المجال المقابل .
د : تطبيق متباين ، لأنّ $d(0) \neq d(1)$ ، $d(1) \neq d(2)$.
∴ د تطبيق تقابل ، لأنه شامل ومتباين .

مثال (٥) :

انتبه



• $2 = \sqrt{4}$

• الجذر التربيعي للعدد ٤ هو $2 \pm$

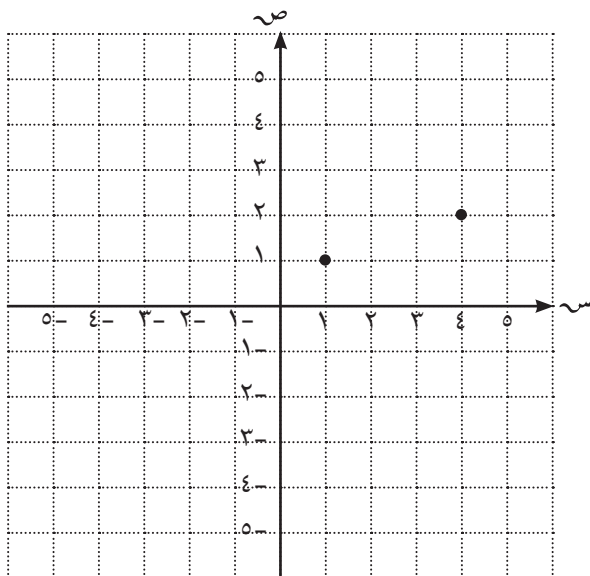
إذا كانت $s = \{1, 4\}$ ، $v = \{-2, 1, 2, 3\}$ ،
التطبيق ت : $s \leftarrow v$ ، حيث ت (س) = $\sqrt{s}$

أ) أوجد مدى التطبيق ت .

ت (س) = $\sqrt{s}$
ت (١) = ١
ت (٤) = ٢
المدى = $\{1, 2\}$

ب) مثل التطبيق ت بمخطط بياني في المستوى الإحداثي.

ج) بين نوع التطبيق ت من حيث كونه شاملاً ، متبايناً ، تقابلاً ، مع ذكر السبب .



ت : تطبيق ليس شاملاً ،

لأنّ المدى $\neq$ المجال المقابل .

ت : تطبيق متباين ، لأنّ

ت (١) $\neq$ ت (٤)

∴ ت تطبيق ليس تقابلاً لأنه ليس شاملاً .



ليكن التطبيق $T: V \rightarrow V$ (V هي مجموعة الأعداد الصحيحة) ،
حيث $T(s) = 2s$ ، هل التطبيق T تطبيق تقابل ؟

تمارين ذاتية :



١ إذا كانت $S = \{-1, 0, 1, 2\}$ ، $V = \{-3, -1, 0, 5, 9\}$

التطبيق $T: S \rightarrow V$ ، حيث $T(s) = 4s + 1$

أ) أوجد مدى التطبيق T .

ب) أكتب التطبيق T كمجموعة من الأزواج المرتبة .

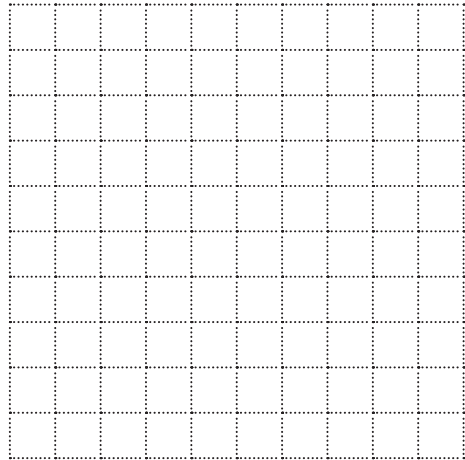
ج) مثل التطبيق T بمخطط سهمي .

د) بين نوع التطبيق T من حيث كونه شاملاً ، متبايناً ، تقابلاً ، مع ذكر السبب .

٢ إذا كانت $ل = \{ ٢-، ٢، ١ \}$ ، $هـ = \{ ٥، ٤، ٢ \}$
 التطبيق ل: $ل \leftarrow هـ$ ، حيث $ل(س) = س^٢ + ١$
 أ) أوجد مدى التطبيق ل.

ب) أكتب التطبيق ل كمجموعة من الأزواج المرتبة .

ج) مثل التطبيق ل بمخطط بياني في المستوى الإحداثي .



د) بين نوع التطبيق ل من حيث كونه شاملاً ، متبايناً ، تقابلاً ، مع ذكر السبب .

٣ إذا كانت $هـ = \{ ١، ٠، ٢- \}$ ، $ص = \{ ١-، ٩-، ٠، ١ \}$
 التطبيق هـ: $هـ \leftarrow ص$ ، حيث $هـ(س) = س^٢ - ١$
 أ) أوجد مدى التطبيق هـ .

ب) أكتب التطبيق هـ كمجموعة من الأزواج المرتبة .

ج) مثل التطبيق هـ بمخطط سهمي .

د) بيّن نوع التطبيق هـ من حيث كونه شاملاً ، متبايناً ، تقابلاً ، مع ذكر السبب .

.....

.....

.....

٤) إذا كانت $E = \{2, 3, 5\}$

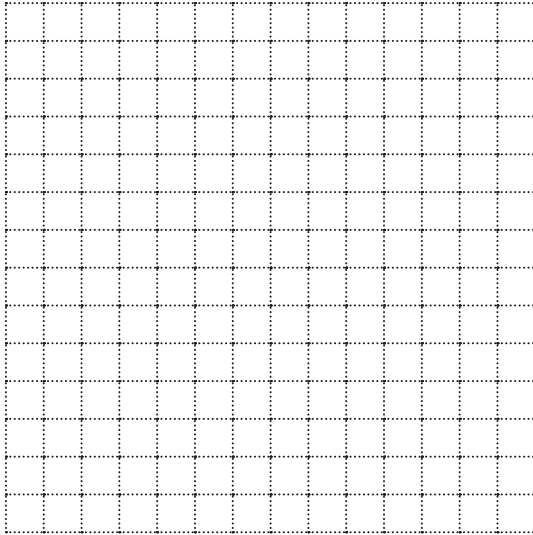
التطبيق هـ : $E \leftarrow E$ ، حيث $H = \{(2, 2), (3, 3), (5, 5)\}$

أ) أوجد مدى التطبيق هـ .

.....

.....

ب) مثل التطبيق هـ بمخطط بياني في المستوى الإحداثي .



ج) بيّن أنّ التطبيق هـ هو تطبيق تقابل .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

٥ إذا كان التطبيق د : س ← ص ، حيث $S = \{1, 4, 16\}$ ، $V = \{2, 5, 11\}$ ، د (س) $= \sqrt[3]{3 - س}$ ، فبيّن أن د تطبيق تقابل .

مهارات تفكير عليا :



اختر الإجابة الصحيحة :

٦ ليكن د تطبيقاً حيث د : ط ← ط ، ت (س) $= 3$ التطبيق د هو :

- ☐ أ شامل وليس متبايناً
☐ ب متباين وليس شاملاً
☐ ج ليس شاملاً وليس متبايناً
☐ د تقابل

٧ إذا كان التطبيق د : س ← ص ، تطبيق تقابل وكان عدد عناصر س يساوي ٥ ، فإن عدد عناصر ص يساوي :

- ☐ أ ٤
☐ ب ٥
☐ ج ٦
☐ د ٧

سوف تتعلّم : الدالة الخطية وخطوات رسم بيانها .

العبارات والمفردات :

Linear Function

دالة خطية

Dependent Variable

متغيّر تابع

Independent Variable

متغيّر مستقلّ

حلّ وناقش

اللوازم

ورقة رسم بياني ، مسطرة .

ليكن u : ص ← ح ، u (س) = س + ١

١ أكمل الجدول التالي :

س	٣		١	٠	٢-	
u (س)				١		

٢ أرسم المخطّط البياني للتطبيق u في المستوى الإحداثي .

٣ هل تقع جميع هذه النقاط على استقامة واحدة ؟

(تأكد باستخدام حافة مستقيمة)

٤ ليكن u : ح ← ح ، u (س) = س + ١

اختر ثلاثة أعداد حقيقية مختلفة تقع بين العددين صفر ، ١ ، ثم أكمل الجدول التالي ومثل النقاط بيانياً في المستوى الإحداثي .

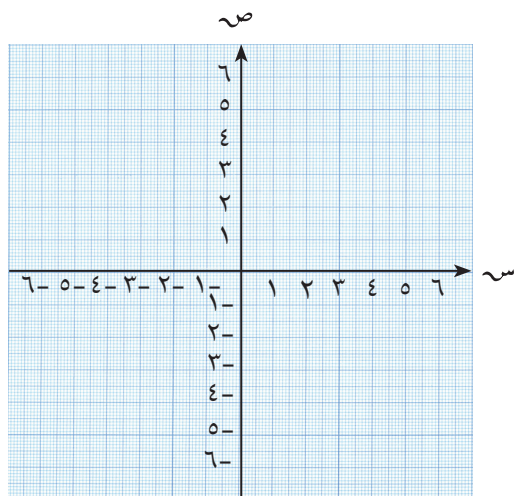
س	١				٠
u (س)	٢				١

٥ نلاحظ أنّ مجموعة النقاط المكوّنة للمخطّط البياني

تزداد كلّما كبر المجال ، وتظلّ أيضاً على استقامة

واحدة ويمكن تمثيلها بخطّ مستقيم .

٦ أرسم بيان الدالة u : ح ← ح ، u (س) = س + ١



تذكّر



- كلّ عدد حقيقي يُمثّل بنقطة على خطّ الأعداد ، وكلّ نقطة على خطّ الأعداد تمثّل عدداً حقيقياً .
- كلّ عددين حقيقيين يوجد بينهما عدد حقيقي .

- الدالة (التطبيق) التي مجالها ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزئية منها تُسمّى « دالة حقيقية » .
- الدالة الحقيقية $U: C \leftarrow C$ ، $U(س) = س + ب$ ، حيث $ب \in C$ ، $0 \neq ب$ تُسمّى « دالة خطية » (تطبيقًا خطيًا) .

ملاحظة :

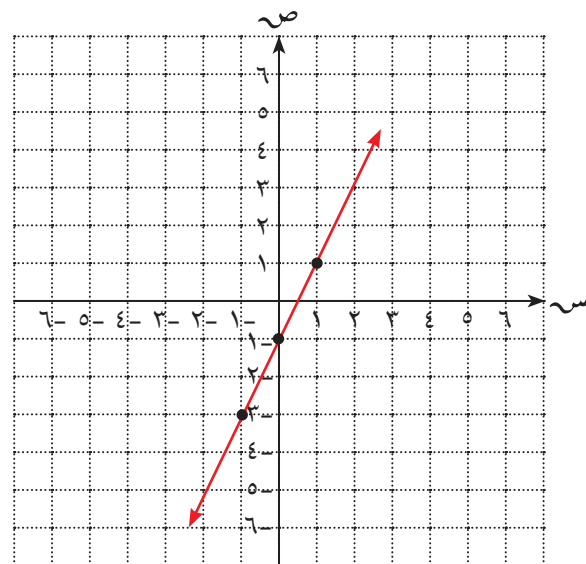
- $U(س) = س + ب$ تُسمّى قاعدة الاقتران ويمكن كتابتها على الصورة : $ص = س + ب$ ويكون بيانها خطًا مستقيمًا يقطع محور السينات حيث $ب \neq 0$.
- يُسمّى $س$ المتغير المستقل ، وهو المتغير الذي يحدّد قيم مخرجات الدالة .
- يُسمّى $ص$ المتغير التابع ، وهو المتغير الذي تعتمد قيمته على قيم المتغير المستقل .

مثال (١) :

أرسم بيان الدالة الخطية : $ص = ٢س - ١$

الحل :

ص = ٢س - ١			
س	١	٠	-١
ص	١	-١	-٣



لاحظ أنّ

خطوات رسم بيان الدالة الخطية

- ١ نضع الدالة على الصورة $ص = س + ب$
- ٢ نختار بعض القيم للمتغير المستقل (س) .
- ٣ نوجد قيم المتغير التابع (ص) المناظرة .
- ٤ نمثّل النقاط في مستوى الإحداثيات .
- ٥ نصل بين هذه النقاط بخط مستقيم باستخدام المسطرة .

عبر عن فهمك (١)

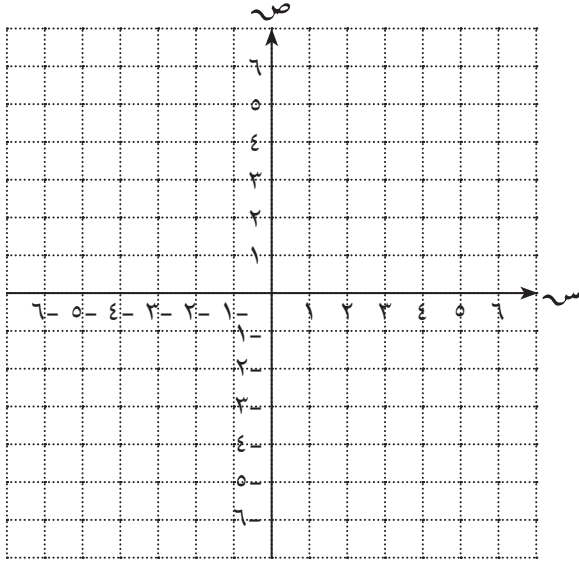


هل النقطة (٤ ، ٧) تنتمي إلى بيان الدالة $ص = ٢س - ١$ ؟ فسّر إجابتك .

دورك الآن (١)



أرسم بيان الدالة الخطية : $ص = ٣س + ٢$



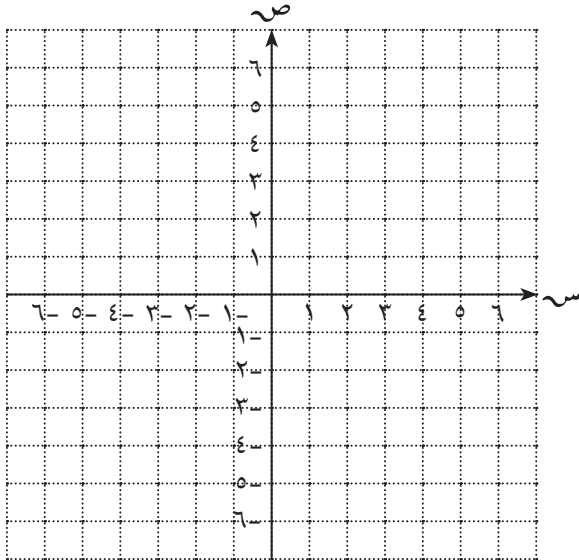
ص = ٣س + ٢

			س
			ص

دورك الآن (٢)



أرسم بيان الدالة الخطية : $ص = ٤$



ص = ٤

			س
			ص

ماذا تلاحظ ؟ بيان الدالة محور السينات .

ملاحظة :



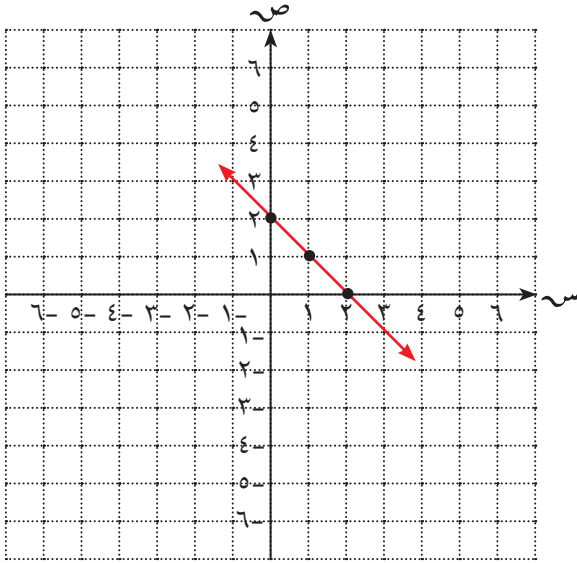
• الدالة الثابتة د (س) = ج ، ج $\neq$ ح يكون بيانها خطاً مستقيماً أفقياً (يوازي محور السينات) .

مثال (٢) :

أرسم بيان الدالة الخطية : $ص = س + ٢$

الحل :

ص = س + ٢			
س	٢	١	٠
ص	٠	١	٢



عبّر عن فهمك (٢)

هل $س = ٤$ تمثل دالة ؟ فسّر إجابتك .

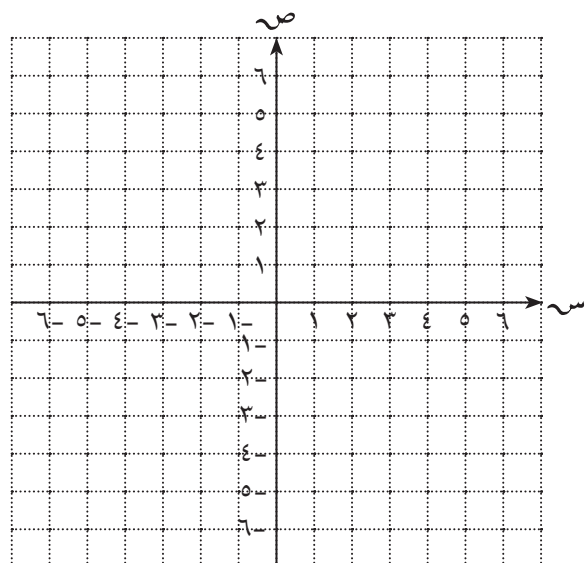
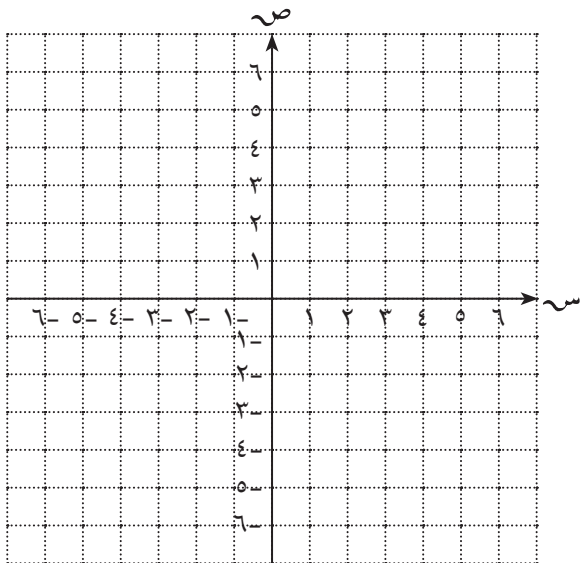
تمارين ذاتية :

١ أرسم بياناً كلاً من الدوال الخطية التالية :

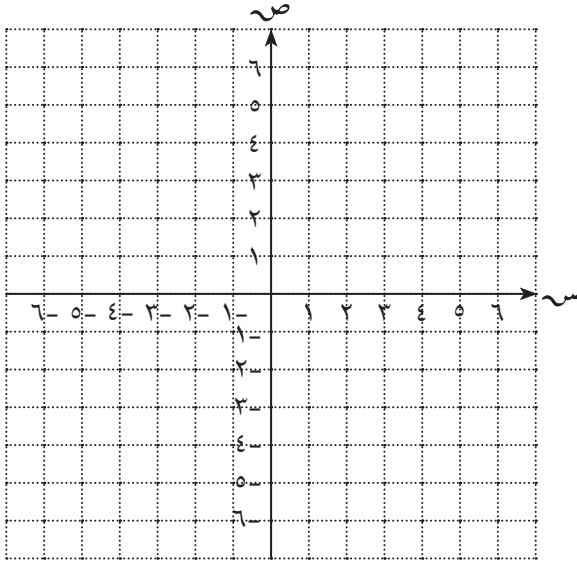
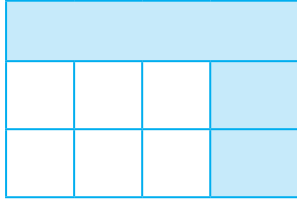
أ $ص = س + ٢$

ص = س + ٢			
س			
ص			

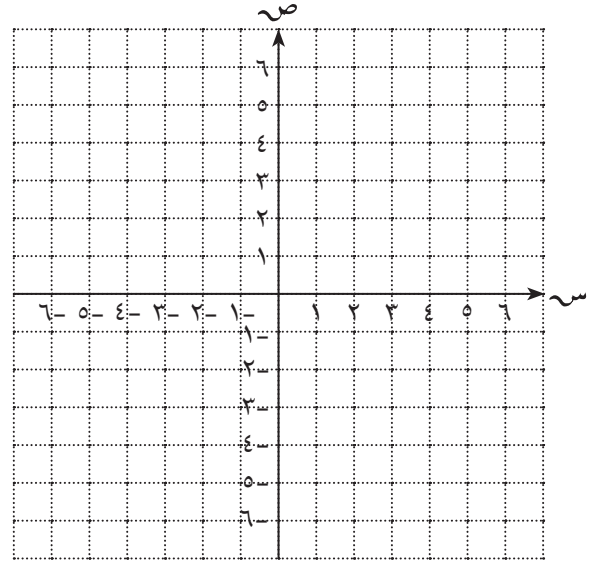
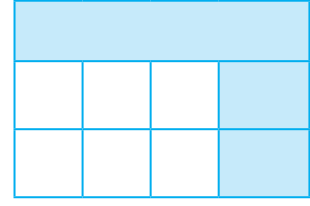
ب $ص = ٢س - ٤$



د $ص = ١ - ٢س$



ج $ص = ٣ + س$



مهارات تفكير عليا :



اختر الإجابة الصحيحة :

٢ إذا كان بيان الدالة الخطية : $ص = ٣س + ب$ يمرّ بالنقطة (٣ ، ٧) ، فإنّ قيمة ب تساوي :

د ١٩

ج ١٩ -

ب ٢

أ ٢ -

٣ إذا كانت النقطة (٢ ، ١) تقع على بيان الدالة الخطية : $ص = ٣س - ١$ ، فإنّ ١ يساوي :

د ٣

ج ٥

ب ٤

أ ١

الدالة التربيعية

٥ - ٥

Quadratic Function

سوف تتعلّم : الدوال التربيعية وتمثيلها بيانياً .

العبارات والمفردات :

Parabola

قطع مكافئ

Quadratic Function

دالة تربيعية



عند رمي كرة السلة يعتمد اللاعبون على تقدير المسافة وتخيل شكل مسار الكرة ، فهم يدركون تماماً أنّ مسار الكرة لن يكون خطاً مستقيماً وإنما منحنى .

إِسْتَكْشِفْ



لتكن الدالة $ص : ح \leftarrow ح^2$ ، $ص (س) = س^2$

١ أكمل الجدول التالي :

س	٣	٢	١	٠,٥	٠	٠,٥-	١-	٢-	٣-
ص									

٢ عيّن النقاط السابقة في المستوى الإحداثي المقابل .

٣ ماذا تلاحظ ؟ هل النقاط تقع على استقامة واحدة ؟

٤ دون استخدام المسطرة ، صل بين النقاط السابقة .

٥ نلاحظ من الرسم أنّ $(٠, ٠)$ هو رأس المنحنى للدالة $ص^2$.

الدالة الحقيقية التي فيها القوة الأعلى للمتغير المستقل تساوي ٢ تُسمّى « دالة تربيعية » .

ويكون الرسم البياني للدالة التربيعية منحنى على شكل $\vee$ أو $\wedge$ ويُسمّى « قطع مكافئ » .

تذكّر



$$١ = ٢(١-)$$

$$١ = ٢(١)$$

$$٤ = ٢(٢-)$$

$$٤ = ٢(٢)$$

الصورة العامة للدالة التربيعية هي :

$$ص = ا س^٢ + ب س + ج \text{ حيث } ا \neq ٠ , ب , ج \text{ أعداد حقيقية}$$

حدّ من الدرجة الأولى
حدّ من الدرجة الثانية
حدّ ثابت

حيث أنّ كلّاً من المجال والمجال المقابل للدالة التربيعية هو مجموعة الأعداد الحقيقية .



١ يمثّل الشكل المجاور بيان الدالة : $ص = س^2$
مثّل في المستوى الإحداثي نفسه بيان كلّ ممّا يلي :

أ الدالة : $ص = س^2 + 3$

س	٢	١	٠	١-	٢-
ص					

ماذا تلاحظ ؟ بيان الدالة $ص = س^2 + 3$ هو إزاحة

لبيان الدالة $ص = س^2$ ثلاث وحدات إلى

رأس المنحنى هو (٣ ، ٠)

ب الدالة : $ص = س^2 - 2$

س	٢	١	٠	١-	٢-
ص					

ماذا تلاحظ ؟ بيان الدالة $ص = س^2 - 2$ هو إزاحة

لبيان الدالة $ص = س^2$ إلى

رأس المنحنى هو (..... ،)

٢ يمثّل الشكل المجاور بيان الدالة : $ص = س^2$
مثّل في المستوى الإحداثي نفسه بيان كلّ ممّا يلي :

أ الدالة : $ص = (س - ١)^2$

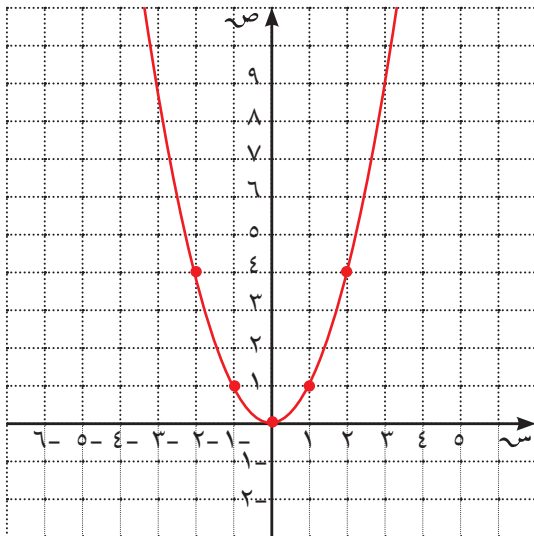
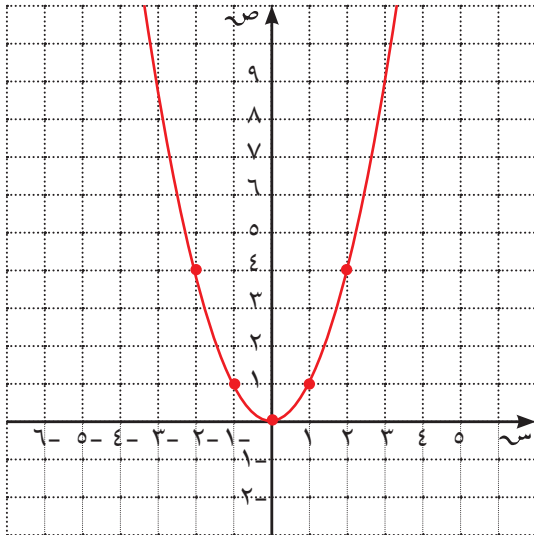
س	٣	٢	١	٠	١-
ص					

ماذا تلاحظ ؟ بيان الدالة $ص = (س - ١)^2$ هو

إزاحة

لبيان الدالة $ص = س^2$ إلى

رأس المنحنى هو (..... ،)



ب) الدالة : $v = (s + 1)^2$

س	١	٠	١-	٢-	٣-
ص					

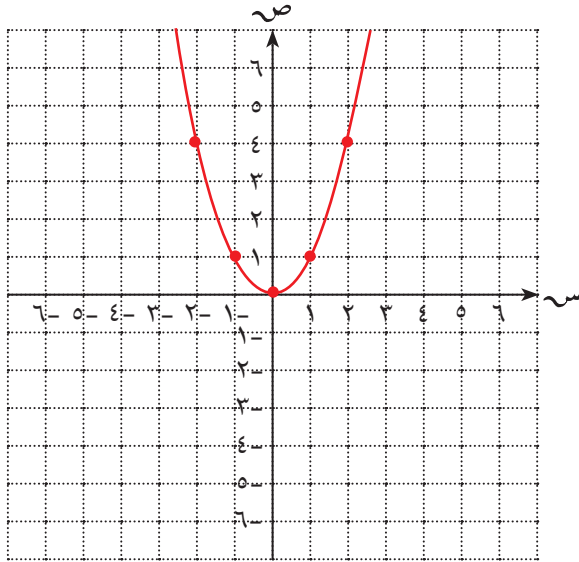
ماذا تلاحظ ؟ بيان الدالة $v = (s + 1)^2$ هو إزاحة

لبیان الدالة $v = s^2$ إلى

رأس المنحنى هو (..... ،)

٣ يمثل الشكل المجاور بيان الدالة : $v = s^2$
مثّل في المستوى الإحداثي نفسه بيان الدالة :
 $v = -s^2$

س	٢	١	٠	١-	٢-
ص					



ماذا تلاحظ ؟ بيان الدالة $v = -s^2$ هو

لبیان الدالة $v = s^2$

في محور

رأس المنحنى هو (..... ،)

ملاحظة :

• الصورة القياسية للدالة التربيعية :

$$v = (s - p)^2 + h \quad ; \quad p \neq 0, h \geq 0$$

• تقتصر دراستنا في حالة $p = 1$ أي على الصورة $v = (s - 1)^2 + h$

• رأس منحنى الدالة $v = (s - 1)^2 + h$ هو النقطة $(1, h)$.

عبّر عن فهمك (١)

يقول نشمي : بيان الدالة $v = (s - 1)^2 + 3$

هو إزاحة أفقية لبيان الدالة $v = s^2$ وحدة واحدة إلى اليمين وإزاحة رأسية ٣ وحدات إلى الأعلى . هل توافقه الرأي ؟

مثال	التمثيل البياني	التحويلات الهندسية المطبقة على التمثيل البياني للدالة التربيعية ص = س ²	الدالة التربيعية
ص = س ² + ١		إزاحة رأسية بمقدار هـ وحدة إلى الأعلى إذا كانت هـ موجبة.	ص = س ² + هـ
ص = س ² - ١		إزاحة رأسية بمقدار هـ وحدة إلى الأسفل إذا كانت هـ سالبة.	
ص = (س - ١) ²		إزاحة أفقية بمقدار د وحدة إلى اليمين إذا كانت د موجبة.	ص = (س - د) ²
ص = (س - (-١)) ² ص = (س + ١) ²		إزاحة أفقية بمقدار د وحدة إلى اليسار إذا كانت د سالبة.	
ص = -س ²		انعكاس في محور السينات.	ص = -س ²

مثال (١) :

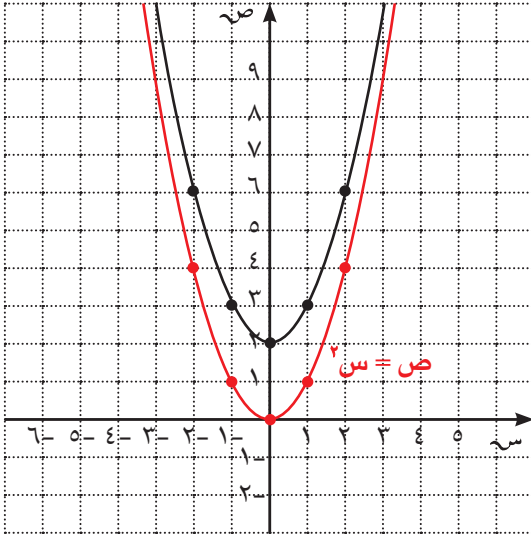
مثّل بيانيًا الدالة $ص = س^2 + ٢$ مستخدمًا التمثيل البياني
للدالة التربيعية $ص = س^2$

الحل :

نرسم بيان الدالة : $ص = س^2$

بيان الدالة $ص = س^2 + ٢$

هو إزاحة رأسية لبيان الدالة : $ص = س^2$
وحدتان إلى الأعلى وتُمثّل كما في الشكل المقابل .



دورك الآن (١)



مثّل بيانيًا الدالة $ص = (س - ٣)^2$ مستخدمًا
التمثيل البياني للدالة التربيعية $ص = س^2$.

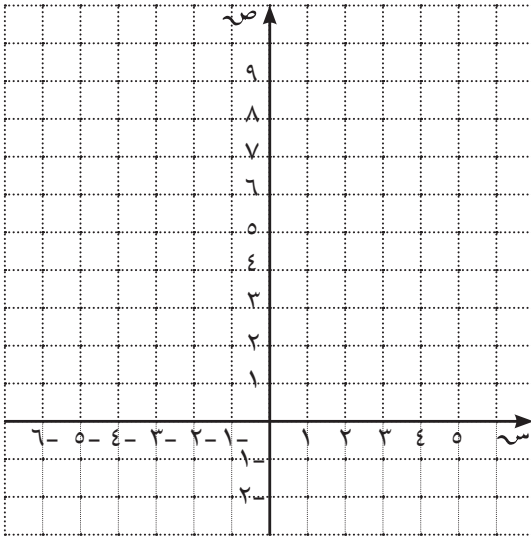
أ) أرسم بيان الدالة : $ص = س^2$

ب) بيان الدالة $ص = (س - ٣)^2$

هو إزاحة لبيان الدالة : $ص = س^2$

.....

ج) أرسم بيان الدالة : $ص = (س - ٣)^2$



مثال (٢) :

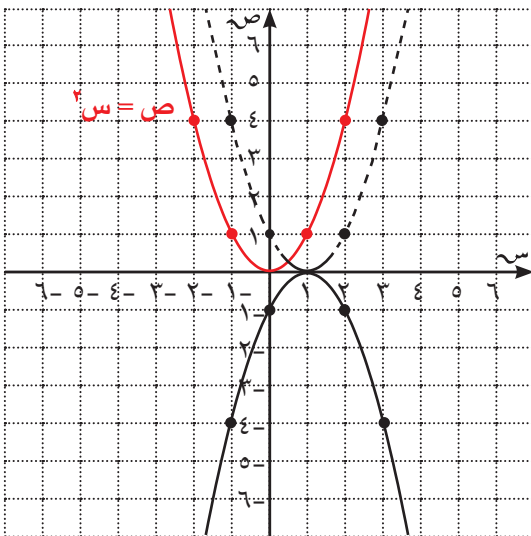
مثّل بيانيًا الدالة $ص = -(س - ١)^2$ مستخدمًا
التمثيل البياني للدالة التربيعية $ص = س^2$.

الحل :

نرسم بيان الدالة : $ص = س^2$

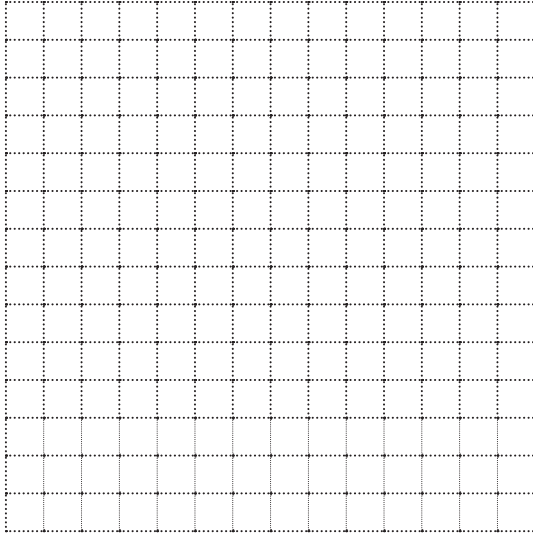
بيان الدالة $ص = -(س - ١)^2$

هو إزاحة أفقية لبيان الدالة : $ص = س^2$
وحدة واحدة إلى اليمين ، ثم الانعكاس في محور السينات .





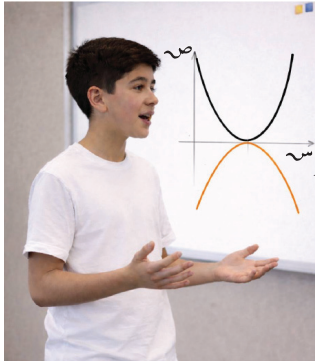
مثّل بيانيًا الدالة $v = -(s + 2)^2$ مستخدمًا التمثيل البياني للدالة التربيعية $v = s^2$.



عبّر عن فهمك (٢)



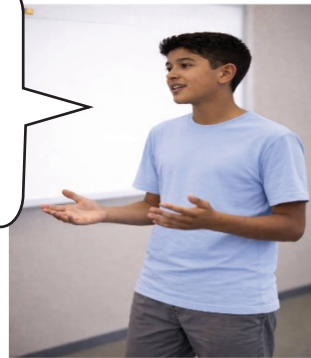
وصف كلّ من محمّد وبادي بيان الدالة $v = -(s - 3)^2$ أيّهما على صواب ؟ ولماذا ؟



بيان الدالة $v = -(s - 3)^2$ هو انعكاس في محور السينات لبيان الدالة $v = s^2$ ، ثمّ إزاحة أفقية ٣ وحدات إلى اليمين .

يقول محمّد :

بيان الدالة $v = -(s - 3)^2$ هو إزاحة أفقية لبيان الدالة $v = s^2$ ، ٣ وحدات إلى اليمين ثمّ انعكاس في محور السينات .



يقول بادي :

مثال (٣) :

مثل بيانياً الدالة $ص = (س - ٢) + ٣$ مستخدماً التمثيل البياني للدالة التربيعية $ص = س^٢$

الحل :

نرسم بيان الدالة : $ص = س^٢$

بيان الدالة $ص = (س - ٢) + ٣$

هو إزاحة أفقية لبيان الدالة : $ص = س^٢$

وحدتان إلى اليمين ، ثم إزاحة رأسية ٣ وحدات إلى الأعلى .

من « مثال (٣) » ، نلاحظ أن :

• المستقيم الذي معادلته $س = ٢$ هو خط التماثل للدالة التربيعية :

$$ص = (س - ٢) + ٣$$

• خط التماثل هو مستقيم رأسي يوازي محور الصادات .

• خط التماثل يمر بنقطة رأس المنحنى (٢ ، ٣) .

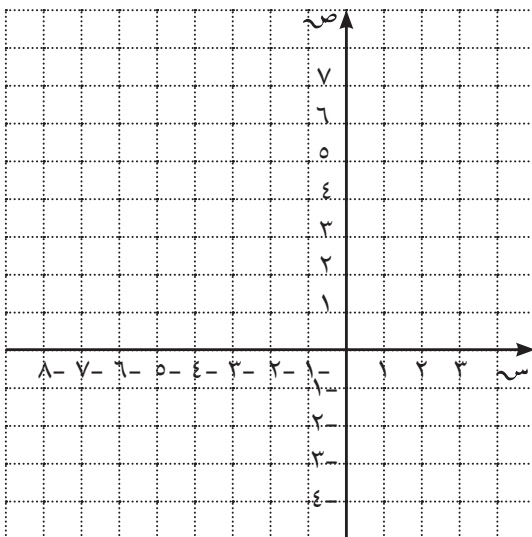
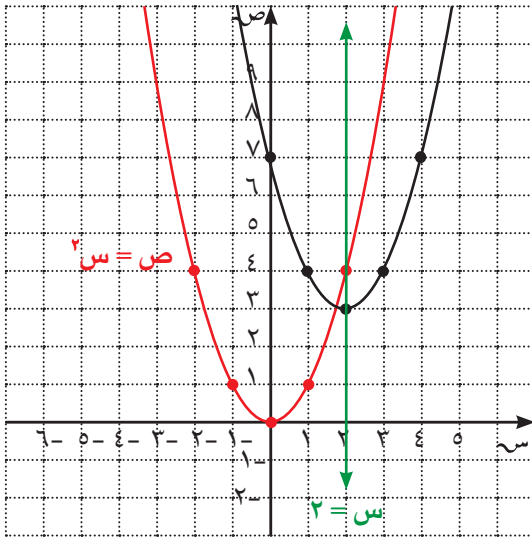
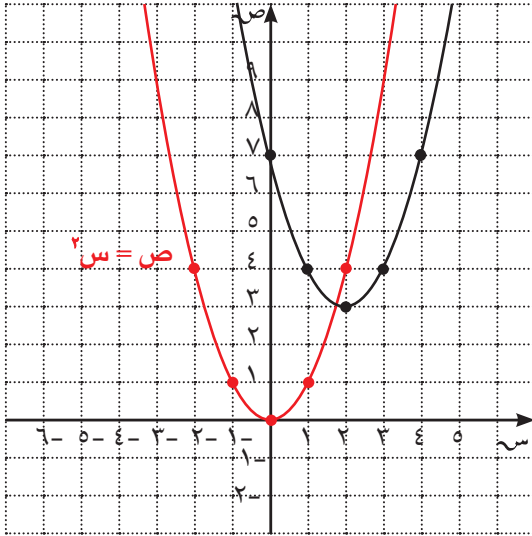
• خط تماثل الدالة $ص = س^٢$ هو محور الصادات .

ملاحظة :

• خط تماثل بيان الدالة $ص = (س - د) + ٢$ هو المستقيم الذي معادلته $س = د$

دورك الآن (٣)

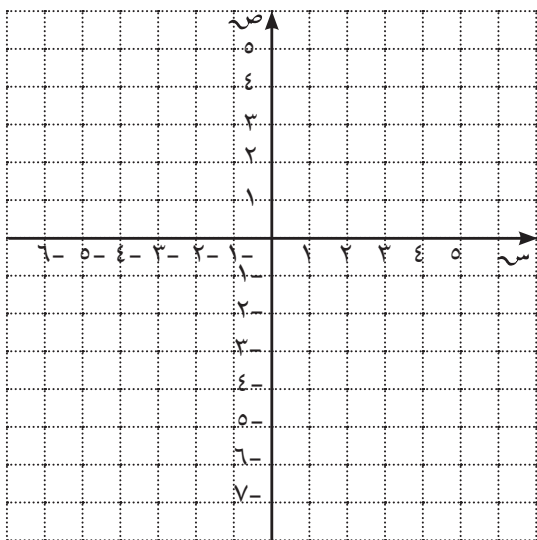
مثل بيانياً الدالة $ص = (س + ٣) - ٢$ مستخدماً التمثيل البياني للدالة التربيعية $ص = س^٢$.





مستخدمًا التمثيل البياني للدالة التربيعية $ص = س^2$ ، مثل بيانيًا كلاً من الدوال التالية :

١ $ص = س^2 - ٤$



.....

.....

.....

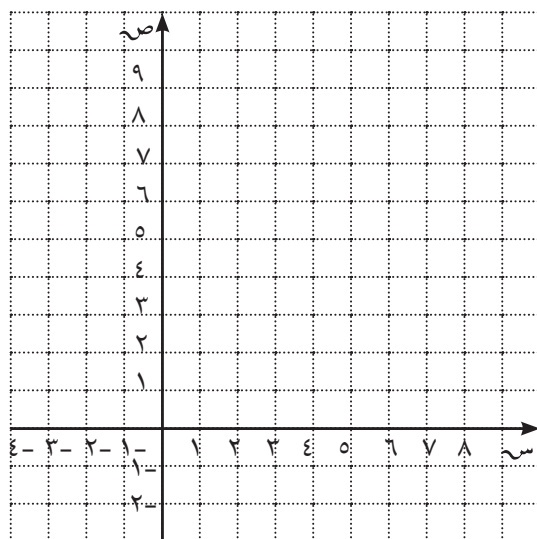
.....

.....

.....

.....

٢ $ص = (س - ٥)^2$



.....

.....

.....

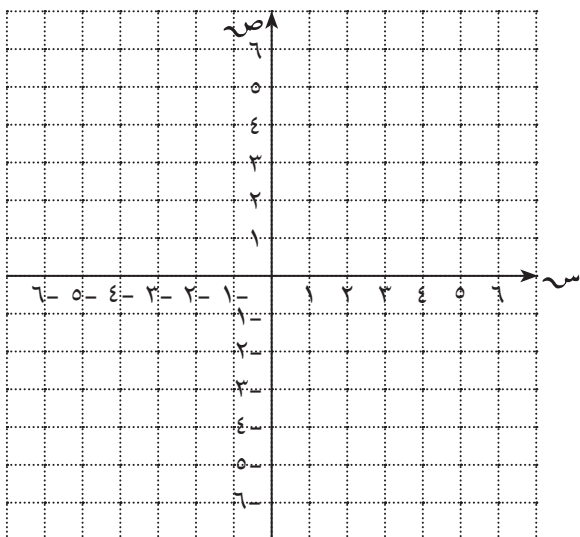
.....

.....

.....

.....

٣ $ص = -س^2 + ٢$



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

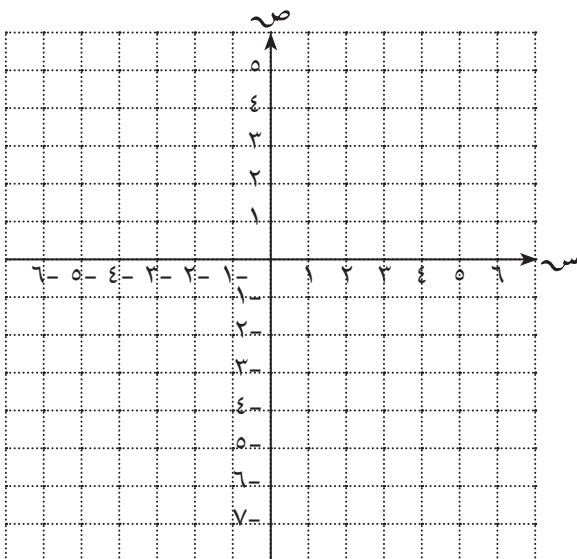
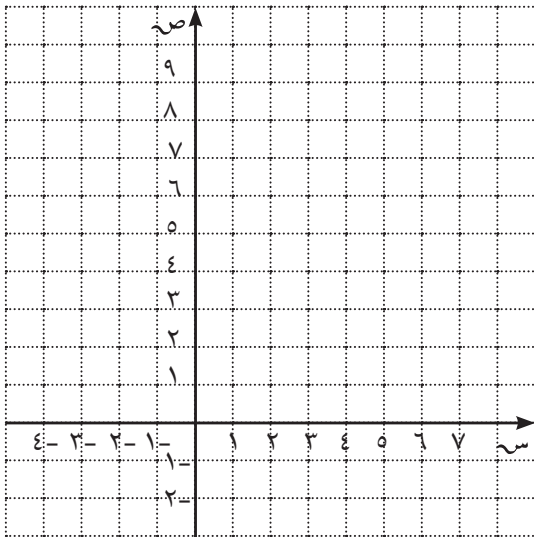
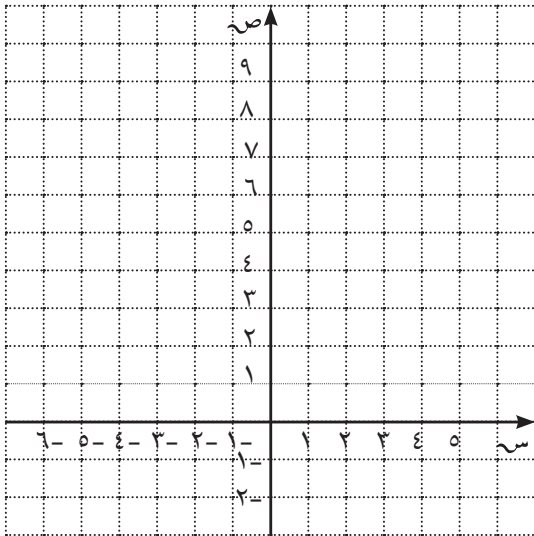
٤ ص = $2 + 2(1 + س)$

٥ ص = $1 + 2(2 - س)$

مهارات تفكير عليا :



٦ ص = $2 - 2(1 + س)$



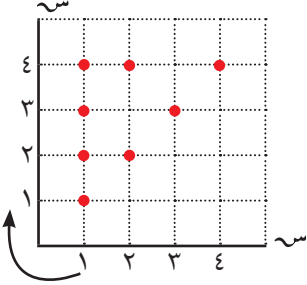
تقويم الوحدة التعليمية الخامسة

Unit Five Assessment

أولاً : البنود المقالية

١ يوضّح المخطّط البياني المقابل العلاقة ع المعرفة على المجموعة $S = \{1, 2, 3, 4\}$

أ اكتب العلاقة ع بذكر العناصر .



ب اختبر العلاقة ع من حيث كونها انعكاسية ، متناظرة ، متعدّية ، تكافؤ .

٢ إذا كانت ع علاقة معرفة على $S = \{3, 5, 7, 9\}$ ،

$E = \{(9, 3), (9, 9), (9, 5), (7, 7), (5, 3), (5, 5), (3, 3)\}$

فاختبر العلاقة ع من حيث كونها انعكاسية ، متناظرة ، متعدّية ، تكافؤ .

٣ إذا كانت $s = \{3, 2, 1\}$ ، $v = \{6, 3, 0\}$

وكانت t تطبيق من s إلى v حيث $t(s) = 3 - s$

أ أكمل الجدول المقابل :

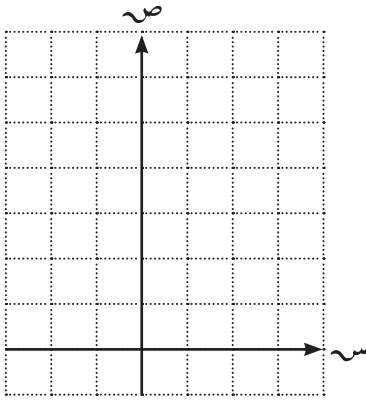
س	١	٢	٣
٣ - س			
ت (س)			

ب مدى $t = \dots\dots\dots$

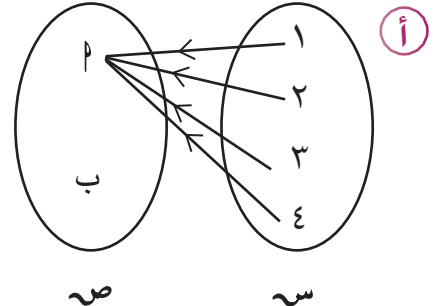
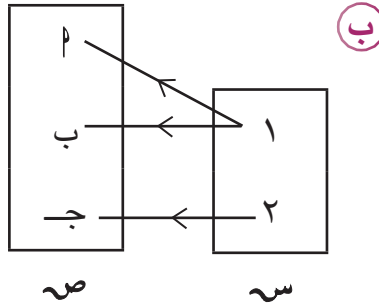
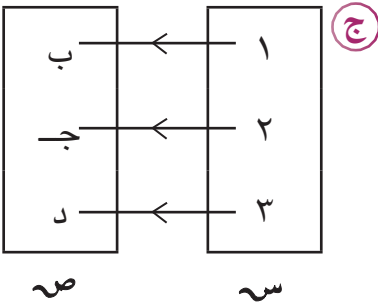
ج أكتب t كمجموعة من الأزواج المرتبة :

ت = $\dots\dots\dots$

د أرسم مخططاً سهمياً ، وآخر بيانياً في المستوى الإحداثي .



٤ أي من المخططات السهمية التالية يمثل تطبيقاً ؟ ولماذا ؟



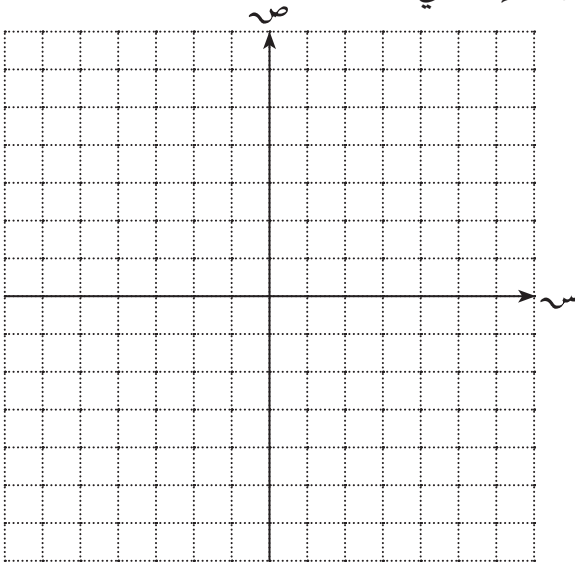
٥ إذا كان التطبيق $d: s \leftarrow v$ ، حيث $s = \{2, 1, 0\}$ ، $v = \{4, 0, -4\}$ ،

د (س) = $4 - s$

أ أوجد مدى التطبيق d .

ب أكتب d كمجموعة من الأزواج المرتبة .

ج) مثل التطبيق د بمخطط سهمي وآخر بياني في المستوى الإحداثي .



د) بيّن نوع التطبيق د من حيث كونه شاملاً ، متبايناً ، تقابلاً ، مع ذكر السبب .

٦) إذا كان التطبيق ψ : $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ ، حيث $\mathcal{S} = \{1, 0, -1\}$ ، $\mathcal{S} = \{2, 1\}$ ،

ψ (س) = $2 - \mathcal{S}$ ، فبيّن نوع التطبيق ψ من حيث كونه شامل ، متباين ، تقابل مع ذكر السبب .

٧ إذا كانت $s = \{1, 9\}$ ، $v = \{2, 3, 4\}$ ، والتطبيق $s \leftarrow v$ ، حيث

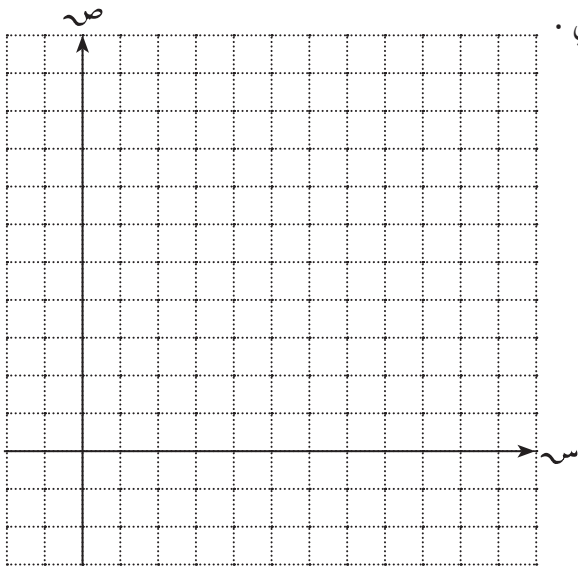
$$t(s) = \sqrt{s+1}$$

أ) أوجد مدى التطبيق t .

ب) أكتب التطبيق t كمجموعة من الأزواج المرتبة .

ج) مثل التطبيق t بمخطط سهمي .

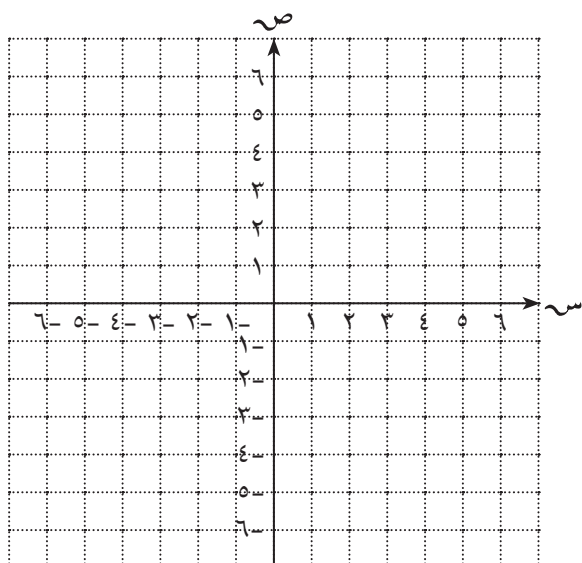
د) مثل التطبيق t بمخطط بياني في المستوى الإحداثي .



هـ) بين نوع التطبيق t من حيث كونه شاملاً ، متبايناً ، تقابلاً ، مع ذكر السبب .

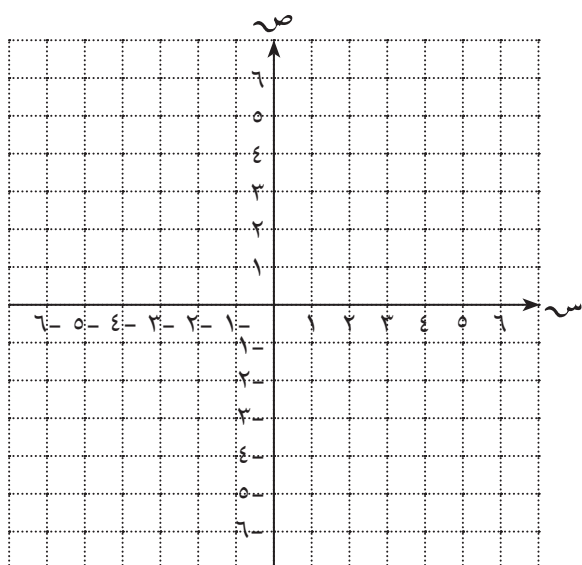
٨ أرسم بيان الدالة الخطية : $ص = ٢س - ٢$

س			
ص			

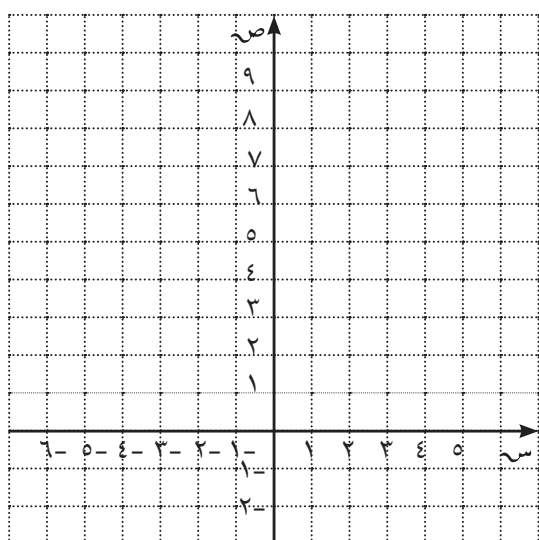


٩ أرسم بيان الدالة الخطية : $ص = س$

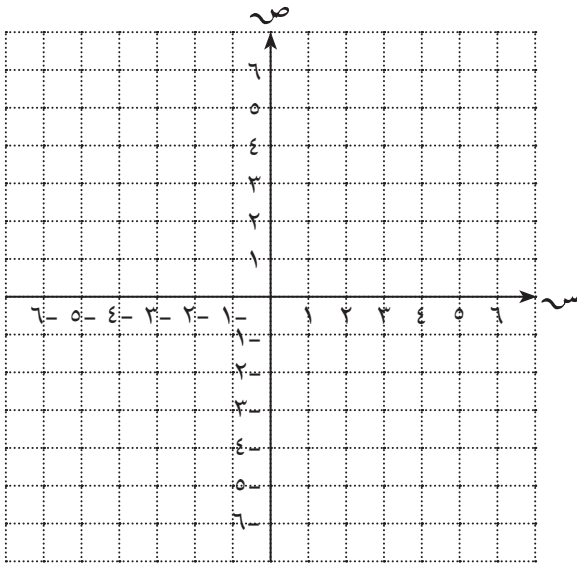
س			
ص			



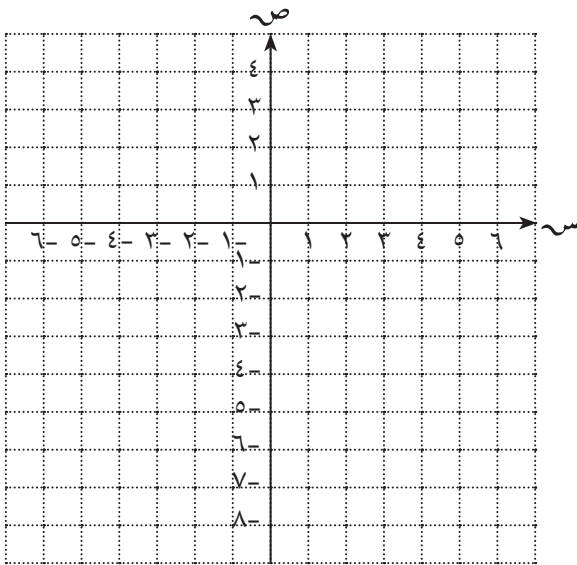
١٠ مثل بيانيًا : $ص = س + ١$ مستخدمًا التمثيل البياني للدالة التربيعية $ص = س^٢$



١١ مَثْلٌ بَيَانِيًّا : $ص = س - ٢$ - مستخدمًا
التمثيل البياني للدالة التربيعية $ص = س^٢$



١٢ مَثْلٌ بَيَانِيًّا : $ص = (س - ١) - ٣$ - مستخدمًا
التمثيل البياني للدالة التربيعية $ص = س^٢$



ثانيًا: البنود الموضوعية

في البنود (١ - ٨) ، ظلّل ☐ أ إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلل ☐ ب إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ إذا كانت ع علاقة تكافؤ على $س = \{ ٦ , ٥ , ٣ \}$ ، $ع = \{ (٦ , ٦) , (٦ , ٥) , (٥ , ٥) , (س , ص) , (٣ , ٣) \}$ فإن $(س , ص) = (٥ , ٦)$	☐ أ ☐ ب	
٢ علاقة أكبر من أو يساوي على مجموعة أعداد هي علاقة متناظرة .	☐ أ ☐ ب	
٣ علاقة التطابق على مجموعة مثلثات هي علاقة تكافؤ .	☐ أ ☐ ب	

٤	لتكن $\mathcal{C}: \{2, 4, 6\} \leftarrow \{3, 4, 5, 6, 7\}$ فإنَّ العلاقة $\mathcal{C}$ الممثلة في المستوى الإحداثي المقابل تمثل تطبيقًا .		أ	ب
٥	لتكن $\mathcal{S} = \{1, 0, 1-\}$ ، $\mathcal{V} = \{2, 1, 0, 1-\}$ التطبيق $\mathcal{T}: \mathcal{S} \leftarrow \mathcal{V}$ ، حيث $\mathcal{T}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}^2$ ، فإنَّ $\mathcal{T}$ تطبيق شامل وليس متباينًا .		أ	ب
٦	إذا كانت النقطة $(2, 3)$ هي رأس منحنى الدالة التربيعية ، فإنَّ معادلة خط التماثل للدالة هي $\mathcal{S} = 3$.		أ	ب
٧	لتكن $\mathcal{S} = \{5, 6, 7\}$ ، إذا كان التطبيق $\mathcal{T}: \mathcal{S} \leftarrow \mathcal{V}$ ، ($\mathcal{V}$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة) ، حيث $\mathcal{T}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ ، فإنَّ $\mathcal{T}$ تطبيق ليس تقابلاً .		أ	ب
٨	النقطة $(1, 1)$ تنتمي إلى بيان الدالة $\mathcal{V} = 2\mathcal{S} + 3$		أ	ب

في البنود (٩ - ٢٣) ، لكل بند أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلل الإجابة الصحيحة .

٩ إذا كانت $\mathcal{C}$ علاقة معرفّة على $\mathcal{S} = \{3, 4, 5\}$ ، $\mathcal{C} = \{(4, 4)\}$ ، فإنَّ $\mathcal{C}$ تكون :

- أ انعكاسية ب متناظرة وليست متعدّية
ج متناظرة ومتعدّية د علاقة تكافؤ

١٠ إذا كانت $\mathcal{C}$ علاقة معرفّة على $\mathcal{S} = \{1, 2\}$ ، $\mathcal{C} = \{(1, 2), (2, 1)\}$ ، فإنَّ :

- أ $\mathcal{C}$ علاقة متناظرة فقط ب $\mathcal{C}$ علاقة متناظرة ومتعدّية
ج $\mathcal{C}$ علاقة انعكاسية فقط د $\mathcal{C}$ علاقة تكافؤ

١١ علاقة التوازي على مجموعة مستقيمات هي :

- أ علاقة انعكاسية فقط ب علاقة متناظرة فقط
ج علاقة انعكاسية ومتعدّية د علاقة تكافؤ

١٢ لتكن $s = \{1, 4, 25\}$ ، إذا كان التطبيق $t: s \rightarrow s$ ،
(s هي مجموعة الأعداد الصحيحة) ، حيث $t(s) = \sqrt{s}$ ، فإن t تطبيق :

أ شامل ومتباين ☐ ب ليس شاملاً وليس متبايناً ☐

ج شامل وليس متبايناً ☐ د متباين وليس شاملاً ☐

١٣ لتكن $s = \{1, 0, -1\}$ ، التطبيق $u: s \rightarrow s$ ، حيث $u(s) = s^2 - 1$ ، فإن u تطبيق :

أ متباين وليس شاملاً ☐ ب شامل ومتباين ☐

ج ليس شاملاً وليس متبايناً ☐ د شامل وليس متبايناً ☐

١٤ إذا كانت $s = \{1, 2\}$ ، $t: s \rightarrow s$ ، فإن التطبيق التقابل فيما يلي هو :

أ $\{(1, 1), (1, 2)\}$ ☐ ب $\{(1, 1), (2, 2)\}$ ☐

ج $\{(2, 1), (2, 2)\}$ ☐ د ليس أيٍّ مما سبق صحيحاً . ☐

١٥ إذا كان التطبيق $v: s \rightarrow s$ ، حيث s هي مجموعة الأعداد الصحيحة) ،
 $u(s) = 3$ ، فإن u تطبيق :

أ شامل ومتباين ☐ ب ليس شاملاً وليس متبايناً ☐

ج شامل وليس متبايناً ☐ د متباين وليس شاملاً ☐

١٦ إذا كان التطبيق $v: p \rightarrow p$ ، حيث p هي مجموعة الأعداد الكلية) ،
 $t(s) = 2s$ ، فإن t تطبيق :

أ ليس شاملاً وليس متبايناً ☐ ب متباين وليس شاملاً ☐

ج شامل وليس متبايناً ☐ د تقابل ☐

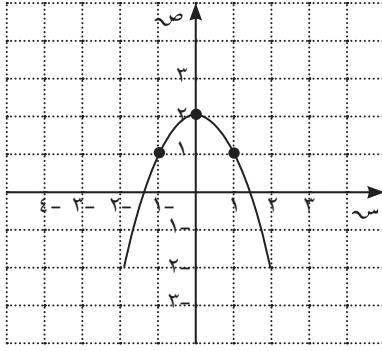
١٧ ليكن التطبيق $t: c \rightarrow c$ ، حيث $t(s) = 2 + 5s$. إذا كان $t(p) = 2$ ، فإن p تساوي :

أ ٥ ☐ ب صفر ☐ ج ٧ ☐ د ٣ ☐

١٨ إذا كانت النقطة $(-2, 1)$ تنتمي إلى بيان الدالة : $v = 3 + s$ ، فإن p تساوي :

أ ١ ☐ ب -١ ☐ ج ٢ ☐ د -٢ ☐

١٩ يمثل الشكل المقابل بيان الدالة :



أ $ص = س^2 + 2$

ب $ص = -س^2 + 2$

ج $ص = -(س^2 + 2)$

د $ص = س^2 - 2$

٢٠ بيان الدالة $ص = (س - 2)^2 - 4$ ، يمثل بيان الدالة $ص = س^2$ تحت تأثير :

أ إزاحة أفقية بمقدار 2 وحدة إلى اليسار ، وإزاحة رأسية بمقدار 4 وحدات إلى الأسفل .

ب إزاحة أفقية بمقدار 2 وحدة إلى اليمين ، وإزاحة رأسية بمقدار 4 وحدات إلى الأسفل .

ج إزاحة أفقية بمقدار 4 وحدات إلى اليسار ، وإزاحة رأسية بمقدار 2 وحدة إلى الأعلى .

د إزاحة أفقية بمقدار 2 وحدة إلى اليمين ، وإزاحة رأسية بمقدار 4 وحدات إلى الأعلى .

٢١ معادلة خط التماثل لمنحنى الدالة د : $(س) = س^2$ هي

أ $س = 1$ ب $س = 0$ ج $ص = 1$ د $ص = 0$

٢٢ معادلة خط التماثل لمنحنى الدالة د : $(س) = (س - 2)^2$ هي

أ $س = 0$ ب $س = 2$ ج $س = -2$ د $س = -4$

٢٣ نقطة رأس منحنى الدالة : $ص = -(س - 3)^2 + 4$ هي

أ $(4, 3-)$ ب $(3, 4-)$ ج $(3, 4)$ د $(3-, 4-)$

في البنود (٢٤ - ٢٥) ، اختر من القائمة (٢) ما يناسب كل بند من القائمة (١) لتحصل على عبارة صحيحة .

القائمة (١)	القائمة (٢)
٢٤ إذا كان التطبيق $ص \leftarrow ص$ (مجموعة الأعداد الصحيحة) ، ت $(س) = س^2$ ، فإن ت	أ شامل وليس متبايناً . ب متباين وليس شاملاً . ج ليس شاملاً وليس متبايناً . د تطبيق تقابل .
٢٥ إذا كان التطبيق $ص : \{ 2-, 0, 2 \} \leftarrow \{ 1, 0, 1- \}$ حيث $ص (س) = \frac{1}{س}$ ، فإن ص	

الوحدة التعليمية السادسة



المعادلات الخطية والمتباينات الخطية

المنحدرات « هندسة مدن الكويت ... رياضيات علم أرض الواقع ! »

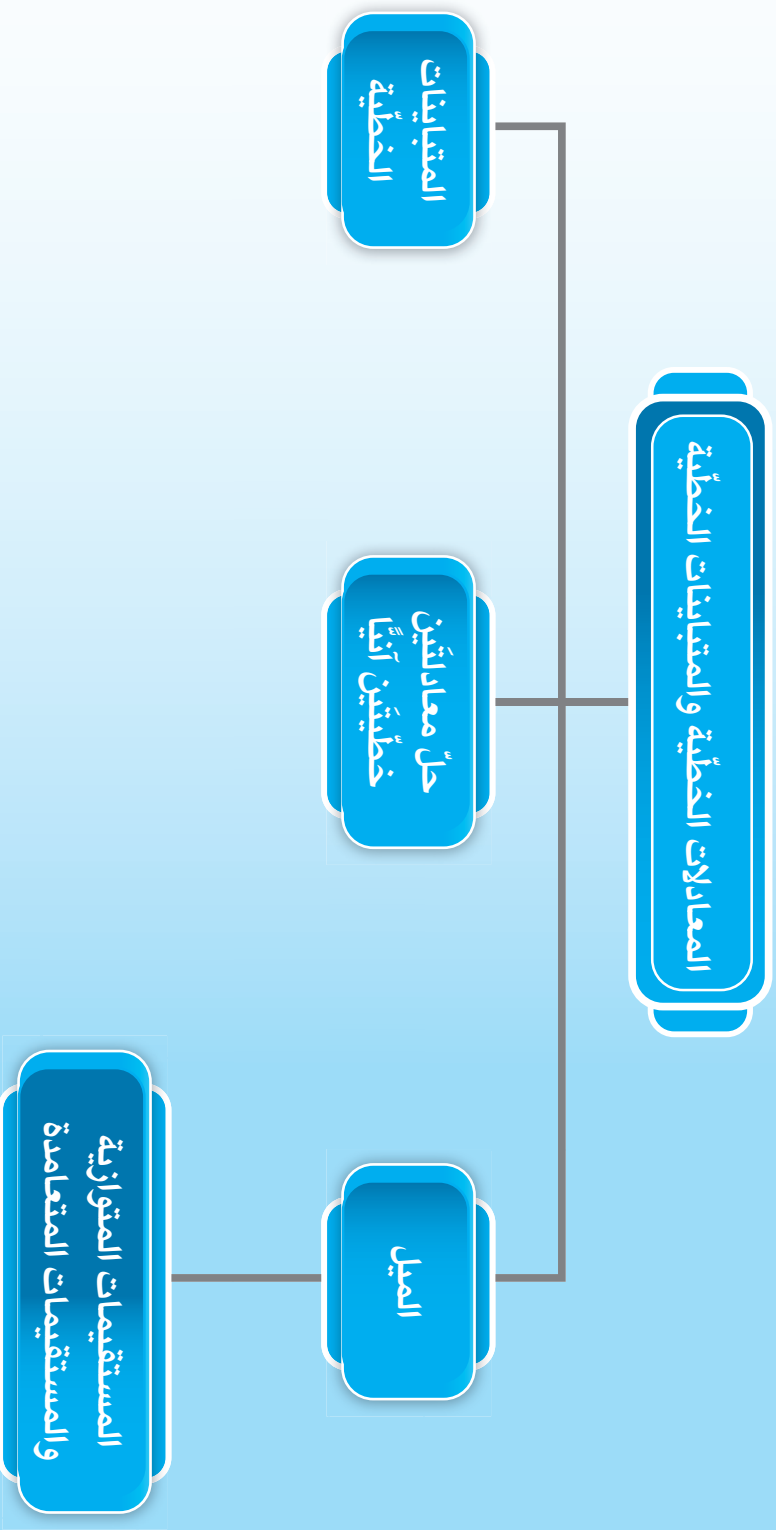
عند تخطيط المدن الجديدة في الكويت مثل مدينة المطلاع ومدينة صباح الأحمد ، يراعي المهندسون أن تكون الطرق ليست مستوية تمامًا ، بل فيها ميل بسيط يسمح بانسياب مياه الأمطار نحو المصارف بدلاً من تجمعها في الشوارع .

كما تُصمَّم الطرق الصاعدة والنازلة عند الجسور أو الأنفاق بدرجات ميل محدَّدة حتَّى تكون القيادة فيها مريحة وآمنة .
وترسم الشوارع بشكل منظم ومتواز ، بحيث تلتقي بطرق أخرى بزوايا متعامدة لتسهيل حركة السير وتنظيم المرور .



المجال	معايير المنهج	مؤشر الأداء
العدّ والجبر	إستخدام إستراتيجيات متنوعة لوصف وتحليل العلاقات والتغيّرات .	التذكّر - التعرّف - الفهم - التمثيل - التعاون - العمل الجماعي - الاستكشاف والتقصّي - الوسائط - المقارنة والتمييز - التعليل - الاستدلال - الاستنتاج - القوانين - حلّ المشكلات - العلاقات - التحليل والتركيب
	إستخدام المعادلات والنماذج الرياضية لحلّ المسائل .	
	تمثيل وتحليل المواقف والبنى الرياضية باستخدام الرموز الجبرية .	

مخطط تنظيمي للوحدة التعليمية السادسة



هل أنت مستعدّ؟

١ أوجد ناتج ما يلي :

..... = ٣ - ٢ - (ب)	 = ٤ + ١٢ - (أ)
..... = (٧ -) - ٠ (د)	 = ٨ - ٧ (ج)
..... = (٨ -) + ٠ (و)	 = (٥ -) - ٤ - (هـ)

٢ ضع كلاً من المعادلات التالية في صورة $ص = اس + ب$ ، ثم حدّد $ا$ ، ب في كلّ منها :

..... = ٤ - (ب) $ص - س =$	 = ٥ (أ) $ص + س =$
..... = ٢ (د) $٤ ص - ٣ س = ٩$	 = ٠ (ج) $٢ س - ٤ ص - ٧ = ٠$
..... = ٠ (و) $ص + ٣ س - = ٠$	 = ٠ (هـ) $ص + ٢ س = ٠$

٣ أوجد قيمة ص في الحالات التالية :

..... = ٣ - (ب) $ص = س - ٣$ عندما $س = ٠$	 = ٥ - (أ) $ص = ٣ - س$ عندما $س = ١$
..... = ٦ (د) $س - ٤ ص = ٦$ عندما $س = ٢$	 = ٤ (ج) $٤ س - ص = ٤$ عندما $س = ٠$

٤ أجب بنعم أم لا في كلّ ممّا يلي :

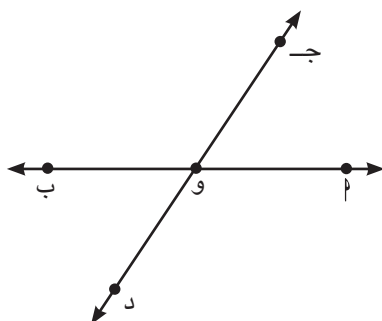
أ هل النقطة (٢ ، ٠) هي حلّ للمعادلة : ص = ٣ س + ٢ ؟

ب هل النقطة (٤ ، ٢) هي حلّ للمعادلة : ص = ٢ س + ١ ؟

ج هل النقطة (١ - ، ١) هي حلّ للمعادلة : ص - ٣ س = ١ ؟

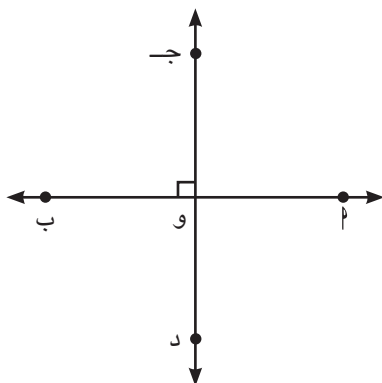
٥ أكمل ما يلي :

أ



$$\overleftrightarrow{مب} \cap \overleftrightarrow{دج} = \dots$$

ج



$$\overleftrightarrow{مب} \cap \overleftrightarrow{دج} = \dots$$

$$\cup (\overleftrightarrow{مب} \wedge \overleftrightarrow{دج}) = \dots$$

٦ حلّ كلّاً من المتباينات التالية في ح ، ومثّل مجموعة الحلّ على خطّ الأعداد .

أ س + ٢ < ٧

ب س - ٣ ≥ ٠

.....
.....



سوف تتعلّم : كيفية إيجاد ميل خطّ مستقيم .

العبارات والمفردات :

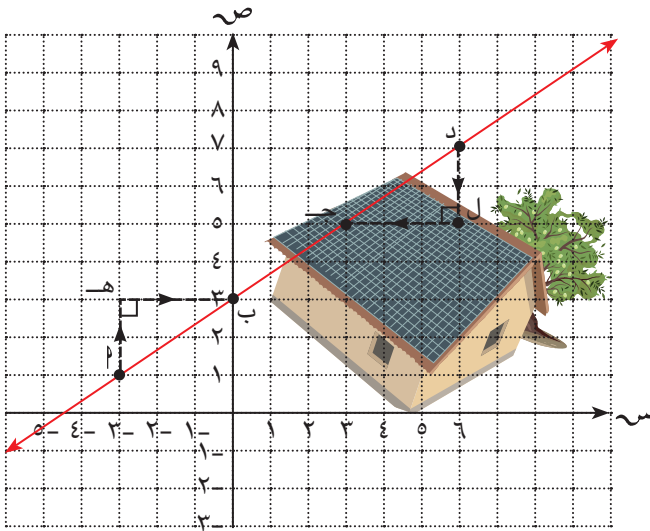
Positive Slope
Negative Slope

ميل موجب
ميل سالب

Slope
Horizontal Change
Vertical Change

الميل
التغيّر الأفقي
التغيّر الرأسّي

استكشاف (١)



أراد أحمد وهو مهندس كهربائي تصميم سقف
لبيت في مزرعته يتميز بدرجة انحدار مناسبة لتركيب
ألواح شمسية تهدف إلى توفير الطاقة الكهربائية
المستهلكة داخل مزرعته .
هيا نساعد أحمد في حساب الانحدار المناسب للسقف .

١ أكمل ما يلي :

١ لحساب الانحدار المناسب للمستقيم المارّ
بالنقطتين د ، ج ، يمكن التحرك من النقطة د
إلى النقطة ل رأسياً إلى الأسفل ، ثم من النقطة
ل إلى النقطة ج أفقياً إلى اليسار .

التغيّر الرأسّي من د إلى ل = ٥ - ٧ = ٢ (وحدتان إلى الأسفل)

التغيّر الأفقي من ل إلى ج = ٣ - ٠ = ٣ (٣ وحدات إلى اليسار)

$$\therefore \frac{\text{التغيّر الرأسّي}}{\text{التغيّر الأفقي}} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$



معلومة مفيدة :

تتكوّن الألواح الشمسية من
مجموعة من الخلايا الشمسية
التي تحوّل ضوء الشمس إلى كهرباء .
تكون زاوية الميل المثالية للألواح الشمسية
في الكويت من ٢٥° إلى ٣٥° تقريباً نحو
الجنوب وتتغيّر من فصل إلى آخر .

ب) وبالمثل يمكن حساب الانحدار المناسب بأخذ أي نقطتين مثل ١ ، ب لحساب الانحدار المناسب للمستقيم المارّ بالنقطتين ١ ، ب يمكن التحرك من النقطة ١ إلى النقطة هـ رأسياً إلى الأعلى ، ثم من النقطة هـ إلى النقطة ب أفقياً إلى اليمين .
التغير الرأسى من ١ إلى هـ = ٣ - ١ = ٢ (وحدتان إلى الأعلى)
التغير الأفقى من هـ إلى ب = ٠ - (.....) = (٣ وحدات إلى اليمين)

$$\therefore \frac{\text{التغير الرأسى}}{\text{التغير الأفقى}} = \frac{\text{.....}}{\text{.....}}$$

• ماذا تلاحظ ؟

نسَمّي $\frac{\text{التغير الرأسى}}{\text{التغير الأفقى}}$ بميل ١ ب ، وبالتالي يحدّد درجة الانحدار المطلوبة للسقف .

$$\therefore \text{الميل} = \frac{\text{التغير الرأسى}}{\text{التغير الأفقى}}$$

لاحظ أنّ : التغير الرأسى هو التغير في الإحداثى الصادى ص - ص_١
التغير الأفقى هو التغير في الإحداثى السينى س - س_١

٢ أكمل ما يلي :

أ) د (٧، ٦) ، ج (٥، ٣) التغير في الإحداثى الصادى = - التغير في الإحداثى السينى = - = =	ب) ١ (-٣، ١) ، ب (٣، ٠) التغير في الإحداثى الصادى = - التغير في الإحداثى السينى = - = =
--	---

• قارن بين الناتجين في أ ، ب (ماذا تلاحظ ؟)

نلاحظ أنّ : ميل المستقيم ثابت لأي نقطتين عليه .

انتبه



إذا كان ١ $\in$ ح - { ٠ } ، فإنّ

$$٠ = \frac{٠}{١}$$

$$\frac{١}{٠} = \text{كمية غير معرّفة}$$

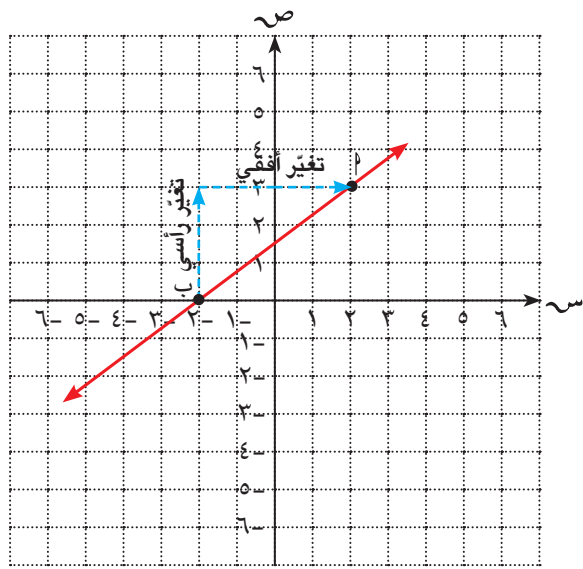
إذا كانت ١ (س_١ ، ص_١) ، ب (س_٢ ، ص_٢) نقطتين مختلفتين في المستوى الإحداثى ، فإنّ :

$$\text{ميل } ١ ب = \frac{\text{التغير الرأسى}}{\text{التغير الأفقى}} = \frac{\text{التغير في الإحداثى الصادى}}{\text{التغير في الإحداثى السينى}}$$

$$= \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} \quad \text{حيث } \text{س}_٢ \neq \text{س}_١$$

لاحظ أن:

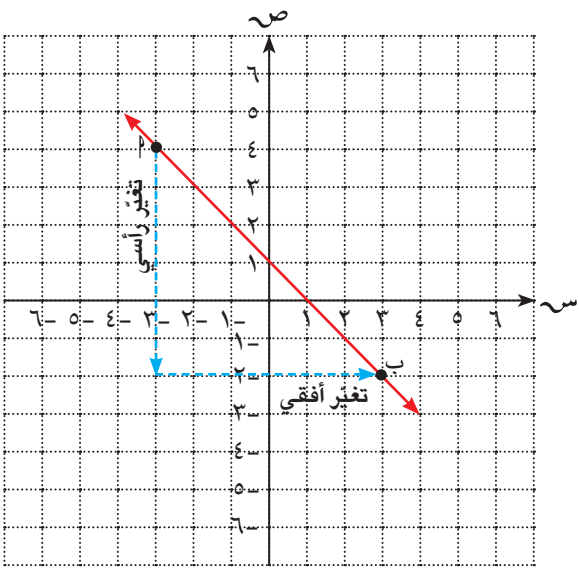
أ



ميل $AB = 1$ نلاحظ (ص تزداد بزيادة س)

∴ ميل المستقيم **موجب**

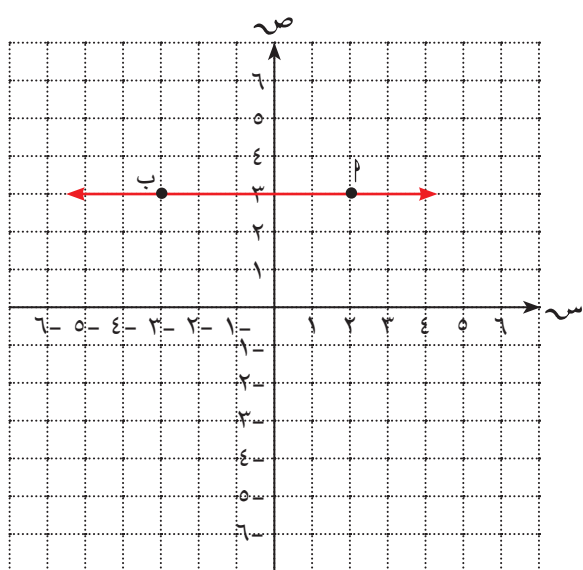
ب



ميل $AB = -2$ نلاحظ (ص تقل بزيادة س)

∴ ميل المستقيم **سالب**

ج

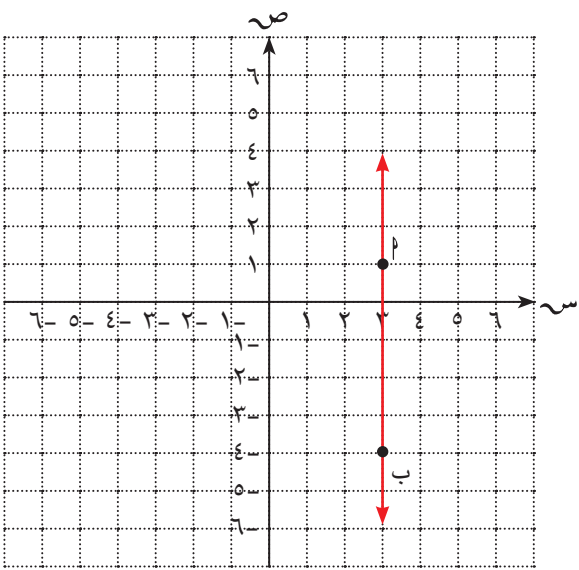


ميل $AB = 0$ نلاحظ (المستقيم أفقي فيه ص ثابتة)

المستقيم $AB \parallel$ محور ∴ ميل المستقيم الأفقي يساوي **صفرًا** .

بيان $ص = 3$ هو خط مستقيم أفقي يوازي محور السينات .

د



لا نستطيع حساب الميل لأن تعريف الميل يشترط وجود تغير في الإحداثي السيني .

نلاحظ (المستقيم رأسي فيه س ثابتة)

المستقيم $AB \parallel$ محور ∴ المستقيم الرأسي **ليس له ميل** .

بيان $س = 3$ هو خط مستقيم رأسي يوازي محور الصادات .

مثال (١):

أوجد ميل المستقيم الذي يمرّ بالنقطتين $A(1, -3)$ ، $B(4, 6)$

الحلّ:

$$\begin{aligned} \text{ميل } \overleftrightarrow{AB} &= \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} \\ &= \frac{6 - (-3)}{4 - 1} \\ &= \frac{9}{3} = 3 \end{aligned}$$

لاحظ أنّ

$$\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{ص_1 - ص_2}{س_1 - س_2} = م$$

حيث $س_1 \neq س_2$

دورك الآن (١)

أوجد ميل $\overleftrightarrow{HK}$ حيث $H(5, 2)$ ، $K(-2, 3)$.

عبّر عن فهمك (١)

أوجد عامر ميل المستقيم المارّ بالنقطتين $A(3, -2)$ ، $B(7, 5)$

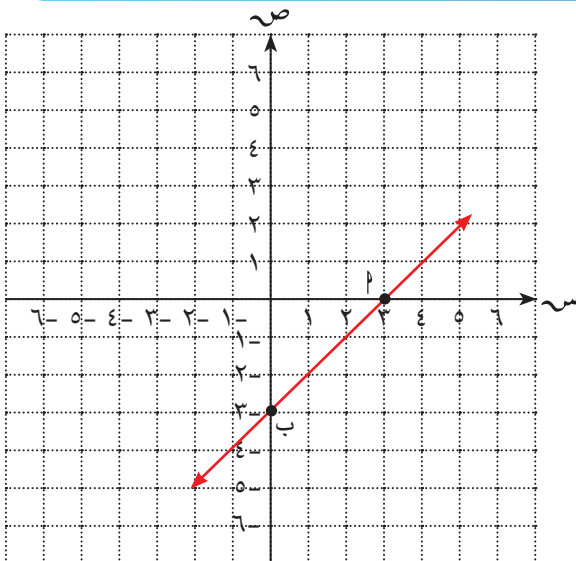
$$\text{كما يلي: } \frac{5 - (-2)}{7 - 3} = \frac{7}{4}$$

هل عامر على صواب؟ وضّح إجابتك.

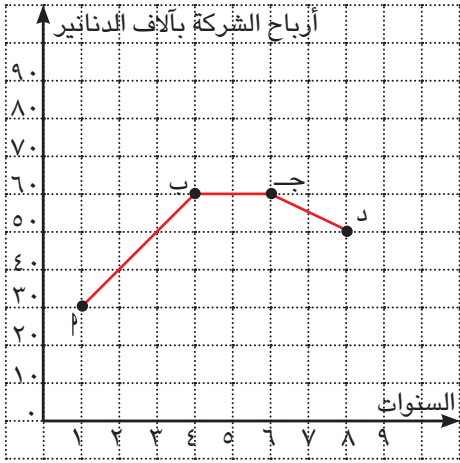
دورك الآن (٢)

في الشكل المقابل:

أوجد ميل $\overleftrightarrow{AB}$.



مثال (٢) :



يوضّح الشكل المقابل تغيّر أرباح شركة خلال ٨ سنوات
بآلاف الديناري . أوجد ميل كلّ من أ ب ، ب ج ، ج د .
ما دلالة كلّ منها ؟

الحلّ :

ميل أ ب $= \frac{6.0 - 2.0}{4 - 1} = \frac{4.0}{3} = 1.33$ وهو يعبر عن تزايد أرباح الشركة خلال السنوات الأربع الأولى بمعدّل ١٠ آلاف دينار .

ميل ب ج $= \frac{6.0 - 6.0}{5 - 4} = \frac{0}{1} = 0$ وهو يعني أنّ أرباح الشركة كانت ثابتة خلال السنتين الخامسة والسادسة .

ميل ج د $= \frac{5.0 - 6.0}{8 - 5} = \frac{-1.0}{3} = -0.33$ وهو يعبر عن تناقص أرباح الشركة خلال السنتين الأخيرتين بمعدّل ٥ آلاف دينار .

استكشاف (٢)



يمثّل الشكل المقابل بيان الدالة الخطيّة :

$$ص = ٢س + ٤$$

من الرسم ، أكمل ما يلي :

١ أ ميل المستقيم =

ب ما العلاقة بين ميل المستقيم ومعامل س في الدالة الخطيّة ؟

٢ أ الجزء المقطوع من محور الصادات هو

وهو الإحداثي الصادي لنقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات ، أي عندما يساوي الإحداثي السيني صفرًا .

ما العلاقة بين الحدّ الثابت في الدالة الخطيّة والجزء المقطوع من محور الصادات ؟

ب الجزء المقطوع من محور السينات هو

وهو الإحداثي السيني لنقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات ، أي عندما يساوي الإحداثي الصادي صفرًا .

المستقيم الذي ميله م والجزء المقطوع من محور الصادات ب تكون معادلته على الصورة :
ص = م س + ب (تُسمّى الصورة القياسية لمعادلة المستقيم)

أما الصورة العامّة لمعادلة مستقيم فهي : $أ س + ب ص + ج = ٠$ حيث $أ ، ب ، ج \in \mathbb{R}$ ؛
 $أ ، ب$ لا يساويان الصفر معًا .

ملاحظة :

إذا كانت معادلة المستقيم على الصورة : ص = م س + ب
فإنّ :

- ميل المستقيم = م (معامل س)
- الجزء المقطوع من محور الصادات = ب (الحدّ الثابت)
- لإيجاد الجزء المقطوع من محور السينات ، نضع ص = ٠ ، ونوجد قيمة س

مثال (٣) :

أوجد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات والجزء المقطوع من محور السينات للمستقيم الذي
معادلته : ص = ٢ س - ٥

الحلّ :

$$ص = ٢ س - ٥$$

المعادلة على الصورة : ص = م س + ب

$$\therefore \text{الميل (م)} = ٢$$

الجزء المقطوع من محور الصادات (ب) = -٥

لإيجاد الجزء المقطوع من محور السينات نضع ص = ٠ في المعادلة ص = ٢ س - ٥

$$\therefore ٠ = ٢ س - ٥$$

نحلّ المعادلة

$$٢ س - ٥ = ٠ \Rightarrow ٢ س = ٥$$

$$س = \frac{٥}{٢}$$

$$س = \frac{٥}{٢}$$

إذا الجزء المقطوع من محور السينات = $\frac{٥}{٢}$

مثال (٤) :

أوجد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته : $٢ ص + ٤ س = ٦$

الحل :

نضع المعادلة على الصورة : $ص = م س + ب$

$$٢ ص + ٤ س = ٦$$

$$ص = ٣ - ٢ س$$

∴ الميل (م) = -٢

الجزء المقطوع من محور الصادات (ب) = ٣

انتبه



لإيجاد الميل (م) والجزء المقطوع من محور الصادات (ب) ،
ضَع معادلة المستقيم على الصورة
القياسية : $ص = م س + ب$

مثال (٥) :

أوجد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته :

$$٢ = ص$$

الحل :

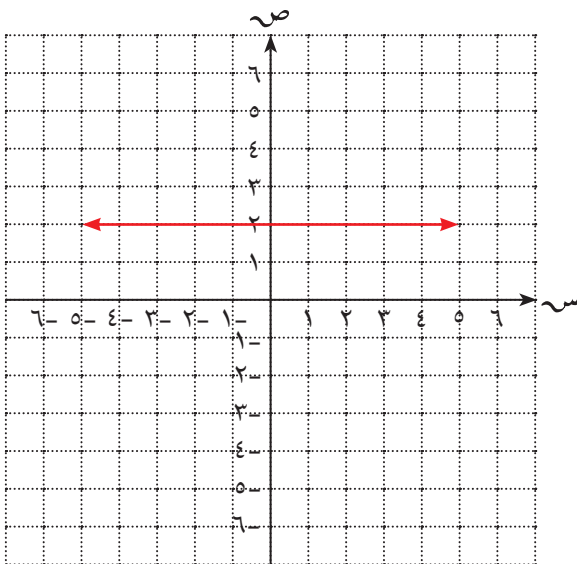
المعادلة : $ص = ٢$

على الصورة : $ص = م س + ب$

∴ الميل (م) = ٠ (يوازي محور السينات)

الجزء المقطوع من محور الصادات (ب) = ٢

للتحقق بيانيًا



لاحظ أن



- $٠ = ص$ هي معادلة محور الصادات .
- $٠ = س$ هي معادلة محور السينات .

عبّر عن فهمك (٢)



هل المستقيم الذي معادلته $٥ = س$ يقطع محور الصادات ؟
فسّر إجابتك .



إذا كان أ، ب $\in$ ح، فإن :

- المستقيم س = أ هو مستقيم رأسي (ليس له ميل) ويوازي محور الصادات .
- المستقيم ص = ب هو مستقيم أفقي (ميله يساوي صفرًا) ويوازي محور السينات .

دورك الآن (٣)



أوجد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات والجزء المقطوع من محور السينات للمستقيم الذي معادلته :

ب) ص = ٢ - ٣ س

أ) ص = ٥ س + ٣

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

د) ٦ = ص + ٣ س

ج) ٤ ص - = ٧ س

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

عبّر عن فهمك (٣)

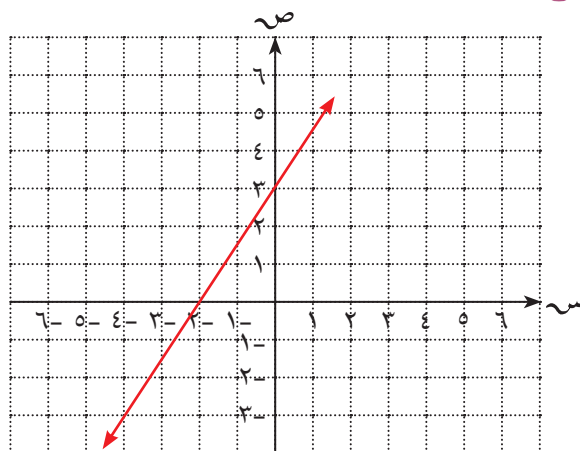


أعط مثلاً لمعادلة مستقيم يكون فيه الجزء المقطوع من محور الصادات يساوي صفرًا .

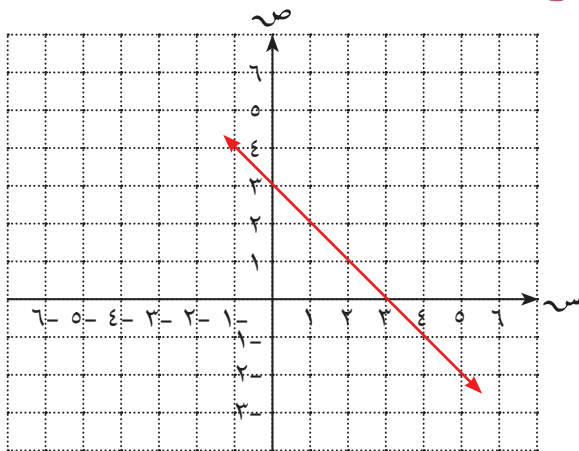


١ أوجد ميل كل من المستقيمات التالية إن أمكن ذلك :

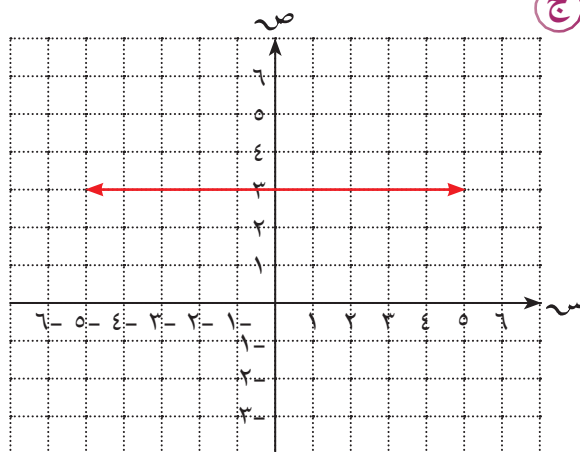
أ



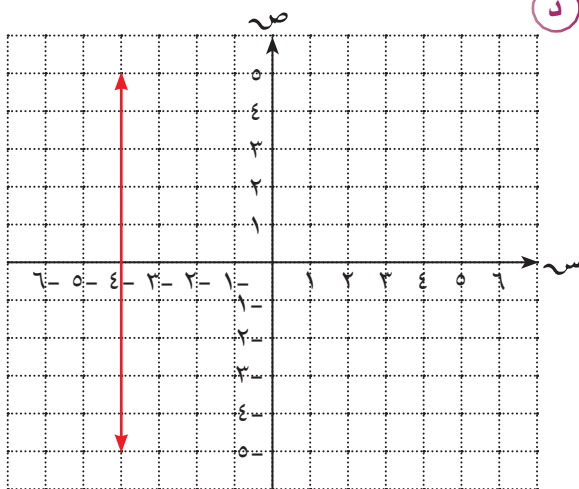
ب



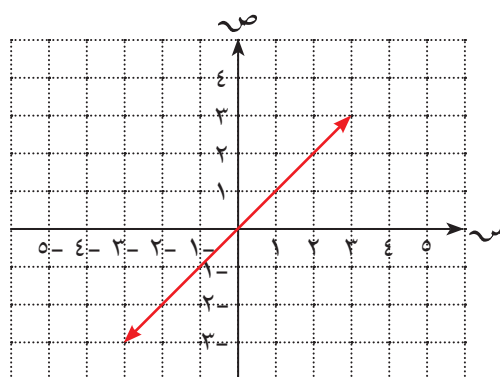
ج



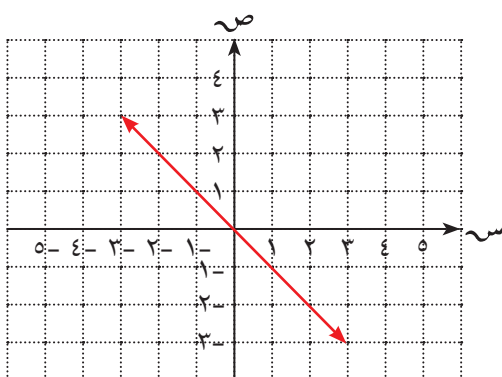
د



هـ



و



٢ أوجد ميل المستقيم المارّ بالنقطتين في كلّ ممّا يلي :

أ) $(١, ٢)$ ، $(٥, ٣)$ ب) $(٧, ١)$ ، $(٤, ٣)$ ص

.....

.....

ج) $(٠, ٥)$ ، $(٤, ٠)$ د) $(٤, ٢)$ ، $(٤, ٥)$ هـ

.....

.....

٣ أوجد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات والجزء المقطوع من محور السينات للمستقيم الذي معادلته :

أ) $ص = ٤س + ٥$ ب) $ص = ٢ - ٥س$

.....

.....

.....

.....

٤ أوجد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته :

أ) $ص = ٢س$ ب) $٧ = ٣س + ص$

.....

.....

ج) $٠ = ٣ + ٥س - ٢ص$ د) $٣ص = ٣ + ٦$

.....

.....

.....

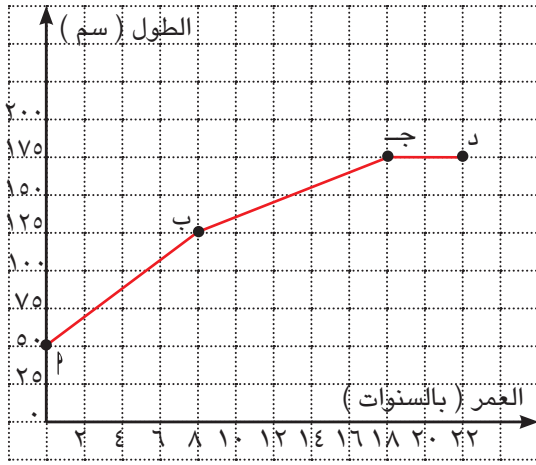
هـ) $٠ = ٨ + ص + ٥س$ و) $٤ = ص$

.....

.....

.....

٥ يوضح الشكل المقابل العلاقة بين طول شخص (بالسنتيمتر) وعمره بالسنوات .
 أوجد ميل كلٍّ من $\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$ ، $\overline{CD}$.
 ما دلالة كلٍّ منها ؟



مهارات تفكير عليا :



٦ هل المستقيم المارّ بالنقطتين $(4, 2)$ ، $(5, 4)$ أكثر انحدارًا من المستقيم المارّ بالنقطتين $(4, 1)$ ، $(5, 4)$ ؟ وضح إجابتك .

٧ إذا كان ميل المستقيم الذي يمرّ بالنقطتين $(-3, 4)$ ، $(1, k)$ هو ٢ ، فأوجد قيمة k .

المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة

Parallel Lines and Perpendicular Lines

سوف تتعلّم : المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة والعلاقة بينها .

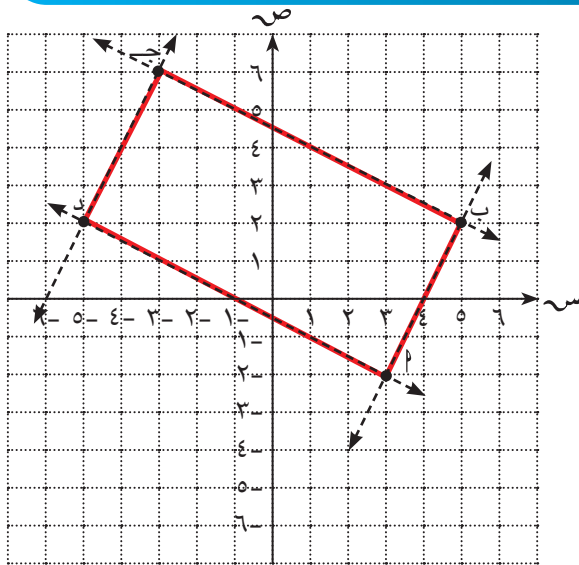
العبارات والمفردات :

المستقيمات المتعامدة Perpendicular Lines

Parallel Lines

المستقيمات المتوازية

استكشف



تذكّر



المستطيل هو متوازي أضلاع
إحدى زواياه قائمة .

٢ $\overleftrightarrow{a} \parallel \overleftrightarrow{b}$ ميل $\overleftrightarrow{a}$ ميل $\overleftrightarrow{b}$
ميل $\overleftrightarrow{d}$ ميل $\overleftrightarrow{c}$

٤ $\overleftrightarrow{a} \perp \overleftrightarrow{b}$ ميل $\overleftrightarrow{a}$ ميل $\overleftrightarrow{b}$
ميل $\overleftrightarrow{a}$ × ميل $\overleftrightarrow{b}$
..... = × =

في الشكل المقابل : $\overleftrightarrow{a} \perp \overleftrightarrow{b}$ ، $\overleftrightarrow{c} \parallel \overleftrightarrow{d}$ مستطيل .

∴ $\overleftrightarrow{a} \parallel \overleftrightarrow{b}$ ، $\overleftrightarrow{c} \parallel \overleftrightarrow{d}$ ،
 $\overleftrightarrow{a} \perp \overleftrightarrow{c}$ ، $\overleftrightarrow{b} \perp \overleftrightarrow{d}$

أوجد ميل كلّ من المستقيمات التالية :

ميل $\overleftrightarrow{a}$ $= \frac{1}{2} - \frac{4}{8} = \frac{(2-) - 2}{3 - 5} = \frac{1}{2}$

ميل $\overleftrightarrow{b}$ $= \frac{1}{2} = \frac{4}{8} = \frac{(2-) - 2}{3 - 5} = \frac{1}{2}$

ميل $\overleftrightarrow{c}$ $= \frac{1}{2} = \frac{4}{8} = \frac{(2-) - 2}{3 - 5} = \frac{1}{2}$

ميل $\overleftrightarrow{d}$ $= \frac{1}{2} = \frac{4}{8} = \frac{(2-) - 2}{3 - 5} = \frac{1}{2}$

أكمل ما يلي :

١ $\overleftrightarrow{a} \parallel \overleftrightarrow{b}$ ميل $\overleftrightarrow{a}$ ميل $\overleftrightarrow{b}$
ميل $\overleftrightarrow{c}$ ميل $\overleftrightarrow{d}$

ماذا تلاحظ ؟

٣ $\overleftrightarrow{a} \perp \overleftrightarrow{b}$ ميل $\overleftrightarrow{a}$ ميل $\overleftrightarrow{b}$
ميل $\overleftrightarrow{c}$ × ميل $\overleftrightarrow{d}$
..... = × =

ماذا تلاحظ ؟

ليكن $\vec{m}$ هو ميل $\vec{l}$ ، $\vec{m}$ هو ميل $\vec{l}$:

• $\vec{m} = \vec{m} \iff \vec{l} // \vec{l}$ (والعكس صحيح $\vec{l} // \vec{l} \iff \vec{m} = \vec{m}$)
ما لم يواز أحدهما محور الصادات

• $\vec{m} \times \vec{m} = 1 - 1 \iff \vec{l} \perp \vec{l}$ (والعكس صحيح $\vec{l} \perp \vec{l} \iff \vec{m} \times \vec{m} = 1 - 1$)
ما لم يواز أحدهما أيًا من المحورين

دورك الآن (١)

أكمل الجدول الآتي :

ميل $\vec{l}$	ميل المستقيم الموازي له	ميل المستقيم العمودي عليه
٣		
$-\frac{1}{2}$		
		-٤
	$\frac{2}{5}$	
.		

مثال (١) :

إذا كان $\vec{l}$ يمرّ بالنقطتين $١(٣، ٤-)$ ، $ب(٥، ٣-)$

وكان $\vec{m}$ يمرّ بالنقطتين $ع(٥، ٨)$ ، $ك(٧، ٩)$

فأثبت أن $\vec{l} // \vec{m}$

الحل :

∴ $\vec{l}$ يمرّ بالنقطتين $١(٣، ٤-)$ ، $ب(٥، ٣-)$

$$\therefore \text{ميل } \vec{l} = \frac{ص_١ - ص_٢}{س_١ - س_٢}$$

$$٢ = \frac{٣ - ٥}{(٤-) - ٣-} =$$

انتبه



إذا بدأت الطرح في البسط بالإحداثي الصادي للنقطة ب ، يجب أن تبدأ في المقام بالإحداثي السيني للنقطة ب أيضًا .

$$\begin{aligned} \therefore \text{ م يمرّ بالنقطتين ع (٥ ، ٨) ، ك (٧ ، ٩)} \\ \therefore \text{ ميل م} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٥ - ٧}{٨ - ٩} = \frac{٢}{١} \\ \therefore \text{ ميل ل} = \text{ميل م} \\ \therefore \text{ ل // م} \end{aligned}$$

دورك الآن (٢)

إذا كان ميل ℓ هو ٣ ، جد يمرّ بالنقطتين جـ (١ - ، ٣) ، د (٧ - ، ١) .
فأثبت أنّ ℓ ب ، جـ متوازيان .

مثال (٢) :

إذا كان ℓ يمرّ بالنقطتين ℓ (٤ ، ٣) ، ب (٧ ، ٩)
وكانت معادلة ك : $ص = \frac{١}{٢} س + ٥$
فأثبت أنّ ℓ // ك

الحل :

$$\begin{aligned} \therefore \text{ هـ يمرّ بالنقطتين } \ell (٤ ، ٣) ، ب (٧ ، ٩) \\ \therefore \text{ ميل هـ} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٤ - ٧}{٣ - ٩} = \frac{١}{٢} \\ \therefore \text{ معادلة ك : } ص = \frac{١}{٢} س + ٥ \quad \text{المعادلة على الصورة } ص = م س + ب \\ \therefore \text{ ميل ك} = \frac{١}{٢} \\ \therefore \text{ ميل هـ} = \text{ميل ك} \\ \therefore \text{ هـ // ك} \end{aligned}$$

انتبه



ضَع المعادلة على الصورة القياسية
ص = م س + ب قبل إيجاد الميل .

إذا كان ميل $\vec{AB}$ هو -5 ، وكان $\vec{L}$ معادلته :
 $5س + ص = 2$ ، فأثبت أن $\vec{AB} \parallel \vec{L}$.

عبّر عن فهمك (١)



هل المستقيم الذي معادلته $س = 3$ والمستقيم الذي معادلته $س = -2$ متوازيان ؟ فسّر إجابتك .

مثال (٣) :

إذا كان $\vec{K}$ يمرّ بالنقطتين جـ (٤ ، ٣) ، د (٧ ، ٥)
وكانت معادلة $\vec{L}$: $3ص + 2س - 3 = 0$ ،
فأثبت أن $\vec{K} \perp \vec{L}$

الحل :

∴ $\vec{K}$ يمرّ بالنقطتين جـ (٤ ، ٣) ، د (٧ ، ٥)

$$\therefore \text{ميل } \vec{K} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{3 - 4}{5 - 3} = \frac{-1}{2}$$

معادلة $\vec{L}$: $3ص + 2س - 3 = 0$

∴ معادلة $\vec{L}$: $ص = \frac{-2}{3}س + 1$ المعادلة على الصورة $ص = م س + ب$

∴ ميل $\vec{L} = \frac{-2}{3}$

∴ ميل $\vec{K} \times$ ميل $\vec{L} = \frac{-1}{2} \times \frac{-2}{3} = 1$

∴ $\vec{K} \perp \vec{L}$



١ إذا كان ميل $\vec{AB}$ هو $\frac{1}{4}$ ، $\vec{CD}$ يمرّ بالنقطتين جـ (٦ ، ٥) ، د (١٠ ، ٤) ،
فأثبت أنّ $\vec{AB} \perp \vec{CD}$.

٢ إذا كان ميل $\vec{CD}$ هو -٣ ، $\vec{AB}$ معادلته : $\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}y - 3 = 0$ ،
فابحث فيما إذا كان $\vec{CD}$ ، $\vec{AB}$ متوازيين أو متعامدين .

عبّر عن فهمك (٢)



هل كلّ مستقيمين متعامدين حاصل ضرب ميليهما يساوي -١ ؟ فسّر إجابتك .

تمارين ذاتية :



١ إذا كان ميل $\vec{AB}$ هو -٢ ، $\vec{CD}$ يمرّ بالنقطتين جـ (١٠ ، ٣) ، د (٦ ، ٥) ،
فأثبت أنّ $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$.

٢ إذا كان ميل $\vec{L}$ هو ϵ ، ومعادلة $\vec{K}$: ص - ϵ س - $6 = 0$ ، فأثبت أن المستقيمين متوازيان .

٣ إذا كانت معادلة $\vec{H}$: ص = 9 س + 5 ومعادلة $\vec{N}$: ص - 18 س - $1 = 0$ ، فأثبت أن المستقيمين متوازيان .

٤ إذا كان $\vec{K}$ يمرّ بالنقطتين $(7, 4)$ ، $(\epsilon, 9)$ ، ومعادلة $\vec{L}$: ص - 3 س - $6 = 0$ ، فأثبت أن المستقيمين متعامدان .

٥ إذا كان $\vec{A}$ يمرّ بالنقطتين $(5, 2)$ ، $(5, 3)$ ، $\vec{B}$ يمرّ بالنقطتين $(6, 3)$ ، $(6, 8)$ ، فأثبت أن $\vec{A} \parallel \vec{B}$.

- ٦ إذا كان $\vec{h}$ يمرّ بالنقطتين $(7, 5)$ ، $(7, -3)$ ،
 $\vec{l}$ يمرّ بالنقطتين $(6, 2)$ ، $(5, 9)$ ،
 فأثبت أنّ $\vec{h} \perp \vec{l}$.

مهارات تفكير عليا :



اختر الإجابة الصحيحة .

- ٧ إذا كان $\vec{l}$ ميله $\frac{1}{4}$ ، $\vec{p}$ ميله $\frac{3}{4}$ ، حيث $0 \neq 0$ ، $0 \neq 0$ وكان $\vec{l} \perp \vec{p}$ ،
 فإن $0 = \dots$

د $\frac{3}{4} -$

ج $\frac{3}{4}$

ب $12 -$

أ 12

- ٨ في المستوى الإحداثي إذا كانت $0(1, 7)$ ، $0(2, 4)$ ، $0(5, 5)$ ، $0(5, 5)$ ،
 الزاوية في 0 ، فإن قيمة 0 تساوي :

د 3

ج 5

ب $3 -$

أ $5 -$

حلّ معادلتين خطيتين في متغيرين آنياً

٣ - ٦

Solving Two Linear Equations in Two Variables Simultaneously

سوف تتعلّم : حلّ معادلتين خطيتين (من الدرجة الأولى) في متغيرين آنياً .

العبارات والمفردات :

Simultaneous

آنياً

Linear Equation

معادلة خطية

الصورة العامة لمعادلة مستقيم هي : $١س + ١ب + ص = ٠$ حيث ١ ، $ب$ ، $ج$ $\in \mathbb{R}$ ؛ ١ ، $ب$ لا يساويان الصفر معاً .

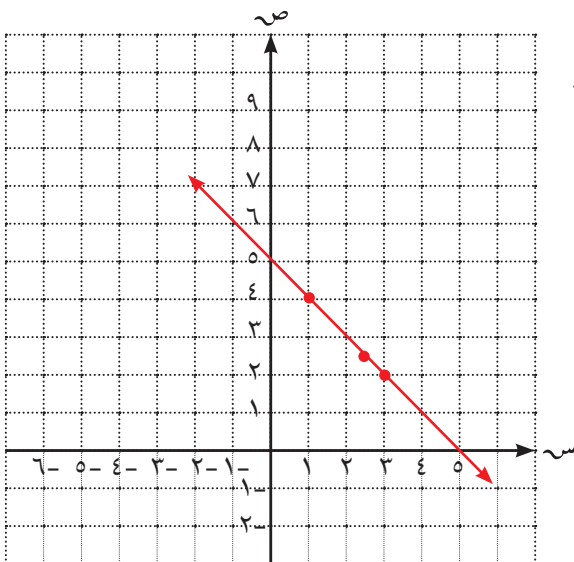
أولاً : حلّ معادلتين خطيتين آنياً بيانياً

حلّ وناقش

تعلّم أنّ حلّ المعادلة هو إيجاد قيم المتغير التي تحقق صحة المعادلة .
أكمل الجدول التالي :

المعادلة	نوعها	عدد الحلول
$٧ = ٢ + ص$	معادلة من الدرجة في متغير	حلّ وحيد
$٠ = ٤ - ٢$	معادلة من الدرجة في متغير	

لتكن المعادلة : $٥ = ص + س$



- ما نوعها ؟ معادلة من الدرجة في
 - كم تتوقع عدد الحلول لها ؟
 - أذكر بعض هذه الحلول : (..... ،) ، (..... ،) ، (..... ،) ، (..... ،) ، (..... ،) ، (..... ،)
- يوضح الشكل المقابل بيان الدالة الخطية : $٥ = ص + س$
لاحظ أنّ جميع النقاط الواقعة على بيان الخط المستقيم هي حلول للمعادلة : $٥ = ص + س$

ص = س + ١			
س	١ -	٠	٢
ص			

• على الشبكة البيانية نفسها من الصفحة السابقة ،

أرسم بيان الدالة الخطية : $ص = س + ١$

لاحظ أن الأزواج المرتبة (س ، ص) في الجدول هي

بعض حلول المعادلة : $ص = س + ١$

وهي النقاط التي تساعدنا على رسم بيان الدالة الخطية .

• هل يوجد حلّ مشترك يحقق المعادلتين معاً ؟

الحلّ الذي يحقق المعادلتين في آن واحد هو : (..... ،) وهو نقطة تقاطع المستقيمين .

• حلّ معادلتين خطيتين من الدرجة الأولى في متغيرين **أنياً بيانياً** هو **الحلّ المشترك** (س ، ص) وهو

نقطة تقاطع **بيان** الدالتين الخطيتين .

وبالتالي تكون { (..... ،) } هي مجموعة الحلّ التي تحقق المعادلتين في آن واحد .

مثال (١) :

أوجد مجموعة حلّ المعادلتين **أنياً بيانياً** :

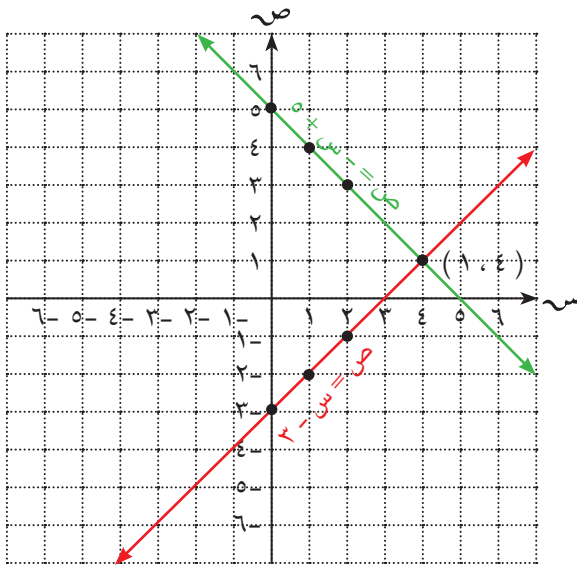
$$ص - س = ٣ \quad ص + س = ٥$$

الحلّ :

• نكتب معادلتَي المستقيمين على الصورة :

$$ص - س = ٣ \quad ص + س = ٥$$

• نرسم بيان المستقيمين :



ص - س = ٣			
س	١	٠	٢
ص	٤	٥	٣

ص + س = ٥			
س	١	٠	٢
ص	٢	٣	١

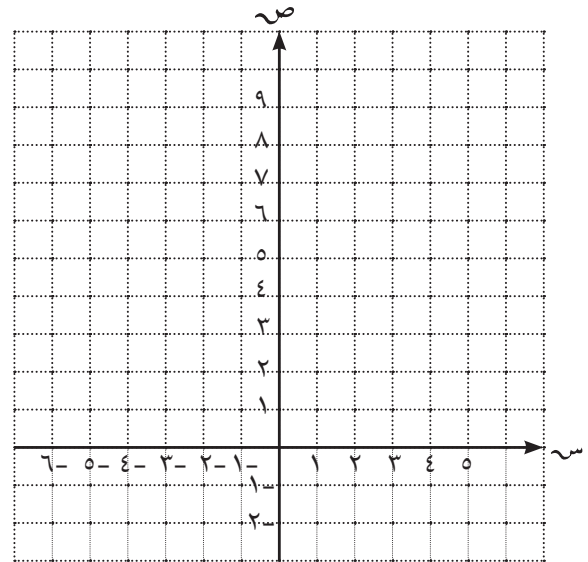
نلاحظ أن المستقيمين تقاطعا في النقطة (١ ، ٤) (تحقق بالتعويض في كلّ من معادلتَي المستقيم)

∴ مجموعة الحلّ = { (١ ، ٤) }

دورك الآن (١)

أوجد مجموعة حلّ المعادلتين آنياً بيانياً :

$$\text{ص} = 2\text{س} - 1, \quad \text{ص} - \text{س} = 5$$



ص = س + ٥			
			س
			ص

ص = ٢س - ١			
			س
			ص

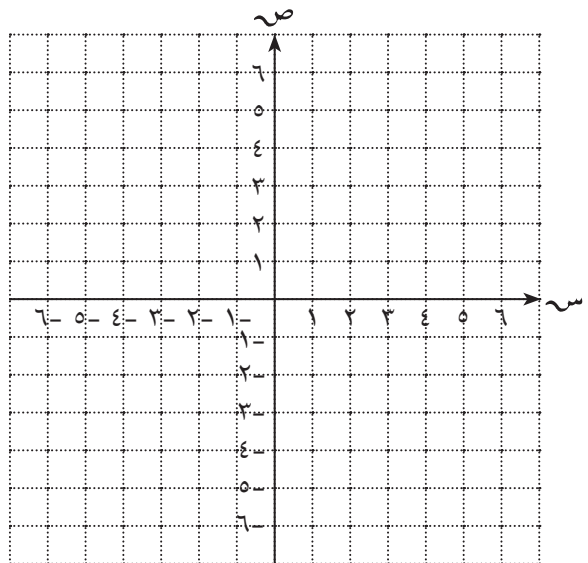
∴ مجموعة الحلّ = { (..... ,) }

تحقق بالتعويض في كلّ من معادلتَي المستقيمين .

دورك الآن (٢)

أوجد مجموعة حلّ المعادلتين آنياً بيانياً :

$$\text{ص} - 3\text{س} = 4, \quad \text{ص} - \text{س} = -4$$



			س
			ص

			س
			ص

∴ مجموعة الحلّ = { (..... ,) }

تحقق بالتعويض في كلّ من معادلتَي المستقيمين .

المثال	$\begin{cases} \text{ص} = 2\text{س} - 1 \\ \text{ص} = 4\text{س} - 2 \end{cases}$	$\begin{cases} \text{ص} = 2\text{س} - 1 \\ \text{ص} = 2\text{س} + 2 \end{cases}$	$\begin{cases} \text{ص} = 2\text{س} - 1 \\ \text{ص} = -2\text{س} + 3 \end{cases}$
التمثيل البياني			
وضع المستقيمين	متطابقان	متوازيان وغير منطبقين	متقاطعان
مجموعة الحل	جميع نقاط المستقيم	$\emptyset$	$\{(1, 1)\}$
الملاحظات	الميلان متساويان (لماذا ؟) الجزء المقطوع من محور الصادات متساوي (لماذا ؟)	الميلان متساويان الجزء المقطوع من محور الصادات مختلف	الميلان مختلفان الجزء المقطوع من محور الصادات مختلف
عدد الحلول	عدد لا نهائي من الحلول	صفر	حل واحد

عبّر عن فهمك



تقول ساره : « إذا كان للمعادلتين قيمة الجزء المقطوع نفسه من محور الصادات ، يكون للمعادلتين عدد لا نهائي من الحلول » هل هي على صواب ؟ وضّح إحابتك .

ثانيًا : حلّ معادلتين خطيتين آنياً جبرياً

يمكن حلّ معادلتين خطيتين آنياً جبرياً بطريقتين (الحذف أو التعويض) .

• طريقة الحذف

مثال (٢) :

استخدم طريقة الحذف لإيجاد مجموعة حلّ المعادلتين آنياً :

$$\text{ص} - \text{س} = ٣ \quad , \quad \text{ص} + \text{س} = ٥$$

الحلّ :

$$\text{ص} - \text{س} = ٣$$

$$\text{ص} + \text{س} = ٥$$

$$٢ \text{ ص} = ٢$$

$$\frac{1}{2} \times ٢ \text{ ص} = \frac{1}{2} \times ٢$$

$$\boxed{\text{ص} = ١}$$

$$\text{ص} + \text{س} = ٥$$

$$١ + \text{س} = ٥$$

$$١ - ٥ = \text{س} + ١ - ١$$

$$\boxed{\text{س} = ٤}$$

اختر إحدى المعادلتين ولتكن المعادلة (٢)

عوّض عن ص بالعدد ١

∴ مجموعة الحلّ = { (١ ، ٤) } (تحقق من صحّة الحلّ)

تحقق من الحلّ بيانياً بالرجوع إلى «مثال (١)» السابق صفحة ١٠٣ .

لاحظ أنّ

تعتمد طريقة الحذف على :
حذف أحد المتغيّرين وحساب
قيمة الآخر .

لاحظ أنّ

معاملات المتغيّرين في
المعادلتين أحدهما معكوس
جمعهم للآخر ، إذاً نجمع
المعادلتين .

انتبه



يجب كتابة الإحداثي السيني أولاً
في مجموعة الحلّ { (س ، ص) }

دورك الآن (٣)

استخدم طريقة الحذف لإيجاد مجموعة حلّ المعادلتين آنياً :

$$٢ \text{ ص} + ٣ \text{ س} = ١١ \quad , \quad ٤ \text{ ص} + ٢ \text{ س} = ١٠$$

مثال (٣) :

أوجد مجموعة الحلّ للمعادلتين الخطيتين آنياً جبرياً باستخدام طريقة الحذف :

$$٨س + ٣ص = ٥ ، ٢س + ص = ١ - ٠$$

الحلّ :

$$\left. \begin{array}{l} ٨س + ٣ص = ٥ \\ ٢س + ص = ١ \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} ٨س + ٣ص = ٥ \\ ٦س + ٣ص = ٣ \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{r} ٨س + ٣ص = ٥ \\ ٦س + ٣ص = ٣ \\ \hline ٢س = ٢ \end{array}$$

$$\frac{١}{٢} \times ٢ = ١$$

$$١ = س$$

بالتعويض بقيمة س في المعادلة (٢)

$$٢س + ص = ١$$

$$١ = ٢ + ص$$

$$٢ - ١ = ٢ + ص$$

$$١ - = ص$$

∴ مجموعة الحلّ = { (١ - ، ١) }

(تحقق من صحّة الحلّ)

لاحظ أنّ



معاملات المتغيّر س مختلفة في المعادلتين وكذلك معاملات المتغيّر ص . لذا ، نحتاج إلى إجراء عملية الضرب لتوحيد معاملات أحد المتغيّرين .

انتبه



عملية الطرح هي عملية جمع المعكوس الجمعي .

نلاحظ تساوي معاملات المتغيّر ص ، إذاً نطرح المعادلتين .

حلّ المعادلة

• طريقة التعويض

مثال (٤) :

حلّ المعادلتين الخطيتين آنياً جبرياً بطريقة التعويض :

$$\text{ص} - \text{س} = ٣ \quad , \quad \text{ص} + \text{س} = ٥$$

الحلّ :

$$\begin{cases} (١) & \text{ص} - \text{س} = ٣ \\ (٢) & \text{ص} + \text{س} = ٥ \end{cases}$$

من المعادلة (١)

$$\text{ص} = ٣ + \text{س} \quad (٣) \quad \text{أكتب ص بدلالة س}$$

بالتعويض عن قيمة ص في المعادلة (٢)

$$(٣ + \text{س}) + \text{س} = ٥ \quad \text{إجمع الحدود المتشابهة}$$

$$٣ + ٢\text{س} = ٥$$

$$٢\text{س} = ٥ - ٣ \quad \text{حلّ المعادلة}$$

$$\frac{١}{٢} \times ٢\text{س} = \frac{١}{٢} \times (٥ - ٣)$$

$$\boxed{\text{س} = ١}$$

بالتعويض عن قيمة س في المعادلة (٣)

$$\text{ص} = ٣ + ١$$

$$\boxed{\text{ص} = ٤}$$

∴ مجموعة الحلّ = { (١ ، ٤) } (تحقق من صحّة الحلّ)

تحقق من الحلّ بيانياً بالرجوع إلى «مثال (١)» السابق صفحة ١٠٣

لاحظ أنّ



تعتمد طريقة التعويض على إيجاد متغيّر بدلالة الآخر من إحدى المعادلتين .

ملاحظة : يمكنك إيجاد مجموعة حلّ معادلتين خطيتين آنياً بعدّة طرق منها :

١ بيانياً

٢ جبرياً

ب) التعويض

أ) الحذف

(التزم بالطريقة التي تحدّد لك في رأس السؤال) .

مثال (٥) :

إستخدِم طريقة التعويض لحلّ المعادلتين الخطّيتين آنياً :

$$\text{ص} - ٣ \text{س} + ٤ = ٠ , \quad \text{ص} - \text{س} = ٤ -$$

الحلّ :

$$\left. \begin{array}{l} (١) \quad \text{ص} - ٣ \text{س} + ٤ = ٠ \\ (٢) \quad \text{ص} - \text{س} = ٤ - \end{array} \right\}$$

$$(٣) \quad \text{ص} = \text{س} - ٤ \quad (٢) \quad \text{أكتب ص بدلالة س من المعادلة}$$

بالتعويض عن قيمة ص في المعادلة (١)

$$\text{ص} - ٣ \text{س} + ٤ = ٠ \quad \text{إجمع الحدود المتشابهة}$$

$$\text{ص} - ٣ \text{س} = -٤$$

$$\text{ص} = ٣ \text{س} - ٤$$

عوّض عن قيمة س بالعدد ٠ بالمعادلة (٣)

$$\text{ص} - ٠ = ٤ -$$

$$\text{ص} = ٤ -$$

∴ مجموعة الحلّ = { (٤ - , ٠) } (تحقّق من صحّة الحلّ)

دورك الآن (٤)

إستخدِم طريقة التعويض لحلّ المعادلتين الخطّيتين آنياً : س - ٢ ص = ٣ ، ٥ ص - ٤ س = ٦



١ أوجد مجموعة حلّ المعادلتين آنياً بيانياً :

$$\text{ص} = 2\text{س} + 1, \text{ص} = \text{س} + 1$$

			س
			ص

			س
			ص

.....

.....

.....

.....

٢ أوجد مجموعة حلّ المعادلتين آنياً بيانياً :

$$\text{ص} = \text{س} - 1, \text{ص} = -\text{س} + 1$$

			س
			ص

			س
			ص

.....

.....

.....

.....

٣ أوجد مجموعة حلّ المعادلتين آنياً بيانياً :

$$\text{ص} = 3\text{س} - 3, \text{ص} = 3\text{س} + 1$$

			س
			ص

			س
			ص

.....

.....

.....

.....

٣ أوجد مجموعة حلّ المعادلتين آنياً جبرياً

بطريقة الحذف :

$$\epsilon = \text{ص} + \text{س} , \quad \eta = \text{ص} - \text{س}$$

٤ أوجد مجموعة حل المعادلتين آنياً جبرياً

بطريقة الحذف :

س + ۵ ص = ۲ ، ۲ س - ۳ ص = ۹

٥ أوجد مجموعة حل المعادلتين آنياً جبرياً

بطريقة التعويض :

ص = س ، س + ۲ ص = ۶

٦ أوجد مجموعة حل المعادلتين آنياً جبرياً

بطريقة التعويض :

$$٦ = \text{ص} ٢ - \text{س} ٣ , \quad ٧ = \text{ص} + \text{س}$$

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يلي :

٧ لتكن المعادلتان : س - $\frac{1}{4}$ ص = ٤ ، ٢ س - ص = ٢ ، فإن عدد حلول المعادلتين آنياً هو :

- أ حلّ وحيد ب حلّان ج عدد لا نهائي د صفر

٨ إذا كان المستقيمان الممثلان للمعادلتين : س + ٣ ص = ٤ ، س + ١ ص = ٧ متوازيين ، فإن : ١ =

- أ ٣ ب ٣- ج $\frac{1}{3}$ د $\frac{1}{3} -$

مهارات تفكير عليا :

٩ أوجد قيم ١ ، ج التي تجعل للمعادلتين : ص = ١ س + ٤ ، ٣ ص = ٣ س + ج عدداً لا نهائياً من الحلول .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

المتباينات الخطية (منطقة الحل المشترك) The Graph of Linear Inequalities

سوف تتعلّم : تمثيل منطقة حلّ متباينة ومنطقة الحلّ المشترك لمتباينتين من الدرجة الأولى في متغيّرين بيانيًا .

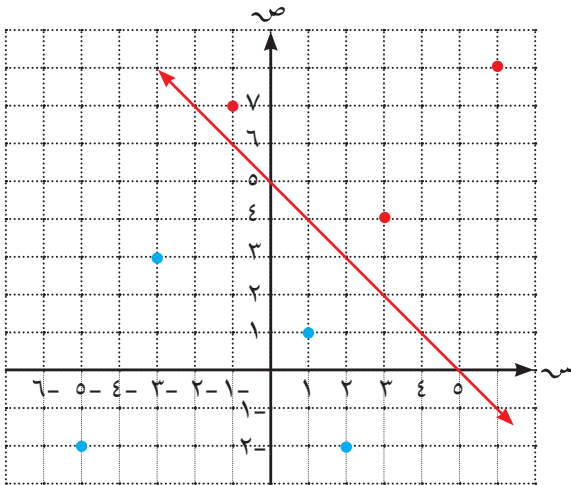
العبارات والمفردات :

Boundary Line خطّ فاصل (خطّ الحدود)

Linear Inequality

متباينة خطية

حلّ وناقش (١)



يوضّح الشكل المقابل بيان الدالة الخطية : $s + v = 5$
سبق وأن علمت أنّ جميع نقاط المستقيم تمثّل حلًّا للمعادلة :
 $s + v = 5$

لاحظ المتباينة $s + v < 5$

• ما نوعها ؟ متباينة من الدرجة في

١ هل النقاط في المستوى الإحداثي التي باللون الأزرق

تحقق صحّة المتباينة ؟

٢ هل النقاط في المستوى الإحداثي الواقعة على الخطّ

المستقيم تحقق صحّة المتباينة ؟

٣ هل النقاط في المستوى الإحداثي التي باللون الأحمر تحقق صحّة المتباينة ؟

٤ اختر نقاطاً أخرى تحقق صحّة المتباينة ومثّلها في المستوى الإحداثي

نلاحظ أنّ جميع نقاط المستوى الإحداثي الواقعة جهة النقاط الحمراء تحقق صحّة المتباينة وكذلك جميع نقاط الخطّ المستقيم تحقق صحّة المتباينة ، ونسمّي ذلك « منطقة الحلّ » لمتباينة من الدرجة الأولى في متغيّرين .

لاحظ أن المستقيم الذي معادلته $s + v = 5$ قسم المستوى الإحداثي إلى منطقتين .

● ظلّ المنطقة التي تمثل حلّ المتباينة : $s + v \leq 5$

تُعرف منطقة الحلّ لمتباينة من الدرجة الأولى في متغيرين على أنها جميع النقاط (s ، v) في المستوى الإحداثي التي تحقق المتباينة .

● إذا كانت المتباينة $s + v < 5$ ، فهل النقاط الواقعة على الخطّ المستقيم تحقق صحّة المتباينة ؟

عند إيجاد منطقة الحلّ لمتباينة من الدرجة الأولى في متغيرين ، سوف نحتاج إلى رسم خطّ مستقيم يُسمّى خطّ الحدود (أو الخطّ الفاصل) . إذا كانت المتباينة على الصورة :

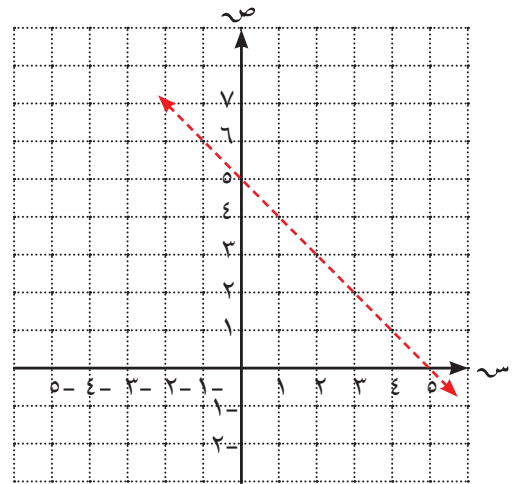
● $s + v \geq j$ أو $s + v \leq j$ ، نرسم خطّ الحدود (متصل)

● $s + v > j$ أو $s + v < j$ ، نرسم خطّ الحدود (متقطع)

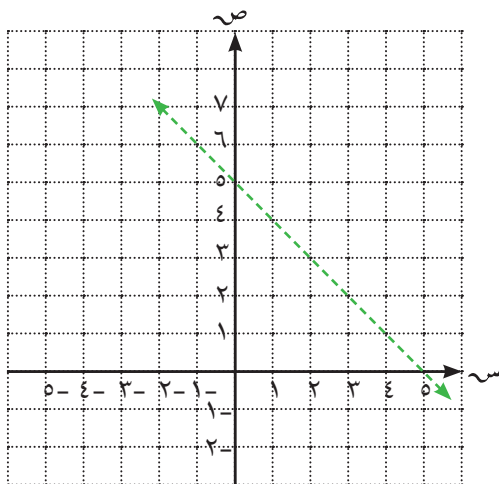
(حيث j ، b ، $j \geq 0$ ، b لا يساويان الصفر معاً)

● ظلّ منطقة الحلّ في كلّ ممّا يلي :

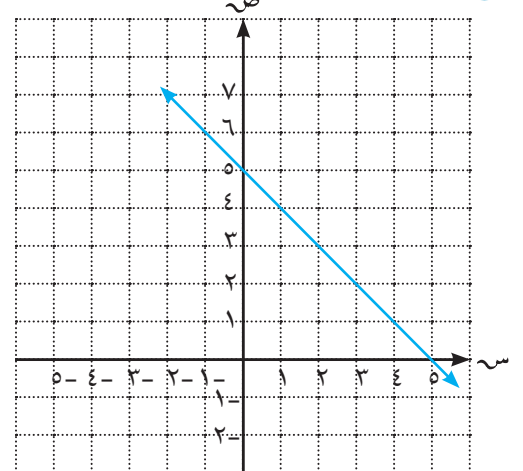
أ $s + v < 5$



ب $s + v > 5$



ج $s + v \geq 5$



مثال (١):

تمثل بيانياً منطقة حل المتباينة: $ص > ٢س + ١$

الحل:

• المعادلة المناظرة (معادلة خط الحدود) هي:

$$ص = ٢س + ١$$

• نكوّن جدولاً لقيم المعادلة المناظرة:

ص = ٢س + ١			
س	١	٠	١-
ص	٣	١	١-

• نرسم خط الحدود (متقطع)

• نختار نقطة لا تنتمي إلى خط الحدود، ولتكن

نقطة الأصل (٠، ٠) ونعوّض بها في المتباينة.

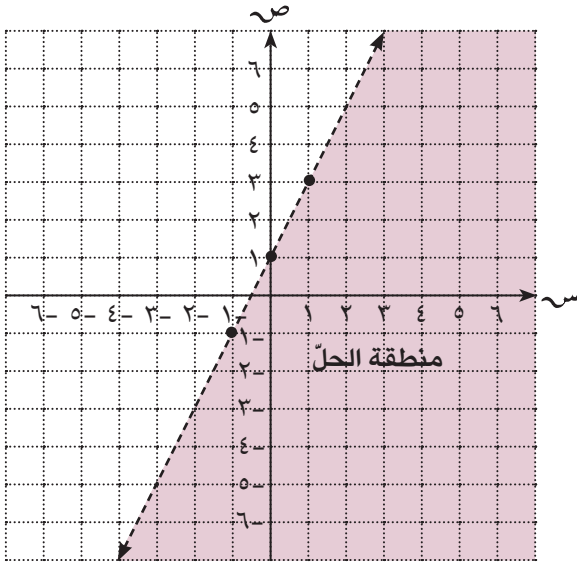
$$ص > ٢س + ١$$

١ > ٠ (عبارة صحيحة)

• إذاً (٠، ٠) $\in$ منطقة الحل

• نظلّ المنطقة التي تنتمي إليها نقطة الأصل، فتكون منطقة حل المتباينة هي جميع النقاط

التي تنتمي إلى المنطقة المظللة.



خطوات إيجاد منطقة الحل لمتباينة من الدرجة الأولى في متغيرين بيانياً:

١ نكتب المعادلة المناظرة للمتباينة (معادلة خط الحدود).

٢ نرسم خط الحدود للمتباينة باستخدام الخط المتصل
في حالة: $\geq$ أو $\leq$ والخط المتقطع في حالة: $>$ أو $<$.

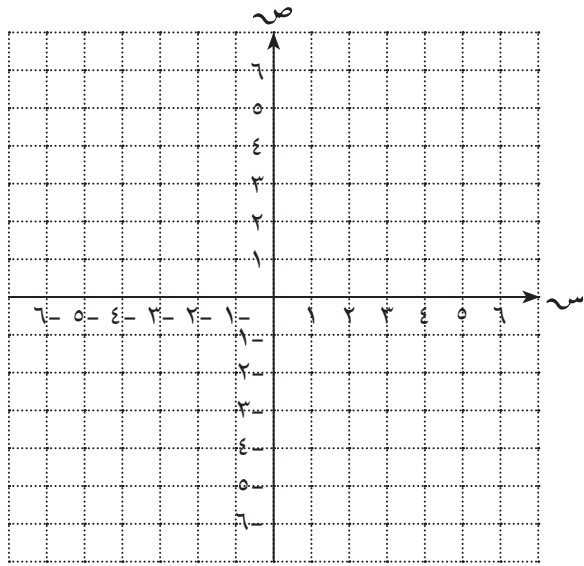
٣ نختار أي نقطة لا تنتمي إلى خط الحدود ونعوّض بها في المتباينة، إذا نتج عبارة صحيحة يكون هذا الجانب هو جانب منطقة الحل، وإذا نتج عبارة غير صحيحة يكون الجانب الآخر هو جانب منطقة الحل.

٤ في حالة $\geq$ ، $\leq$ تكون منطقة الحل هي مجموعة نقاط خط الحدود اتحاد مجموعة نقاط
جانب منطقة الحل، وفي حالة $>$ ، $<$ تكون منطقة الحل هي مجموعة نقاط جانب منطقة
الحل فقط.

٥ نظلّ المنطقة التي تمثل منطقة حل المتباينة.

لاحظ أن

خط الحدود يقسم المستوى
الإحداثي إلى منطقتين.



مثّل بيانياً منطقة حلّ المتباينة : $ص \geq س + ٢$

• المعادلة المناظرة : $ص = س + ٢$

• جدول القيم :

ص =			
س	١	٠	-١
ص			

• أرسم خطّ الحدود (.....) .

• اختر النقطة (..... ،) لا تنتمي إلى خطّ الحدود .

عوّض في المتباينة $ص \geq س + ٢$

..... $\geq$ (عبارة)

• ظلّل منطقة حلّ المتباينة .

مثال (٢) :

مثّل بيانياً منطقة الحلّ للمتباينة : $ص + س \leq ١$

الحلّ :

• المعادلة المناظرة : $ص = ١ - س$

• جدول القيم :

ص = ١ - س			
س	١	٠	-١
ص	٠	١	٢

• أرسم خطّ الحدود (متّصل)

• اختر النقطة (٠، ٠) لا تنتمي إلى خطّ الحدود .

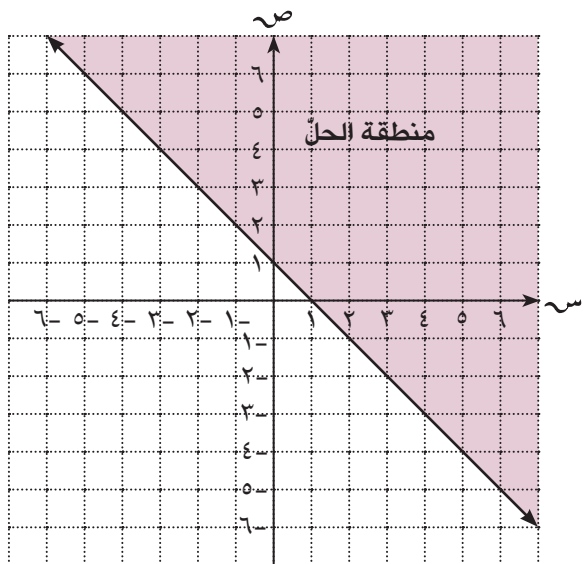
عوّض في المتباينة $ص + س \leq ١$

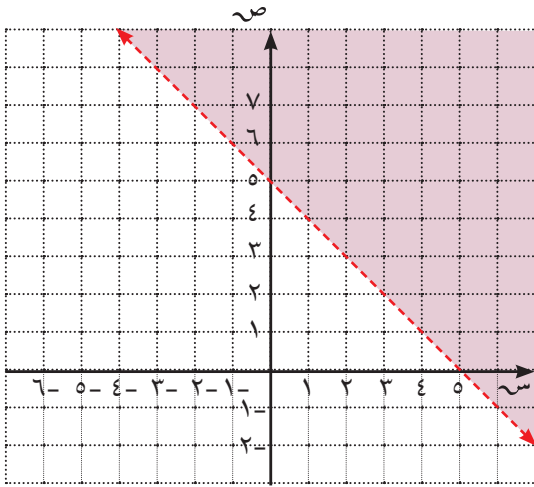
$٠ \leq ١$ (عبارة غير صحيحة)

• إذاً (٠، ٠) $\notin$ منطقة الحلّ

• ظلّل منطقة حلّ المتباينة وهي المنطقة التي لا تنتمي

إليها النقطة (٠، ٠) وجميع نقاط خطّ الحدود .





في الشكل المقابل : المنطقة المظللة تمثل حلّ المتباينة :
 $س + ص < ٥$ بيانياً

- على المستوى الإحداثي المقابل نفسه ، مثل بيانياً
 منطقة الحلّ للمتباينة : $ص \geq ٢ + ٢$
- المعادلة المناظرة (معادلة خطّ الحدود) هي :

- كوّن جدولاً لقيم المعادلة المناظرة :

ص = ٢ + س			
			س
			ص

- أرسم خطّ الحدود (.....) .

- اختر النقطة (٠ ، ٠) لا تنتمي إلى خطّ الحدود وعوّض بها في المتباينة $ص \geq ٢ + س$

- ظلّ منطقة حلّ المتباينة : $ص \geq ٢ + س$

ماذا تلاحظ ؟ هل هناك حلول مشتركة بين المتباينتين ؟

- المنطقة التي تمثل منطقة الحلّ هي تقاطع منطقتي الحلّ للمتباينتين (منطقة الحلّ المشترك)
 عيّن على المستوى الإحداثي منطقة الحلّ المشترك للمتباينتين .

تُعرف منطقة الحلّ المشترك لمتباينتين من الدرجة الأولى في متغيّرين بيانياً على أنها :
 جميع النقاط (س ، ص) في المستوى الإحداثي والتي تحقّق المتباينتين معاً .

خطوات إيجاد منطقة الحلّ المشترك لمتباينتين من الدرجة الأولى في متغيّرين بيانياً :

- ١ نرسم خطّ الحدود لكلّ متباينة في المستوى الإحداثي نفسه .
- ٢ نظلّ منطقة الحلّ لكلّ متباينة .
- ٣ نعيّن منطقة الحلّ المشترك والتي تتكوّن من جميع النقاط (س ، ص) التي تنتمي إلى منطقة تقاطع منطقتي حلّ المتباينتين .

مثال (٣) :

مثّل بيانيًا منطقة الحلّ المشترك للمتباينتين التاليتين :

$$ص \leq س + ١$$

$$ص > س - ٢$$

الحلّ :

أولًا : مثّل منطقة حلّ المتباينة $ص \leq س + ١$ بيانيًا

$$\text{المعادلة المناظرة } ص = س + ١$$

كوّن جدول القيم :

س	١	٠	-١
ص	٢	١	٠

• أرسم خطّ الحدود متّصلًا

• اختر نقطة لا تنتمي إلى خطّ الحدود

ولتكن نقطة الأصل $(٠, ٠)$

ونعوّض بها في المتباينة $١ + ٠ \leq ٠$

$١ \leq ٠$ (عبارة غير صحيحة) ، إذاً $(٠, ٠) \notin$ منطقة الحلّ

لذلك ، ظلّل الجانب الآخر من الرسم والذي يمثّل منطقة حلّ المتباينة .

ثانيًا : مثّل منطقة حلّ المتباينة $ص > س - ٢$ بيانيًا

$$\text{المعادلة المناظرة } ص = س - ٢$$

كوّن جدول القيم :

س	١	٠	-١
ص	١	٢	٣

• أرسم خطّ الحدود متقطّعًا .

• اختر نقطة لا تنتمي إلى خطّ الحدود ، ولتكن

نقطة الأصل $(٠, ٠)$ ونعوّض بها في

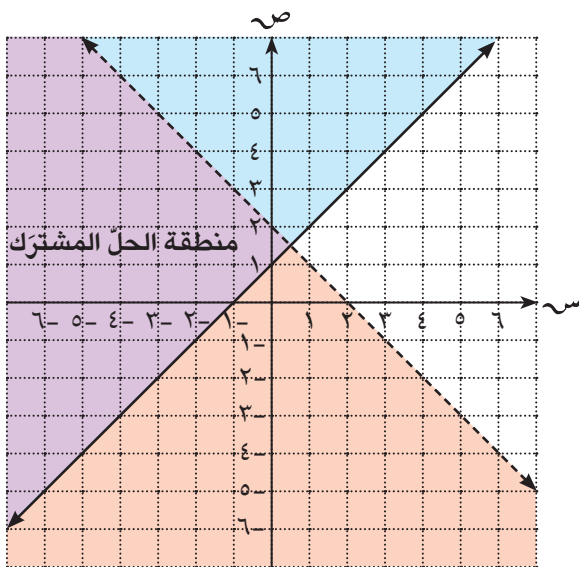
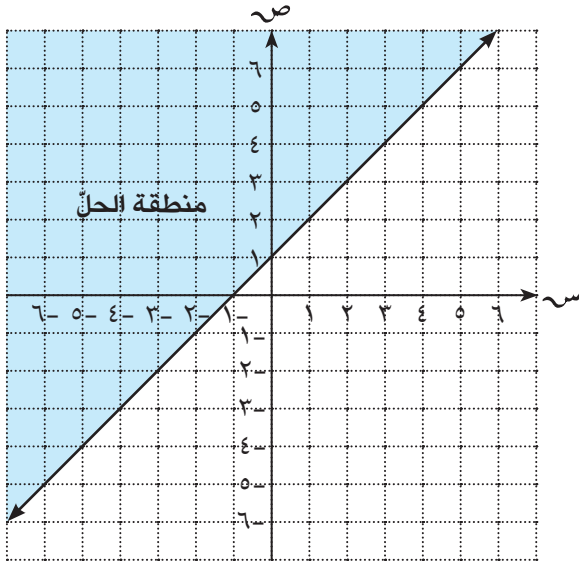
المتباينة $٠ - ٢ > ٠$

$٢ > ٠$ (عبارة صحيحة)

• إذاً $(٠, ٠) \in$ منطقة الحلّ

لذلك ، ظلّل الجانب الذي يحوي نقطة الأصل والذي يمثّل منطقة حلّ المتباينة .

المنطقة التي تمثّل منطقة الحلّ هي تقاطع منطقتي الحلّ للمتباينتين (منطقة الحلّ المشترك)



مثل بيانياً منطقة الحلّ المشترك للمتباينتين :

ص $>$ ٣ س - ١

المعادلة المناظرة

ص =

جدول القيم :

ص =			
			س
			ص

• أرسم خطّ الحدود (.....) .

• عوّض بالنقطة (..... ،)

..... $>$

عبارة

• ظلّل منطقة الحلّ لكلّ من المتباينتين .

• عيّن على الرسم منطقة الحلّ المشترك .

ص $<$ س - ١

المعادلة المناظرة

ص =

جدول القيم :

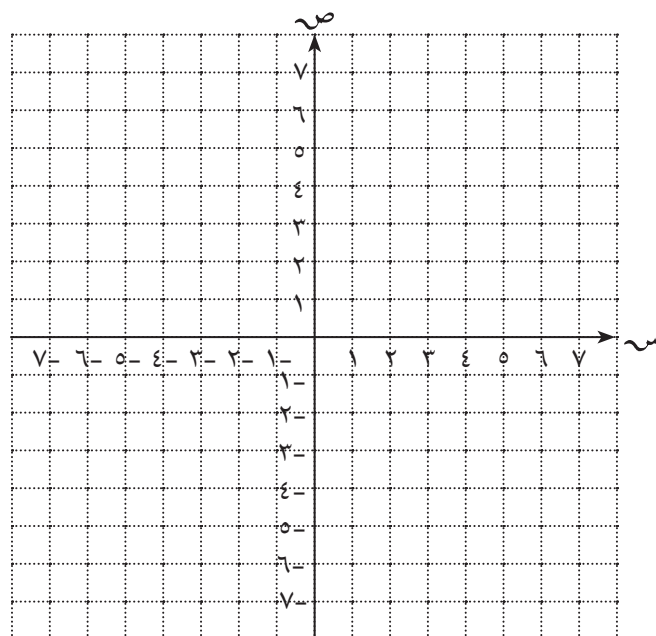
ص =			
			س
			ص

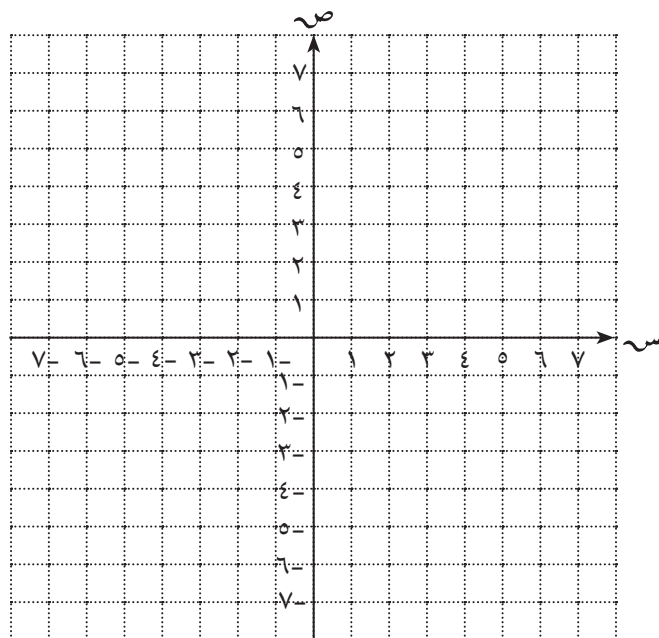
• أرسم خطّ الحدود (.....) .

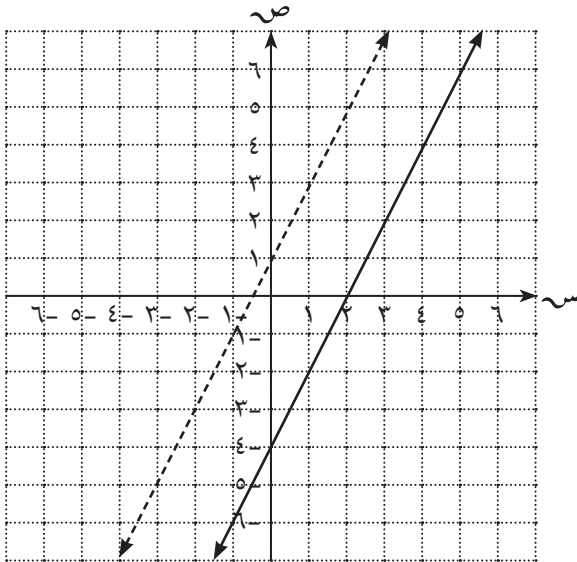
• عوّض بالنقطة (..... ،)

..... $<$

عبارة



$$ص > س , ص \geq ع$$
This image shows a blank sheet of white paper designed for handwriting practice. It features ten horizontal blue ruling lines spaced evenly down the page. A single vertical red margin line runs down the center of the page, creating two equal-width columns for writing. The paper is otherwise completely blank, with no text or other markings.



ظَلِّلْ فِي الشَّكْلِ الْمَقَابِلِ مَنْطِقَةَ الْحَلِّ
لِكُلِّ مِنَ الْمَتَبَايِنَتَيْنِ :

$$ص < ٢ + س$$

$$ص \geq ٢ - س$$

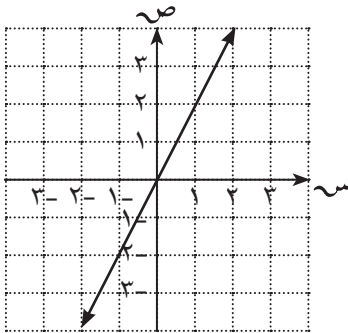
ماذا تلاحظ ؟

تمارين ذاتية :

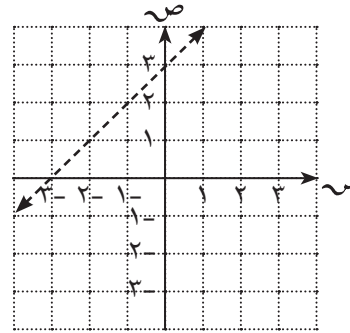


١ ظَلِّلْ مَنْطِقَةَ حَلِّ كُلِّ مَتَبَايِنَةٍ فِي مَا يَلِي :

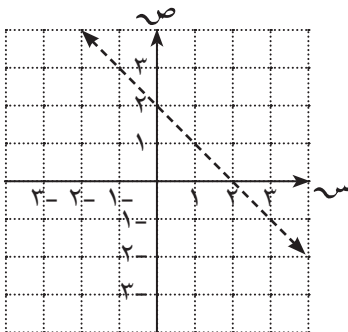
ب) $ص \geq ٢ - س$



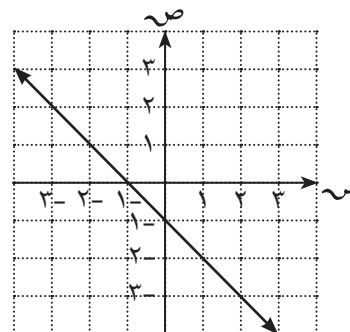
أ) $ص < ٣ + س$



د) $ص > ٢ - س$

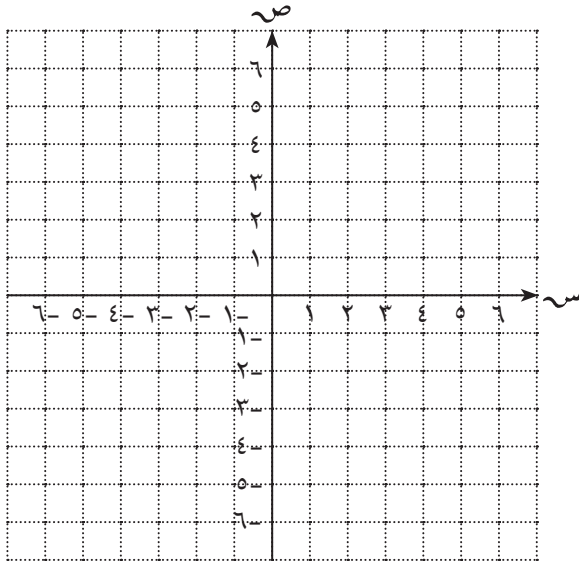


ج) $ص \leq -س - ١$



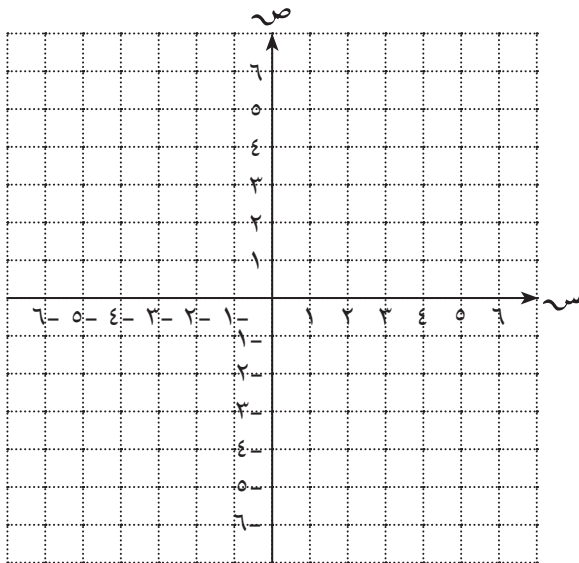
٢ مَثَلٌ بَيَانِيًّا مَنْطِقَةَ الْحَلِّ لِلْمَتَبَايِنَةِ :

$$ص < س + ١$$



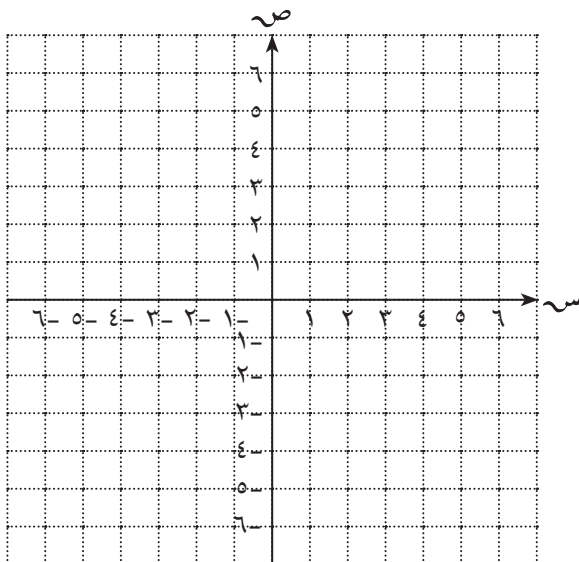
٣ مَثَلٌ بَيَانِيًّا مَنْطِقَةَ الْحَلِّ لِلْمَتَبَايِنَةِ :

$$ص \geq ١ - س$$



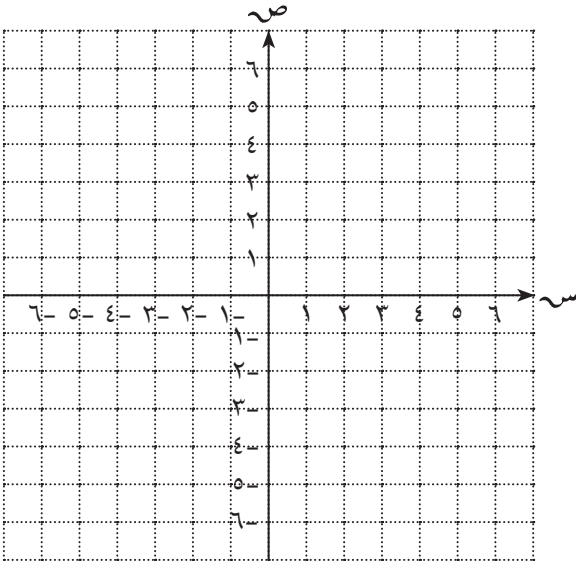
٤ مَثَلٌ بَيَانِيًّا مَنْطِقَةَ الْحَلِّ الْمَشْتَرَكِ لِلْمَتَبَايِنَتَيْنِ :

$$ص < ٣ س ، ص \leq س - ٢$$



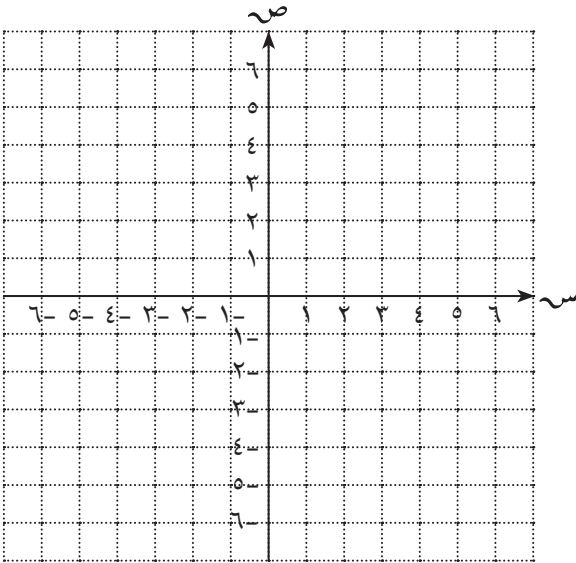
٥ مثل بيانيًا منطقة الحلّ المشترك للمتباينتين :

$$ص < ٢س - ١ ، ص \geq ١ - ١$$



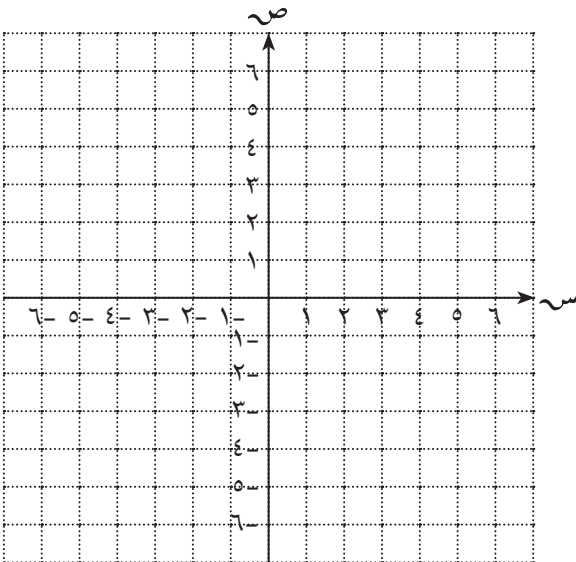
٦ مثل بيانيًا منطقة الحلّ المشترك للمتباينتين :

$$ص \geq ٢س - ٣ ، ص < ٢س + ١$$



٧ مثل بيانيًا منطقة الحلّ المشترك للمتباينتين :

$$ص \leq -س + ١ ، ص \geq ٣س + ١$$



تقويم الوحدة التعليمية السادسة

Unit Six Assessment

أولاً: البنود المقالية

١ أوجد ميل المستقيم المارّ بالنقطتين في كلّ من الحالات التالية :

(ب) $(-3, 6)$ ، $(5, 0)$

(أ) $(2, 5)$ ، $(3, -4)$

(د) $(-3, 0)$ ، $(-4, 4)$

(ج) $(2, 4)$ ، $(5, 4)$

٢ أوجد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات والجزء المقطوع من محور السينات لكلّ من

المستقيمات التالية :

(ب) $2ص = 4س + 5$

(أ) $4ص = 9س + 4$

(د) $5س + 6ص - 2 = 0$

(ج) $3س + 5ص = 1$

٣ حُدّ المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة في كلّ من الحالات التالية :

١ هـ الذي يمرّ بالنقطتين $(٤, ٢)$ ، $(١٠, ٥)$

و الذي معادلته: ٢ ص - ٤ س + ٥ = ٠

ب) ك الذي يمرّ بالنقطتين $(٢, ٤)$ ، $(٥, ٧)$

ل الذي يمرّ بالنقطتين $(5, 3)$ ، $(6, 2)$ $\longleftrightarrow$

٥ أوجد مجموعة حلّ المعادلتين آنياً جبرياً :

ص ۲ + س ۴ - = ۰ ، ص - س = ۲

٤ أوجد مجموعة حلّ المعادلتين آنياً جبرياً :

ص = ص - ۳ ، ص - ۲ = ص - ۳

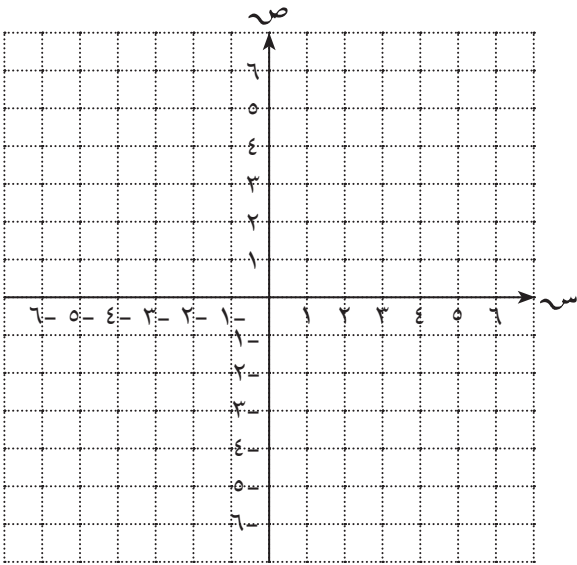
٦ أوجد مجموعة حلّ المعادلتين آنياً بيانياً :

$$ص - س = ٢$$

$$ص = س - ٤$$

$$ص - س = ٢$$

$$ص = س - ٤$$



.....

.....

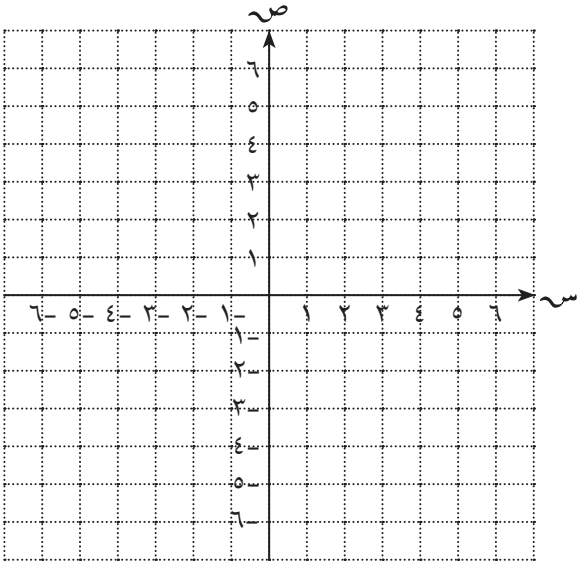
.....

.....

٧ أوجد مجموعة حلّ المعادلتين آنياً بيانياً :

$$ص = ٣س + ٥$$

$$ص - ٣س = ٠$$



.....

.....

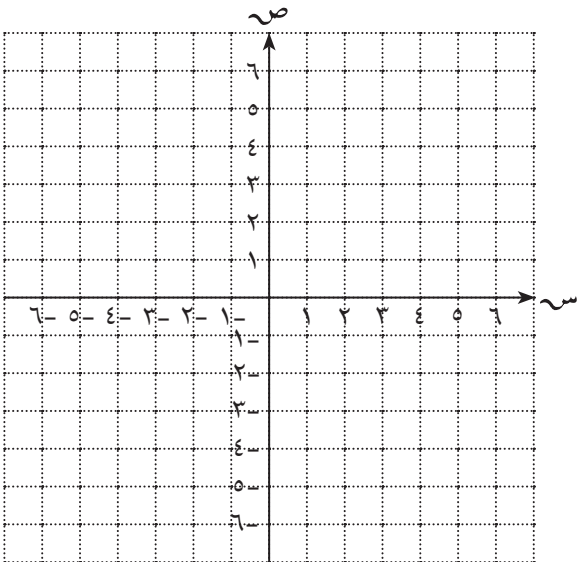
.....

.....

٨ أوجد مجموعة حلّ المعادلتين آنياً بيانياً :

$$ص - \frac{١}{٢}س = ٣$$

$$ص = \frac{١}{٢}س + ١$$



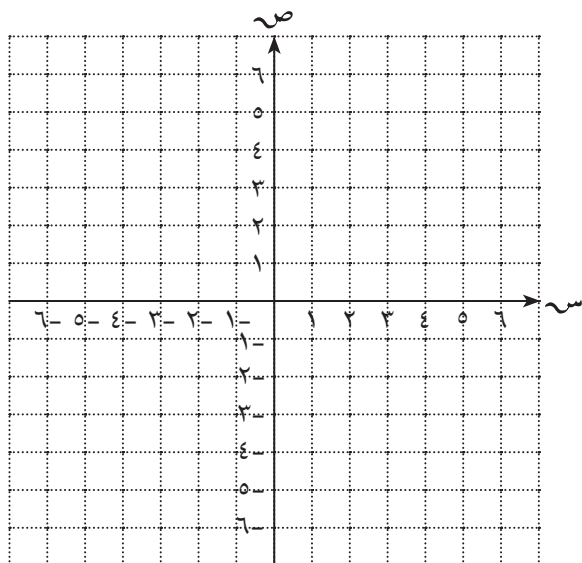
.....

.....

.....

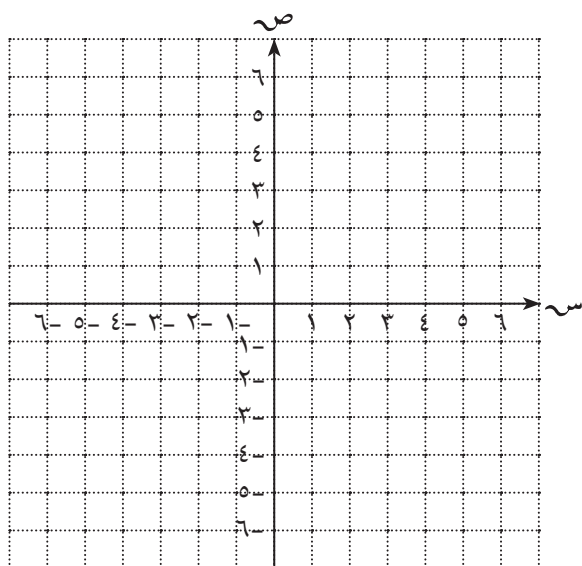
.....

$$ص \geq س + ٤ , ص < س - ٣$$

This image shows a full page of white paper with ten horizontal dashed lines, evenly spaced from top to bottom. These lines are typical of primary-ruled notebook paper used for teaching handwriting or basic writing skills. There are no margins, text, or other markings on the page.

١٠ مثل بياناً منطقة الحلّ المشترك للمتباينتين :

$$ص - س - ۲ \leq ۰, \quad ص \geq ۱ - س$$

This image shows a full page of white paper with ten horizontal dashed lines, typical of primary school handwriting practice paper. The lines are evenly spaced and extend across the entire width of the page. There is no text or other markings on the paper.

ثانيًا: البنود الموضوعية

في البنود (١ - ١٠) ، ظلّل ☐ أ إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلّل ☐ ب إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١	ميل المستقيم الأفقي يساوي صفرًا .	☐ أ	☐ ب
٢	ميل المستقيم الموازي لمحور الصادات يساوي صفرًا .	☐ أ	☐ ب
٣	الجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته : $٣س + ٣ص = ١$ هو ١	☐ أ	☐ ب
٤	إذا كان المستقيمان اللذان ميلاهما $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٦}{٣}$ متعامدين ، فإنّ ك تساوي ٤ .	☐ أ	☐ ب
٥	المستقيم الذي معادلته $ص = ٥$ ليس له ميل .	☐ أ	☐ ب
٦	المستقيمان $ص = ٢س + ٣$ ، $ص = ٤س - ١$ متوازيان .	☐ أ	☐ ب
٧	المستقيم الذي معادلته $ص = ٣$ والمستقيم الذي معادلته $س = ٢$ مستقيمان متعامدان .	☐ أ	☐ ب
٨	إذا كان ميل $ع$ هو ٣ ، فإنّ ميل $ع$ العمودي عليه $\frac{١}{٣}$	☐ أ	☐ ب
٩	النقطة (٢ ، ٠) هي أحد حلول المتباينة $ص \leq ٣س - ٢$	☐ أ	☐ ب
١٠	مجموعة حلّ المعادلتين $ص = ٣س - ٢$ ، $ص = ٢س + ٢$ هي $\{ (١٠ ، ٤) \}$	☐ أ	☐ ب

في البنود (١١ - ١٨) ، لكلّ بند أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلّل الإجابة الصحيحة .

١١ الجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته :

٣ ص - س + ١ = ٠ هو :

- أ ١ - ☐ ب ١ + ☐ ج $\frac{1}{3}$ - ☐ د $\frac{1}{3}$ ☐

١٢ ميل المستقيم المتعامد مع المستقيم : ٢ ص = -٤ س + ٣ هو :

- أ ٢ ☐ ب $\frac{1}{2}$ ☐ ج ١ ☐ د $\frac{1}{2}$ - ☐

١٣ مجموعة حلّ المعادلتين :

٣ ص = ١ - س ، ٢ ص = ١ + س هي :

- أ $\{(1, 0)\}$ ☐ ب $\{(0, 2)\}$ ☐
ج $\{(1, 0)\}$ ☐ د $\emptyset$ ☐

١٤ النقطة التي تنتمي إلى منطقة الحلّ المشترك للمتباينتين

٣ ص + ٣ < ، ٢ ص - ٣ > هي :

- أ $(1, 2)$ ☐ ب $(1, 3)$ ☐
ج $(2, 2)$ ☐ د $(1, 4)$ ☐

١٥ المستقيم الموازي للمستقيم : ٣ ص = ٦ س + ٢ هو :

- أ ٥ ص = ٢ س + ☐ ب ٢ ص = ٣ س - ☐
ج ٣ ص = س + ٢ ☐ د ٣ ص = ٢ س + ☐

١٦ إذا كان المستقيمان اللذان ميلاهما $\frac{2}{3}$ ، $\frac{4}{3}$ متوازيين ، فإنّ ك تساوي :

- أ $\frac{3}{4}$ - ☐ ب $\frac{1}{3}$ ☐ ج ٣ ☐ د $\frac{4}{3}$ - ☐

١٧ أ ب ج د مربع قطراه $\overline{أ ج}$ ، $\overline{ب د}$ حيث $أ (٥ ، ٤)$ ، $ج (-٢ ، ٣)$ فإن ميل $ب د$ يساوي :

د $\frac{1}{7} -$

ج $\frac{1}{7}$

ب $7 -$

أ 7

١٨ إذا كان $م_١$ ، $م_٢$ ميلَي مستقيمين متوازيين غير رأسيين وغير أفقيين ، فإن :

ب $م_١ - م_٢ = ٠$

أ $م_١ + م_٢ = ٠$

د $م_١ - م_٢ \neq ٠$

ج $م_١ \times م_٢ = ٠$

المشروع الثالث : المتجر الصغير

يمكن استخدام المعادلات الخطية وكذلك المتباينات في اتخاذ القرار المناسب في حياتنا اليومية لصرف ميزانية معينة .

خطة العمل :

لدى ساره ١٥ دينارًا . ساعد ساره في معرفة بعض الخيارات الممكنة التي يمكن شراؤها من (عدد الدفاتر - عدد الأقلام) إذا كان سعر القلم دينارًا وسعر الدفتر دينارين .

خطوات تنفيذ المشروع :



◀ أكتب معادلة تعبر عن عدد الدفاتر والأقلام التي يمكن شراؤها بسعر ١٥ دينارًا ، إذا كان سعر القلم دينارًا وسعر الدفتر دينارين .

◀ اصنع جدولًا من ٣ قيم مختلفة للأقلام والدفاتر التي يمكن شراؤها بسعر ١٥ دينارًا .

◀ قُم بتمثيل هذا الجدول بيانيًا لتوضيح العلاقة بين عدد الدفاتر وعدد الأقلام التي يمكن شراؤها بسعر ١٥ دينارًا .
(ملاحظة : لا يمكن أن يكون عدد الدفاتر أو الأقلام سالبًا .)

علاقات وتواصل :

يمكن للمجموعات تبادل الأوراق للتأكد من صحة ودقة البيانات وتطبيق المشروع .

عرض العمل :

تعرض كل مجموعة عملها وتناقش خطوات تنفيذ العمل .

المراجع

- الرياضيات ، الصف التاسع ، الطبعة الأولى ٢٠٢٤ - ٢٠٢٥ م ،
وزارة التربية ، قطاع البحوث التربوية والمناهج .
- الرياضيات ، الصف التاسع ، الطبعة التجريبية ٢٠٢٣ - ٢٠٢٤ م ،
وزارة التربية ، قطاع البحوث التربوية والمناهج .

مصادر بعض الصور

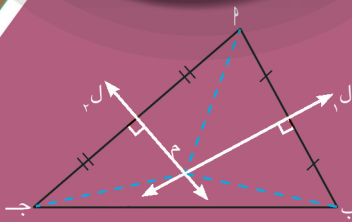
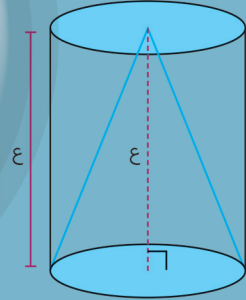
- صفحة ٦٥ : الصورة مزوّدة من لجنة الرياضيات .



الرياضيات

الصف التاسع

الفصل الدراسي الثاني - القسم الثاني





الرياضيات

الصف التاسع

الفصل الدراسي الثاني - القسم الثاني

تأليف

أ. دلال مبارك فلاح الحجرف (رئيسًا)

أ. نوره عبد الله أبورقبة العتيبي أ. ساره زايد شينان العجمي

أ. وسميه بادي هادي الرشيدي أ. عصام عبد الهادي السيد حسن

أ. عفاف عبد العزيز يعقوب الصانع

الطبعة الأولى

١٤٤٧ هـ

٢٠٢٥ - ٢٠٢٦ م



أ. سمير عبدالله أحمد مرسي

ذات السلاسل - الكويت

أودع بمكتبة الوزارة تحت رقم (٩٢) بتاريخ ١٦ / ١ / ٢٠٢٦ م





حضرة صاحب السمو الشيخ مشعل آل أحمد آل جابر آل صباح
أمير دولة الكويت

H.H. Sheikh Meshal AL-Ahmad AL-Jaber AL-Sabah
Amir Of The State Of Kuwait



سَمُو الشَّيْخِ صَبَّاحٍ خَالِدٍ الْحَمَادِ السَّبَّاحِ
وَلِيِّ عَهْدِ دَوْلَةِ الْكُوَيْتِ

H. H. Sheikh Sabah Khaled Al-Hamad Al-Sabah
Crown Prince Of The State Of Kuwait

الحمد لله ربّ العالمين والصلاة والسلام على سيد المرسلين محمد بن عبدالله وصحبه أجمعين.

إنطلاقاً من التوجيهات السامية لحضرة صاحب السموّ أمير البلاد الشيخ مشعل الأحمد الجابر الصباح ، حفظه الله ورعاه ، بضرورة الإسراع في تنفيذ كافّة مشاريع الدولة التنموية ومن ضمنها على وجه الخصوص المشاريع التعليمية ، وتماشياً مع رؤية الكويت ٢٠٣٥ والتي تنادي بكويت جديدة فقد شرعت وزارة التربية في تطوير مناهجها التعليمية مستندة ، في ذلك إلى أهميّة رأس المال البشري كعنصر أساسي في تنمية الوطن ورفعته.

ولأنّ المناهج التعليمية هي قاعدة الهرم التعليمي إلى جانب المعلّم والمتعلّم ، وتعدّ أحد الروافد المهمّة في خلق جيل متعلّم وواعٍ ، قادر على المشاركة في بناء المجتمع ، ولأنّ المناهج عبارة عن كمّ الخبرات التربوية والتعليمية التي تُقدّم للمتعلّم ، فقد أولت الوزارة أهميّة بتطوير المناهج حسب المعايير العلمية وذلك لتحقيق نقلة نوعية في الشكل والمضمون ، وإيماناً بأهميّتها وإنطلاقاً من أنّها ذات صفة عالمية مع الأخذ في الاعتبار خصوصية المجتمع الكويتي وبيئته المحليّة ، ملتزمة بأن تصبّ جميعها في تعزيز الهوية الوطنية وبعقلية منفتحة على الآخرين مع احترام حقوق الإنسان وحرّياته الأساسية والتمسك بمبادئ الإسلام والتسامح من جهة ، وغزيرة بمهارات القرن الواحد والعشرين لتعزيز المفاهيم الرياضية لجميع المتعلّمين من جهة أخرى لكي يكونوا في طليعة المنافسين في المسابقات العلمية والدولية ، وذلك عبر بناء الخطط التعليمية المعتمدة من قطاع المناهج مؤكّدين على أهميّة التكامل بين الجوانب العلمية والتطبيقية حتّى تكون ذات طبيعة وظيفية مرتبطة بحياة المتعلّم ، متضمّنة في الكثير من بنودها التمارين ذات المستويات العليا في التفكير والفهم والتحليل والتركيب .

وقد تمّت صياغة وترتيب الكتاب المدرسي في منهجية خاصة ذات هيكل ومجالات معينة تتمحور حول العدّ والجبر والهندسة والقياس ، وأخيراً الإحصاء والاحتمال .

فقد تمّ بناء الكتاب وفق منهجية تربوية حديثة تراعي التدرّج المنطقي في المفاهيم والمهارات لبناء معرفة رياضية تراكمية تراعي الفروق الفردية بين المتعلّمين وتعزّز التفكير الرياضي العميق .

كما ويحوي الكتاب على وحدات تعليمية وموضوع محوري يتمّ إبرازه في مقدّمة كلّ وحدة ، تساعد على تنمية الفهم البنائي وربط المفاهيم الجديدة مع سياقات من واقع الحياة .

وحرصنا على إدراج التمارين المتنوعة مع نهاية كل درس ، والتي تنوّعت بين الأسئلة المباشرة والمسائل الحياتية وأسئلة مهارات تفكير عليا ، مثل التبرير والنقد وتعدّد طرق الحلّ والاستنتاج .

تنتهي كلّ وحدة بقسم خاصّ للتقويم لقياس مدى تحقيق الأهداف متضمّنة أسئلة شاملة للمفاهيم والمهارات التي تمّ تناولها ، حتّى تكون أداة تمكّنا من تحديد الاحتياجات التعليمية لاحقا .

ممّا سبق من معطيات وغيرها من الجوانب التعليمية والتربوية ، فقد تمّت صياغة وإعداد كتب الرياضيات لتحقيق نقلة نوعية ذات جودة عالية تلبيّ الطموحات المطلوبة وتكون نافذة واسعة تُطلّ على آمالنا وتطلّعاتنا في المستقبل لما نهدف إليه من تأسيس فكر رياضي في عقول أجيالنا القادمة تنهض بها أمّتنا وتضعها في مكانها المناسب في الصفوف المتقدّمة ، ويُشار إليها بالبنان مع كلّ محفل.

المحتويات

الجزء الأول :

الوحدة التعليمية الأولى :

الأعداد الحقيقية والعمليات عليها

الوحدة التعليمية الثانية :

التحليل والمعادلات

الوحدة التعليمية الثالثة :

الحدوديات النسبية - الهندسة الإحداثية

الوحدة التعليمية الرابعة :

هندسة التحويلات - الإحصاء والاحتمال

الجزء الثاني :

الوحدة التعليمية الخامسة :

العلاقات والدوال

الوحدة التعليمية السادسة :

المعادلات الخطية والمتباينات الخطية

الوحدة التعليمية السابعة :

هندسة المثلث

الوحدة التعليمية الثامنة :

النسبة المئوية - الهندسة والقياس

الوحدة التعليمية السابعة

هندسة المثلث

رقم الصفحة	المحتوى
١٣٦	معايير المنهج ومؤشرات الأداء للوحدة التعليمية السابعة
١٣٧	مخطط تنظيمي للوحدة التعليمية السابعة
١٣٨	هل أنت مستعدّ ؟ للوحدة التعليمية السابعة
١٤٠	(١ - ٧) القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفَي ضلعين في مثلث
١٥٣	(٢ - ٧) القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة إلى منتصف الوتر
١٦١	(٣ - ٧) محاور أضلاع المثلث
١٦٨	(٤ - ٧) منصّفات الزوايا الداخلة للمثلث
١٧٨	(٥ - ٧) الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه
١٨٣	(٦ - ٧) القطع المتوسط للمثلث
١٩١	تقويم الوحدة التعليمية السابعة

الوحدة التعليمية الثامنة

النسبة المئوية - الهندسة والقياس

رقم الصفحة	المحتوى
٢٠٢	معايير المنهج ومؤشرات الأداء للوحدة التعليمية الثامنة
٢٠٣	مخطط تنظيمي للوحدة التعليمية الثامنة
٢٠٤	هل أنت مستعدّ؟ للوحدة التعليمية الثامنة
٢٠٨	(٨ - ١) تقدير النسبة المئوية.....
٢١٢	(٨ - ٢) النسبة المئوية للتزايد والنسبة المئوية للتناقص.....
٢١٨	(٨ - ٣) تطبيقات على تغيير النسبة المئوية.....
٢٢٣	(٨ - ٤) المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم.....
٢٢٨	(٨ - ٥) حجم الهرم القائم.....
٢٣٢	(٨ - ٦) حجم الكرة.....
٢٣٧	تقويم الوحدة التعليمية الثامنة.....
٢٤٢	المشروع الرابع.....

الوحدة التعليمية السابعة



هندسة المثلث

العلوم الهندسية والجسور

على الرغم من بساطة شكل المثلث ، فإنه يُخفي في داخله نظامًا هندسيًا بالغ الدقة ، لا زال العلماء والمهندسون يعتمدون عليه في تصميم التقنيات الحديثة .

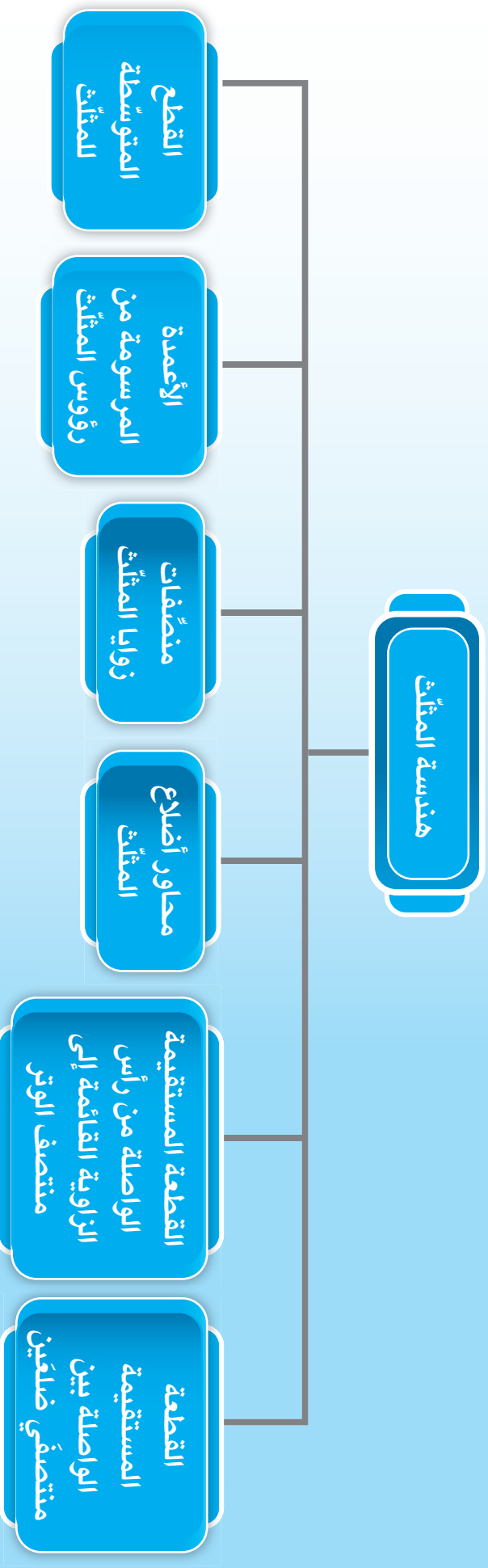
فعندما نرسم منصفًا لزاوية ، أو متوسطًا لضلع ، أو ارتفاعًا من رأس ، فإنّ هذه الخطوط لا تعمل بمعزل عن بعضها ، بل تتّجه دائمًا نحو نقطة توازن ثابتة ، وكأنّ المثلث يمتلك نظامًا داخليًا يوجّه عناصره نحو مركز واحد . هذه النقاط الخاصة ليست مجرد نهايات لتقاطع خطوط ، بل هي مفاتيح فهم الثبات الهندسي في الروبوتات ، واستقرار الطائرات المسيّرة ، وتوزيع القوى في الجسور والأبراج المعاصرة .

في هذه الوحدة ، سنقترب من هذا العالم الدقيق ، ونكتشف كيف تتلاقى هذه الخطوط المختلفة في نقطة واحدة داخل كلّ مثلث ، وما الذي يجعل هذه الحقيقة الهندسية أساسًا لفهم التوازن في العلوم الحديثة .



المجال	معايير المنهج	مؤشر الأداء
الهندسة والقياس	إستخدام التصوّر البصري والتعليل المكاني والنمذجة الهندسية لتمثيل عالمه المادّي ووصفه وحلّ مشكلاته .	التذكّر - التعرّف - الفهم - التعاون - العمل الجماعي - الاستكشاف والتقصّي - المقارنة والتمييز - العلاقات - التعليل - الاستدلال - الاستنتاج - التقويم - حلّ المشكلات - القوانين - التخطيط - الوسائط
	تحليل صفات وخصائص الأشكال الهندسية ثنائية وثلاثية الأبعاد ، وتنمية التفكير الرياضي حول العلاقات الهندسية ، والمقارنة بين الأشكال وتصنيفها .	

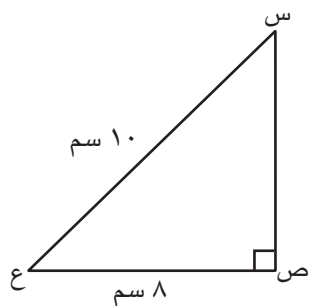
مخطط تنظيمي للوحدة التعليمية السابعة



هل أنت مستعد؟

١ في الشكل المقابل :

أوجد بالبرهان طول $ص$ ،
ثم أوجد مساحة المثلث .



٢ حلّ المعادلة التالية : $س = ٢ (س + ٣)$ حيث $س \geq ٣$

٣ أوجد ناتج كلّ مما يلي في أبسط صورة :

..... = $\frac{١}{٢} \times ١٥$ (أ) = $\sqrt{١٤٤}$ (ب)

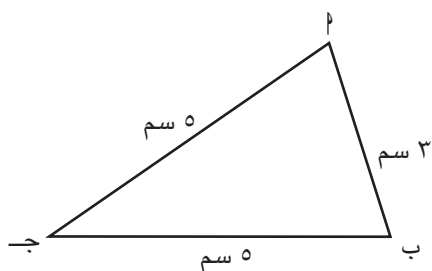
..... = $\sqrt{٩}$ (ج) = $٢٧ \times \frac{٢}{٣}$ (د)

..... = $١٨ \times \frac{٣}{٢}$ (هـ) = $٣٩ \times \frac{١}{٣}$ (و)

..... = $\sqrt{١٠٠}$ (ز)

٤ في الشكل المقابل ، أكمل :

(أ) نوع المثلث $أ$ ب ج بالنسبة إلى أضلاعه



(ب) محيط المثلث $أ$ ب ج =

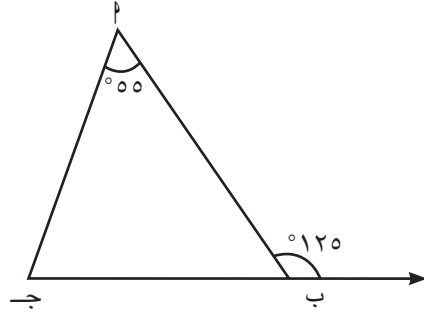
٥ في الشكل المقابل ، أكمل :

أ) نوع المثلث س ص ع بالنسبة إلى أضلاعه

ب) $\angle \text{س} = (\angle \text{ع}) = (\angle \text{ص}) = \dots\dots\dots$

٦ أكمل ما يلي :

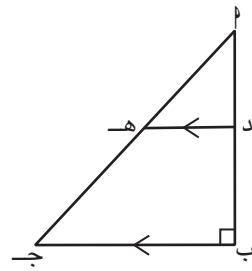
أ)



$\angle \text{ج} = \dots\dots\dots$

السبب =

ج)

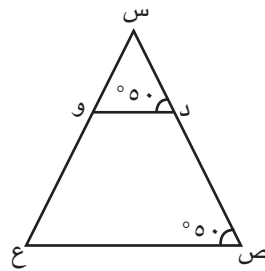


$\angle \text{د ه} = \dots\dots\dots$

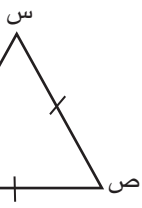
السبب =

٧ في الشكل التالي :

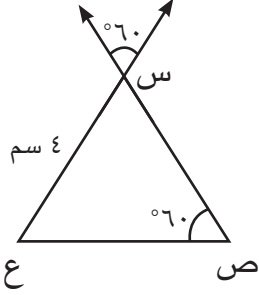
أثبت أن : د و // ص ع



.....
.....
.....



ب)

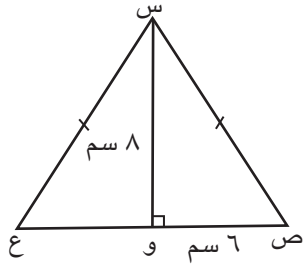


$\angle \text{س} = (\angle \text{ب}) = \dots\dots\dots$

$\angle \text{ج} = \dots\dots\dots$

السبب =

د)



$\angle \text{د ه} = \dots\dots\dots$

السبب =

٨ في الشكل المقابل : النقطة و

تقسم أ ب بنسبة ٢ : ١ من جهة أ

أكمل ما يلي :

أ) $\text{أ و} = \dots\dots\dots$

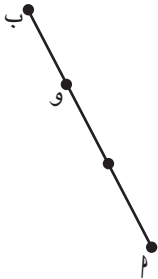
$\text{و ب} = \dots\dots\dots$

ب) $\text{أ ب} = \dots\dots\dots$

$\text{أ و} = \dots\dots\dots$

ج) $\text{أ ب} = \dots\dots\dots$

$\text{و ب} = \dots\dots\dots$



القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفَي ضلعين في مثلث

٧ - ١

The Midsegment of a Triangle

سوف تتعلّم : توظيف نظرية القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفَي ضلعين في مثلث لحلّ تمارين هندسية .

العبارات والمفردات :

Segment

قطعة مستقيمة

Triangle

مثلث

استكشاف (١)



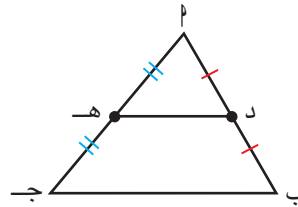
اللوازم

أدوات هندسية .

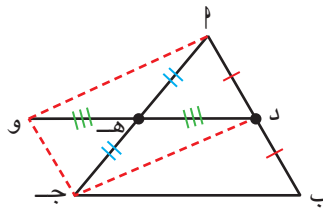
تذكّر



من خواصّ متوازي الأضلاع
القطران ينصف كلّ منهما الآخر



في المثلث $\triangle PAB$:
د منتصف $\overline{PA}$ ، ه منتصف $\overline{PB}$
ما العلاقة بين د ه ، ب ج ؟



العمل : نمدّ د ه إلى و ، حيث $DH = HW$
ثمّ نصل $\overline{PW}$ ، $\overline{DB}$ ، و ج .

١ هل الشكل $\triangle DGH$ و متوازي أضلاع ؟ لماذا ؟

٢ $\overline{AD} // \overline{DH}$ ، = د ه

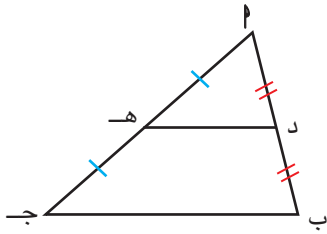
٣ هل الشكل $\triangle DGH$ و متوازي أضلاع ؟ لماذا ؟

٤ د و $//$ ، د و =

٥ د ه $//$ ، د ه = ب ج

نظرية :

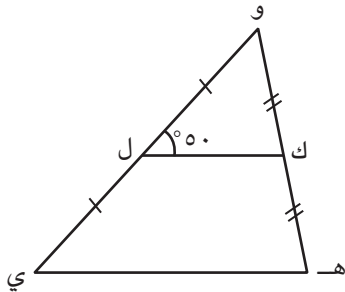
القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفَي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث ، وطولها يساوي نصف طول هذا الضلع .



في المثلث PBJ جـ :
إذا كان D منتصف PB ، H منتصف BJ
فإن $HD \parallel PJ$ ، $HD = \frac{1}{2} PJ$

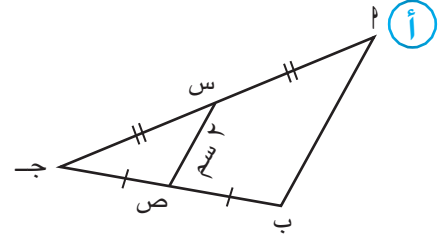
دورك الآن (١)

في كل من المثلثات التالية ، أكمل (دون استخدام الأدوات الهندسية) :



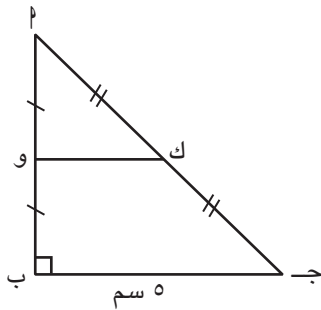
(ب)

..... = $\angle (Y)$



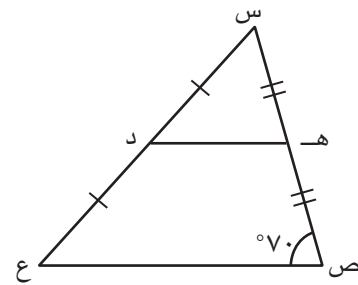
(أ)

..... = $\angle P$



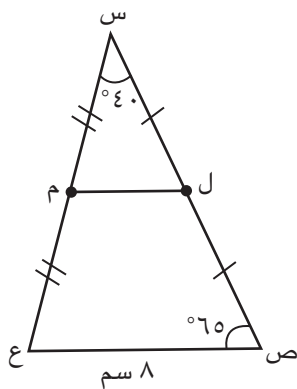
(د)

..... = $\angle K$



(ج)

..... = $\angle (S \text{ هـ } D)$



مثال (١) :

في الشكل المقابل SM SV ع مثلث فيه :
ل منتصف SM ، M منتصف SV ،
 $SM = 8$ سم ، $\angle (S \text{ م } E) = 40^\circ$ ، $\angle (S \text{ ص } E) = 65^\circ$.
أوجد بالبرهان : (١) طول LM
(٢) $\angle (S \text{ ل } M)$
(٣) $\angle (S \text{ م } L)$

الحل :

المعطيات : ل منتصف س ص ، م منتصف س ع ، ص ع = ٨ سم ،

$$\angle (ص س ع) = ٤٠^\circ ، \angle (س ص ع) = ٦٥^\circ$$

المطلوب : إيجاد : (١) طول ل م (٢) $\angle (س ل م)$ (٣) $\angle (س م ل)$

البرهان : في Δ س ص ع :

∴ ل منتصف س ص ، م منتصف س ع (معطى)

∴ ل م = $\frac{1}{2}$ ص ع ، ل م // ص ع (نظرية)

∴ ص ع = ٨ سم (معطى)

$$\therefore ل م = ٨ \times \frac{1}{2} = ٤ \text{ سم}$$

∴ $\angle (س ل م) = \angle (ص س ع) = ٤٠^\circ$ (بالتناظر والتوازي)

∴ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلية = ١٨٠°

$$\therefore \angle (س م ل) = ١٨٠^\circ - (\angle (س ل م) + \angle (ص س ع)) = ١٨٠^\circ - (٤٠^\circ + ٦٥^\circ) = ٧٥^\circ$$

دورك الآن (٢)



في الشكل المقابل ، أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب

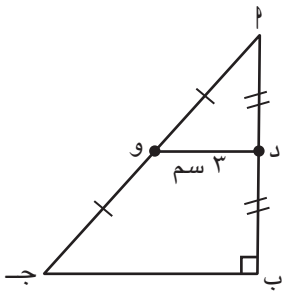
د منتصف أ ب ، و منتصف أ جـ ،

$$\angle (أ) = ٤٠^\circ ، د و = ٣ \text{ سم}$$

أوجد بالبرهان : (١) طول ب جـ

(٢) $\angle (أ د و)$

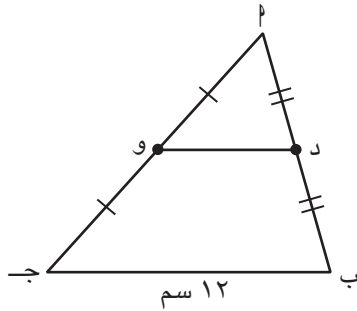
(٣) $\angle (أ د جـ)$



المعطيات :

المطلوب :

البرهان :



مثال (٢) :

أ ب ج مثلث فيه :

د منتصف أ ب ، و منتصف أ ج

أ ب = ١٠ سم ، أ ج = ١٣ سم ، ب ج = ١٢ سم .

أوجد بالبرهان : (١) طول د و

(٢) محيط Δ أ د و .

الحل :

المعطيات : أ ب ج مثلث فيه د منتصف أ ب ، و منتصف أ ج

أ ب = ١٠ سم ، أ ج = ١٣ سم ، ب ج = ١٢ سم .

المطلوب : إيجاد (١) طول د و

(٢) محيط Δ أ د و

البرهان : في Δ أ ب ج :

(معطى) $\therefore$ د منتصف أ ب ، و منتصف أ ج

(نظرية) $\therefore$ د و $\parallel$ ب ج ، د و = $\frac{1}{2}$ ب ج

$\therefore$ د و = $12 \times \frac{1}{2} = 6$ سم

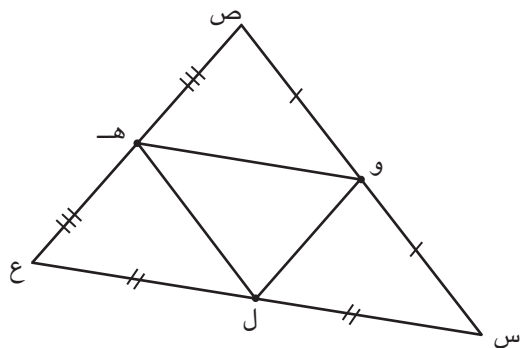
د = $10 \times \frac{1}{2} = 5$ سم

و = $13 \times \frac{1}{2} = 6,5$ سم

$\therefore$ محيط Δ أ د و = مجموع أطوال أضلاعه

$5 + 6,5 + 6 =$

$= 17,5$ سم



المثلث س ص ع فيه :

س ص = ٢٠ سم ، ع ص = ١٦ سم ،
س ع = ٢٤ سم ، و ، هـ ، ل منتصفات
س ص ، ع ص ، س ع على الترتيب .
أوجد بالبرهان محيط المثلث ل هـ و .

المعطيات :

المطلوب : إيجاد محيط Δ

البرهان : في المثلث س ص ع :

(معطى) $\therefore$ و منتصف س ص ، هـ منتصف ع ص

(نظرية) $\therefore$ و هـ = $\frac{1}{2}$ س ع = $\frac{1}{2} \times ٢٤$ سم = ١٢ سم

$\therefore$ ل منتصف ، هـ منتصف

(نظرية) $\therefore$ ل هـ = = $\frac{1}{2} \times$ =

$\therefore$ منتصف ، منتصف

(نظرية) $\therefore$ ل و = = $\frac{1}{2} \times$ =

محيط Δ ل و هـ = + + = سم

مثال (٣) :

في الشكل المقابل ، أ ب ج د مستطيل فيه :

س ، ص ، ع ، ل منتصفات أضلاعه

أثبت أن س ص = ع ل

الحل :

المعطيات : أ ب ج د مستطيل

س ، ص ، ع ، ل منتصفات أضلاع المستطيل

المطلوب : إثبات أن س ص = ع ل .

تذكر



من خواص المساواة
إذا كان أ = ب ، ب = ج ،
فإن أ = ج

البرهان : في Δ $أ ب ج$

$\therefore$ س منتصف $\overline{أ ب}$ ، ص منتصف $\overline{ب ج}$

س ص $= \frac{1}{2} أ ج$ (١) (نظرية)

في $\Delta ج د أ$:

$\therefore$ ع منتصف $\overline{ج د}$ ، ل منتصف $\overline{أ د}$

$\therefore$ ع ل $= \frac{1}{2} أ ج$ (٢) (نظرية)

من (١) ، (٢)

$\therefore$ س ص $=$ ع ل (من خواص المساواة)

دورك الآن (٤)

في الشكل المقابل ، Δ $أ ب ج$ قائم الزاوية في جـ

س منتصف $\overline{أ ب}$ ، ص منتصف $\overline{أ ج}$ ، ع منتصف $\overline{ب ج}$.

أوجد بالبرهان : (١) محيط المثلث س ع ص .

(٢) مساحة المثلث س ع ص .

المعطيات : المثلث $أ ب ج$ قائم الزاوية في جـ ،

س منتصف $\overline{أ ب}$ ، ص منتصف $\overline{أ ج}$ ،

ع منتصف $\overline{ب ج}$

المطلوب : إيجاد (١) محيط المثلث س ع ص .

(٢) مساحة المثلث س ع ص .

البرهان : في Δ $أ ب ج$ قائم الزاوية في جـ

(باستخدام نظرية فيثاغورث)

$$أ ب^2 = أ ج^2 + ب ج^2$$

$$\therefore أ ب = \sqrt{أ ج^2 + ب ج^2}$$

$$= \sqrt{٦٤ + ١٢٠} =$$

$$= \sqrt{١٨٤} = ١٣.٥٦ \text{ سم}$$

$\therefore$ س منتصف $\overline{أ ب}$ ، ع منتصف $\overline{ب ج}$

$\therefore$ س ع $= \frac{1}{2} أ ب$ (نظرية)

$$س ع = \frac{1}{2} \times ١٣.٥٦ = ٦.٧٨$$

بالمثل :

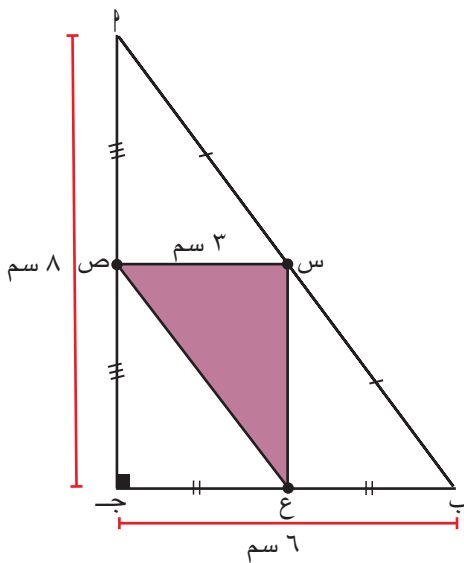
$\therefore$ ع منتصف $\overline{ب ج}$ ، ص منتصف $\overline{أ ج}$

$\therefore$ ع ص $=$ (نظرية)

$$= ٦.٧٨ \times \frac{1}{2} =$$

$$= ٣.٣٩$$

$\therefore$ محيط Δ س ع ص $= ٣.٣٩ + ٣.٣٩ + ١٣.٥٦ = ٢٠.٣٣ \text{ سم}$



تذكر

نظرية فيثاغورث

في المثلث القائم الزاوية ، يكون مربع طول الوتر مساوياً لمجموع مربعي طولَي الضلعين الآخرين .

تذكّر



عكس نظرية فيثاغورث

إذا كان مربع طول الضلع الأطول في مثلث مساوياً لمجموع مربعي طولَي الضلعين الآخرين ، فإنّ هذا المثلث يكون قائم الزاوية والزاوية القائمة هي المقابلة للضلع الأطول .

في Δ س ع ص :

$$(ص ع) = 2(5) = 2(25) = 50$$

$$(ص ص) + (س ع) = 2(3) + 2(4) = 9 + 16 = 25$$

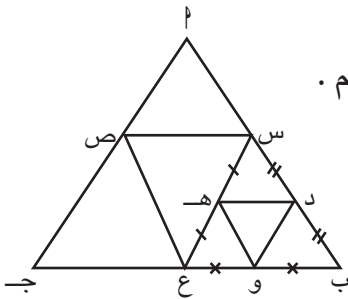
$$(ص ع) = 2(ص ص) + 2(س ع) :$$

Δ س ص ع قائم الزاوية في س (عكس نظرية فيثاغورث)

$$مساحة المثلث س ص ع = \frac{1}{2} \times ص \times ع$$

$$= \frac{1}{2} \times \dots \times \dots = \dots سم^2$$

عبّر عن فهمك



إذا كان س ، ص ، ع منتصفات أضلاع المثلث ا ب ج ، د ه ، و منتصفات أضلاع المثلث س ب ع ، كما هو موضح في الرسم . فما العلاقة بين محيط المثلث د ه و ومحيط المثلث ا ب ج ؟

مثال (٤) :

المثلث ك ل ع فيه و منتصف ك ل ، م منتصف ك ع .
أوجد بالبرهان قيمة س .

الحل :

المعطيات : ك ل ع مثلث فيه و منتصف ك ل ، م منتصف ك ع .

المطلوب : إيجاد قيمة س .

البرهان : في Δ ك ل ع

$\therefore$ و منتصف ك ل ، م منتصف ك ع (معطى)

$\therefore$ و م // ل ع ، و م = $\frac{1}{2}$ ل ع (نظرية)

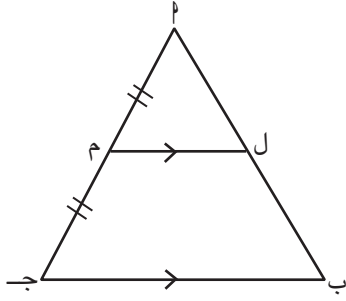
$$\therefore س - 6 = \frac{1}{2} (س + 8)$$

(بالضرب في العدد ٢ لكلا الطرفين)

$$٢س - ١٢ = س + ٨$$

$$٢س - ١٢ = س + ٨$$

$$\therefore س = ٢٠$$



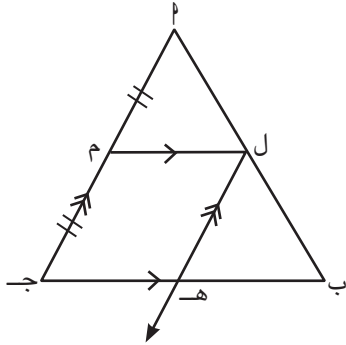
في الشكل المقابل ، المثلث $\triangle PML$ فيه :
 $\overline{ML} \parallel \overline{PB}$ ، $\overline{PM} \parallel \overline{PL}$ ،
 هل $\overline{ML}$ منتصف $\overline{PB}$ ؟

العمل :

نرسم $\overline{LH} \parallel \overline{PM}$ ويقطع $\overline{PB}$ في H .

أجب عن الأسئلة التالية :

١ هل الشكل $\triangle LHM$ يمثل متوازي أضلاع ؟ وضح ذلك .

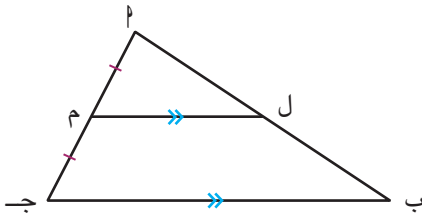


٢ هل $\triangle PML \cong \triangle LHM$ ؟ وضح ذلك .

وينتج من التطابق أن $\overline{ML} \cong \overline{LH}$.
 $\therefore \overline{ML}$ منتصف $\overline{PB}$.

نظرية :

إذا رُسم مستقيم من منتصف أحد أضلاع مثلث موازيًا ضلعًا آخر فيه ، فإنه ينصف الضلع الثالث .

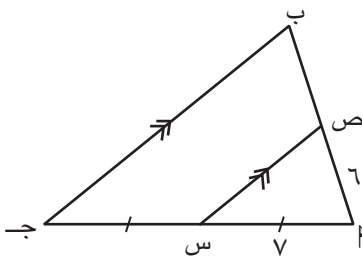


في المثلث $\triangle PML$:
 $\therefore \overline{ML}$ منتصف $\overline{PB}$ ، $\overline{PM} \parallel \overline{PL}$ ،
 $\therefore \overline{ML}$ منتصف $\overline{PB}$.

دورك الآن (٥)



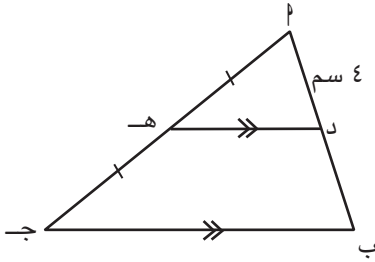
في الشكل المقابل ، أكمل ما يلي :



أ ص منتصف

ب طول $\overline{PS} =$

مثال (٥) :



أ ب جـ مثلث فيه : هـ منتصف أ جـ ،

د هـ // ب جـ ، أ د = ع سم .

أوجد بالبرهان طول أ ب .

الحل :

المعطيات : أ ب جـ مثلث ، هـ منتصف أ جـ ،

د هـ // ب جـ ، أ د = ع سم .

المطلوب : إيجاد طول أ ب .

البرهان : في المثلث أ ب جـ :

∴ هـ منتصف أ جـ ، د هـ // ب جـ

∴ د منتصف أ ب

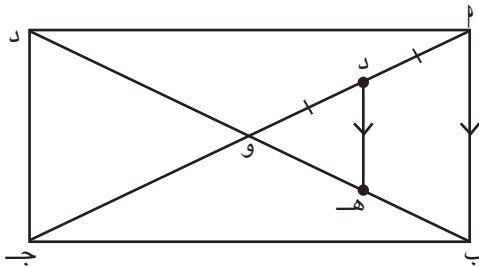
∴ أ د = د ب = ع سم

∴ أ ب = ٨ سم

(معطى)

(نظرية)

مثال (٦) :



أ ب جـ د مستطيل فيه : أ جـ = ١٢ سم ،

د هـ // أ ب ، د منتصف أ و .

أوجد بالبرهان طول ب هـ .

الحل :

المعطيات : أ ب جـ د مستطيل ، أ جـ = ١٢ سم

د هـ // أ ب ، د منتصف أ و .

المطلوب : إيجاد طول ب هـ .

البرهان : ∴ أ ب جـ د مستطيل

∴ قطراه متطابقان وينصف كل منهما الآخر (خواص المستطيل)

∴ أ جـ = د ب = ١٢ سم

أ و = و ب = ٦ سم

في Δ أ و ب :

∴ د منتصف أ و ، د هـ // أ ب

∴ هـ منتصف و ب

∴ ب هـ = $\frac{1}{2} \times ٦ = ٣$ سم

(معطى)

(خواص المستطيل)

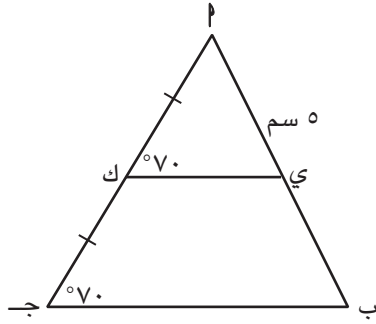
تذكر



من خواص المستطيل : القطران متطابقان وينصف كل منهما الآخر .

(معطى)

(نظرية)



أ ب جـ مثلث فيه :
ك منتصف $\overline{AB}$ ، $\angle C = 70^\circ$ ، $\angle A = 70^\circ$ ،
أي $DE = 5$ سم .
أوجد بالبرهان طول $\overline{AB}$.

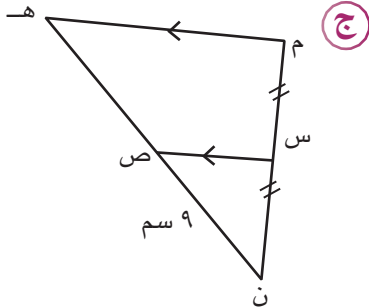
المعطيات :

المطلوب :

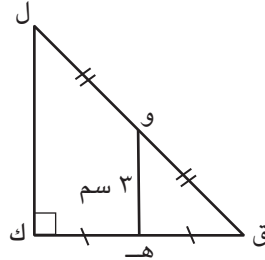
البرهان :

تمارين ذاتية :

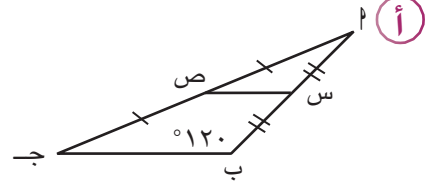
١ في كل من المثلثات التالية ، أكمل (دون استخدام الأدوات الهندسية) :



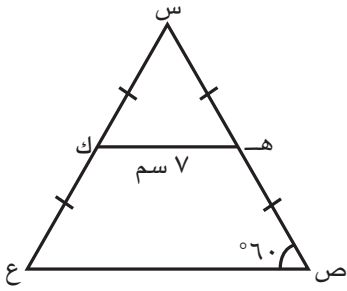
ص هـ =



ك ل =



..... = $\angle C$ (ص)



٢ في Δ س ص ع : س هـ = هـ ص = س ك = ك ع

٧ (ص) $\hat{=}$ ٦٠° ، هـ ك = ٧ سم .

أوجد بالبرهان : (١) طول ص ع .

(٢) ٧ (ع) $\hat{=}$

(٣) طول س ع .

تذكر



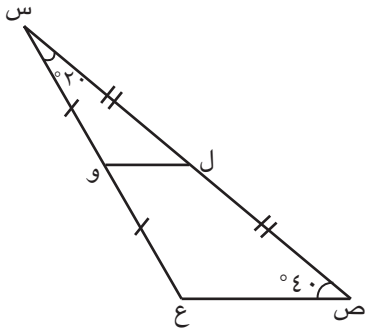
إذا كان المثلث متطابق الضلعين
وقياس إحدى زواياه ٦٠° ، فإنَّ
المثلث يكون متطابق الأضلاع .

٣ س ص ع مثلث فيه ،

ل منتصف س ص ، و منتصف س ع

٧ (ص) $\hat{=}$ ٤٠° ، ٧ (س) $\hat{=}$ ٢٠°

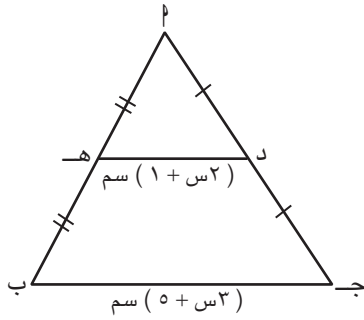
أوجد بالبرهان ٧ (س و ل) .



٤ ۲ب ج مثلث فیہ :

د منتصف ا ج - ، هـ منتصف ا ب

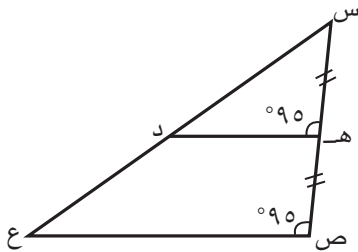
حيث $د ه = (س٢ + ١) سم$ ، $ج ب = (س٣ + ٥) سم$.
أوجد بالبرهان قيمة $س$.

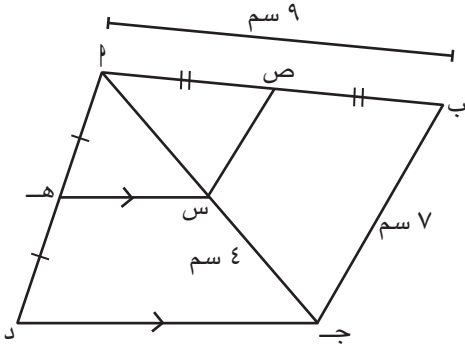


س ص ع مثلث فیہ : ہـ منتصف س ص ،

$$^{\circ}95 = (\hat{\text{س هـ د}}) \text{ص} = (\hat{\text{ص}}) \text{ص}$$

أُثْبِتَ أَنَّ : د منتصف س ع .



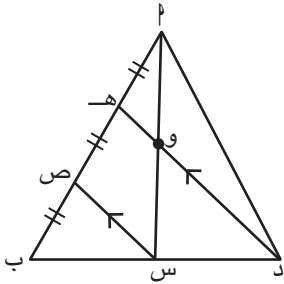


- ٦ في الشكل المقابل : $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ شكل رباعي فيه :
هـ ، ص منتصف $\overline{AD}$ ، $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ على الترتيب
س $\Rightarrow \overline{AB} \parallel \overline{CD}$ بحيث $\overline{HS} \parallel \overline{AC}$ ، $\overline{JS} = \overline{ES}$ سم .
إذا كان $\overline{AB} = \overline{CD}$ ، $\overline{AB} = 9$ سم ،
أوجد : (١) طول $\overline{AS}$.
(٢) محيط $\triangle ASB$.

مهارات تفكير عليا :

٧ في الشكل المقابل :

- س ص $\parallel$ د هـ ، و هـ = $\overline{ES}$ سم ،
 $\overline{AH} = \overline{HS} = \overline{SB}$
أوجد بالبرهان : طول و د .



القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة إلى منتصف الوتر

٧ - ٢

The Segment Joining the Vertex of Right Angle to the Midpoint of the Hypotenuse

سوف تتعلّم : توظيف نظرية القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة في المثلث القائم الزاوية إلى منتصف الوتر لحلّ تمارين هندسية .

العبارات والمفردات :

Hypotenuse

وتر المثلث

Vertex

رأس

Right Angle

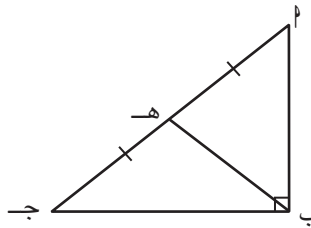
زاوية قائمة

استكشف (١)



اللوازم

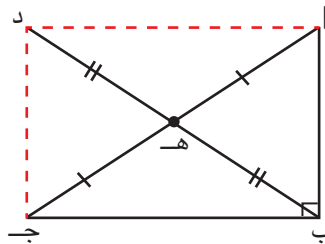
أدوات هندسية .



١ ب ج - مثلث قائم الزاوية في ب ، هـ منتصف الوتر أ ج .

ما العلاقة بين طول ب هـ ، طول أ ج ؟

العمل :



١ نأخذ نقطة د $\Rightarrow$ ب هـ بحيث تكون ب هـ = هـ د

٢ أرسم أ د ، ج د ليكون شكلاً رباعياً .

أجب عمّا يلي :

أ هل أ ب ج د متوازي أضلاع ؟ لماذا ؟

ب هل أ ب ج د مستطيل ؟ لماذا ؟

ج هل ب هـ = أ هـ = هـ د ؟ لماذا ؟

د ما العلاقة بين ب هـ ، أ ج ؟
ب هـ = أ ج

تذكّر



في المثلثات القائمة الزاوية ضلعا القائمة هما الضلعان اللذان يحدّان الزاوية القائمة ، والوتر هو أطول ضلع في المثلث وهو الضلع المقابل للزاوية القائمة .

معلومة مفيدة :

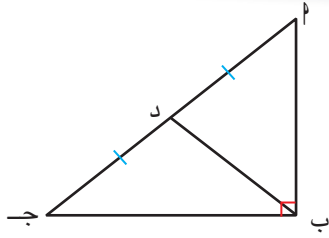


يستخدم المهندسون نظرية القطعة

المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة في مثلث إلى منتصف الوتر ، لمعرفة طول الدعائم الحديدية المستخدمة في الجسور .

نظرية :

طول القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة إلى منتصف الوتر في المثلث القائم الزاوية يساوي نصف طول الوتر .

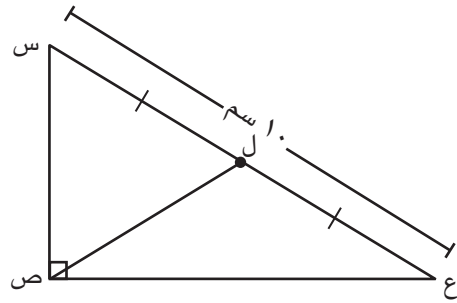
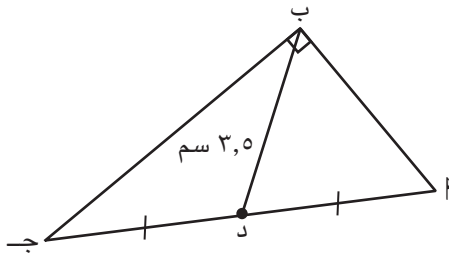


في المثلث ب ج د :
 $\angle ب = 90^\circ$ ، د منتصف ج-د
 $\therefore ب د = \frac{1}{2} ج د$

دورك الآن (١)

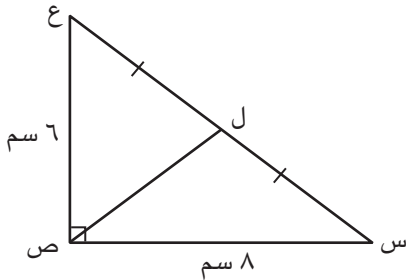


أكمل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :



طول ص ل = طول ب د = ج د =

مثال (١) :



في الشكل المقابل ، س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص ،
 ع ص = ٦ سم ، س ص = ٨ سم ، ل منتصف س ع .
 أوجد بالبرهان طول ص ل .

الحل :

المعطيات : س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص ، ع ص = ٦ سم ، س ص = ٨ سم ، ل منتصف س ع .
 المطلوب : إيجاد طول ص ل .

البرهان : س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص

$$\therefore (س ع)^2 = (س ص)^2 + (ص ع)^2$$

$$= 2(٨)^2 + 2(٦)^2$$

$$= 64 + 36 = 100$$

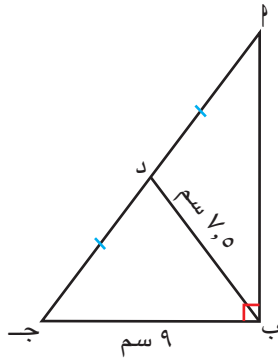
$$\therefore س ع = \sqrt{100} = 10 \text{ سم}$$

$$\therefore ل منتصف س ع$$

من (١) ، (٢)

$$\therefore ص ل = \frac{1}{2} (س ع) = \frac{1}{2} \times 10 = 5 \text{ سم}$$

(نظرية)



في الشكل المقابل، $\overline{AD}$ مثلث قائم الزاوية في B ، D منتصف $\overline{BC}$ ،
 $AD = 7,5$ سم، $BC = 9$ سم،
 أوجد بالبرهان: (١) $\overline{AD}$ (٢) $\overline{AB}$

المعطيات:

المطلوب:

البرهان: $\overline{AD}$ مثلث قائم الزاوية في

$\therefore D$ منتصف

$\therefore AD = \frac{1}{2} BC$

$AD = \frac{1}{2} \times 9$

$AD = 4,5$

من نظرية فيثاغورث

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

$$AB^2 = (4,5)^2 + (4,5)^2 = 20,25 + 20,25 = 40,5$$

$$AB^2 = 40,5$$

$$AB = \sqrt{40,5} = 6,36 \text{ سم}$$

عبّر عن فهمك

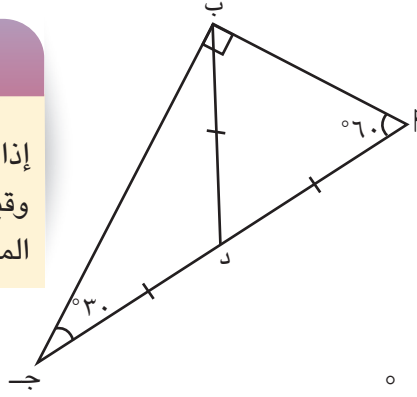


إذا كان طول القطعة المستقيمة الواصلة من رأس مثلث إلى منتصف الضلع المقابل له يساوي نصف طول هذا الضلع. فهل المثلث قائم الزاوية؟ فسر إجابتك.

تَذَكَّرْ



إذا كان المثلث متطابق الضلعين
وقياس إحدى زواياه 60° ، فإنَّ
المثلث يكون متطابق الأضلاع .



أ ب جـ مثلث ثلاثيني ستّيني ،

$$\angle \text{جـ} = 30^\circ ، \angle \text{ب} = 60^\circ$$

نلاحظ أنَّ : ب د = $\frac{1}{2}$

في $\triangle \text{أ ب د}$:

$$\therefore \text{ب د} = \text{د أ}$$

$$\therefore \angle \text{ب} = \angle \text{أ} = (\dots\dots\dots)^\circ$$

هل $\triangle \text{أ ب د}$ متطابق الأضلاع ؟

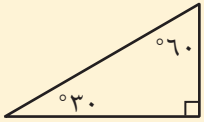
$$\text{أ ب} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$\therefore \text{أ ب} = \frac{1}{2} \text{أ جـ}$$

لَا حِظَّ أَنْ



المثلث التالي
يُسَمَّى :
مثلثًا ثلاثينيًّا
ستّينيًّا



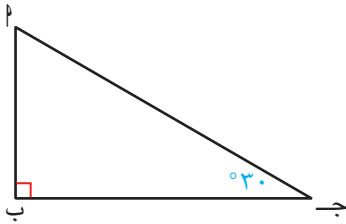
نتيجة (١) :

في المثلث الثلاثيني الستّيني ، يكون طول الضلع المقابل
للزاوية التي قياسها 30° مساويًا نصف طول الوتر.

$$\therefore \text{أ ب جـ} \text{ مثلث قائم الزاوية في ب} ، \angle \text{جـ} = 30^\circ$$

$$\therefore \text{أ ب} = \frac{1}{2} \text{أ جـ}$$

وعكس ذلك أيضًا صحيح :



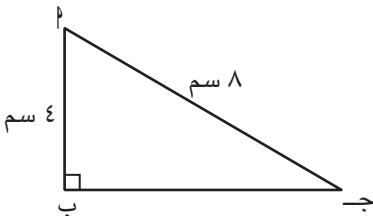
نتيجة (٢) :

في المثلث القائم الزاوية ، إذا كان طول أحد ضلعي الزاوية القائمة مساويًا نصف طول الوتر ،
فإنَّ قياس الزاوية المقابلة لهذا الضلع 30° ويسمى المثلث ثلاثينيًّا ستّينيًّا .

$$\therefore \text{أ ب جـ} \text{ مثلث قائم الزاوية في ب} ، \text{أ ب} = \frac{1}{2} \text{أ جـ}$$

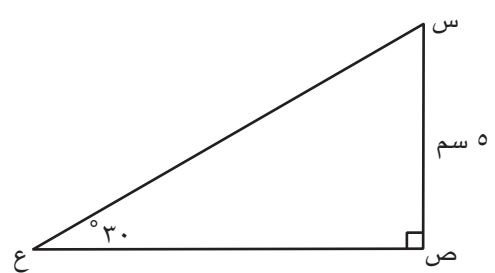
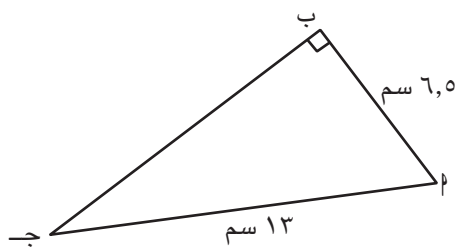
$$\therefore \angle \text{جـ} = 30^\circ$$

$\therefore$ المثلث أ ب جـ ثلاثيني ستّيني



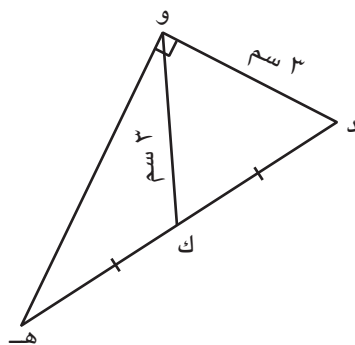


أكمل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :



..... = ($\frac{\text{ج}}{\text{د}}$) =

..... = س ع



مثال (٢) :

في الشكل المقابل : د و هـ مثلث قائم الزاوية في و ،

د و = و ك = ٣ سم ، ك منتصف د هـ

أوجد بالبرهان : (١) $\angle \text{هـ}$ و (٢) $\angle \text{د}$

(٢) $\angle \text{د}$

الحل :

المعطيات : د هـ و مثلث قائم الزاوية في و ، د و = ٣ سم ،

و ك = ٣ سم ، ك منتصف د هـ .

المطلوب : إيجاد (١) $\angle \text{هـ}$ و (٢) $\angle \text{د}$

البرهان : $\therefore$ المثلث د و هـ قائم الزاوية في و

، ك منتصف د هـ

(نظرية)

$$\therefore \text{و ك} = \frac{1}{2} \text{د هـ}$$

$$\therefore \text{د هـ} = ٣ \times ٢ = ٦ \text{ سم}$$

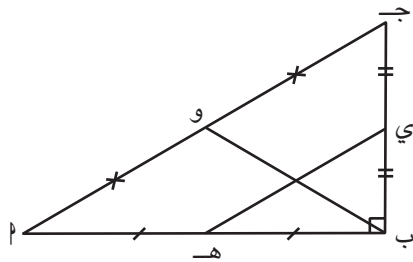
$$\therefore \text{د و} = \frac{1}{2} \text{د هـ}$$

(نتيجة)

$$\therefore \angle \text{هـ} = ٣٠^\circ$$

$\therefore$ د و هـ مثلث ثلاثيني ستيني

$$\therefore \angle \text{د} = ٦٠^\circ$$



في الشكل المقابل: أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب ، فيه :

ھ۔ منتصف ^۱ا ب ، ی منتصف ب ج ،

و منتصف آج ، هي = ٥ سم

أُوجِدُ بِالْبِرْهَانِ كَلًّا مِمَّا يَلِي: (١) طول $\overline{A_j}$ (٢) طول $\overline{B}$ و

المعطيات :

المطلوب :

البرهان: ١ ج مثلث فيه : منتصف **١** ب ، منتصف ب ج

..... $\frac{1}{2}$ = هي $\therefore$ (نظرية)

۲ ج = ۵ × ۲ = سم

∴ أ ب ج مثلث الزاوية في

..... ومنتصف

..... $\times \frac{1}{2} = \text{ب و} \therefore$ (نظرية)

$$\dots\dots\dots = 10 \times \frac{1}{2} =$$

مثال (۳) :

في الشكل المقابل : أوجد بالبرهان قيمة ك .

الحل :

المعطيات: س ع ص مثلث قائم الزاوية في ع ، $\angle س = 30^\circ$

المطلوب: إيجاز قيمة ك .

البرهان: ∴ المثلث س ع ص قائم الزاوية في ع ، $\hat{C} = 90^\circ$

Δ : س ع ص مثلث ثلاثيني ستيني

∴ ع ص = $\frac{1}{2}$ س ص (نتيجة)

$$(12 + 1) \times \frac{1}{2} = 3 + 12$$

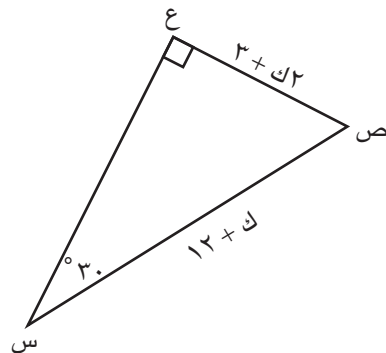
$$12 + 1 = (3 + 1 \times 2) \times 2$$

$$١٢ + ك = ٦ + ك \quad \text{ع}$$

$$6 - 12 = 4 - 4$$

٦ = ك ٣

$$٢ = \frac{٦}{٣} = ك \therefore$$



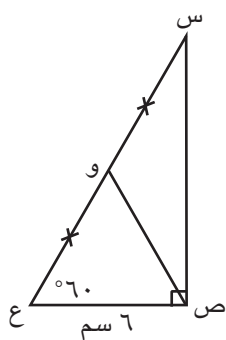


١ س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص ، و منتصف س ع .

أوجد بالبرهان كلاً مما يلي : (١) طول س ع

(٢) طول ص و

(٣) $\angle$ (و ص س)



تذكر

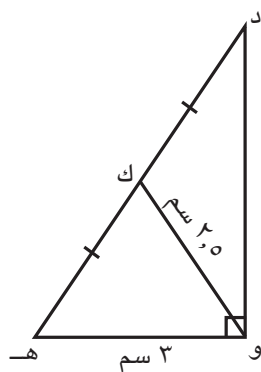


الزاويتان المتتامتان مجموع قياسيهما 90°

٢ في الشكل المقابل : المثلث ه و د قائم الزاوية في و ، ك منتصف ه د .

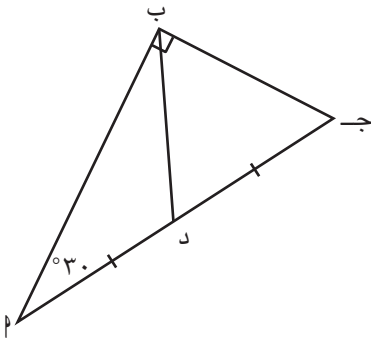
أوجد بالبرهان كلاً مما يلي : (١) طول ه د

(٢) طول د و

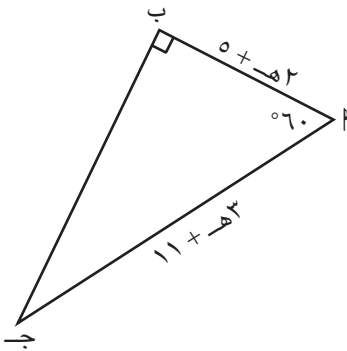


٣ في الشكل المقابل :

المثلث $\triangle ب ج د$ قائم الزاوية في $ب$ ، $\angle ب = 30^\circ$.
أثبت أن المثلث $\triangle ب د ج$ متطابق الأضلاع .



٤ في الشكل المقابل : أوجد بالبرهان طول $\overline{أ ب}$.

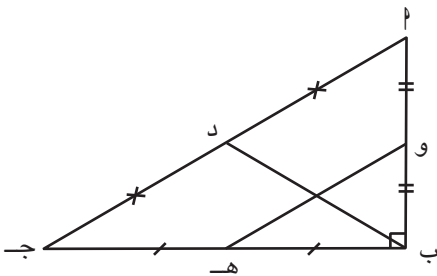


٥ في الشكل المقابل : $\triangle ب ج د$ مثلث قائم الزاوية في $ب$ ،

و منتصف $\overline{أ ب}$ ، $هـ$ منتصف $\overline{ب ج}$ ،

د منتصف $\overline{أ ج}$.

أثبت أن $هـ = ب د$



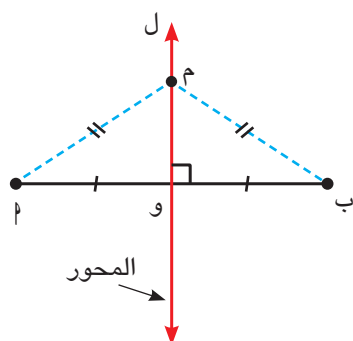
Perpendicular Bisectors of a Triangle

سوف تتعلّم : توظيف نظرية محاور أضلاع المثلث لحلّ تمارين هندسية .

العبارات والمفردات :

Perpendicular Bisector

محور القطعة المستقيمة



تعلّم أنّ محور القطعة المستقيمة هو العمود المنصف لها .

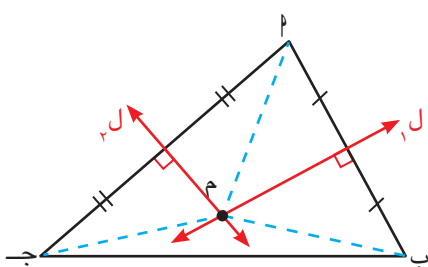
في الشكل المقابل : $\overleftrightarrow{L}$ محور $\overline{AB}$

$\therefore \overleftrightarrow{L} \perp \overline{AB}$ ، $AO = BO$

خواصّ محور قطعة مستقيمة

- أيّ نقطة تنتمي إلى محور قطعة مستقيمة تكون على أبعاد متساوية من طرفي القطعة المستقيمة .
- أيّ نقطة على أبعاد متساوية من طرفي قطعة مستقيمة تنتمي إلى محور هذه القطعة المستقيمة .

استكشف



بالمثل :

$\overleftrightarrow{L_2}$ محور ، $M \in \overleftrightarrow{L_2}$
 $M = \text{.....} (2)$

أكمل :

$\therefore \overleftrightarrow{L_1}$ محور ، $M \in \overleftrightarrow{L_1}$
 $M = \text{.....} (1)$

من (١) ، (٢)

$\therefore M = \text{.....}$

$\therefore M \in \text{محور}$

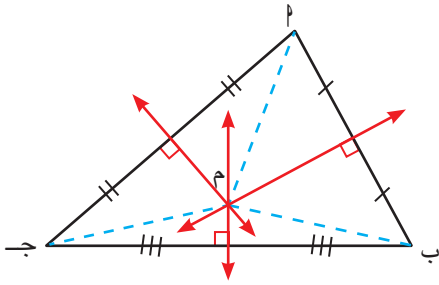
$\therefore$ محاور أضلاع المثلث

نظرية : محاور أضلاع المثلث تتقاطع في نقطة واحدة .

من « إستكشف » السابق ،

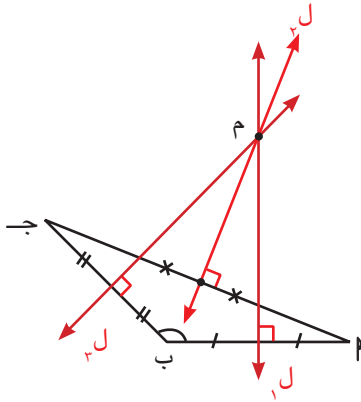
م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث Δ ب جـ

$\therefore$ م = ب = جـ

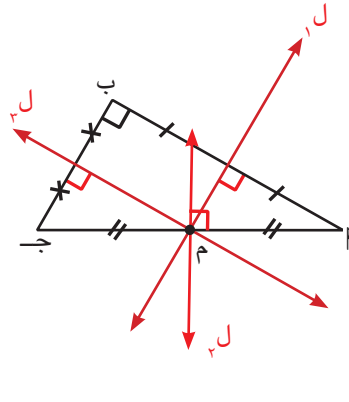


نتيجة :

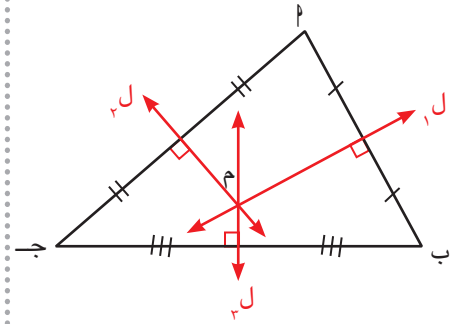
نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث تقع على أبعاد متساوية من رؤوسه .



مثلث منفرج الزاوية



مثلث قائم الزاوية



مثلث حادّ الزوايا

من الأشكال السابقة نلاحظ أنّ :

- نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث الحادّ الزوايا تقع داخل المثلث .
- نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث القائم الزاوية تقع في منتصف الوتر .
- نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث المنفرج الزاوية تقع خارج المثلث .

دورك الآن (١)

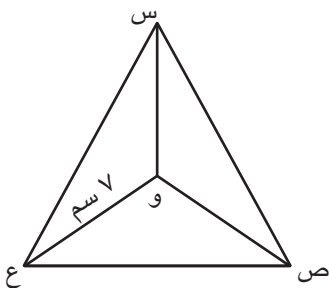


المثلث س ص ع فيه : و نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث ،

و ع = ص = س . أكمل دون استخدام الأدوات الهندسية :

و س = سم

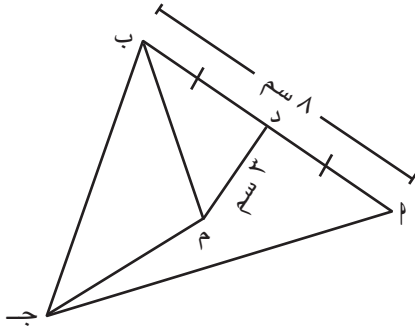
و ص = سم





لتكن م نقطة تقع على أبعاد متساوية من رؤوس مثلث . فهل م هي نقطة تقاطع محاور أضلاعه ؟ فسّر إجابتك .

مثال (١):



أ ب جـ مثلث فيه : أ ب = ٨ سم ، د منتصف أ ب
م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث ، م د = ٣ سم .
أوجد بالبرهان كلاً مما يلي : (١) طول م ب . (٢) طول م جـ .

الحل :

المعطيات : أ ب جـ مثلث فيه : أ ب = ٨ سم ، د منتصف أ ب
م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث ، م د = ٣ سم

المطلوب : إيجاد : (١) طول م ب (٢) طول م جـ

(معطى)

البرهان : ∵ أ ب = ٨ سم ، د منتصف أ ب

$$\therefore د ب = ٨ \times \frac{1}{2} = ٤ \text{ سم}$$

(معطى)

∵ م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث ، د منتصف أ ب

$$\therefore م د \perp أ ب$$

∴ Δ م د ب قائم الزاوية في د

$$(م ب)^2 = (م د)^2 + (د ب)^2$$

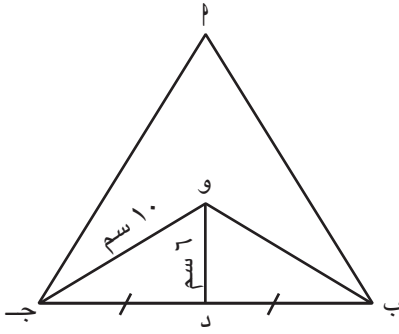
$$\therefore م ب = \sqrt{(٤)^2 + (٣)^2} = ٥$$

$$٥ \text{ سم} = \sqrt{٢٥} = \sqrt{١٦ + ٩} = ٥$$

∴ نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث تقع على أبعاد متساوية من رؤوسه

(نتيجة)

$$\therefore م جـ = م ب = ٥ \text{ سم}$$



أ ب ج مثلث فيه :
و نقطة تقاطع محاور أضلاعه ،
د منتصف ب ج ،
و ج = ١٠ سم ، و د = ٦ سم
أوجد بالبرهان كلاً مما يلي :

(١) ب و (٢) ب د (٣) ب ج

المعطيات :

المطلوب :

(معطى)

(نتيجة)

البرهان : ∴ و نقطة تقاطع

∴ ب و =

سم =

∴ د منتصف

∴ و د ⊥

∴ Δ و د ب في

(نظرية فيثاغورث)

∴ (ب د)^٢ = (ب و)^٢ - (و د)^٢

ب د = $\sqrt{(\dots)^2 - (\dots)^2}$

$\sqrt{36 - 100}$ =

$\sqrt{\dots}$ =

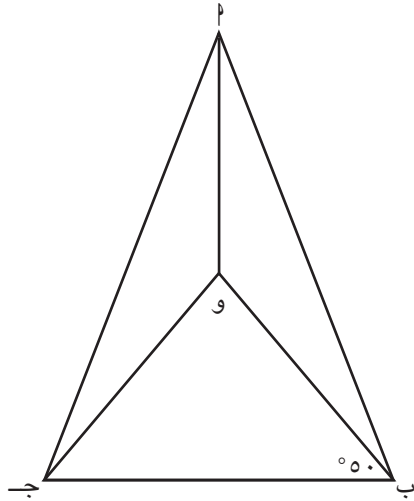
=

∴ ب ج = ٢ ×

= ٢ ×

= سم

مثال (٢) :



أ ب ج مثلث فيه : و نقطة تقاطع محاور أضلاعه ،
إذا كان $\angle BCP = 50^\circ$.

(١) أثبت أن المثلث ب و ج متطابق الضلعين .

(٢) أوجد $\angle BCP$ (ب و ج) .

الحل :

المعطيات : أ ب ج مثلث فيه و نقطة تقاطع محاور أضلاعه .

المطلوب : إثبات أن المثلث ب و ج متطابق الضلعين .

إيجاد $\angle BCP$ (ب و ج)

البرهان : $\therefore$ و نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث

$\therefore \angle BCP = \angle CBP$

$\therefore \triangle BCP$ متطابق الضلعين

$\therefore \angle BCP = \angle CBP = 50^\circ$

$\therefore \angle BCP = 180^\circ - (50^\circ + 50^\circ) = 80^\circ$

(معطى)

(نتيجة)

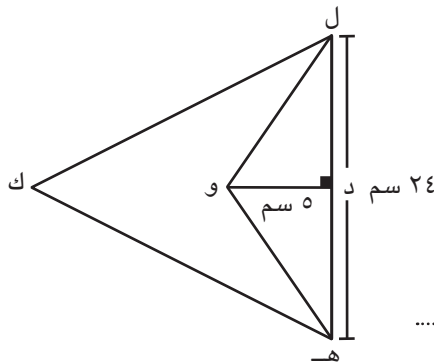
(زاويتا القاعدة في مثلث متطابق)

(الضلعين متطابقتان)

(مجموع قياسات زوايا المثلث)

(الداخلة 180°)

دورك الآن (٣)



ك ل ه مثلث فيه :

و نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث ك ل ه ،

و د $\perp$ ل ه ، ل ه = ٢٤ سم ، د و = ٥ سم .

أوجد بالبرهان كلاً مما يلي : (١) ه و

(٢) محيط $\triangle LKH$ و هـ

المعطيات :

المطلوب : إيجاد (١) ه و (٢) محيط $\triangle LKH$ و هـ

البرهان : $\therefore$ و نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث ك ل ه ، و د $\perp$ ل هـ

$\therefore$ د منتصف ل هـ ،

$\therefore$ د ه = $\frac{1}{2} \times$ = سم

Δ و د هـ الزاوية في د

(نظرية فيثاغورث)

$$\begin{aligned} (و هـ)^2 &= (د هـ)^2 + (و د)^2 \\ و هـ &= \sqrt{(.....)^2 + (.....)^2} \\ &= \sqrt{..... +} \\ &= \sqrt{169} \end{aligned}$$

$\therefore$ و هـ = سم

$\therefore$ نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث ك ل هـ ، تقع على

$\therefore$ ل و = = ١٣ سم

محيط Δ ل و هـ = ٢٤ + + ١٣

= سم

تمارين ذاتية :



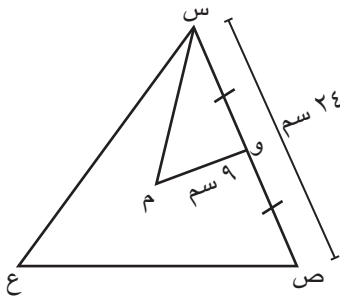
١ س ص ع مثلث فيه :

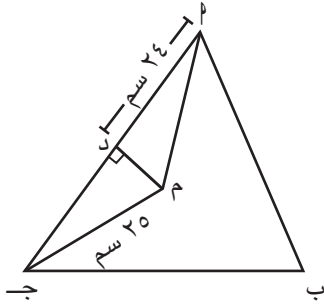
م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث ، و م = ٩ سم ،

س ص = ٢٤ سم ، و منتصف س ص .

أوجد بالبرهان كلاً مما يلي :

(١) و س (٢) س م (٣) م ص



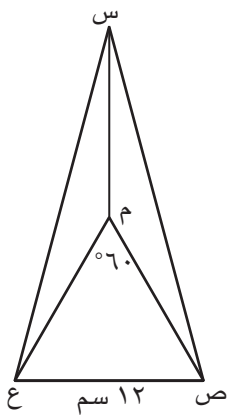


٢ Δ ا ب ج فيه : م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث ،
ج م = ٢٥ سم ، د ا = ٢٤ سم .

أوجد بالبرهان :

(۱) طول م^۲

(۲) محیط Δ م ج پ

[illegible]

٣ س ص ع مثلث فيه : م نقطة تقاطع محاور أضلاعه ،
إذا كان ص ع = ١٢ سم ، $\hat{C} = 60^\circ$.

١ أثبت أن المثلث ص م ع متطابق الأضلاع.

٢٠٠٠ (ب) أوجد طول م س .

ص ۱۲ سم ع

منصّفات الزوايا الداخلية للمثلث

Interior Angles Bisectors of a Triangle

٧ - ٤

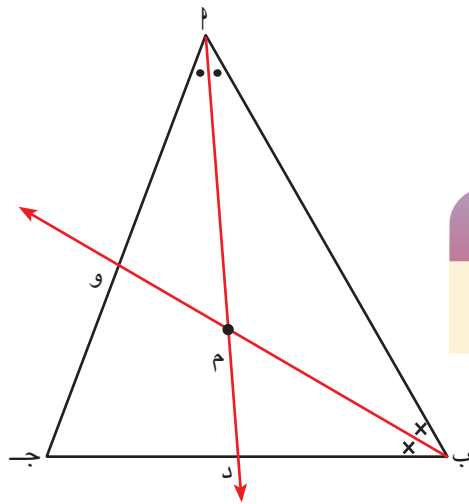
سوف تتعلّم : توظيف نظرية منصّفات الزوايا الداخلية للمثلث لحلّ تمارين هندسية .

العبارات والمفردات :

Angle Bisectors

منصّفات الزوايا

إِسْتَكْشِف (١)



اللوازم

أدوات هندسية .

Δ ب ج مثلث فيه :
 $\overrightarrow{AD}$ منصّف $\hat{A}$ ، $\overrightarrow{BO}$ منصّف $\hat{B}$ ،
 $\overrightarrow{DO} \cap \overrightarrow{BO} = \{ M \}$
 أجِب عما يلي :

١ ما نوع المثلث بالنسبة إلى زواياه ؟

٢ ارسم ج م يقطع $\overrightarrow{AB}$ في هـ .

٣ أوجد $\angle (AM, \overrightarrow{BC}) = \dots\dots\dots$

٤ أوجد $\angle (BM, \overrightarrow{AC}) = \dots\dots\dots$

ماذا تلاحظ ؟

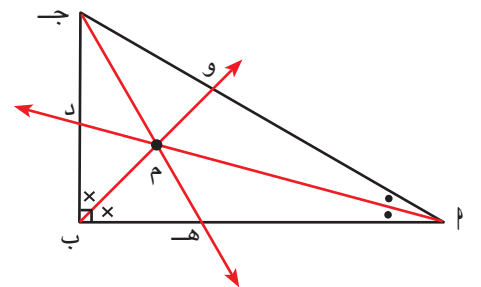
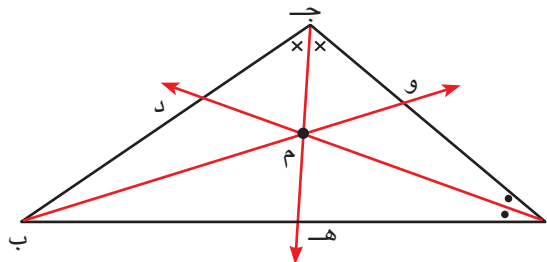
$\overrightarrow{AH}$ منصّف $\hat{A}$

بالمثل للمثلث القائم الزاوية والمنفرج الزاوية .

تذكّر

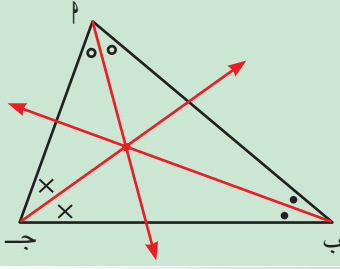


منصّف الزاوية هو شعاع مرسوم من رأس الزاوية يقسم الزاوية إلى زاويتين متطابقتين .



نظرية :

منصّفات الزوايا الداخلية للمثلث تتقاطع في نقطة واحدة .



دورك الآن (١)



في الشكل المقابل :

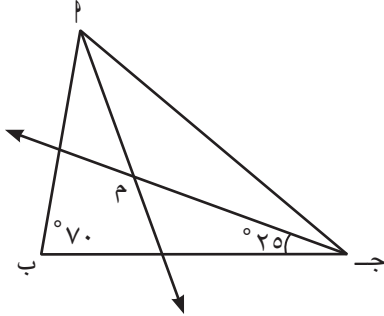
م نقطة تقاطع منصّفات الزوايا الداخلية للمثلث $\triangle$ ب ج
أكمل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :

$$\angle \text{م ج ب} = \angle \text{م ج ب} = \dots\dots\dots$$

السبب

$$\angle \text{م ب ج} = \angle \text{م ب ج} = \dots\dots\dots$$

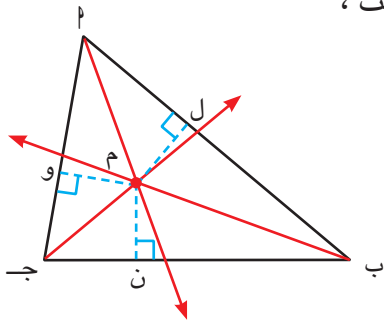
السبب



استكشف (٢)



إذا كانت م هي نقطة تقاطع منصّفات الزوايا الداخلية للمثلث $\triangle$ ب ج ،
م ل ، م ن ، م و هي الأعمدة المرسومة من النقطة م على أضلاع المثلث ،
فأوجد باستخدام الأدوات الهندسية كلّاً ممّا يلي :



$$\text{١ طول م ل} = \dots\dots\dots$$

$$\text{٢ طول م ن} = \dots\dots\dots$$

$$\text{٣ طول م و} = \dots\dots\dots$$

• ماذا تلاحظ ؟ م ل = =

لاحظ أنّ



بُعد نقطة عن مستقيم هو طول
العمود المرسوم من هذه النقطة
على المستقيم .

نتيجة :

نقطة تقاطع منصّفات الزوايا الداخلية للمثلث على أبعاد
متساوية من أضلاعه .

بالمثل تتحقّق صحّة النتيجة للمثلث القائم الزاوية
والمثلث المنفرج الزاوية .

دورك الآن (٢)

المثلث هـ و ل فيه :

م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية ،

م ع = ٣ سم ، ص ل = ٤ سم .

أكمل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :

م ص =

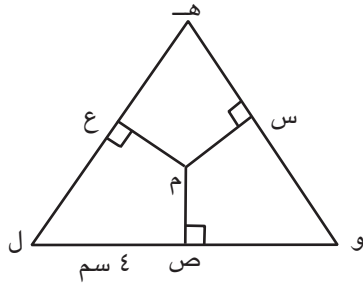
السبب

م س =

السبب

م ل =

السبب



تذكر



الوتر : هو الضلع المقابل للزاوية القائمة في المثلث قائم الزاوية .

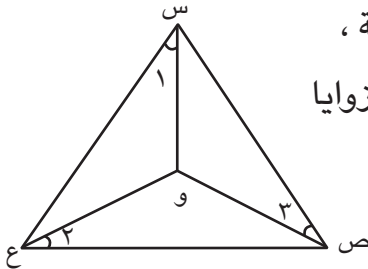
عبّر عن فهمك (١)



إذا كانت و نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث س ص ع الداخلية ،

فما علاقة (١) + (٢) + (٣) بمجموع قياسات زوايا

المثلث س ص ع الداخلية ؟



مثال (١) :

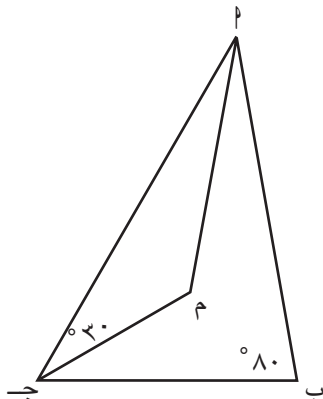
في الشكل المقابل ، Δ أ ب ج فيه : م نقطة تقاطع منصفات

زواياه الداخلية ، أوجد بالبرهان (ج أ م) .

الحل :

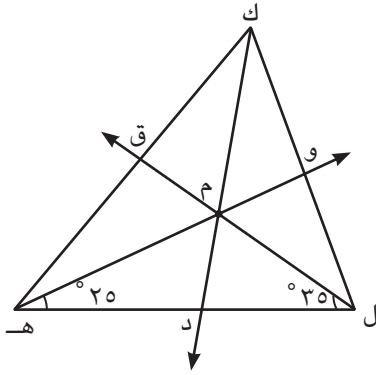
المعطيات : في Δ أ ب ج : م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية

المطلوب : إيجاد (ج أ م)



البرهان : ∴ م نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث الداخلة
 ∴ ج م منصف ج
 ∴ (ج) ∠ = ٢ × ٣٠ = ٦٠°
 ∴ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة يساوي ١٨٠°
 ∴ (ج) ∠ = ١٨٠° - (٦٠° + ٨٠°) = ٤٠°
 ∴ م منصف ج
 ∴ (ج م) ∠ = ٤٠° ÷ ٢ = ٢٠°

دورك الآن (٣)



Δ ك ل هـ فيه : م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة ،
 ∴ (م ل هـ) ∠ = ٣٥° ، ∴ (م هـ ل) ∠ = ٢٥°
 أوجد بالبرهان ∴ (ل ك هـ) ∠ ، ∴ (م ك هـ) ∠ .

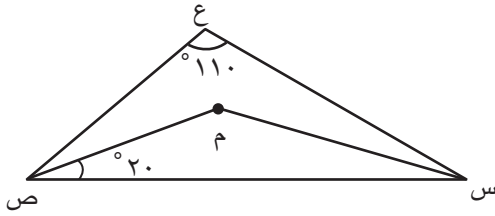
المعطيات :

المطلوب :

البرهان : ∴ م نقطة تقاطع زوايا المثلث الداخلة ،

∴ ل م منصف
 ∴ (ل) ∠ = ٢ × ٣٥ =
 ∴ هـ م منصف
 ∴ (هـ) ∠ = ٢ × ٢٥ =
 ∴ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة
 ∴ (ل ك هـ) ∠ = ١٨٠° - (..... +) = - =
 ∴ ك م منصف
 ∴ (م ك هـ) ∠ =

مثال (٢) :



Δ س ع ص فيه م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة ،

$$\angle ع = 110^\circ ، \text{ إذا كان } \angle م ص س = 20^\circ$$

أوجد بالبرهان كلاً من :

$$(١) \angle س ص ع$$

$$(٢) \angle س$$

$$(٣) \angle س م ص$$

الحل :

المعطيات : م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة ،

$$\angle ع = 110^\circ ، \angle م ص س = 20^\circ$$

$$(١) \angle م ص ع$$

$$(٢) \angle س$$

$$(٣) \angle س م ص$$

البرهان : في Δ س ع ص ،

∴ م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة (معطى)

∴ م ص منصف ص (نظرية)

$$\therefore \angle س ص ع = 2 \times 20^\circ = 40^\circ$$

$$\therefore \angle س = 180^\circ - (110^\circ + 40^\circ) = 30^\circ \text{ (مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة يساوي } 180^\circ \text{)}$$

$$180^\circ - 150^\circ =$$

$$30^\circ =$$

∴ س م منصف س

$$\therefore \angle م س ص = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$$

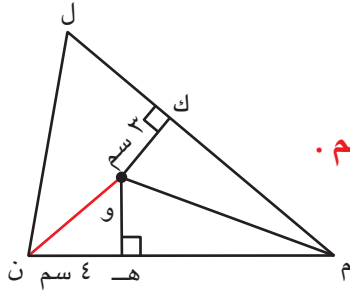
في Δ م س ص ،

$$\angle م ص س = 180^\circ - (20^\circ + 15^\circ) = 45^\circ \text{ (مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة يساوي } 180^\circ \text{)}$$

$$180^\circ - 135^\circ =$$

$$45^\circ =$$

مثال (٣) :



في الشكل المقابل، المثلث ل م ن فيه :
و نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية ، و ك = ٣ سم ، هـ ن = ٤ سم .
أوجد و ن .

الحل :

المعطيات : Δ ل م ن فيه : و نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية ،
و ك = ٣ سم ، هـ ن = ٤ سم

المطلوب : إيجاد و ن

البرهان : $\therefore$ و نقطة تقاطع منصفات الزوايا في Δ م ل ن
تقع على أبعاد متساوية من أضلاعه (نتيجة)

$$\therefore \text{و هـ} = \text{و ك} = ٣ \text{ سم}$$

$$\therefore \text{و هـ} \perp \text{م ن} ، \angle (\text{و هـ ن}) = ٩٠^\circ .$$

$\therefore \Delta$ و هـ ن قائم الزاوية

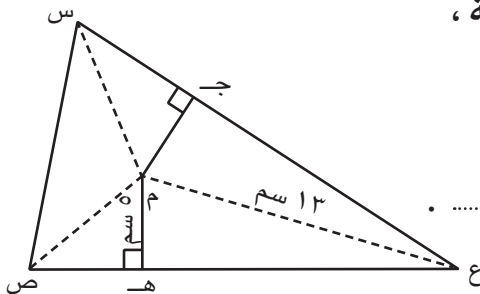
$$(\text{نظرية فيثاغورث}) \quad (\text{و ن})^2 = (\text{و هـ})^2 + (\text{هـ ن})^2$$

$$\therefore \text{و ن} = \sqrt{(\text{و هـ})^2 + (\text{هـ ن})^2}$$

$$= \sqrt{٩ + ١٦}$$

$$\therefore \text{و ن} = \sqrt{٢٥} = ٥ \text{ سم}$$

دورك الآن (٤)



المثلث س ص ع فيه : م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية ،

$$\text{م ع} = ١٣ \text{ سم} ، \text{م هـ} = ٥ \text{ سم}$$

أوجد طول ع جـ .

المعطيات : Δ س ص ع فيه : م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية .

المطلوب : إيجاد طول ع جـ .

البرهان : $\therefore$ م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية Δ س ص ع

$\therefore$ م تقع على أبعاد متساوية من أضلاعه

$$\text{م جـ} = \text{م هـ} = ٥ \text{ سم}$$

$$\therefore \text{م جـ} \perp \text{س ع}$$

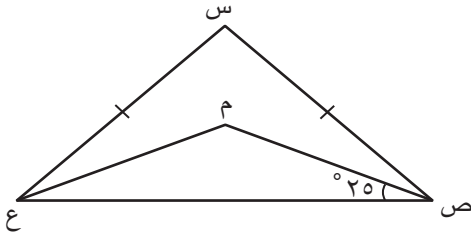
$$\therefore \angle (\text{م هـ ص}) = ٩٠^\circ$$

$\therefore \Delta$ ع م جـ قائم الزاوية في جـ

(نظرية فيثاغورث)

$$\begin{aligned} (ع ج) &= (ع م) - (ج م) \\ \therefore ع ج &= \sqrt{(ع م)^2 - (ج م)^2} \\ &= \sqrt{(\dots)^2 - ١٦٩} \\ &= \sqrt{\dots} \\ \therefore ع ج &= \dots سم \end{aligned}$$

مثال (٤) :



المثلث س ص ع متطابق الضلعين فيه : م هي نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة ، $\angle م ص ع = ٢٥^\circ$.
أوجد بالبرهان $\angle م ص س$ (ص س ع) .

الحل :

المعطيات : س ص ع مثلث متطابق الضلعين :
م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة ، $\angle م ص ع = ٢٥^\circ$

المطلوب : إيجاد $\angle م ص س$ (ص س ع)

البرهان : $\therefore$ م نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلة للمثلث س ص ع (معطى)

$\therefore$ ص م منصف ص $\leftarrow$ (نظرية)

$$\therefore \angle م ص ع = ٢ \times ٢٥ = ٥٠^\circ$$

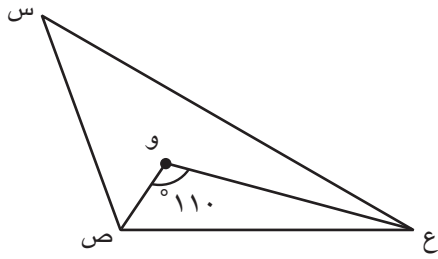
$\therefore \Delta$ س ص ع متطابق الضلعين (معطى)

$\therefore \angle م ص س = \angle م ص ع = ٥٠^\circ$ (زاويتا القاعدة متطابقتان في المثلث المتطابق الضلعين)

$\therefore \angle م ص س = ٥٠^\circ$ (مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلث يساوي ١٨٠°)

$$١٨٠ - ٥٠ = ١٣٠$$

$$= ٨٠^\circ$$



في الشكل المقابل: Δ س ص ع فيه :

و نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة ، $\angle (ص \text{ و } ع) = 110^\circ$
أوجد بالبرهان $\angle (س)$.

المعطيات :

المطلوب : إيجاد $\angle (س)$

البرهان : في Δ س و ع ،

$\therefore \angle (ص \text{ و } ع) = 110^\circ$ (معطى)

$\therefore$ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة =

$\therefore \angle (و \text{ ص } ع) + \angle (و \text{ ع } ص) = 180^\circ - 110^\circ = \dots\dots\dots$

$\therefore$ و نقطة تقاطع المثلث س ص ع

$\therefore \angle (س) = 180^\circ - \dots\dots\dots = 2 \times 70^\circ = \dots\dots\dots$

$\therefore \angle (س) = 180^\circ - \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ (مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلث $= 180^\circ$)

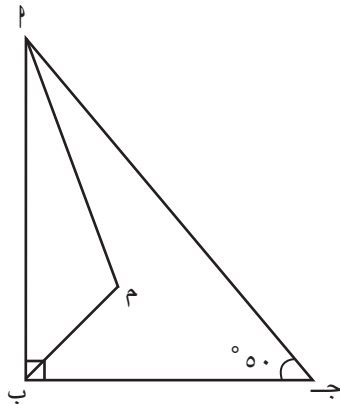
تمارين ذاتية :



١ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب

م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة ، $\angle (ج) = 50^\circ$.

أوجد بالبرهان : (أ) $\angle (م \text{ ب } ب)$ (ب) $\angle (م \text{ ب } ب)$

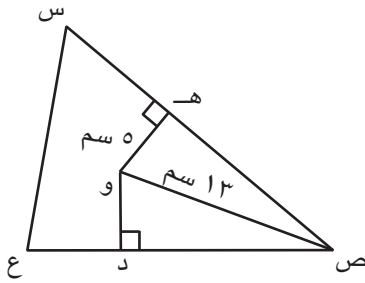


٢ المثلث س ص ع فيه : و نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية ،

هو = ٥ سم ، ص و = ١٣ سم

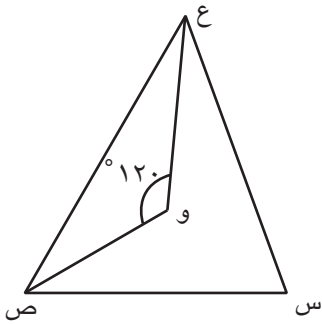
أوجد بالبرهان :

أ و د (ب) ص د



٣ المثلث س ص ع فيه : و نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية ، $\angle \text{و} = 120^\circ$

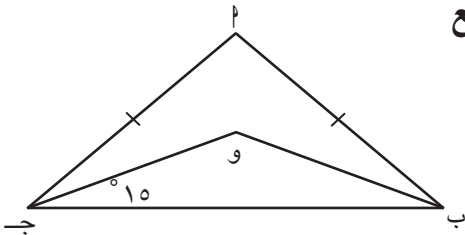
أوجد بالبرهان $\angle \text{س}$.

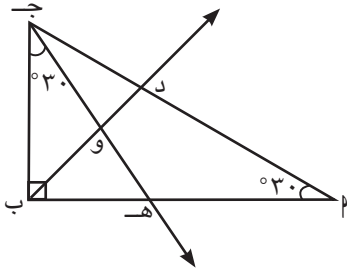


٤ المثلث أ ب ج متطابق الضلعين فيه : و هي نقطة تقاطع

منصفات زواياه الداخلية ، $\angle \text{و ج ب} = 15^\circ$.

أوجد بالبرهان $\angle \text{أ}$.





- ٥ ا ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ،
 $\angle هـ د ب = \angle و د ج = 30^\circ$ ،
 إذا كان ب د منصف ب ،
 $\overline{د ب} \cap \overline{ج د هـ} = \{ و \}$ ،
 أثبت أن و نقطة تقاطع منصفات
 الزوايا الداخلة للمثلث ا ب جـ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

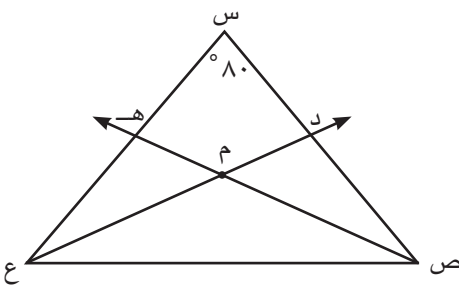
.....

.....

مهارات تفكير عليا :



اختر الإجابة الصحيحة .



- ٦ س ص ع مثلث فيه : ص هـ منصف ص ،
 $\angle و د م = \angle هـ د م$ ،
 ا ب ٥٠ °
 ج ١٣٠ °
 د ٤٠ °

الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه

٥ - ٧

Altitudes from Vertices of a Triangle to its Sides

سوف تتعلّم : توظيف نظرية الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه لحلّ تمارين هندسية .

العبارات والمفردات :

Heights

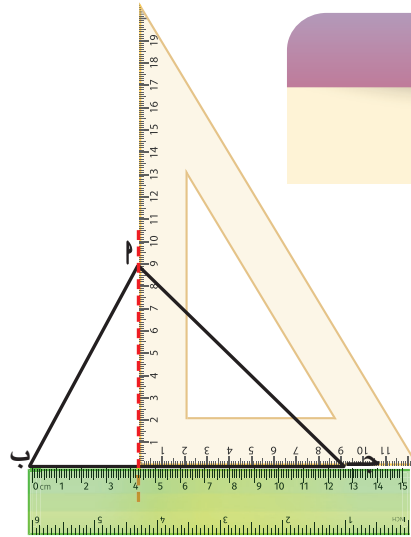
الارتفاعات

Altitudes

الأعمدة

اللوازم

أدوات هندسية .



إرتفاع المثلث هو طول العمود المرسوم

من رأس المثلث على قاعدته (أو امتدادها) .

في المثلث P ب جـ الموضّح في الشكل المقابل ،

يمكن رسم العمود النازل من رأس المثلث P

على الضلع المقابل له ب جـ باستخدام المثلث القائم

والمسطرة كما في الشكل .

استكشف

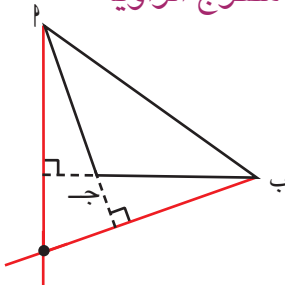


في المثلثات التالية ، تمّ رسم العمودين من الرأسين P ، ب

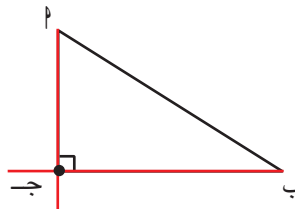
على الضلعين المقابلين لهما (أو امتدادهما) كما في الشكل .

أرسم العمود الثالث من الرأس جـ .

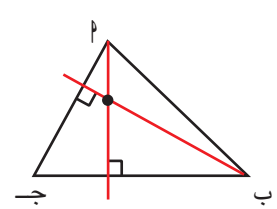
مثلث منفرج الزاوية



مثلث قائم الزاوية



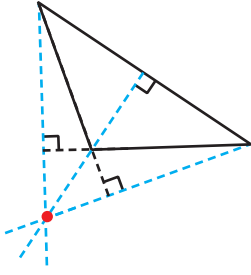
مثلث حادّ الزوايا



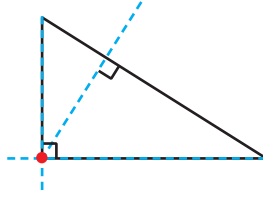
• ماذا تلاحظ ؟

نظرية : الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه تتقاطع في نقطة واحدة .

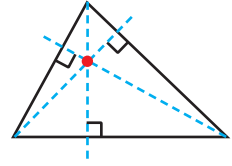
لاحظ أن :



نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة
من رؤوس المثلث المنفرج الزاوية
على أضلاعه (أو امتدادها) تقع
خارج المثلث.

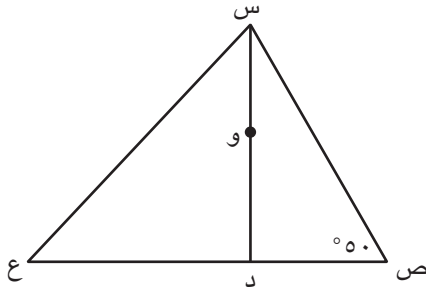


نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة
من رؤوس المثلث القائم الزاوية
على أضلاعه هي رأس الزاوية
القائمة.



نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة
من رؤوس المثلث الحاد الزاوية
على أضلاعه تقع داخل المثلث.

دورك الآن (١)



١ في المثلث س ص ع : و نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة
من رؤوس المثلث على أضلاعه ، و $\exists$ س د .

أكمل ما يلي :

..... = (س د ص) $\wedge$
..... السبب

..... = (ص س د) $\wedge$
..... السبب

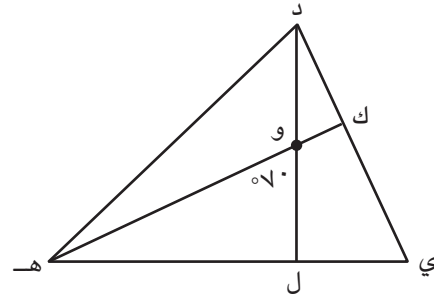
ب في المثلث د ه ي : و نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه ،

هـ ك $\cap$ د ل = { و } . أكمل ما يلي :

تذكر



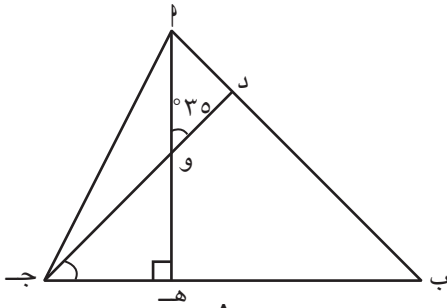
مجموع قياسات زوايا الشكل
الرباعي = 360°



..... = (و هـ ل) $\wedge$
..... السبب

..... = (ي هـ) $\wedge$
..... السبب

مثال (١):



أ ب جـ مثلث فيه : و نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة
من رؤوس المثلث على أضلاعه ، $\angle D = 35^\circ$ ،
إذا كان $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ، أوجد بالبرهان $\angle E$.

الحل :

المعطيات : و نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه ، $\angle D = 35^\circ$
المطلوب : إيجاد $\angle E$ (و جـ هـ)

البرهان : $\therefore$ و نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه (معطى)

$$\therefore \overline{AD} \perp \overline{BC}$$

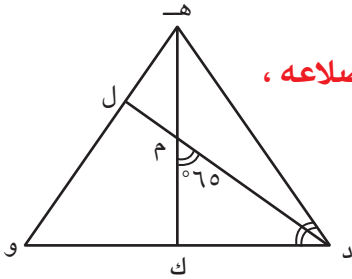
$$\therefore \angle D = 90^\circ \text{ قائم الزاوية في هـ ، } \therefore \angle E = 90^\circ$$

$$\therefore \angle E = \angle D = 35^\circ \text{ بالتقابل بالرأس } \angle E = \angle D = 35^\circ$$

$$\therefore \angle E = 180^\circ - (\angle D + 90^\circ) = 55^\circ$$

$$55^\circ = 180^\circ - 125^\circ \text{ (مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلث = } 180^\circ \text{)}$$

مثال (٢):



$\triangle D$ هـ و فيه : م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه ،
هـ ك $\cap$ د ل = { م } ، $\angle D = 65^\circ$ ،

(١) أوجد بالبرهان $\angle E$ (و)

(٢) أثبت أن المثلث هـ د و متطابق الضلعين

الحل :

المعطيات : م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه ، $\angle D = 65^\circ$

المطلوب : إيجاد : (١) $\angle E$ (و) (٢) إثبات أن المثلث هـ د و متطابق الضلعين

البرهان : $\therefore$ م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه (معطى)

$$\therefore \angle D = 90^\circ \text{ ، } \angle E = 90^\circ \text{ (نظرية)}$$

$$\therefore \angle D = \angle E = 65^\circ \text{ (معطى)}$$

$$\therefore \angle D = 115^\circ = 180^\circ - 65^\circ \text{ (بالتجاور على خط مستقيم)}$$

ك م ل و شكل رباعي فيه :

$$\therefore \angle D = \angle E = 90^\circ$$

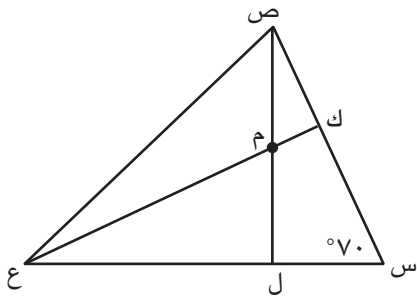
$$\therefore \angle E = 360^\circ - (115^\circ + 90^\circ + 90^\circ) = 65^\circ \text{ (مجموع قياسات زوايا الشكل)}$$

$$\therefore \angle E = 65^\circ \text{ (الرباعي = } 360^\circ \text{)}$$

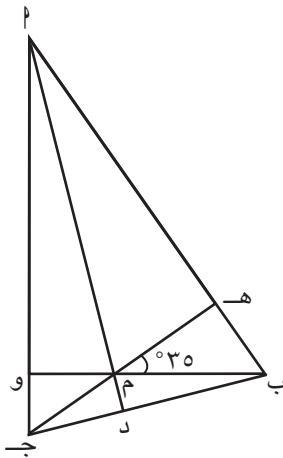
$$\therefore \angle D = \angle E = 65^\circ \text{ (معطى)}$$

$$\therefore \triangle D \text{ هـ د و متطابق الضلعين . (لتطابق زوايا القاعدة)}$$

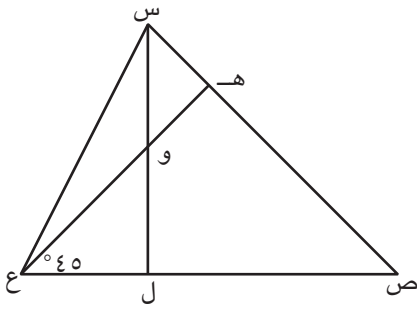
تمارين ذاتية :



- ١ في الشكل المقابل ، المثلث س ص ع فيه : $\angle س = 70^\circ$ ،
 م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة
 من رؤوس المثلث على أضلاعه ،
 $ل ص \cap ك ع = \{ م \}$ ،
 أوجد بالبرهان : (١) $\angle س ص ل$
 (٢) $\angle ص م ع$



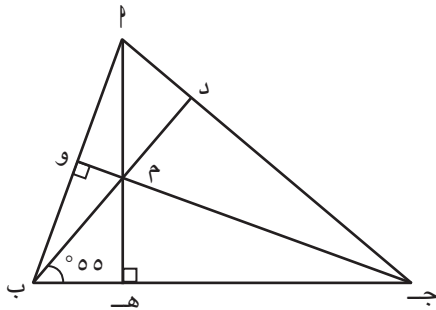
- ٢ في الشكل المقابل ، $\angle ب ج هـ$ مثلث فيه :
 م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة
 من رؤوس المثلث على أضلاعه ، $\angle هـ م ب = 35^\circ$ ،
 أوجد بالبرهان $\angle ب ن ج$.



٣ في الشكل المقابل ، س ص ع مثلث فيه : $\angle هـ ع ل = ٤٥^\circ$
و نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوسه على أضلاعه ،
 $س ل \cap هـ ع = \{ و \}$.

(١) أوجد بالبرهان $\angle هـ و س$ (هـ و س)

(٢) ما نوع المثلث هـ و س بالنسبة إلى أضلاعه ؟



٤ ا ب ج مثلث فيه :

$ا هـ \perp ب ج$ ، $ج و \perp ا ب$.

$\angle م ب هـ = ٥٥^\circ$

(١) أثبت أن : $ب د \perp ا ج$.

(٢) أوجد $\angle م ا ج$.

القطع المتوسطة للمثلث

٦ - ٧

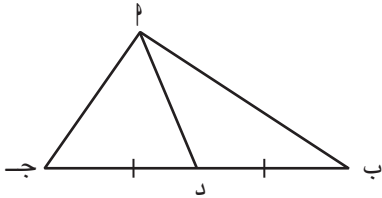
Medians of a Triangle

سوف تتعلّم : توظيف نظرية القطع المتوسطة للمثلث لحلّ تمارين هندسية .

العبارات والمفردات :

Median of a Triangle

القطع المتوسطة للمثلث



في Δ ABC : AD : AD منتصف BC ،

AD تُسمّى (قطعة متوسطة للمثلث ABC) .

القطعة المتوسطة للمثلث : هي القطعة المستقيمة التي تصل بين رأس في المثلث ومنتصف الضلع المقابل له .

إِسْتَكْشِفْ



في Δ ABC : AD و BE منتصف BC ، AD و BE منتصف AC ،

$AD \cap BE = M$

هل M ينصف BC ؟

للتحقّق من ذلك ، نتّبّع ما يلي :

العمل : نرسم AD يقطع BE في M ، بحيث $AM = MD$ ، ثمّ صلّ BC ، AD ، BE ، AC ، AB .

في Δ ABC : AD و BE // BC ؟ لماذا ؟

في Δ ABC : AD و BE // BC ؟ لماذا ؟

هل الشكل $BCAD$ متوازي أضلاع ؟ وضّح إجابتك .

∴ قطرا متوازي الأضلاع

∴ $AD = BE$

∴ AD قطعة

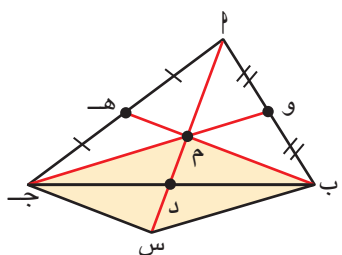
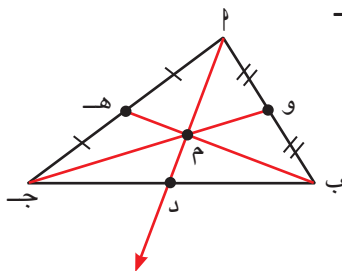
$AD = BE$

∴ $AD = BE = \frac{1}{2} BC$

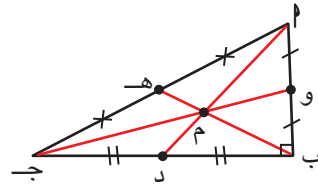
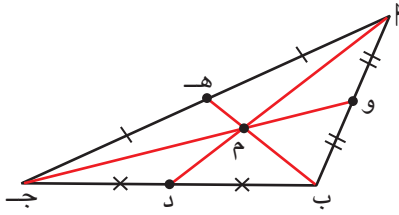
(لأنّ = عملاً)

اللوازم

أدوات هندسية .



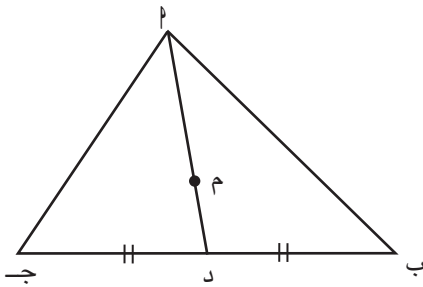
بالمثل في المثلث القائم الزاوية والمثلث المنفرج الزاوية .



• ماذا تلاحظ ؟

نظرية :

القطع المتوسطة للمثلث تتقاطع في نقطة واحدة تُقسم كل منها بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس .



في Δ ب ج د :

$\overline{AD}$ قطعة متوسطة ،

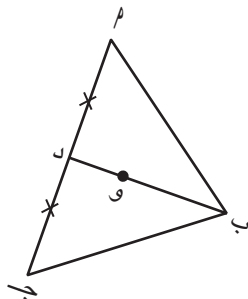
م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث .

أكمل :

$AM = \dots\dots\dots MD$	$DM = \dots\dots\dots AM$	$AM = \dots\dots\dots MD$
$BM = \dots\dots\dots MC$	$CM = \dots\dots\dots BM$	$BM = \dots\dots\dots MC$

دورك الآن (١)

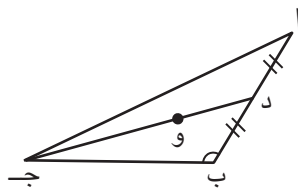
في كل من المثلثات التالية : و نقطة تقاطع القطع المتوسطة .
أكمل (دون استخدام الأدوات الهندسية) .



لتكن ب د = ٣٠ سم

∴ ب و = سم

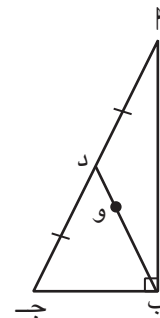
∴ و د = سم



لتكن و د = ٤ سم

∴ و ج = سم

∴ د ج = سم



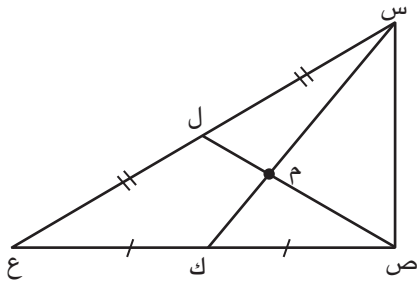
لتكن ب و = ٢ سم

∴ و د = سم

∴ ب د = سم



في الشكل المقابل س ص ع مثلث :



∴ ل منتصف ∴ ص ل قطعة

∴ ك منتصف ∴ س ك قطعة

∴ ص ل ∩ س ك = {م}

∴ م هي نقطة

مثال (١) :

أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب ،

ب ج = ٦ سم ،

م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث أ ب ج ، $\angle \text{ب} = 30^\circ$

أوجد بالبرهان كلاً من : (١) أ ب ج (٢) ب د

(٣) ب م (٤) م د

الحل :

المعطيات : أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب ، م نقطة تقاطع القطع المتوسطة ،

ب ج = ٦ سم ، $\angle \text{ب} = 30^\circ$

المطلوب : إيجاد كل من : (١) أ ب ج (٢) ب د (٣) ب م (٤) م د

البرهان : Δ أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب فيه :

∴ $\angle \text{ب} = 30^\circ$

∴ ب ج = ٦

(نتيجة)

(مثلث ثلاثيني ستيني)

∴ أ ب ج = ٦ × ٢ = ١٢ سم

∴ د منتصف أ ب ج ، ب زاوية قائمة

(نظرية)

ب د = ١/٢ أ ب ج

١٢ × ١/٢ = ٦ سم

(معطى)

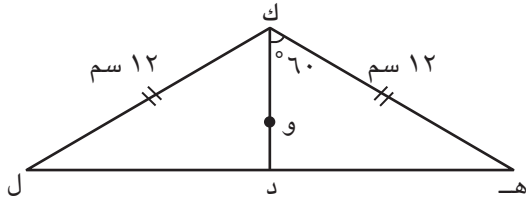
∴ م نقطة تقاطع القطع المتوسطة

∴ ب د قطعة متوسطة

(نظرية)

∴ ب م = ٢/٣ أ ب ج = ٢/٣ × ١٢ = ٨ سم
∴ م د = ١/٣ أ ب ج = ١/٣ × ١٢ = ٤ سم

مثال (٢) :



ك هل مثلث فيه :

ك هـ = ك ل = ١٢ سم ، $\angle \text{هـ ك د} = 60^\circ$ ،
و نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث .

أوجد بالبرهان كلاً من : (١) $\angle \text{هـ د}$

(٢) ك د

(٣) و د

الحل :

المعطيات : ك هل مثلث فيه : ك هـ = ك ل = ١٢ سم ، $\angle \text{هـ ك د} = 60^\circ$

المطلوب : إيجاد كل من : (١) $\angle \text{هـ د}$ (٢) ك د (٣) و د

البرهان : Δ ك هل فيه :

∴ و نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث ك هل (معطى)

∴ د منتصف هـ ل

(معطى)

∴ ك هـ = ك ل

(من خواص المثلث المتطابق الضلعين)

∴ ك د $\perp$ هـ ل

∴ $\angle \text{ك د هـ} = 90^\circ$

في Δ هـ ك د :

∴ $\angle \text{هـ ك د} = 60^\circ$

∴ $\angle \text{هـ د} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

∴ Δ هـ ك د مثلث ثلاثيني ستيني

(نتيجة)

∴ ك د = $\frac{1}{2}$ ك هـ

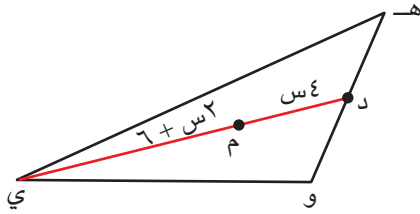
$$6 = 12 \times \frac{1}{2}$$

∴ و د = $\frac{1}{3}$ ك د

(نظرية)

$$2 = 6 \times \frac{1}{3}$$

مثال (٣) :



المثلث هـ و ي فيه : م نقطة تقاطع القطع المتوسط للمثلث .
إذا كان د م = (٤ س) سم ، م ي = (٢ س + ٦) سم ،
أوجد بالبرهان قيمة س .

الحل :

المعطيات : المثلث هـ و ي فيه : م نقطة تقاطع القطع المتوسط للمثلث ،
د م = (٤ س) سم ، م ي = (٢ س + ٦) سم .

المطلوب : إيجاد قيمة س .

البرهان : ∴ م نقطة تقاطع القطع المتوسط للمثلث هـ و ي (معطى)
(نظرية)

$$\begin{aligned} \therefore د م &= \frac{١}{٢} \times م ي \\ \therefore ٤ س &= \frac{١}{٢} (٢ س + ٦) \\ ٤ س &= س + ٣ \\ ٤ س - س &= ٣ \\ ٣ س &= ٣ \\ س &= ١ \end{aligned}$$

(حلّ المعادلة)

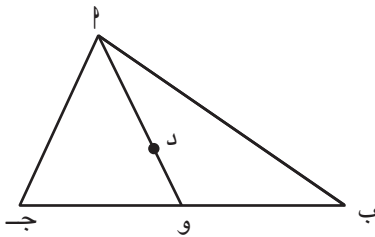
(تحقّق من إجابتك)

انتبه

إستخدم خاصية توزيع الضرب
على الجمع لتسهيل العمليات
الحسابية .

$$\frac{١}{٢} (٢ س + ٦)$$

دورك الآن (٣)



في الشكل المقابل : أ و قطعة متوسطة للمثلث أ ب جـ ،
إذا كان أ د = ٥س - ١ ، و د = ٢س ،
أوجد بالبرهان طول أ و .

المعطيات :

المطلوب :

البرهان : ∴ د نقطة تقاطع (معطى)

∴ أ و قطعة متوسطة ،

$$\therefore و د = \frac{١}{٢} \times \dots\dots\dots$$

$$\begin{aligned} ٢س &= \frac{١}{٢} \times (\dots\dots\dots) \quad (حلّ المعادلة) \\ ٤س &= ٥س - ١ \\ ٤س - ٥س &= -١ \\ -س &= -١ \end{aligned}$$

$$\therefore س = \dots\dots\dots$$

وبالتالي ، أ و = = (تحقّق من إجابتك)

انتبه

إضرب طرفي المعادلة في ٢
لتسهيل العمليات الحسابية .
 $٢ \times ٢س = ٢ \times \frac{١}{٢} (٥س - ١)$



١ في الشكل المقابل :

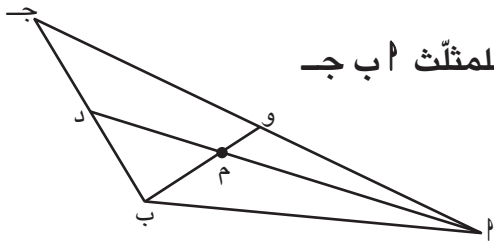
١٤ د $\cap$ ب و = { م } ، م نقطة تقاطع القطع المتوسط للمثلث ا ب جـ

إذا كان م ب = ٤ سم ، ١ د = ٢٧ سم ،

أُوجِدُ بِالْبَرْهَانِ كُلًّا مِنْ: (١) وَم

۲ (۲)

(۳) م د

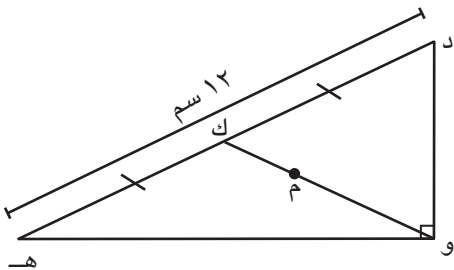


٢ Δ هـ و د قائم الزاوية في و ، فيه :

م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث .

أوجد بالبرهان كلاً مما يلي : (١) و ك

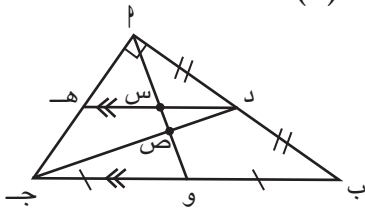
(۲) م ك





٥ لديك قائمتان ، إختتر من القائمة (٢) ما يناسب كل تمرين من القائمة (١) لتحصل على إجابة صحيحة .

في الشكل المقابل : $\angle$ ب ج مثلث قائم الزاوية في $\angle$ ،
د منتصف $\overline{أ ب}$ ، و منتصف $\overline{ب ج}$ ،
 $\overline{د ه} // \overline{ب ج}$ ، $\overline{د ه} = ٦$ سم

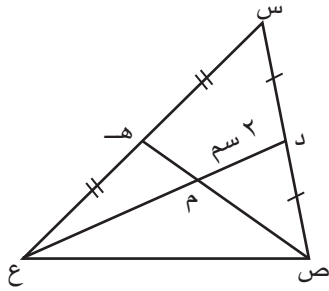


القائمة (٢)	القائمة (١)
١ سم أ	١ ص و =
٢ سم ب	٢ د س =
٣ سم ج	٣ س ص =
٤ سم د	
٦ سم هـ	

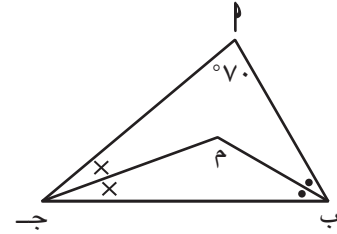
تقويم الوحدة التعليمية السابعة Unit Seven Assessment

أولاً: البنود المقالية

١ في كلٍّ من المثلثات التالية ، أكمل دون استخدام الأدوات الهندسية :

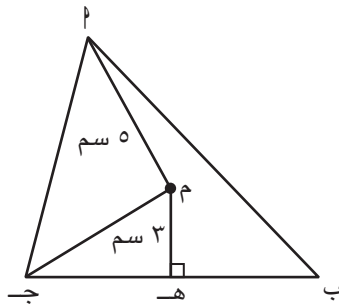


ب

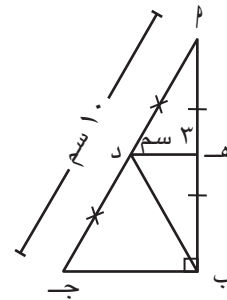


أ

م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث س ص ع .
 $\angle \text{ب م ج} = \angle \text{ب م د} = \angle \text{ب م هـ} = \angle \text{ب م و} = \angle \text{ب م ز} = \angle \text{ب م ح} = \angle \text{ب م ط} = \angle \text{ب م ك} = \angle \text{ب م خ} = \angle \text{ب م د} = \angle \text{ب م هـ} = \angle \text{ب م و} = \angle \text{ب م ز} = \angle \text{ب م ح} = \angle \text{ب م ط} = \angle \text{ب م ك} = \angle \text{ب م خ}$

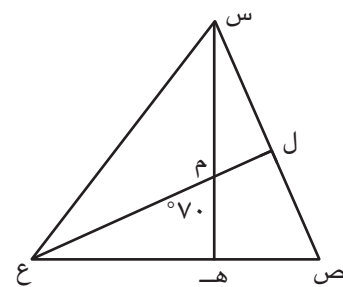


د



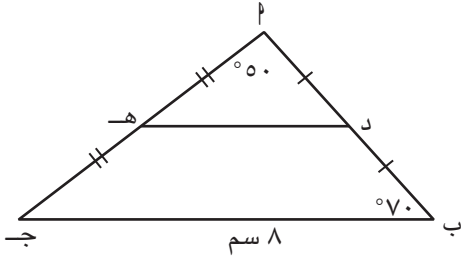
ج

م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث أ ب ج .
 $\angle \text{ب م ج} = \angle \text{ب م د} = \angle \text{ب م هـ} = \angle \text{ب م و} = \angle \text{ب م ز} = \angle \text{ب م ح} = \angle \text{ب م ط} = \angle \text{ب م ك} = \angle \text{ب م خ}$

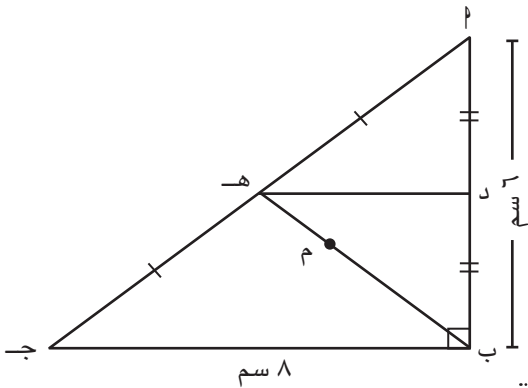


هـ

م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث س ص ع على أضلاعه .
 $\angle \text{ب م ج} = \angle \text{ب م د} = \angle \text{ب م هـ} = \angle \text{ب م و} = \angle \text{ب م ز} = \angle \text{ب م ح} = \angle \text{ب م ط} = \angle \text{ب م ك} = \angle \text{ب م خ}$



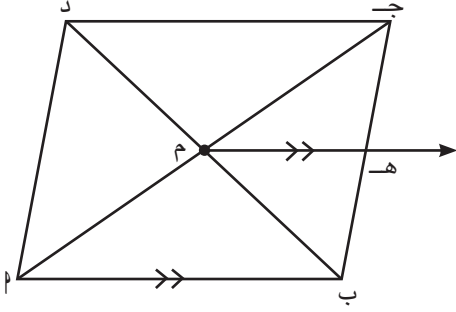
- ٢ أ ب ج مثلث فيه : د منتصف $\overline{AC}$ ،
 هـ منتصف $\overline{AB}$ ، $\angle A = 50^\circ$ ،
 ب ج = ٨ سم ، $\angle B = 70^\circ$.
 أوجد بالبرهان : (١) د هـ (٢) $\angle ADE$ (٣) $\angle AHD$



- ٣ أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب فيه :
 د منتصف $\overline{AC}$ ، هـ منتصف $\overline{AB}$ ،
 أ ب = ٦ سم ، ب ج = ٨ سم
 م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث أ ب ج .
 أوجد بالبرهان : (أ) د هـ (ب) م ج
 (ج) ب هـ (د) م هـ

٤ في الشكل المقابل :

أ ب ج د متوازي الأضلاع تقاطع قطراه في م
 م هـ // أ ب ويقطع ب جـ في هـ .
 أثبت أن : هـ منتصف ب جـ .

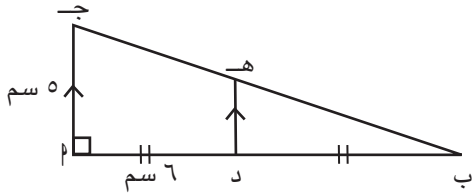


٥ في الشكل المقابل ، أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ

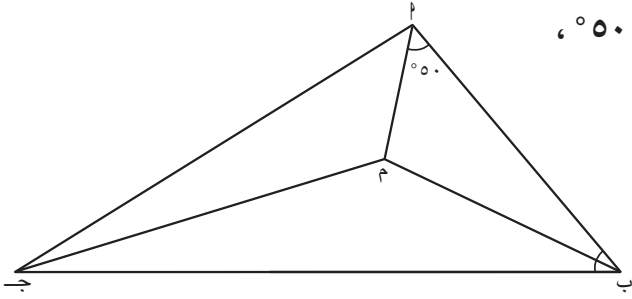
د منتصف أ ب ، د هـ // أ جـ ،
 د أ = ٦ سم ، أ جـ = ٥ سم .

أ أثبت أن : ب هـ = هـ جـ .

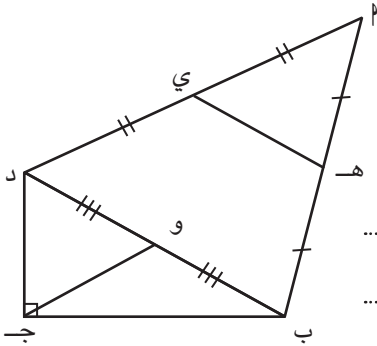
ب أوجد : طول هـ جـ .

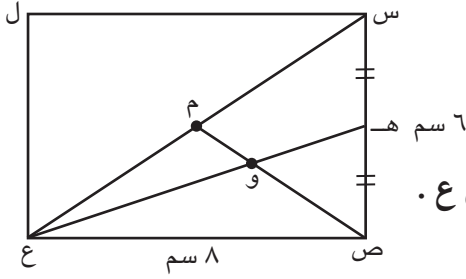


- ٦ ا ب ج مثلث فيه : $\angle م = \angle ب = \angle ج = 50^\circ$ ،
حيث م نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلية .
أوجد بالبرهان $\angle م$.

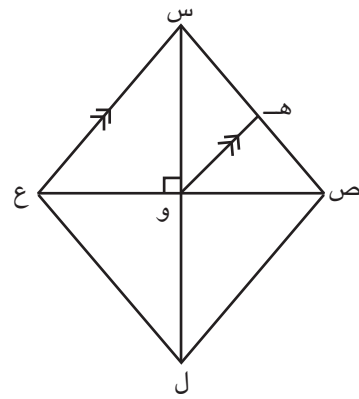


- ٧ في الشكل المقابل : هـ ، ي ، و منتصفات ا ب ، ا د ،
ب د على الترتيب ، $\angle ج = 90^\circ$.
برهن أن : هـ ي = و ج .





- ٨ س ص ع ل مستطيل ،
 م نقطة تقاطع قطريه ، $\overline{ص ع} = ٨ \text{ سم}$ ، $\overline{س ص} = ٦ \text{ سم}$
 نصفت س ص في هـ ، $\overline{هـ ع} \cap \overline{س ص} = \{ م \}$.
 (١) برهن أن : و نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث س ص ع .
 (٢) أوجد طول و م .

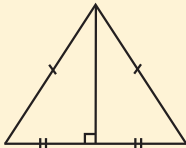


- ٩ عند تصميم إحدى النقوشات الفنية .
 قرّر المصمّم رسم الشكل المقابل كما هو موضّح :
 حيث $\overline{س ص} = \overline{س ع} = ١٠ \text{ سم}$ ، $\overline{س ل} \perp \overline{ص ع}$ ،
 رسم و هـ $\parallel$ س ع ، هـ $\ni$ ص س . أوجد بالبرهان طول هـ و .

تذكّر

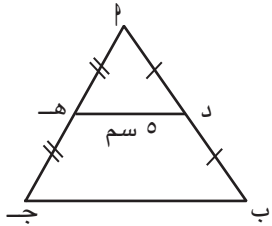
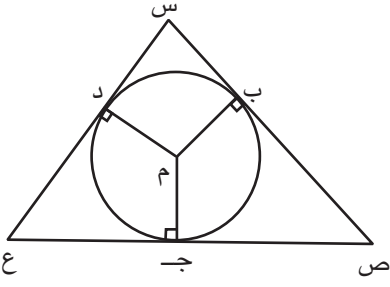
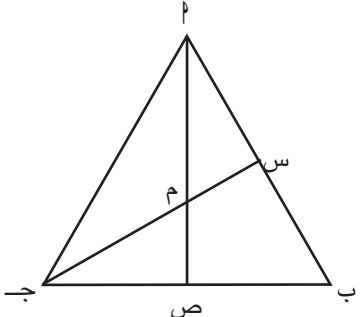
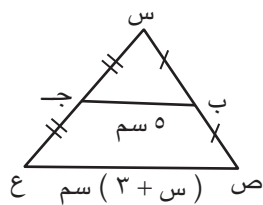


في المثلث المتطابق الضلعين
 العمود المرسوم من رأس المثلث
 على قاعدته ينصفها .



ثانيًا: البنود الموضوعية

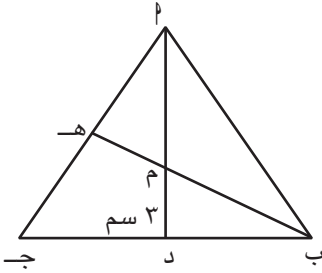
في البنود (١ - ٦) ، ظلّل ☐ أ إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلّل ☐ ب إذا كانت العبارة غير صحيحة .

☐ ب	☐ أ	١ المثلث $\triangle$ ب ج فيه : د منتصف $\overline{AB}$ ، هـ منتصف $\overline{AC}$ ، د هـ = ٥ سم ، فإن $\overline{BC} = ١٠$ سم . 
☐ ب	☐ أ	٢ نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث المنفرج الزاوية تقع داخل المثلث .
☐ ب	☐ أ	٣ نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث القائم الزاوية على أضلاعه هي رأس الزاوية القائمة .
☐ ب	☐ أ	٤ في الشكل المقابل : دائرة مركزها م فإن م هي نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث س ص ع . 
☐ ب	☐ أ	٥ إذا كان $\triangle$ ب ج متطابق الأضلاع ، م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوسه على أضلاعه ، $\overline{AM} \cap \overline{BC} = \{ م \}$ ، فإن $\angle AMB = ١٢٠^\circ$ 
☐ ب	☐ أ	٦ في الشكل المقابل : $\angle V = ٧$ 

في البنود (٧ - ١٩) أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلّل الإجابة الصحيحة .

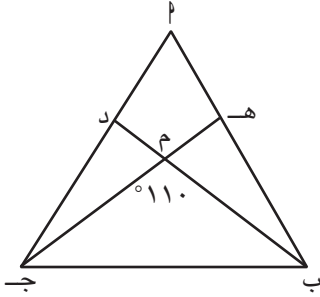
٧ أ ب جـ مثلث فيه م نقطة تقاطع متوسطات المثلث ،
م د = ٣ سم ، فإنّ أ د =

- أ ٦ سم ب ٩ سم ج ١,٥ سم د ٥ سم



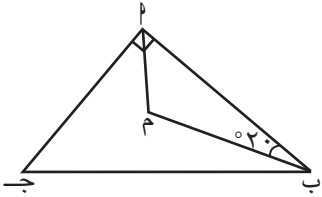
٨ أ ب جـ مثلث فيه م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه ،
و (ب م جـ) = ١١٠° ،
فإنّ و (أ م) =

- أ ٧٠° ب ١١٠° ج ٣٥° د ٦٠°



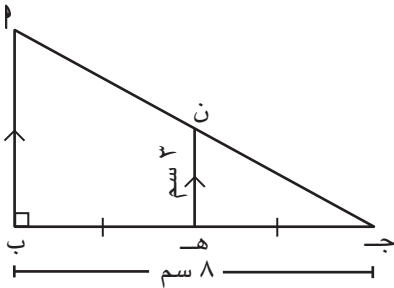
٩ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ ،
م نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلة للمثلث ،
و (أ م ب) = ٢٠° ، فإنّ و (جـ م) =

- أ ٣٠° ب ٤٠° ج ٥٠° د ٦٠°



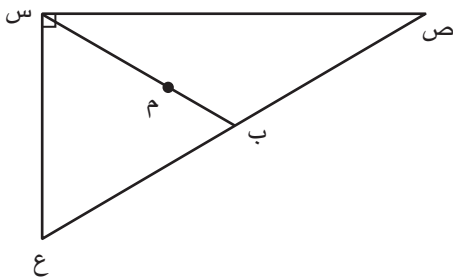
١٠ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ،
هـ منتصف ب جـ ، هـ ن // أ ب .
فإنّ : أ جـ =

- أ ٨ سم ب ١٠ سم ج ٣ سم د ٦ سم



١١ س ص ع مثلث قائم الزاوية في س .
طول وتره = ٢٤ سم ، م نقطة تقاطع القطع
المتوسطة للمثلث س ص ع ،
فإنّ : م ب =

- أ ٤ سم ب ٣ سم ج ٦ سم د ١٢ سم



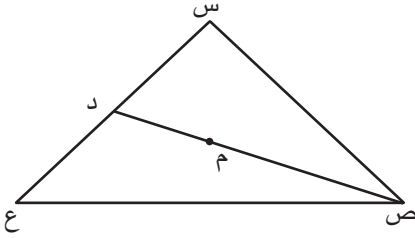
١٢ عدد القطع المتوسطة للمثلث المنفرج الزاوية يساوي :

- أ صفر ب ١ ج ٢ د ٣

١٣ إذا كان $\overline{ص د}$ قطعة متوسطة في المثلث $س ص ع$ ،

م نقطة تلاقي القطع المتوسطة ، فإن $م د =$

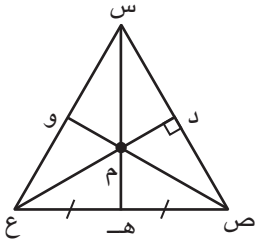
- أ $\frac{١}{٢}$ ص م ب ٢ ص م ج $\frac{١}{٢}$ ص د د ٢ ص د



١٤ $س ص ع$ مثلث متطابق الأضلاع ، $س هـ \cap ص و \cap ع د = \{ م \}$ ،

فإن م هي نقطة تقاطع :

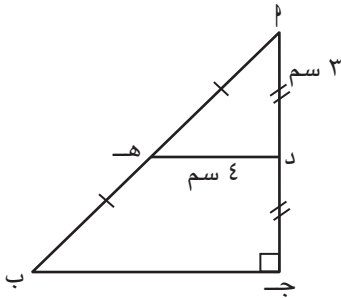
- أ منصفات زوايا المثلث فقط .
 ب منصفات زوايا المثلث والأعمدة المرسومة من رؤوسه على أضلاعه فقط .
 ج منصفات زوايا المثلث والأعمدة المرسومة من رؤوسه على أضلاعه و القطع المتوسطة للمثلث ومحاور أضلاعه .
 د منصفات زوايا المثلث ومحاور أضلاعه فقط .



١٥ في الشكل المقابل : إذا كانت د ، هـ منتصفَي $\overline{أ ب}$ ،

$\overline{أ ب}$ على الترتيب ، فإن $\overline{أ ب} =$

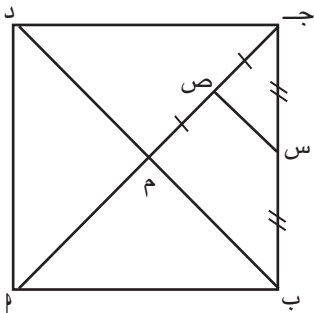
- أ ٥ سم ب ١٠ سم ج ٢٥ سم د ١٢ سم



١٦ في الشكل المقابل : $\overline{أ ب ج د}$ مربع فيه

س ، ص منتصفا $\overline{أ ب ج د}$ ، ج م على الترتيب حيث $\overline{أ ج} = ١٢$ سم ، فإن $\overline{س ص}$ يساوي :

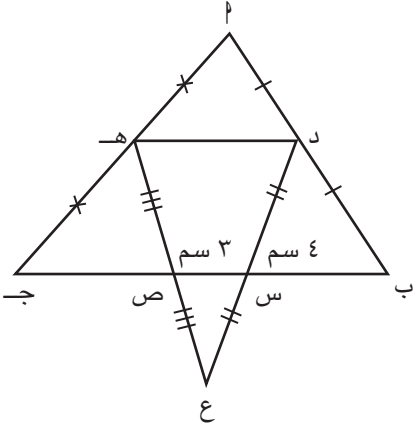
- أ ١٢ سم ب ٦ سم ج ٣ سم د ٤ سم



١٧ في الشكل المقابل ، وحسب المعطيات الموضحة حيث

ب س = ٤ سم ، س ص = ٣ سم ، فإن طول ص ج يساوي :

- أ ٣ سم ب ٤ سم ج ٥ سم د ٦ سم

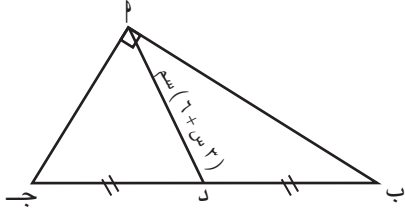


١٨ في الشكل المقابل : المثلث أ ب ج قائم الزاوية في أ ،

د منتصف ب ج حيث أ د = (٣ س + ٦) سم ،

ب ج = (١٠ س) سم ، فإن طول أ د يساوي

- أ ٣٠ سم ب ١٥ سم ج ١٠ سم د ٢٠ سم

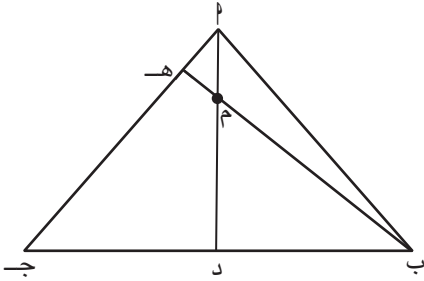


١٩ في الشكل المقابل : إذا كانت م نقطة تقاطع الأعمدة

المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه ،

فإن $\angle (هـ ب ج) =$

- أ $\angle (ب أ د)$ ب $\angle (هـ ج د)$
ج $\angle (ج أ د)$ د $\angle (د م هـ)$



الوحدة التعليمية الثامنة



النسبة المئوية – الهندسة والقياس

«الجمال فيه هندسة أبراج الكويت»

تحتوي أبراج الكويت على كرة ضخمة تُستخدم كخزان للماء ، ويعتمد تصميمها بالكامل على حسابات المساحة السطحية والحجم .

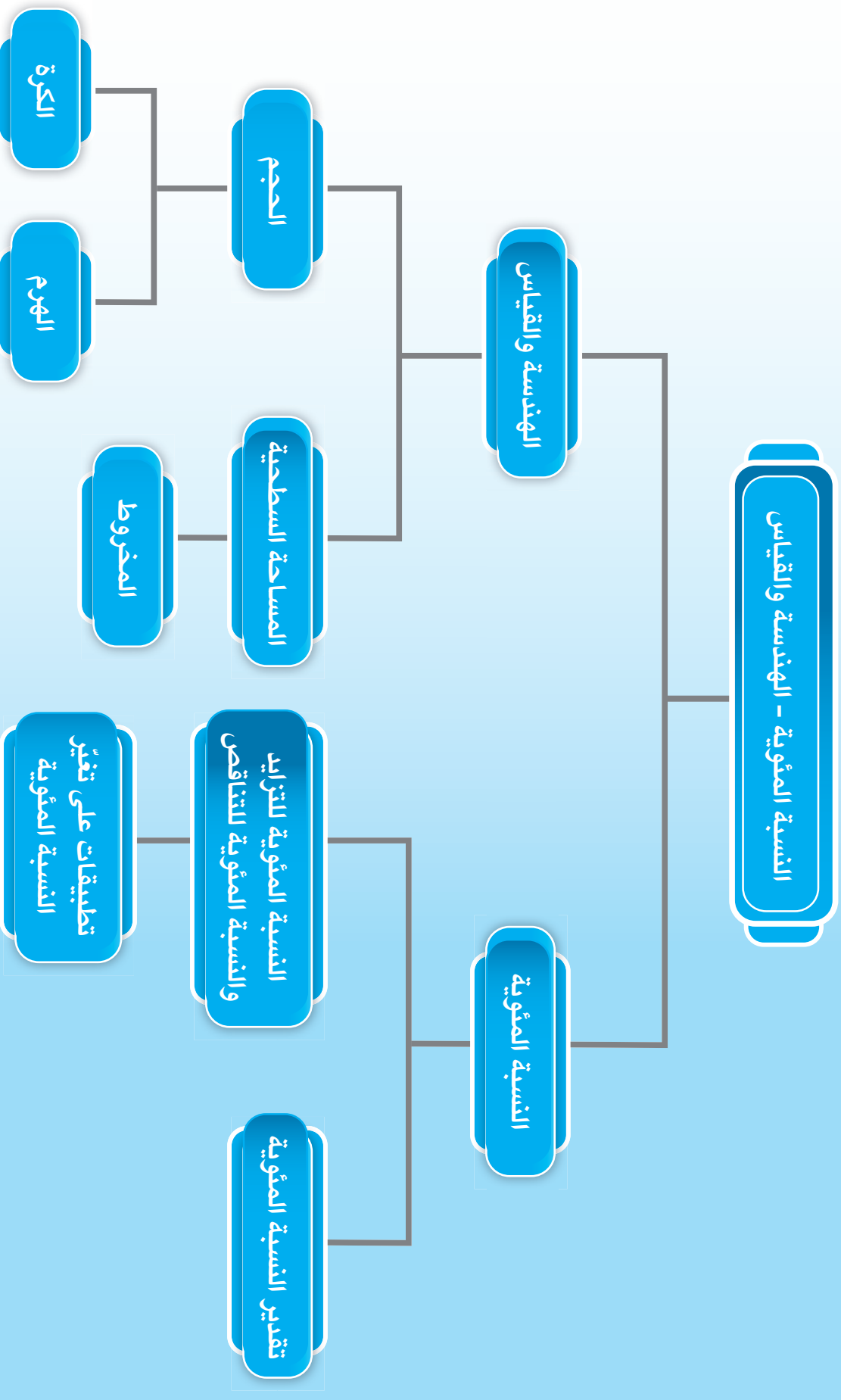
فكلّما تغيّر طول نصف قطر الكرة ولو قليلاً ، تغيّر الحجم والمساحة السطحية بشكل كبير .

ولهذا السبب ، يحرص المهندسون عند تصميم المعالم على اختيار النسب بدقّة ، لأنّ زيادة بسيطة في الأبعاد قد تسبّب زيادة كبيرة في الحجم والمساحة السطحية وبالتالي زيادة التكلفة .



المجال	معايير المنهج	مؤشر الأداء
العدّ والجبر	تحديد علاقات التناسب في المسائل الرياضية .	التذكّر - التعرّف - الفهم - التمثيل - التعاون - العمل الجماعي - الوسائط - حلّ المشكلات - الاستكشاف والتقصّي - النمذجة - العلاقات - الاستدلال - الاستنتاج - التقويم
الهندسة والقياس	تطبيق الأساليب والأدوات والصيغ الملائمة لتحديد قياسات . فهم خواصّ القياس للأشياء والوحدات والأنظمة وعمليات القياس .	التذكّر - التعرّف - الفهم - الوسائط - الاستكشاف والتقصّي - النمذجة - المقارنة والتمييز - الاستنتاج - حلّ المشكلات - التحليل والتركيب - القوانين - التقويم - الاستدلال - العلاقات

مخطط تنظيمي للوحدة التعليمية الثامنة



هل أنت مستعدّ ؟

١ أكمل الجدول التالي :

النسبة المئوية	الصورة العشرية	الصورة الكسرية	الشكل
١٠٠%			
		$\frac{1}{2}$	
٢٥%			
	٠,٧٥		
$33\frac{1}{3}\%$	$0,3\overline{3}$		
		$\frac{2}{5}$	

هل أنت مستعدّ ؟

٢ حلّ التناسب لكلّ ممّا يلي :

أ $\frac{س}{١٦} = \frac{٥}{٨}$

ب $\frac{١٢٥}{٤٠} = \frac{٢٥}{س}$

.....

.....

٣ حلّ المعادلات التالية في ح :

١ ٤٠ س = ٣٦٠

ب س $\times \frac{28}{100} = 7$

ج $\frac{9}{5} = \text{س} + 1$

د $7 - \text{س} = 1$

هـ $20 = (1 + \text{س}) \times 16$

و $3 = 5 \times (\text{س} - 1)$

٤ أوجد قيمة كلٍّ مما يلي :

١ ٣٠٪ من ٧٠

ب ١٥٪ من ١٨٠

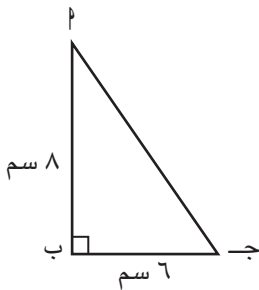
٥ أوجد ناتج كلٍّ مما يلي :

١ $10,5 \times 4,2 =$

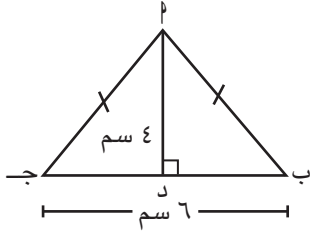
ب $10 \times 3,14 =$

ج $3,5 \times 14 =$

٦ في الشكل المقابل : أوجد طول $\overline{أج}$.



٧ في الشكل المقابل ، أوجد كلاً ممّا يلي :



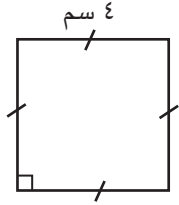
أ طول د ب =

ب طول أ ب =

ج محيط Δ أ ب ج =

د مساحة Δ أ ب ج =

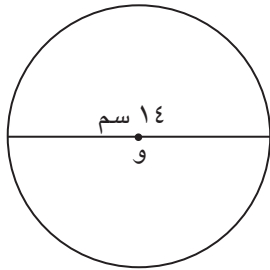
٨ في الشكل المقابل ، أوجد مساحة المنطقة المربعة .



.....
.....
.....
.....

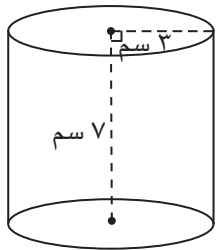
٩ في الشكل المقابل ، أوجد مساحة المنطقة الدائرية .

$$\left(\frac{22}{7} = \pi \right)$$

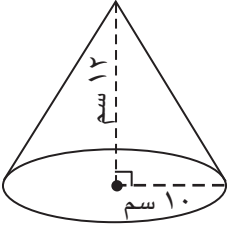


.....
.....
.....

١٠ أوجد حجم الأسطوانة الدائرية القائمة (اعتبر $\frac{22}{7} = \pi$) .



حجم الأسطوانة =
.....
.....
.....



١١ أوجد حجم المخروط الدائري القائم الذي طول نصف قطر قاعدته ١٠ سم وارتفاعه ١٢ سم (إعتبر $\pi = 3,14$).

حجم المخروط =

.....

.....

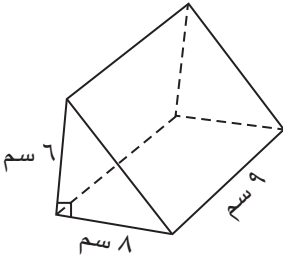
.....

.....

.....

.....

١٢ في الشكل المقابل ، أوجد حجم المنشور القائم :



حجم المنشور =

.....

.....

.....

.....

.....

.....

تقدير النسبة المئوية

٨ - ١

Estimate Percent

سوف تتعلّم : تقدير النسبة المئوية .

العبارات والمفردات :

Estimate تقدير Percent النسبة المئوية

حلّ وناقش

أراد سالم دفع فاتورة العشاء في أحد المطاعم وقيمتها ٩ دنانير . وكان هذا المطعم يعتمد بدل الخدمة ١٠٪ من قيمة الفاتورة ، أو ١٩٪ بدل الخدمة المتميزة .

RESTAURANT Kuwait	
HUMMUS	2.000
FALAFEL	2.500
GRILLED CHICKEN	3.500
ICED TEA	1.000
SUBTOTAL	9.000
SERVICE CHARGE	0.900
TOTAL	9.900
Thank you !	

١ قُدّر قيمة ما يدفعه سالم في حالة بدل الخدمة ١٠٪

نلاحظ أنّ ٩ دنانير $\approx$ ١٠ دنانير

بدل الخدمة $\approx$ ١٠٪ $\times$ ١٠

$\approx$ ١٠ $\times$ $\approx$ دينار

قيمة ما يدفعه سالم $\approx$ + $\approx$ دينار

٢ قُدّر ما يدفعه سالم في حالة بدل الخدمة المتميزة ١٩٪

نلاحظ أنّ ١٩٪ $\approx$ ٢٠٪

بدل الخدمة $\approx$ ١٠ $\times$ $\approx$ دينار

$\approx$ ١٠ $\times$ $\approx$ دينار

قيمة ما يدفعه سالم $\approx$ + $\approx$ دينار

$\approx$ دينار

٣ ما القيمة الفعلية لبدل الخدمة في الفاتورة ؟

٤ ما نسبة بدل الخدمة لهذه الفاتورة ؟

معلومة مفيدة :

بدل الخدمة يُعطى مقابل الخدمة التي تقدّمها المطاعم .
وهو النسبة المئوية المحددة لبدل الخدمة $\times$ قيمة الفاتورة .

انتبه



عند التقدير ، إستخدِم الرمز $\approx$
ويُقرأ « يساوي تقريباً »

عند تقدير النسب المئوية نختار أعداداً مناسبة .

مثال (١) :

أ) قُدِّر ٢٤٪ من ٦٢

الحل :

$$٢٤\% \approx ٢٥\% , ٦٢ \approx ٦٠ \text{ (قُدِّر)}$$

$$٢٥\% \text{ من } ٦٠$$

$$٦٠ \times ٢٥\% =$$

$$١٥ = \cancel{٦٠}^{١٠} \times \frac{١}{٢} = ٦٠ \times \frac{\cancel{٢٥}^١}{\cancel{١٠٠}^{١٠}} =$$

$$\therefore ٢٤\% \text{ من } ٦٢ \approx ١٥$$

ب) قُدِّر ٥٣,٥٪ من ٩٩

الحل :

$$٥٣,٥\% \approx ٥٤\% , ٩٩ \approx ١٠٠ \text{ (قُدِّر)}$$

$$٥٤\% \text{ من } ١٠٠$$

$$١٠٠ \times ٥٤\% =$$

$$٥٤ = \cancel{١٠٠}^{١٠٠} \times \frac{٥٤}{\cancel{١٠٠}^{١٠٠}} =$$

$$\therefore ٥٣,٥\% \text{ من } ٩٩ \approx ٥٤$$

أعطِ تقديرًا آخر

دورك الآن (١)

قُدِّر ٣٢٪ من ٨٩

مثال (٢) :

إذا كانت مبيعات شركة ما في أحد الأعوام ٣٠٠ ٠٠٠ دينار ، ثم انخفضت بنسبة ١٩٪ في العام الذي يليه ، فقُدِّر قيمة الانخفاض .

الحل :

$$١٩\% \approx ٢٠\% \text{ (قُدِّر)}$$

$$\text{قيمة الانخفاض} \approx ٢٠\% \text{ من } ٣٠٠ ٠٠٠$$

$$\approx \cancel{٣٠٠ ٠٠٠}^{٣٠٠ ٠٠٠} \times \frac{٢٠}{\cancel{١٠٠}^{١٠٠}} =$$

$$\approx ٦٠ ٠٠٠$$

تُقَدَّر قيمة الانخفاض بـ ٦٠ ٠٠٠ دينار تقريبًا .

مثال (٣) :

تلقى محرر في صحيفة محلية رسائل من ٤٠ شخصًا ، إذا كان هذا العدد يمثل ٨٪ من العدد الكلي لقراء الصحيفة في مدينة ما ، فقدر عدد القراء لهذه الصحيفة .

الحل :

نفرض أن العدد الكلي للقراء هو س .

$$٨\% \approx ١٠\% \quad (\text{قَدَّر})$$

$$\therefore ١٠\% \text{ من س} \approx ٤٠$$

$$١٠\% \times \text{س} \approx ٤٠$$

$$\frac{١٠}{١٠٠} \times \text{س} \approx ٤٠$$

$$\frac{١٠}{١٠٠} \times \text{س} \approx ٤٠ \times \frac{١٠٠}{١٠}$$

$$\text{س} \approx ٤٠٠$$

يُقدَّر عدد قراء الصحيفة بـ ٤٠٠ شخص تقريبًا .

تذكّر



• ١٠٪ من س تكافئ ١٠٪ × س

$$\frac{١٠}{١٠٠} = ١٠\%$$

دورك الآن (٢)



اشترى خالد معدات للصيد بسعر ٢٠ دينارًا ، ودفع ١١٪ من سعرها كضريبة مبيعات .
قدر ما دفعه خالد .

$$١١\% \approx \dots \quad (\text{قَدَّر})$$

$$\text{قيمة الضريبة} \approx ٢٠ \times \dots$$

$$\approx ٢٠ \times \frac{\dots}{١٠٠} \approx \dots \text{دينار}$$

$$\text{ما دفعه خالد} \approx ٢٠ + \dots \approx \dots \text{دينار}$$

عبّر عن فهمك



تمتلك الكادي حاسوبًا قيمته ٢٥٠ دينارًا ، وهي تأمل أن تبيعه بحيث يكون سعر البيع على الأقل ٤٩٪ من قيمته الأصلية . إذا باعت الكادي حاسوبها بمبلغ ٩٠ دينارًا ، فهل حققت ما كانت تصبو إليه ؟ فسّر إجابتك مستخدمًا مفهوم التقدير .

تمارين ذاتية :



١ قَدِّر ٢٩٪ من ٢٠٠ ٤

٢ قَدِّر ٣٨٪ من ١٢٠

٣ جهاز كهربائي ثمنه ٦٢٠ دينارًا ، وكان عليه خصم ٢٢٪ . قَدِّر ثمنه بعد الخصم .

٤ أعلن أحد المحلّلات التجارية عن خصم ١١٪ على إحدى السلع . قَدِّر قيمة الخصم إذا كان سعر السلعة ٤٩٩ دينارًا .

٥ أفاد استطلاع للرأي بأن ٢٧٪ من متعلّمي مدرسة حكومية يمارسون هواية كرة السلة وعددهم ١١٠ متعلّمين . قَدِّر عدد متعلّمي هذه المدرسة .

Percentage Increase and Percentage Decrease

سوف تتعلّم : حلّ مسائل تتضمن نسبًا مئوية تزايدية ونسبًا مئوية تناقصية .

العبارات والمفردات :

النسبة المئوية للتزايد Percentage Increase النسبة المئوية للتناقص Percentage Decrease

تذكّر



- القيمة النهائية = القيمة الأصلية + مقدار الزيادة
- أو القيمة النهائية = القيمة الأصلية - مقدار النقصان .
- التغير إمّا بالزيادة أو بالنقصان .

- خزانة سعرها ١٢٠ دينارًا ؛ نسبة الخصم ٢٠٪ .
أوجد ما يلي :

١ مقدار النقصان :

$$\text{مقدار النقصان} = ١٢٠ \times ٢٠\% =$$

..... =

..... =

٢ القيمة النهائية للبيع (سعر البيع) :

$$\text{القيمة النهائية} = \text{القيمة الأصلية} - \text{مقدار النقصان}$$

..... - =

..... =

٣ النسبة المئوية بعد النقصان :

$$\text{النسبة المئوية بعد النقصان} = ١٠٠\% - ٢٠\% =$$

..... =

٤ ما قيمة ٨٠٪ من ١٢٠ دينارًا ؟

.....

حلّ وناقش



إشترى صاحب معرض أثاث خزانة ثياب بمبلغ ١١٠ دنانير ، ثمّ باعها بنسبة ربح ٤٠٪ ، كما باع خزانة ثياب تصميمها قديم كانت في المعرض بنسبة خصم ٢٠٪ عن سعرها الأصلي وهو ١٢٠ دينارًا .
ما سعر بيع خزانة الثياب في الحالتين ؟

- خزانة سعرها ١١٠ دنانير ؛ نسبة الربح ٤٠٪ .
أوجد ما يلي :

١ مقدار الزيادة :

$$\text{مقدار الزيادة} = ١١٠ \times ٤٠\% =$$

..... =

..... =

٢ القيمة النهائية للبيع (سعر البيع) :

$$\text{القيمة النهائية} = \text{القيمة الأصلية} + \text{مقدار الزيادة}$$

..... + =

..... =

٣ النسبة المئوية بعد الزيادة :

$$\text{النسبة المئوية بعد الزيادة} = ١٠٠\% + ٤٠\% =$$

..... =

٤ ما قيمة ١٤٠٪ من ١١٠ دنانير ؟

.....

ماذا تلاحظ ؟

يمكن حلّ المسائل التي تتضمن نسباً مئوية تزايدية باستخدام المعادلة التالية :

$$\text{القيمة النهائية} = \text{القيمة الأصلية} \times (١٠٠ \% + \text{النسبة المئوية للتزايد}) .$$

كذلك ، يمكن حلّ المسائل التي تتضمن نسباً مئوية تناقصية باستخدام المعادلة التالية :

$$\text{القيمة النهائية} = \text{القيمة الأصلية} \times (١٠٠ \% - \text{النسبة المئوية للتناقص}) .$$

مثال (١) :

أوجد القيمة النهائية إذا كانت القيمة الأصلية ٤٠ والنسبة المئوية للتزايد ٣٠ % .

الحلّ :

$$\text{القيمة النهائية} = \text{القيمة الأصلية} \times (١٠٠ \% + \text{النسبة المئوية للتزايد})$$

$$= (١٠٠ \% + ٣٠ \%) \times ٤٠ =$$

$$= ١٣٠ \% \times ٤٠ =$$

$$= ٥٢ = \frac{١٣٠}{١٠٠} \times ٤٠$$

دورك الآن (١)

أوجد القيمة النهائية إذا كانت القيمة الأصلية ٢٥٠ والنسبة المئوية للتناقص ٨٠ % .

مثال (٢) :

تناقصت قيمة إيرادات إحدى شركات الاتصالات المدرجة في سوق الأوراق المالية بنسبة ١٠ % حيث

بلغت ٣٦ ٠٠٠ دينار (إيرادات يوم واحد) .

أوجد القيمة الأصلية للإيرادات ومقدار النقص .

الحلّ :

$$\text{القيمة النهائية} = \text{القيمة الأصلية} \times (١٠٠ \% - \text{النسبة المئوية للتناقص})$$

$$٣٦ ٠٠٠ = \text{القيمة الأصلية} \times (١٠٠ \% - ١٠ \%)$$

$$٣٦ ٠٠٠ = \text{القيمة الأصلية} \times ٩٠ \%$$

$$\frac{٣٦ ٠٠٠}{٩٠} = \text{القيمة الأصلية} \times \frac{٩٠}{٩٠} = \frac{٣٦ ٠٠٠}{٩٠} \times \frac{١٠٠}{١٠٠} = ٤٠٠$$

$$\therefore \text{القيمة الأصلية} = ٤٠٠ \times ١٠٠ = ٤٠ ٠٠٠ \text{ دينار}$$

$$\text{مقدار النقص} = ٤٠ ٠٠٠ - ٣٦ ٠٠٠ = ٤ ٠٠٠ \text{ دينار}$$

أوجد القيمة الأصلية ومقدار الزيادة إذا كانت القيمة النهائية تساوي ٣٢٠ والنسبة المئوية للتزايد تساوي ٦٠٪.

$$\text{القيمة النهائية} = \text{القيمة الأصلية} \times (100\% + \dots)$$

معلومة مفيدة :

بعض الدول تعفي الزائرين من الضريبة حيث يمكنهم استرجاع نسبة معينة من قيمة مشترياتهم عند مغادرة البلد وتُسمى Tax Free Shopping .

عبّر عن فهمك

اشترت ريم من إحدى الدول مشتريات بقيمة ١٨٠٠ دينار ، وعند عودتها في المطار ، اتجهت ريم إلى قاعة (Tax Free) . حيث استرجعت ١٠٪ من قيمة مشترياتها . في رأيك ، كم قيمة مشتريات ريم بعد استرجاع ١٠٪ منها ؟

مثال (٣) :

زادت إحدى الجامعات الخاصة المتميزة عدد قبول المتعلمين إلى ٦٣٠٠ متعلم ، إذا كان العدد الأصلي للقبول كل سنة ٥٠٠ متعلم ، فأوجد النسبة المئوية للتزايد .

الحل :

$$\text{القيمة النهائية} = \text{القيمة الأصلية} \times (100\% + \dots)$$

$$6300 = 500 \times (100\% + \dots)$$

$$\frac{6300}{500} = 100\% + \dots$$

$$\frac{63}{5} = 100\% + \dots$$

$$\frac{63}{5} = 100\% + \dots$$

$$\therefore \text{النسبة المئوية للتزايد} = \frac{63}{5} - 100\% = \frac{63}{5} - 100\% = 26\%$$

تذكر

$$100\% = 1$$

انتبه

$$\frac{0}{0} = 1$$

أوجد النسبة المئوية للتناقص إذا كانت القيمة النهائية ٢٠٠ والقيمة الأصلية ٥٠٠ .

تمارين ذاتية :



١ أوجد التكلفة الإجمالية لسلعة كان سعرها ٣٠٠ دينار ، ثمَّ زادت بنسبة ٢٠٪ .

٢ أوجد القيمة الأصلية إذا كانت : القيمة النهائية تساوي ٥٠٠ ، والنسبة المئوية للتناقص تساوي ٧٥٪ .

٣ تزايدت إيرادات إحدى المؤسسات التجارية في أحد الشهور بنسبة ٣٠٪ عن الشهر السابق حيث بلغت ١٣ ٠٠٠ دينار ، أحسب إيرادات الشهر السابق .

٤ يعمل خالد كمحاسب في متجر ويحصل على خصم ٣٠٪ على مشترياته منه .
إذا كان سعر البيع لإحدى السلع ٩٠ دينارًا ، فكم سيدفع خالد بعد الخصم ؟

٥ اشترت منى أجهزة كهربائية بقيمة ٢٤٠٠ دينار ، حيث حصلت على خصم ٢٠٪ .
أوجد السعر الأصلي للأجهزة ، ثم أوجد مقدار الخصم .

٦ أوجد النسبة المئوية للتزايد إذا كانت القيمة النهائية ٢١٠ دنانير والقيمة الأصلية ١٤٠ دينارًا .



٧ باع عبد الرحمن لأحمد دراجة هوائية بسعر ٢٤ دينارًا وخوذة بسعر ٦ دنانير . تمثل التكلفة الإجمالية التي دفعها أحمد ١٢٠٪ ممّا أنفقه عبد الرحمن في الأصل لشراء الدراجة والخوذة . فكم دفع عبد الرحمن في الأصل ؟ وما الربح الذي حقّقه ببيعه الدراجة والخوذة ؟



تطبيقات علم تغيير النسبة المئوية

Application of Percent Change

٣ - ٨

سوف تتعلم : استخدام النسبة المئوية للتزايد والتناقص وتطبيقها .

حلّ وناقش

تذكّر



تغيير النسبة المئوية إمّا بالزيادة
أو بالنقصان .



معلومة مفيدة :

بنك الكويت المركزي
هو الجهة المسؤولة عن
المحافظة على استقرار الدينار الكويتي
وقيمته الشرائية ، وهو يقوم بذلك عبر
التحكم في السياسة النقدية ، كما يُعدّ
من أوائل البنوك المركزية الخليجية التي
استخدمت نظام الرقابة المصرفية المبنية
على المخاطر ، وهو نظام حديث يساعد
على كشف المشكلات قبل حدوثها ويُسمّى
النظام المالي .

أعلن بنك الكويت المركزي في إحدى السنوات أنّ قيمة الاحتياطي
النقدي كان في بداية السنة المالية ١٠ مليارات دينار .
فأوجد قيمة الاحتياطي الجديد في كلّ من الحالات التالية :

١ ارتفاع بنسبة ١٠٪ ، ثمّ انخفاض بنسبة ١٠٪ .

القيمة النهائية للاحتياطي النقدي بعد ارتفاع ١٠٪

$$= \text{القيمة الأصلية} \times (100\% + 10\%) \quad (\text{النسبة المئوية للتزايد})$$

$$= \dots \times (100\% + 10\%)$$

$$= \dots \times 110\%$$

$$= \dots \times \dots = \dots \text{مليار دينار}$$

القيمة النهائية للاحتياطي النقدي بعد انخفاض ١٠٪

$$= \text{القيمة الأصلية} \times (100\% - 10\%) \quad (\text{النسبة المئوية للتناقص})$$

$$= \dots \times (100\% - 10\%)$$

$$= \dots \times 90\%$$

$$= \dots \times \dots = \dots \text{مليار دينار}$$

ماذا تلاحظ ؟

هل عادت قيمة الاحتياطي النقدي إلى قيمته السابقة ؟

٢ انخفاض بنسبة ١٠٪ ، ثمّ ارتفاع بنسبة ١٠٪ .

• قارن بين القيمة النهائية في كلّ من ١ ، ٢

مثال (١) :

رفعت إحدى شركات الاتصال أسعار أجهزتها بنسبة ٢٠٪ ، ثم منحت هذه الشركة موظفيها خصمًا يبلغ ١٠٪ . فكم ستدفع إحدى الموظفات ثمن جهاز كان سعره ٣٠٠ دينار قبل الزيادة ؟

الحل :

ثمن الجهاز بعد الزيادة = القيمة الأصلية $\times$ (النسبة المئوية للتزايد)

$$= (١٠٠\% + ٢٠\%) \times ٣٠٠ =$$

$$= ١٢٠\% \times ٣٠٠ =$$

$$= \frac{١٢٠}{١٠٠} \times ٣٠٠ = ٣٦٠ \text{ دينارًا}$$

القيمة النهائية لثمن الجهاز = القيمة الأصلية $\times$ (النسبة المئوية للتناقص)

$$= (١٠٠\% - ١٠\%) \times ٣٦٠ =$$

$$= ٩٠\% \times ٣٦٠ =$$

$$= \frac{٩٠}{١٠٠} \times ٣٦٠ = ٣٢٤ \text{ دينارًا}$$

انتبه



ميّز بين القيمة الأصلية في الحالتين .

عبّر عن فهمك (١)



هل يمكن حلّ « مثال (١) » بطريقة أخرى ؟ وضّح إجابتك .

دورك الآن (١)



يريد ثامر شراء جهاز للمشي (Treadmill) سعره الأصلي ٣٠٠ دينار ، وخلال فترة الخصومات كانت نسبة الخصم على الجهاز ٣٠٪ ، وضريبة مبيعات نسبتها ١٠٪ ، كم سيدفع ثامر لشراء الجهاز ؟

دورك الآن (٢)



يهوى جاسم رياضة الغوص في البحر ، إذا كان استئجار لوازم الغطس في اليوم الواحد يكلف ١٥ دينارًا يُضاف إليها نظير الخدمة ، فأوجد تكلفة الاستئجار في حالة خصم ٢٠٪ بعد إضافة ٥ دنانير نظير الخدمة .

تكلفة الاستئجار بعد إضافة نظير الخدمة = + = دينار .

تكلفة الاستئجار بعد الخصم = =

..... =

مثال (٢) :

انخفضت مبيعات شركة موادّ بناء بنسبة ٢٠٪ فأصبحت ٤٠٠٠ دينار .

أ) أوجد القيمة الأصلية للمبيعات قبل الانخفاض .

ب) ما النسبة المئوية للتزايد التي تُعيد المبيعات إلى قيمتها الأصلية قبل الانخفاض ؟

الحل :

أ) القيمة النهائية = القيمة الأصلية $\times$ (١٠٠٪ - النسبة المئوية للتناقص)

$$٤٠٠٠ = \text{القيمة الأصلية} \times (١٠٠\% - ٢٠\%)$$

$$٤٠٠٠ = \text{القيمة الأصلية} \times ٨٠\%$$

$$\frac{٤٠٠٠}{٨٠\%} = \text{القيمة الأصلية} = \frac{١٠٠}{٨٠} \times ٤٠٠٠$$

$$\therefore \text{القيمة الأصلية} = \frac{١٠٠}{٨٠} \times ٤٠٠٠ = ٥٠٠٠ \text{ دينار}$$

ب) القيمة النهائية = القيمة الأصلية $\times$ (١٠٠٪ + النسبة المئوية للتزايد)

$$٥٠٠٠ = \text{القيمة الأصلية} \times (١٠٠\% + س)$$

$$٥٠٠٠ = \text{القيمة الأصلية} \times (١ + س)$$

$$٥٠٠٠ \div ٤٠٠٠ = ١ + س$$

$$\frac{٥}{٤} = ١ + س$$

$$س = \frac{٥}{٤} - ١ = \frac{١}{٤} = ٢٥\%$$

$\therefore$ النسبة المئوية للتزايد = ٢٥٪

لاحظ أنّ



تناقص ٢٠٪

القيمة
الأصلية

القيمة
النهائية

تزايد ٢٥٪

دورك الآن (٣)



إذا زادت نفقات شركة للطيران بنسبة ١٠٪ عن الشهر السابق لتصل إلى ٨٠٠٠ دينار .

أ) أوجد نفقات الشركة قبل الزيادة .

$$\text{.....} = \text{القيمة الأصلية} \times (١٠٠\% + \text{.....})$$

$$\text{.....} = \text{القيمة الأصلية} \times \text{.....}$$

$$\text{.....} = \text{القيمة الأصلية} = \text{.....}$$

$\therefore$ نفقات الشركة قبل الزيادة هي دينار .

ب) ما النسبة المئوية للتناقص التي تجعل نفقات الشركة تعود إلى مستواها في الشهر الماضي ؟



إذا انخفض سعر سهم ٥٠٪ عن سعره في العام الماضي ، في رأيك ، ما النسبة المئوية للزيادة التي تُعيده إلى سعره الأصلي ؟ وضح إجابتك .

تمارين ذاتية :



١ تداول أحمد في سوق الكويت للأوراق المالية حيث اشترى أسهمًا بمبلغ ٤٠ ٠٠٠ دينار وكانت أسعار الأسهم تتأرجح بين هبوط وارتفاع . أوجد سعر بيع أسهم أحمد عند ارتفاع الأسهم ٢٥٪ ، ثم انخفاض ١٠٪ ؟

٢ يعمل ناصر وسيطًا عقاريًا في شركة عقارات في الكويت ، إذا طلبت منه الشركة بيع عقار (منزل) سعره الأصلي ٣٠٠ ٠٠٠ دينار بنسبة زيادة ٣٠٪ عن سعره الأصلي ، حيث يتقاضى ناصر ٥٪ من سعر البيع ، فما هو المبلغ الذي تحصل عليه الشركة من بيع العقار ؟

٣ بلغ سعر التذكرة الواحدة لحضور أمسية شعرية ٣٠ دينارًا ، ويضاف إليها نظير الخدمة . أوجد سعر التذكرة في كلٍّ من الحالات التالية :

أ) خصم ٢٠٪ ، ثم إضافة ١٠٪ نظير الخدمة .

ب) خصم ٢٠٪ بعد إضافة ١٠ دينار نظير الخدمة .

٤ إذا انخفضت نفقات فهد الشهرية ٦٠٪ عن الشهر السابق ، والتي كانت ٥٠٠ دينار ، أوجد ما يلي :
 أ نفقات فهد بعد الانخفاض .

ب النسبة المئوية للتزايد التي تجعل نفقات فهد تعود إلى مستواها في الشهر السابق .

مهارات تفكير عليا :



اختر الإجابة الصحيحة .

٥ إذا ارتفع سعر جرام الذهب بنسبة ٢٥٪ ، ثم انخفض بنسبة ٢٠٪ ،
 فإن السعر النهائي يكون :



- أ أقل بمقدار ٥٪ من السعر الأصلي .
- ب أكثر بمقدار ٥٪ من السعر الأصلي .
- ج السعر الأصلي نفسه .
- د ليس أيًّا ممَّا سبق .

المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم

Surface Area of a Right Circular Cone

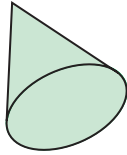
سوف تتعلّم : إيجاد المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم .

العبارات والمفردات :

Surface Area
Lateral Area

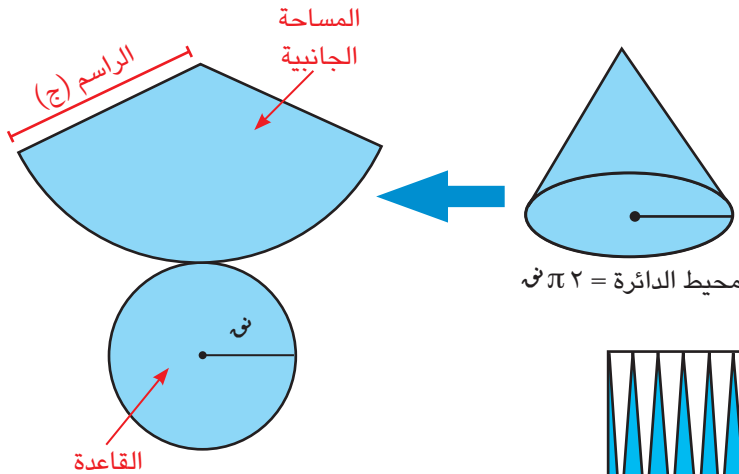
مساحة سطحية
مساحة جانبية

Right Circular Cone
Slant Height
مخروط دائري قائم
راسم

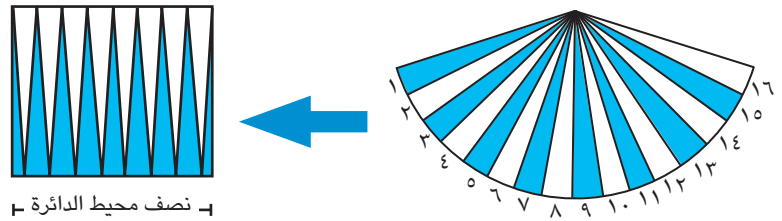


المخروط الدائري القائم : مجسم قاعدته دائرية الشكل وله رأس واحد ، وارتفاعه هو طول العمود المرسوم من رأسه على قاعدته عند مركزها .

استكشف



عند فكّ شبكة المخروط ، نحصل على منطقتين كما هو موضح في الشكل المقابل .
ولقد تعلّمت سابقاً أنّ مساحة الدائرة $= \pi n^2$
فما هي المساحة الجانبية للمخروط ؟
لو قمنا بتقسيم المنطقة إلى أجزاء متطابقة ، ثمّ أعدنا ترتيبها كما هو موضح في الشكل التالي :



نلاحظ أنّ كلّما زاد عدد الأجزاء المتطابقة ، إقترَب الشكل من مستطيل عرضه هو الراسم .

إذا ، المساحة الجانبية للمخروط الدائري القائم

= مساحة المنطقة المستطيلة

= الطول × العرض

= $\frac{1}{2} \times$ محيط الدائرة $\times$ طول الراسم

= $\frac{1}{2} \times 2\pi n \times$ ج (حيث ج هو طول الراسم)

= $\pi n \times$ ج

لاحظ أنّ



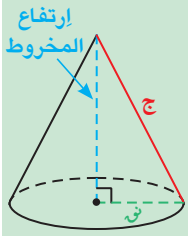
الراسم : هو القطعة المستقيمة الواصلة من رأس المخروط إلى أيّ نقطة على الدائرة .

ومنه المساحة السطحية للمخروط الدائري

= المساحة الجانبية + مساحة الدائرة

$$= \pi r^2 + \pi r \times ج$$

$$= \pi r (ج + ر)$$



المساحة الجانبية للمخروط الدائري القائم = $\pi r \times ج$ (حيث ج هو طول الراسم)

المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

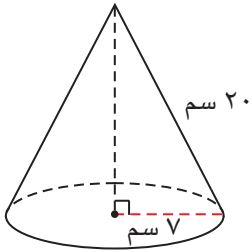
$$= \pi r^2 + \pi r \times ج$$

$$= \pi r (ج + ر)$$

ملاحظة :

لاحظ أن : في المخروط الدائري القائم أي راسم فيه هو وتر لمثلث قائم الزاوية وضلعي القائمة هما نصف قطر قاعدة المخروط وارتفاعه .

مثال (١) :



في الشكل المقابل ، مخروط دائري قائم (اعتبر $\pi = \frac{22}{7}$) .

أوجد :

أ) مساحته الجانبية .

ب) مساحته السطحية .

الحل :

$$\begin{aligned} \text{أ) المساحة الجانبية} &= \pi r \times ج \\ &= 20 \times \frac{22}{7} \times 7 \\ &= 440 \text{ سم}^2 \end{aligned}$$

ب) المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

$$= \pi r^2 + 440$$

$$= 7 \times \frac{22}{7} \times 7 + 440$$

$$= 154 + 440$$

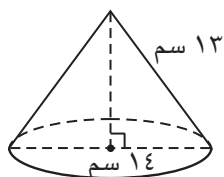
$$= 594 \text{ سم}^2$$

دورك الآن (١)



أوجد المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم في الشكل المقابل (اعتبر $\pi = \frac{22}{7}$) .

ن =



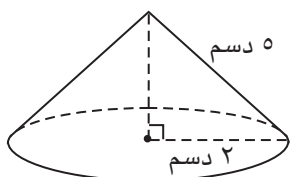
المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم $\pi =$ ن (ج + ن)

..... =
..... =
..... =

دورك الآن (٢)



أوجد المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم في الشكل المقابل (اعتبر $\pi = 3.14$) .



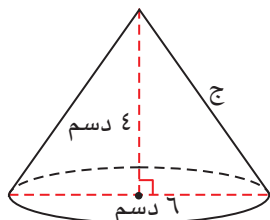
.....
.....
.....
.....

عبّر عن فهمك



يقول أحمد إنّ كلّ المخاريط التي محيط قاعدتها يساوي 8π سم تكون مساحتها السطحية متساوية . هل أحمد على صواب ؟ فسّر إجابتك .

مثال (٢) :



مخروط دائري قائم طول قطر قاعدته ٦ دسم وارتفاعه ٤ دسم .
أوجد ما يلي :

١ طول الراسم (ج) :

$$\therefore \text{ن} = 3 \text{ دسم}$$

$$\therefore \text{ج}^2 = 3^2 + 4^2 \text{ نظرية فيثاغورث}$$

$$\text{ج}^2 = 9 + 16 = 25$$

$$\text{ج} = \sqrt{25} = 5 \text{ دسم}$$

٢ المساحة السطحية للمخروط (ب)

الدائري القائم : (بدلالة π)

المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم

$$\pi \text{ن} (\text{ج} + \text{ن}) =$$

$$= \pi (3 + 5) \times 3 =$$

$$= 8 \times 3 \times \pi =$$

$$= 24\pi \text{ دسم}^2$$

مثال (٣) :

إشترت فتون مثلاً على شكل مخروط طول قطره ٤ سم وطول راسمه ١٠ سم . أحسب المساحة السطحية للمخروط .
(اعتبر $\pi = 3,14$)

الحل :

المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم

$$= \pi r (r + h)$$

$$= 3,14 \times 2 \times (2 + 10)$$

$$= 3,14 \times 2 \times 12$$

$$= 3,14 \times 24$$

$$= 75,36 \text{ سم}^2$$



دورك الآن (٣)



أرادت شركة ورقيات تصنيع قبعات للأطفال على شكل مخروط دائري قائم طول نصف قطره قاعدته ٧ سم وطول الراسم ٣٠ سم . أحسب المساحة السطحية للقبعة .

$$\left(\frac{22}{7} = \pi \right)$$

انتبه



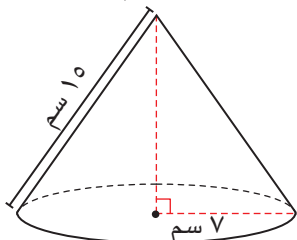
القبعة على شكل مخروط بدون قاعدة .



تمارين ذاتية :

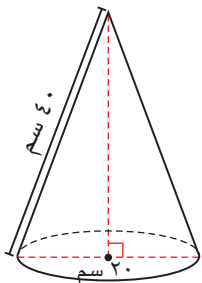


١ أوجد المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم في الشكل المقابل . (اعتبر $\pi = \frac{22}{7}$)



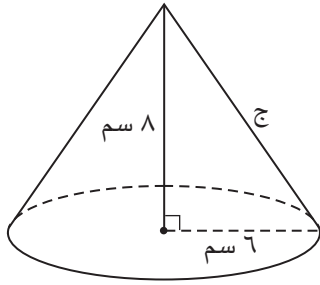
٢ أوجد المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم في الشكل المقابل .

$$\left(\pi = 3,14 \right)$$



٣ مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ٦ سم وارتفاعه ٨ سم ، أوجد ما يلي :

أ طول الراسم (ج) :



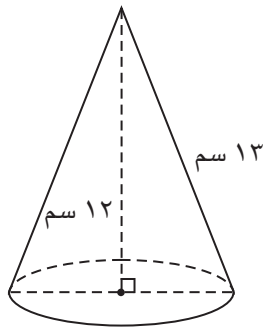
ب المساحة السطحية للمخروط : (بدلالة π)

٤ أوجد المساحة السطحية لمخروط دائري قائم ، طول نصف قطر قاعدته ٧ سم وطول الراسم ٩ سم . (إعتبر $\pi = \frac{22}{7}$)

مهارات تفكير عليا :



٥ في الشكل المقابل ، المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم مقربة إلى أقرب عدد كلي هي : (إعتبر $\pi = 3,14$) .



أ ٢٦٧ سم^٢

ب ٢٨٣ سم^٢

ج ٦٩١ سم^٢

د ٧٢٢ سم^٢

Volume of The Pyramid

سوف تتعلّم : إيجاد حجم الهرم القائم .

العبارات والمفردات :

Volume

حجم

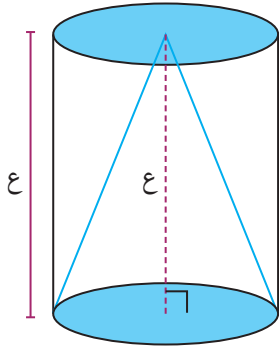
Right Pyramid

هرم قائم

استكشف



سبق وأن تعلّمت كيفية حساب حجم المخروط القائم من حساب حجم الأسطوانة الدائرية القائمة المشتركة معه في القاعدة والارتفاع .



كما سبق وأن تعلّمت كيفية حساب حجم المنشور القائم

فهل تستطيع حساب حجم الهرم القائم بدلالة حجم المنشور القائم الذي له مساحة القاعدة نفسها والارتفاع نفسه كما فعلت سابقاً ؟

ليكن لدينا هرم قائم ومنشور قائم لهما الارتفاع نفسه والقاعدة نفسها.

خطوات عمل التجربة :

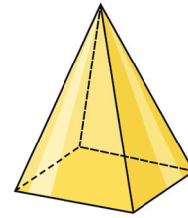
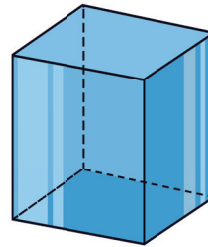
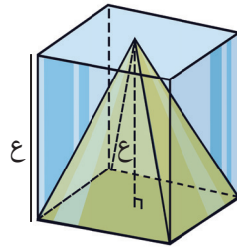
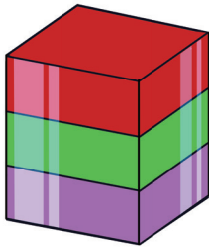


١ إملأ الهرم (بالرمل البنفسجي مثلاً) تمامًا حتّى الحافة .

٢ أسكب الرمل في المنشور .

٣ كرّر هذه العملية واملأ الهرم حتّى الحافة بلون آخر (الأخضر مثلاً) ، ثمّ اسكبه داخل المنشور .

٤ كرّر العملية حتّى يمتلئ المنشور .



ماذا تلاحظ ؟

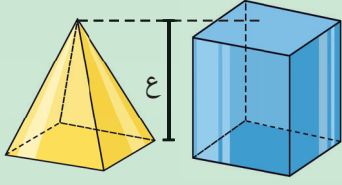
بعد ٣ مرّات من ملء الهرم وسكبه ، ستجد أنّ المنشور امتلأ تمامًا .

إذاً نلاحظ أنّ : حجم الهرم هو ثلث حجم المنشور المشترك معه بالقاعدة والارتفاع .

حجم الهرم القائم = $\frac{1}{3} \times \text{حجم المنشور القائم المشترك معه في القاعدة والارتفاع}$

حجم الهرم القائم = $\frac{1}{3} \times \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}$

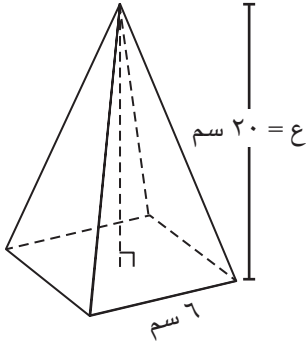
$$ح = م \times \frac{1}{3} \times ع$$



مثال (١):

أوجد حجم الهرم القائم المنتظم الذي قاعدته على شكل مربع طول ضلعه ٦ سم وارتفاعه ٢٠ سم .

الحل :



حجم الهرم المنتظم = $\frac{1}{3} \times \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}$

$$= \frac{1}{3} \times (6)^2 \times 20 =$$

$$= \frac{1}{3} \times 6 \times 20 \times 6 =$$

$$= 240 \text{ سم}^3$$

∴ حجم الهرم = ٢٤٠ سم^٣

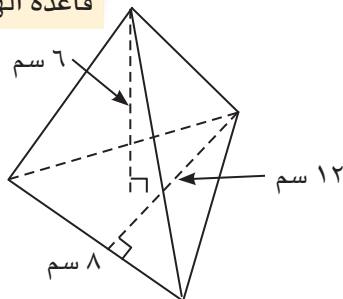
دورك الآن (١)

انتبه



ميّز بين ارتفاع الهرم وارتفاع قاعدة الهرم (المثلث)

ب) هرم ثلاثي قائم



حجم الهرم = $\frac{1}{3} \times م \times ع$ الهرم

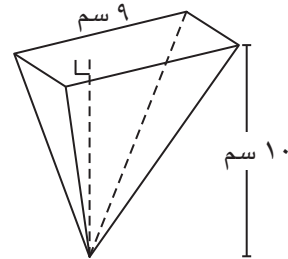
$$= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 6 \times 8 \right) \times 12 =$$

$$= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 6 \times 8 \right) \times 12 =$$

$$= 96 \text{ سم}^3$$

أوجد حجم الهرم في كل شكل ممّا يلي :

أ) هرم رباعي قائم منتظم



حجم الهرم = $\frac{1}{3} \times م \times ع$

$$= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 9 \times 9 \right) \times 10 =$$

$$= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 9 \times 9 \right) \times 10 =$$

$$= 135 \text{ سم}^3$$



أوجد كل من حمد ونواف حجم الهرم القائم الذي له الارتفاع والقاعدة نفسهما لمنشور قائم حجمه ٢٧ م^٣. فأَيُّهما على صواب ؟ فسّر إجابتك .

نواف



حجم الهرم = ٨١ م^٣

حمد

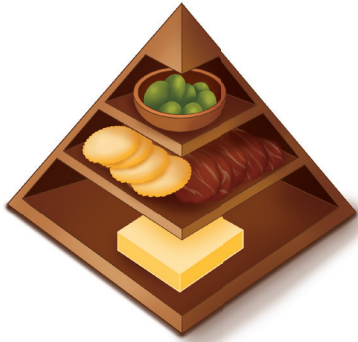


حجم الهرم = ٩ م^٣

مثال (٢) :

يقوم مصنع أثاث بصنع طبق تقديم على شكل هرم رباعي قائم منتظم ،
حجم طبق التقديم ٤٠٠ سم^٣ وارتفاعه ٢٠ سم .
أوجد مساحة قاعدة الطبق .

الحل :



$$\text{حجم الهرم المنتظم} = \frac{1}{3} \times \text{م} \times \text{ع}$$

$$20 \times \text{م} \times \frac{1}{3} = 400$$

$$20 \times \text{م} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{1} = 400 \times \frac{3}{1}$$

$$\text{م} \times \frac{1}{1} \times \frac{3}{1} = 1200 \times \frac{1}{1}$$

$$\text{م} = 60$$

$$\therefore \text{مساحة قاعدة الطبق} = 60 \text{ سم}^2$$

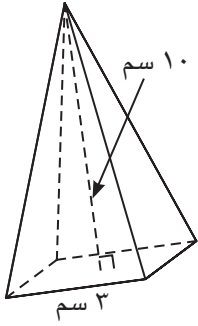
دورك الآن (٢)



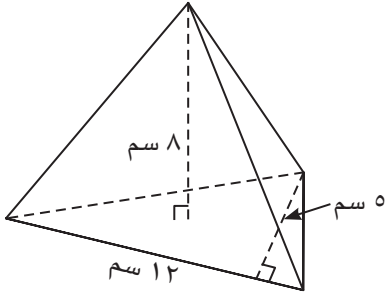
تصنع مها علبةً لتعبئة القرقيعان ، شكل العلبة هرم قائم منتظم ، إذا كان حجم العلبة ٤٤ سم^٣ ،
ومساحة قاعدتها ١٢ سم^٢ ، فما ارتفاع هذه العلبة ؟



تمارين ذاتية :



- ١ هرم قائم منتظم قاعدته مربعة الشكل طول ضلعها ٣ سم وارتفاع الهرم ١٠ سم . أوجد حجم الهرم .

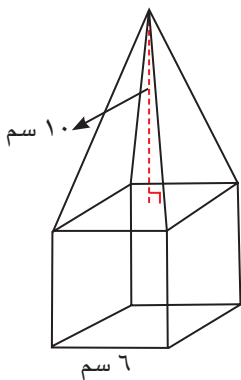


- ٢ هرم قائم قاعدته مثلثة الشكل ، طولها ١٢ سم ، وارتفاعها ٥ سم ، وارتفاع الهرم ٨ سم . أوجد حجم الهرم .

- ٣ هرم قائم منتظم مساحة قاعدته ١٥ م^٢ ، إذا كان حجمه ٥٥ م^٣ ، فما ارتفاع هذا الهرم ؟

- ٤ هرم رباعي قائم منتظم حجمه ٣٠٠ سم^٣ ، إذا كان ارتفاع الهرم ٩ سم ، فما طول ضلع قاعدة الهرم ؟

مهارات تفكير عليا :



اختر الإجابة الصحيحة .

- ٥ هرم رباعي قائم منتظم قاعدته هي أحد أوجه مكعب . حسب البيانات المدونة ، فإن حجم الجسم الموضح في الشكل المقابل يساوي :

- أ ٢١٦ سم^٣ ب ٣٣٦ سم^٣ ج ١٢٠ سم^٣ د ٩٦ سم^٣

Volume of The Sphere

سوف تتعلّم : حساب حجم كرة .

العبارات والمفردات :

Sphere

كرة

Volume

حجم

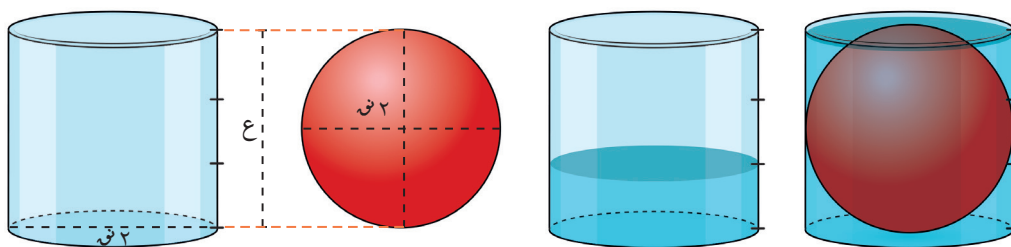
استكشف



تعلّم أنّ حجم الأسطوانة الدائرية القائمة هو : $\pi \times \text{ن}^2 \times \text{ع}$

ليكن لدينا أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها يساوي طول قطر قاعدتها وموضّح عليها تدريج من الخارج بحيث يُجزأ ارتفاعها إلى ثلاثة أقسام متطابقة .
قُم بسكب كمّية من الماء بحيث تملأ $\frac{1}{3}$ حجم الأسطوانة .

ضَع كرة داخل الأسطوانة بشرط أن يكون قطر الكرة يساوي ارتفاع الأسطوانة ، وكذلك قطر الكرة يساوي قطر قاعدة الأسطوانة .



ماذا تلاحظ ؟

سوف يرتفع السائل حتّى يصل إلى ارتفاع الأسطوانة

إذاً حجم الكرة = حجم الأسطوانة

$$= \frac{2}{3} (\pi \times \text{ن}^2 \times \text{ع})$$

$$= \frac{2}{3} \pi \times \text{ن}^2 \times \text{ع} \quad , \quad \text{حيث } \text{ع} = 2\text{ن}$$

$$= \frac{4}{3} \pi \times \text{ن}^3$$

$$\text{حجم الكرة} = \frac{4}{3} \pi \times \text{ن}^3$$

معلومة مفيدة :

أهم ما توصل إليه العالم أرخميدس هو العلاقة بين حجم الكرة وحجم الأسطوانة المحيطة بها (الأسطوانة التي قطرها يساوي قطر الكرة ، وارتفاعها يساوي قطر الكرة أيضاً ، أي حجم الكرة يساوي ثلثي $\left(\frac{2}{3}\right)$ حجم الأسطوانة المحيطة بها .

مثال (١) :

أوجد حجم كرة طول نصف قطرها ٦ سم . (بدلالة π)

الحل :

$$\text{حجم الكرة} = \frac{4}{3} \pi \times \text{ن}^3$$

$$= \frac{4}{3} \pi \times (6)^3$$

$$= \frac{4}{3} \pi \times 6 \times 6 \times 6$$

$$= 72 \times \pi \times 4$$

$$= 288 \pi \text{ سم}^3$$

دورك الآن (١)

أوجد حجم كرة طول نصف قطرها ٣ سم . (بدلالة π)

$$\text{حجم الكرة} = \frac{4}{3} \pi \times \text{ن}^3$$

$$= \frac{4}{3} \pi \times (\dots\dots\dots)^3$$

$$= \frac{4}{3} \pi \times \dots\dots\dots \times \dots\dots\dots \times \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots \text{سم}^3$$

مثال (٢) :

أوجد حجم الكرة المرسومة . (اعتبر $\pi = \frac{22}{7}$)

الحل :

$$\text{ن} = ١ \text{ م}$$

$$\text{حجم الكرة} = \frac{4}{3} \pi \times \text{ن}^3$$

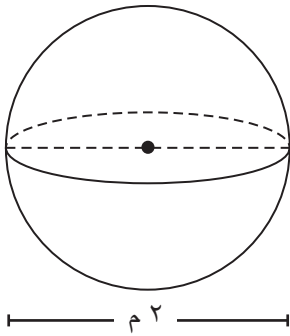
$$= \frac{4}{3} \pi \times (1)^3$$

$$= \frac{4}{3} \pi \times 1 \times 1 \times 1$$

$$= \frac{4}{3} \pi$$

$$= \frac{88}{21}$$

$$= \frac{4}{3} \text{ م}^3$$



مثال (٣) :

وعاء على شكل نصف كرة طول قطرها ١٢ م .
أوجد حجم الوعاء بدلالة π .

الحل :

$$ن = \frac{1}{2} \times 12 = 6 \text{ م}$$

$$\text{حجم الوعاء} = \text{حجم نصف الكرة} = \frac{1}{2} \times \pi \times \frac{4}{3} \times 6^3$$

$$= \frac{1}{2} \times \pi \times \frac{4}{3} \times 216$$

$$= \frac{1}{2} \times \pi \times 4 \times 108$$

$$= \pi \times 6 \times 6 \times 4$$

$$= 144\pi \text{ م}^3$$

دورك الآن (٢)



أوجد ثلاثة أرباع حجم كرة فولاذية طول قطرها ٢٠ سم . (إعتبر $\pi = 3,14$)

ن = سم

$$\text{حجم ثلاثة أرباع الكرة} = \frac{3}{4} \times \left(\frac{4}{3} \times \pi \times 10^3 \right)$$

$$=$$

$$=$$

$$= \text{..... سم}^3$$



مثال (٤) :

لدى مريم مصباح مزخرف كروي الشكل حجمه $\frac{256}{3}\pi$ سم^٣ ، أوجد طول قطر المصباح .

الحل :

$$\text{حجم الكرة} = \frac{4}{3} \times \pi \times 16^3$$

$$\frac{4}{3} \times \pi \times 16^3 = \frac{256}{3}\pi$$

$$\frac{4}{3} \times \pi \times 16^3 = \frac{256}{3}\pi$$

$$16^3 = 64$$

$$\therefore 16 = \sqrt[3]{64} = 4 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{طول قطر المصباح} = 4 \times 2 = 8 \text{ سم}$$

تذكر



$$2 = \sqrt[3]{8}$$

$$3 = \sqrt[3]{27}$$

$$4 = \sqrt[3]{64}$$

كرة حجمها $\frac{2}{3}\pi$ م^٣ . أوجد طول نصف قطرها .

عبر عن فهمك

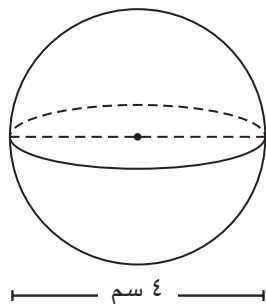


يقول محمّد إنّ حجم الكرة يساوي $\frac{2}{3}$ حجم أيّ أسطوانة .
في رأيك ، هل محمّد على صواب ؟ وضّح إجابتك .

تمارين ذاتية :



١ أوجد حجم كرة طول نصف قطرها ٩ سم . (بدلالة π)



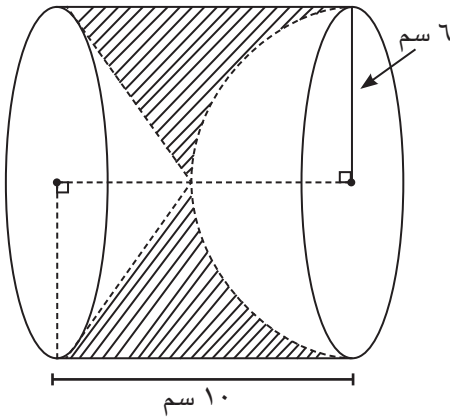
٢ من خلال الشكل المقابل ، أوجد حجم الكرة المرسومة . (بدلالة π)

٣ قبة مسجد على شكل نصف كرة ، إذا كان طول قطر القبة ١٢ م ،
فاحسب حجم قبة المسجد . (اعتبر $\pi = \frac{22}{7}$)

٤ إذا كان حجم كرة π سم^٣ ، فاحسب طول قطرها .

مهارات تفكير عليا :

اختر الإجابة الصحيحة .



٥ مجسم أسطواناني في داخله تجويفان أحدهما مخروطي الشكل والثاني نصف كرة .
بحسب المعطيات على الرسم ، فإن حجم الجزء المتبقي من المجسم (بدلالة π) =

- أ π ٣٦٠ سم^٣ ب π ١٤٤ سم^٣
ج π ١٩٢ سم^٣ د π ١٦٨ سم^٣

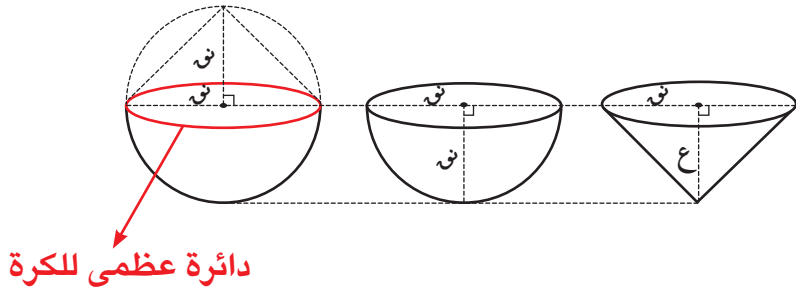
٦ لدى عمر قالبان أحدهما مخروطي الشكل والآخر كروي ، إذا كانت قاعدة المخروط هي دائرة عظمى للكرة ، وارتفاع المخروط هو نصف قطر الكرة .
فإن حجم الكرة يساوي :

- أ $\times ٤$ حجم المخروط ب $\times ٢$ حجم المخروط
ج $\times \frac{1}{4}$ حجم المخروط د $\times \frac{1}{2}$ حجم المخروط

تذكر



- حجم الأسطوانة الدائرية القائمة = $\pi r^2 h$ ع
- حجم المخروط الدائري القائم = $\frac{1}{3} \pi r^2 h$ ع



تقويم الوحدة التعليمية الثامنة

Unit Eight Assessment

أولاً : البنود المقالية

١ قَدِّر ما يلي :

أ ١٨٪ من ١٥٢

ب ٦٢٪ من ٦٢

ج ٥٣٪ من ٤٥٨

د ٣٤٪ من ٤٠٠

٢ تقدّم إحدى شركات التغذية لزبائنّها عرضاً للاشتراك الشهري بخصم نسبته ١٥٪ .

كم سيدفع المشترك إذا كان السعر الأصلي للاشتراك الشهري ٢٠٠ دينار ؟

٣ بلغ عدد زوّار المركز العلمي (قاعة الأحياء البحرية) يوم الأربعاء ٨٠ زائراً ، وفي يوم الجمعة زاد عدد

الزوّار إلى ٢٤٠ زائراً . أوجد النسبة المئوية للتزايد في عدد الزوّار يوم الجمعة .

٤ رفع أحد معارض السيّارات أسعاره بنسبة ٢٠٪ ، ثمّ منح هذا المعرض موظّفيه خصماً يبلغ ١٠٪ . فكّم

سيدفع أحد الموظّفين في هذا المعرض ثمناً لشراء سيّارة كان سعرها الأصلي ٨٠٠٠ دينار قبل الزيادة ؟

٥ قام أحد متاجر الأجهزة الإلكترونية بعمل تخفيضات على أجهزة التلفاز قدره ٣٠٪ من ثمنها الأصلي . إذا كان ثمن جهاز تلفاز بمواصفات معيّنة بعد التخفيض ٢٨٠ دينارًا ، فما هو ثمنه قبل التخفيض ؟

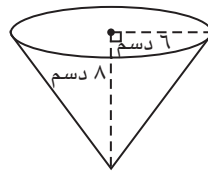
٦ قامت مالكة مشروع ، يُصنّف من المشاريع الصغيرة ، بتخفيض سعر سلعة لديها إلى ٣٠٠ دينار بنسبة خصم ٤٠٪ . أوجد ما يلي :

أ القيمة الأصلية للسلعة .

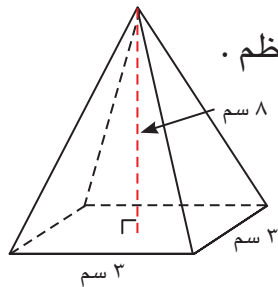
ب ما النسبة المئوية للتزايد التي تُعيد سعر السلعة إلى سعرها الأصلي ؟

٧ أوجد كلاً ممّا يلي (بدلالة π) :

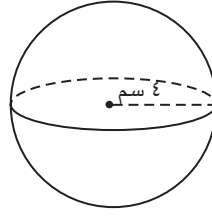
أ المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم .



ب حجم الهرم القائم المنتظم .



ج) حجم الكرة .

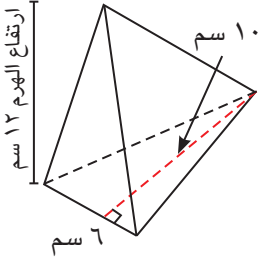


.....

.....

.....

د) حجم الهرم القائم .

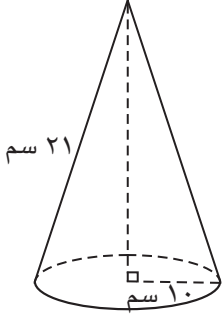


.....

.....

.....

٨) أراد عثمان صنع قمع على شكل مخروط دائري قائم طول نصف قطره ١٠ سم ، وطول الراسم ٢١ سم ، أحسب المساحة الجانبية للقمع . (اعتبر $\frac{22}{7} = \pi$)



.....

.....

.....

٩) ملأ راشد كرة شاطئية ملونة بالماء ، إذا كان طول نصف قطر الكرة ١٢ سم . أوجد حجم الكرة (بدلالة π) .



.....

.....

.....

١٠) في بداية عصر التقدم الفضائي ، صُنعت كبسولة كروية الشكل حجمها 972000π م^٣ . أوجد طول نصف قطر الكبسولة .

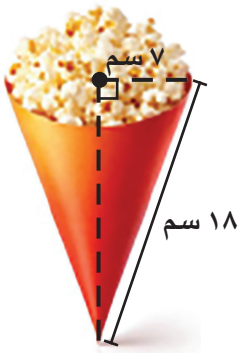
.....

.....

.....

١١) أرادت ياسمين القيام بتوزيعات لزميلاتها . اختارت شكل المخروط الموضح في الشكل المقابل لتعبئته بالفشار . أحسب المساحة الجانبية للمخروط .

(اعتبر $\frac{22}{7} = \pi$)

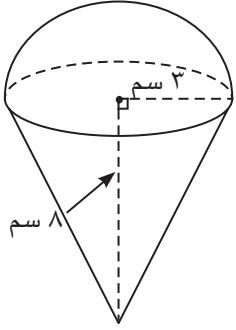


.....

.....

.....

- ١٢) اشترى نايف مثلّجات لأصدقائه وكان أحد هذه المثلّجات على شكل مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ٣ سم وارتفاعه ٨ سم ، يعلوه نصف كرة (كما في الشكل) .
أحسب حجم المجسم (بدلالة π) .



.....

.....

.....

ثانيًا: البنود الموضوعية

في البنود (١-٦) ، ظلّل ☐ أ إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلّل ☐ ب إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١	جهاز سعره الأصلي ٢٥٠ دينارًا وقد أصبح ثمنه خلال فترة الخصومات ١٥٠ دينارًا ، فإنّ النسبة المئوية للخصم هي ٢٥٪ .	☐ أ	☐ ب
٢	قلادة ذهبية سعرها ١٠٠٠ دينار بيعت بسعر ١٢٠٠ دينار ، فإنّ النسبة المئوية للتزايد ٢٠٪ .	☐ أ	☐ ب
٣	إذا انخفض سعر سلعة بنسبة ١٠٪ ثم ارتفع بنسبة ١٠٪ ، فإنّ سعر السلعة سيعود إلى سعرها الأصلي .	☐ أ	☐ ب
٤	حجم الكرة يساوي $\frac{3}{4}\pi r^3$.	☐ أ	☐ ب
٥	حجم الهرم القائم يساوي ثلث حاصل ضرب مساحة القاعدة في الارتفاع .	☐ أ	☐ ب
٦	هرم قائم قاعدته مربعة طول ضلعها ٤ سم وارتفاعه ٦ سم ، فإنّ حجمه يساوي ٣٢ سم ^٣ .	☐ أ	☐ ب

في البنود (٧-١٤) ، لكل بند أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلّل الإجابة الصحيحة .

- ٧) إذا أنفق عبدالله ٣٠ دينارًا في الشهر على تعبئة بطاقات الاتصال (شحن الرصيد) ، ثم أنفق ٤٠٪ زيادة ممّا أنفقه في الشهر السابق ، فإنّ مقدار المال الذي أنفقه في تعبئة بطاقات الاتصال في الشهر الحالي يساوي :

☐ أ ٣٥ دينارًا ☐ ب ٤٢ دينارًا ☐ ج ١٨ دينارًا ☐ د ٧٠ دينارًا

٨ في أحد التنزيلات ، انخفضت الأسعار بنسبة ٣٥٪ . إذا كان سعر غسّالة بعد التنزيلات ٦٥ دينارًا ، فإنّ سعرها قبل التنزيلات يساوي :

- أ ١٣٥ دينارًا ب ٩٠ دينارًا ج ١٠٠ دينار د ٦٥ دينارًا

٩ إذا انخفض سعر سهم ٥٠٪ عن سعره في العام الماضي ، فإنّ النسبة المئوية للتزايد التي تُعيده إلى سعره الأصلي هي :

- أ ١٠٠٪ ب ٥٠٪ ج ١٥٠٪ د ٢٠٠٪

١٠ كرة طول قطرها ٦ سم ، فإنّ ثلث حجمها بدلالة π يساوي :

- أ 36π سم^٣ ب 12π سم^٣ ج 27π سم^٣ د 9π سم^٣

١١ هرم قائم قاعدته مربّعة طول ضلعها ٦ سم وارتفاعه ٩ سم ، فإنّ حجمه يساوي :

- أ ١٠٨ سم^٣ ب ٣٢٤ سم^٣ ج ٥٤ سم^٣ د ٣٦٩ سم^٣

١٢ إذا كان طول نصف قطر قاعدة مخروط دائري قائم ٥ سم وراسمه ١٣ سم ، فمساحته الجانبية بدلالة π تساوي :

- أ 18π سم^٢ ب 60π سم^٢ ج 30π سم^٢ د 13π سم^٢

١٣ إذا كان حجم كرة 288π سم^٣ ، فإنّ طول نصف قطرها يساوي :

- أ ٣ سم ب ٤ سم ج ٦ سم د ٨ سم

١٤ النسبة بين حجمي كرتين طول نصف قطرَيْهما ٢ سم ، ٦ سم على الترتيب تساوي :

- أ ٢ : ١ ب ٣ : ١ ج ٩ : ١ د ٢٧ : ١

المشروع الرابع : الرياضيات والحياة

يمكننا استخدام النسب المئوية التزايدية والتناقصية في حياتنا اليومية .



خطة العمل :

قُم باختيار خمسة منتجات ، وحدد سعرها الأصلي وسعرها في فترة التنازلات .

خطوات تنفيذ المشروع :

- ◀ قُم باختيار خمسة منتجات وحدد سعرها الأصلي .
- ◀ أحسب سعر المنتجات بعد خصم ٢٠٪ من السعر الأصلي .
- ◀ قُم بصنع جدول لعرض المنتجات ، موضحاً سعرها الأصلي والسعر بعد التخفيض .

علاقات وتواصل :

يمكن للمجموعات تبادل المشروع للتأكد من صحة ودقة تطبيق المشروع .

عرض العمل :

تعرض كل مجموعة عملها وتناقش خطوات تنفيذ العمل وتتأكد من صحة البيانات .

المراجع

- الرياضيات ، الصف التاسع ، الطبعة الأولى ٢٠٢٤ - ٢٠٢٥ م ، وزارة التربية ، قطاع البحوث التربوية والمناهج .
- الرياضيات ، الصف التاسع ، الطبعة التجريبية ٢٠٢٣ - ٢٠٢٤ م ، وزارة التربية ، قطاع البحوث التربوية والمناهج .

مصادر بعض الصور

- صفحة ٢١٨ : الصورة مزوّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ٢٢٢ : الصورة مزوّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ٢٢٦ : الصور مزوّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ٢٣٤ : الصورة مزوّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ٢٣٩ : الصورة مزوّدة من لجنة الرياضيات .

9



قيّم مناهجنا



الكتاب كاملاً