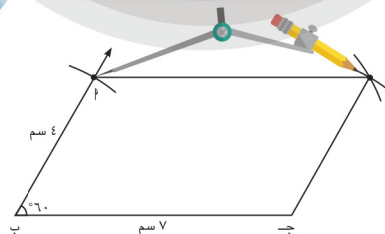
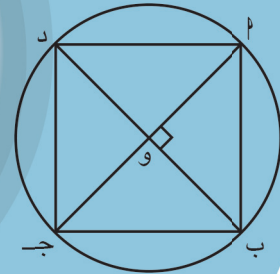
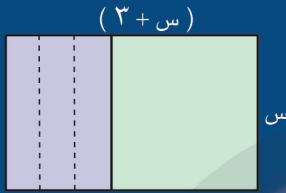




الرياضيات

الصف الثامن

الفصل الدراسي الثاني - القسم الأول





الرياضيات

الصف الثامن

الفصل الدراسي الثاني - القسم الأول

تأليف

أ. دلال مبارك الحجرف (رئيسًا)

أ. نوره عبد الله أبورقة العتيبي أ. ساره زايد شينان العجمي

أ. وسميه بادي هادي الرشيد أ. عصام عبد الهادي السيد حسن

أ. عفاف عبد العزيز يعقوب الصانع

الطبعة الأولى

١٤٤٧ هـ

٢٠٢٥ - ٢٠٢٦ م

حقوق التأليف والطبع والنشر محفوظة لوزارة التربية - الإدارة العامة للتواحيه والبحوث والمناهج
إدارة البحوث التربوية والمناهج







حضرة صاحب السمو الشيخ مشعل آل أحمد آل جابر آل صباح
أمير دولة الكويت

H.H. Sheikh Meshal AL-Ahmad AL-Jaber AL-Sabah
Amir Of The State Of Kuwait



سَمُو الشَّيْخِ صَبَّاحٍ خَالِدٍ الْحَمَادِ السَّبَّاحِ
وَلِيِّ عَهْدِ دَوْلَةِ الْكُوَيْتِ

H. H. Sheikh Sabah Khaled Al-Hamad Al-Sabah
Crown Prince Of The State Of Kuwait

مقدمة

الحمد لله ربّ العالمين والصلاة والسلام على سيد المرسلين محمد بن عبدالله وصحبه أجمعين.

إنطلاقاً من التوجيهات السامية لحضرة صاحب السموّ أمير البلاد الشيخ مشعل الأحمد الجابر الصباح ، حفظه الله ورعاه ، بضرورة الإسراع في تنفيذ كافّة مشاريع الدولة التنموية ومن ضمنها على وجه الخصوص المشاريع التعليمية ، وتماشياً مع رؤية الكويت ٢٠٣٥ والتي تنادي بكويت جديدة فقد شرعت وزارة التربية في تطوير مناهجها التعليمية مستندة ، في ذلك إلى أهميّة رأس المال البشري كعنصر أساسي في تنمية الوطن ورفعته.

ولأنّ المناهج التعليمية هي قاعدة الهرم التعليمي إلى جانب المعلّم والمتعلّم ، وتعدّ أحد الروافد المهمّة في خلق جيل متعلّم وواع ، قادر على المشاركة في بناء المجتمع ، ولأنّ المناهج عبارة عن كمّ الخبرات التربوية والتعليمية التي تُقدّم للمتعلّم ، فقد أولت الوزارة أهميّة بتطوير المناهج حسب المعايير العلمية وذلك لتحقيق نقلة نوعية في الشكل والمضمون ، وإيماناً بأهميّتها وإنطلاقاً من أنّها ذات صفة عالمية مع الأخذ في الاعتبار خصوصية المجتمع الكويتي وبيئته المحليّة ، ملتزمة بأنّ تصبّ جميعها في تعزيز الهوية الوطنية وبعقلية منفتحة على الآخرين مع احترام حقوق الإنسان وحرّياته الأساسية والتمسك بمبادئ الإسلام والتسامح من جهة ، وغزيرة بمهارات القرن الواحد والعشرين لتعزيز المفاهيم الرياضية لجميع المتعلّمين من جهة أخرى لكي يكونوا في طليعة المنافسين في المسابقات العلمية والدولية ، وذلك عبر بناء الخطط التعليمية المعتمدة من قطاع المناهج مؤكّدين على أهميّة التكامل بين الجوانب العلمية والتطبيقية حتّى تكون ذات طبيعة وظيفية مرتبطة بحياة المتعلّم ، متضمّنة في الكثير من بنودها التمارين ذات المستويات العليا في التفكير والفهم والتحليل والتركيب .

وقد تمّت صياغة وترتيب الكتاب المدرسي في منهجية خاصة ذات هيكل ومجالات معينة تتمحور حول العدّ والجبر والهندسة والقياس ، وأخيراً الإحصاء والاحتمال .

فقد تمّ بناء الكتاب وفق منهجية تربوية حديثة تراعي التدرّج المنطقي في المفاهيم والمهارات لبناء معرفة رياضية تراكمية تراعي الفروق الفردية بين المتعلّمين وتعزّز التفكير الرياضي العميق .

كما ويحوي الكتاب على وحدات تعليمية وموضوع محوري يتمّ إبرازه في مقدّمة كلّ وحدة ، تساعد على تنمية الفهم البنائي وربط المفاهيم الجديدة مع سياقات من واقع الحياة .

وحرصنا على إدراج التمارين المتنوعة مع نهاية كل درس ، والتي تنوّعت بين الأسئلة المباشرة والمسائل الحياتية وأسئلة مهارات تفكير عليا ، مثل التبرير والنقد وتعدّد طرق الحلّ والاستنتاج .

تنتهي كلّ وحدة بقسم خاصّ للتقويم لقياس مدى تحقيق الأهداف متضمّنة أسئلة شاملة للمفاهيم والمهارات التي تمّ تناولها ، حتّى تكون أداة تمكّنا من تحديد الاحتياجات التعليمية لاحقا .

ممّا سبق من معطيات وغيرها من الجوانب التعليمية والتربوية ، فقد تمّت صياغة وإعداد كتب الرياضيات لتحقيق نقلة نوعية ذات جودة عالية تلبي الطموحات المطلوبة وتكون نافذة واسعة تُطلّ على آمالنا وتطلّعاتنا في المستقبل لما نهدف إليه من تأسيس فكر رياضي في عقول أجيالنا القادمة تنهض بها أمتنا وتضعها في مكانها المناسب في الصفوف المتقدّمة ، ويُشار إليها بالبنان مع كلّ محفل.

المحتويات

الجزء الأول :

المجموعات والعلاقة	الوحدة التعليمية الأولى :
الأعداد النسبية	الوحدة التعليمية الثانية :
الهندسة والقياس	الوحدة التعليمية الثالثة :
النسبة والتناسب - التحويلات الهندسية	الوحدة التعليمية الرابعة :

الجزء الثاني :

الأشكال الرباعية	الوحدة التعليمية الخامسة :
المقادير الجبرية	الوحدة التعليمية السادسة :
تحليل المقادير الجبرية	الوحدة التعليمية السابعة :
الاحتمال - الإحصاء	الوحدة التعليمية الثامنة :

الوحدة التعليمية الخامسة

الأشكال الرباعية

رقم الصفحة	المحتوى
١٦	معايير المنهج ومؤشرات الأداء للوحدة التعليمية الخامسة
١٧	مخطط تنظيمي للوحدة التعليمية الخامسة
١٨	هل أنت مستعدّ ؟ للوحدة التعليمية الخامسة
٢٠	(٥ - ١) الكشف عن توازي مستقيمين
٢٦	(٥ - ٢) متوازي الأضلاع - رسم متوازي الأضلاع
٣٤	(٥ - ٣) الكشف عن متوازي الأضلاع
٤٨	(٥ - ٤) الكشف عن المستطيل
٥٤	(٥ - ٥) الكشف عن المعين
٦١	(٥ - ٦) الكشف عن المربع
٧٢	تقويم الوحدة التعليمية الخامسة

الوحدة التعليمية السادسة

المقادير الجبرية

رقم الصفحة	المحتوى
٨٢	معايير المنهج ومؤشرات الأداء للوحدة التعليمية السادسة
٨٣	مخطط تنظيمي للوحدة التعليمية السادسة
٨٤	هل أنت مستعدّ ؟ للوحدة التعليمية السادسة
٨٥	(١ - ٦) قوانين الأسس
٩٥	(٢ - ٦) كثيرات الحدود (الحدوديات)
١٠٢	(٣ - ٦) جمع كثيرات الحدود وطرحها
١٠٩	(٤ - ٦) ضرب كثيرات الحدود
١١٦	(٥ - ٦) قسمة كثيرة حدود على حدّ جبري
١١٩	تقويم الوحدة التعليمية السادسة
١٢٤	المشروع الثالث

الوحدة التعليمية الخامسة

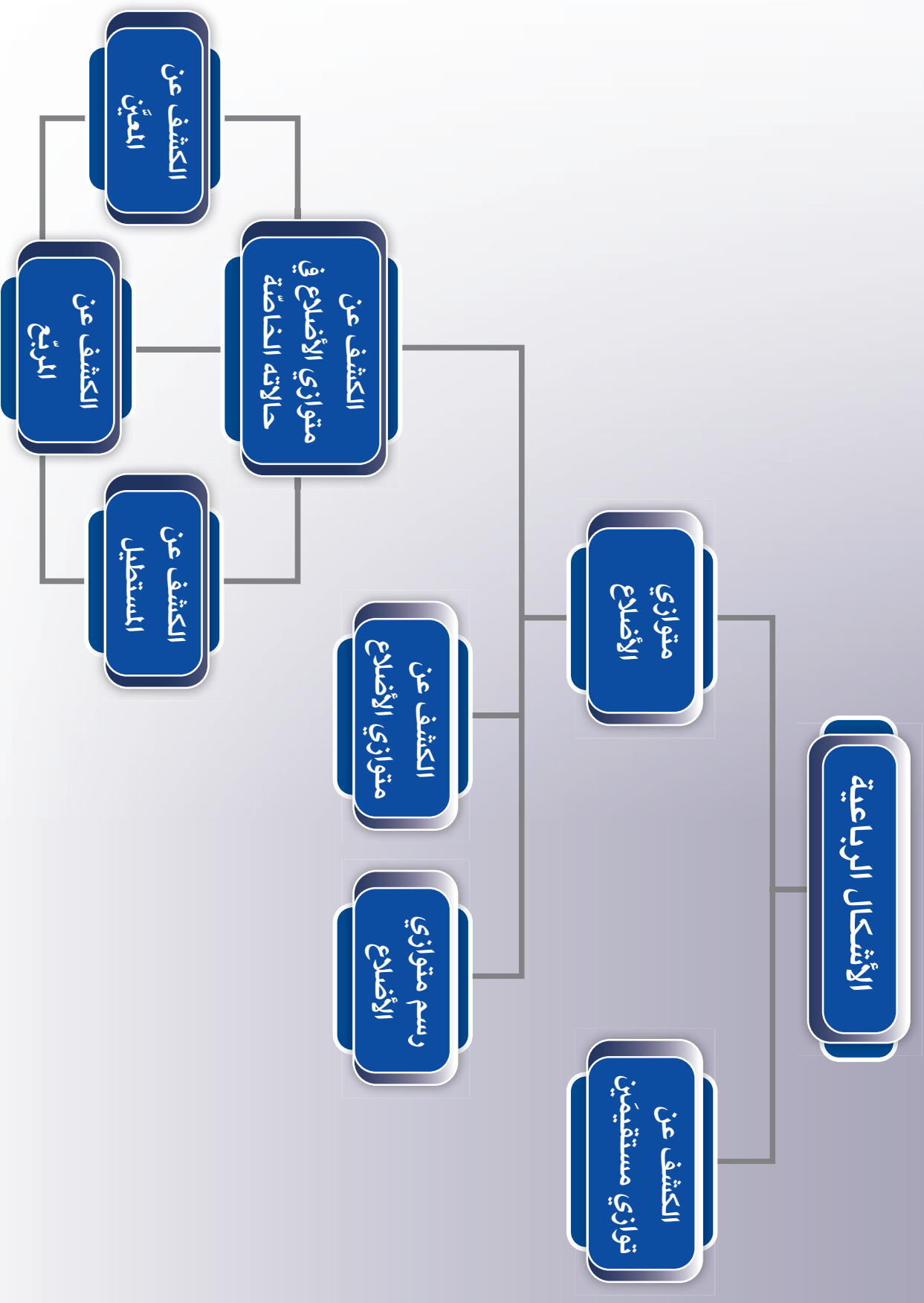
الأشكال الرباعية

«من الهندسة إلى الجمال : الأشكال
الرباعية في الفسيفساء»

تُستخدم الأشكال الرباعية في الهندسة والفن لتصميم الفسيفساء والزخارف الهندسية التي نراها في المساجد والقصور القديمة . يعتمد الفنانون والمهندسون على خصائص الأشكال الرباعية مثل المربّعات والمستطيلات والمعيّنات ، لتكوين أنماط متناسقة ومتكرّرة تُضفي جمالاً ودقّة على التصميم المعمارية .

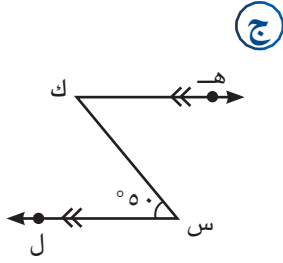
المجال	معايير المنهج	مؤشر الأداء
الهندسة والقياس	- تحليل صفات وخصائص الأشكال الهندسية ذات البعدين والثلاثة الأبعاد ، وتنمية التفكير الرياضي حول العلاقات الهندسية والمقارنة بين الأشكال ووصفها .	الفهم - التذكّر - الاستكشاف والتقصّي - العمل الجماعي - العلاقات - الربط - التعرّف - الاستنتاج - التمييز - التصنيف - الاستدلال - التحليل والتركيب - التعاون - الوسائط - التقويم - التعليل - حلّ المشكلات
	- استخدام التصرّور البصري والتعليل المكاني والنمذجة الهندسية لتمثيل عالمه المادي ووصفه وحلّ مشكلاته .	
	- تطبيق الأساليب والأدوات والصيغ الملائمة لتحديد قياسات .	
	- فهم خواصّ القياس للأشياء والوحدات والأنظمة وعمليات القياس .	

مخطط تنظيمي للوحدة التعليمية الخامسة

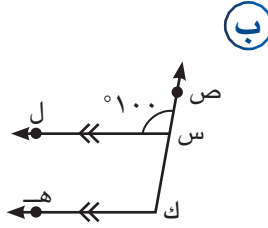


هل أنت مستعد؟

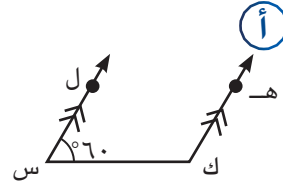
١ في كلٍّ من الأشكال التالية ك هـ // س ل . أوجد $\angle$ (س ك هـ) مع ذكر السبب .



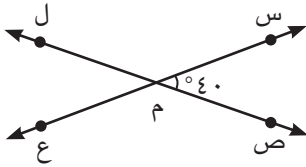
.....
.....



.....
.....



.....
.....



٢ في الشكل المقابل ، $\angle$ س ع $\cap$ ص ل = { م } ،

$\angle$ (س م ص) = 40° . أكمل :

$\angle$ (ل م ع) =

السبب :

$\angle$ (س م ل) =

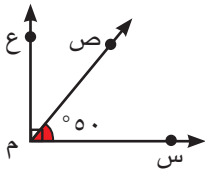
السبب :

٣ إذا كانت $\angle$ س ، $\angle$ ص زاويتين متكاملتين ، $\angle$ (س) = 55° ، فأوجد مع ذكر

السبب .

$\angle$ (ص) =

السبب :

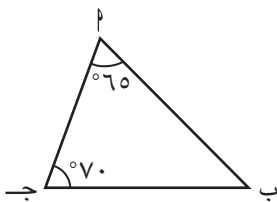


٤ في الشكل المقابل ، بحسب البيانات على الرسم ،

أكمل :

$\angle$ (ص م ع) =

السبب :



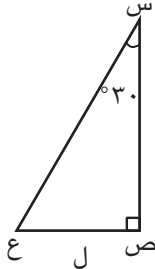
٥ في الشكل المقابل ، بحسب البيانات على الرسم ،

أكمل :

$\angle$ (ب) =

السبب :

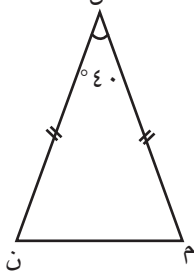
٦ في الشكل المقابل ، أكمل :



..... = (ع) [^] ص

..... : السبب :

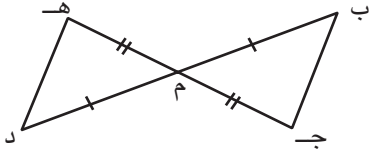
٧ في الشكل المقابل ، أكمل :



..... = (ل م ن) [^] ص

..... : السبب :

٨ في الشكل المقابل ، أكمل :



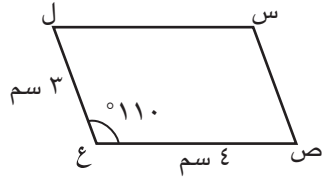
..... $\cong$ م ب ج

..... $\cong$ م ج د

..... : السبب : م ب ج $\cong$ م ج د

..... : الحالة : Δ م ب ج $\cong$ م ج د

٩ س ص ع ل متوازي أضلاع فيه :



ع ل = ٣ سم ، ع ص = ٤ سم ، $\angle$ ع = 110°

أوجد ما يلي مع ذكر السبب .

..... = (س) [^] ص : السبب :

..... = (ص) [^] ل : السبب :

..... = س ص : السبب :

..... = س ل : السبب :

١٠ في الشكل المقابل ، بحسب البيانات المدونة على الرسم ، أكمل :



..... = (س) [^] ل

..... : السبب :

١١ حلّ كلّاً من المعادلات التالية حيث $س \geq ٥$:

(ب) ٥ س + ٩ = ١٤

(أ) ٦ = ٤ - س

الكشف عن توازي مستقيمين

Detecting the Parallelism of Two lines

سوف تتعلّم : الكشف عن توازي مستقيمين .

العبارات والمفردات :

Alternate Angles

زوايا متبادلة

Parallel

يوازي

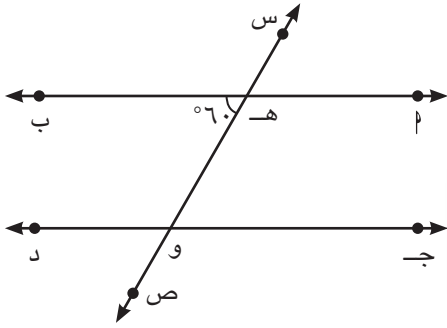
Allied Angles

زوايا متحالفة

Corresponding Angles

زوايا متناظرة

استكشف



في الشكل المقابل :

أولاً : باستخدام المنقلة ، أوجد $\angle هـ$ و $\angle ج$: $\angle هـ$ و $\angle ج$ =

اللوازم :

أدوات هندسية

ثانياً : أكمل :

١ $\angle هـ$ و $\angle ج$ = $\angle$ $\angle$ $\angle$

وهما في وضع تبادل

٢ $\angle د$ و $\angle ص$ = $\angle$ $\angle$ $\angle$

بالتقابل بالرأس

٣ $\angle هـ$ و $\angle د$ = $\angle$ $\angle$ $\angle$

وهما في وضع تناظر

٣ $\angle هـ$ و $\angle د$ = $\angle$ $\angle$ $\angle$

..... = - ١٨٠ =

بالتجاور على خطّ مستقيم واحد

مع $\angle ج$ و $\angle هـ$

..... = + = ١٨٠ =

وهما زاويتان متحالفتان

تذكّر



• الزاويتان المتكاملتان مجموع

قياسهما ١٨٠°

• الزاويتان المتجاورتان على خطّ

مستقيم واحد متكاملتان .

• الزاويتان المتقابلتان بالرأس

متطابقتان .

ثالثاً : باستخدام المسطرة والمثلث القائم ، تحقّق من صحّة توازي

المستقيمين : $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{ج د}$.

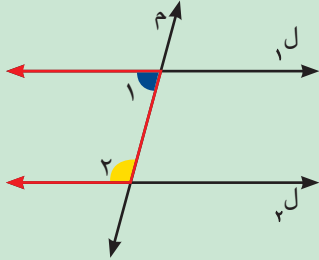
ماذا تلاحظ ؟

نستنتج أن :

إذا قطع مستقيم مستقيمين في المستوى ، فإن المستقيمين يكونان متوازيين ، إذا وفقط إذا توفر أحد الشروط التالية :

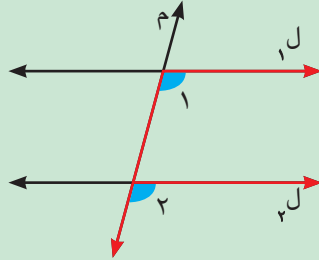
٣ زاويتان متحالفتان

متكاملتان



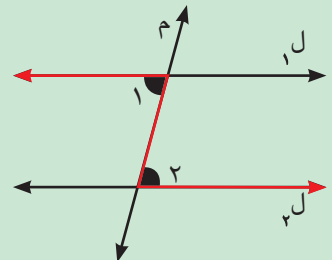
٢ زاويتان متناظرتان

متطابقتان



١ زاويتان متبادلتان

متطابقتان



دورك الآن (١)

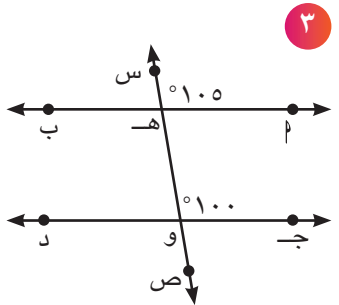


أي من الأشكال التالية يكون $\hat{A} \parallel \hat{B}$ ؟ وضح ذلك .

لاحظ أن :



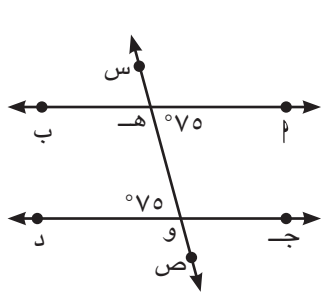
«لا يوازي» يُرمز إليه بالرمز $\nparallel$



$$\hat{u}(\hat{h} \text{ س}) \neq \hat{u}(\hat{d} \text{ و})$$

وهما في وضع

∴

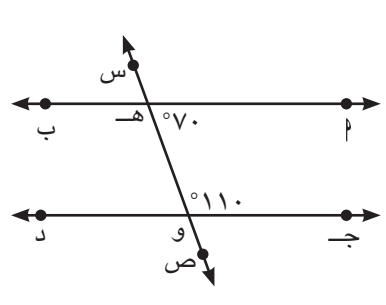


$$\hat{u}(\hat{h} \text{ س}) = \hat{u}(\hat{d} \text{ و})$$

$$75 = 80$$

وهما في وضع

∴ $\hat{A} \parallel \hat{B}$



$$\hat{u}(\hat{h} \text{ س}) + \hat{u}(\hat{d} \text{ و}) = \hat{u}(\hat{h} \text{ س}) + \hat{u}(\hat{d} \text{ و})$$

$$70 + 80 = 70 + 80 = 150$$

وهما زاويتان

∴ $\hat{A} \parallel \hat{B}$

مثال (١):

في الشكل أدناه: $\angle \text{ب و} = 75^\circ$ ، $\angle \text{ب د ه} = 105^\circ$

أثبت أن $\text{ب م} \parallel \text{ه ج}$.

الحل:

المعطيات:

$$\angle \text{ب د ه} = 105^\circ$$

$$\angle \text{ب و} = 75^\circ$$

المطلوب: إثبات أن $\text{ب م} \parallel \text{ه ج}$

البرهان: $\angle \text{ب د ه} = 105^\circ$

$$\therefore \angle \text{ج د ب} = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ \quad (\text{بالتجاور على خط مستقيم واحد})$$

$$\therefore \angle \text{ب و} = \angle \text{ج د ب} = 75^\circ \quad (\text{وهما في وضع تناظر})$$

$$\therefore \text{ب م} \parallel \text{ه ج}$$

لاحظ أن:



لحلّ تمارين هندسية، إتبع الخطوات التالية:

١ أكتب المعطيات

٢ أكتب المطلوب

٣ أكتب البرهان (خطوات الوصول إلى المطلوب)

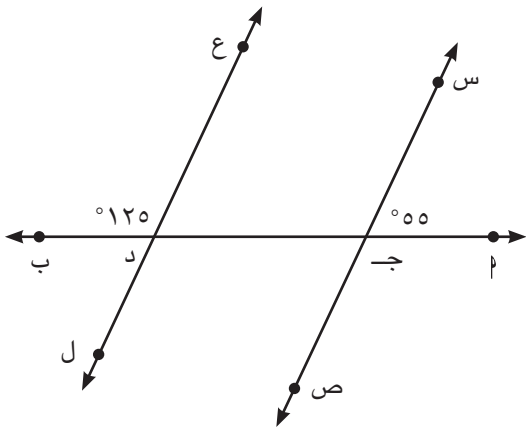
(معطى)

عبّر عن فهمك (١)



هل يمكنك حلّ مثال (١) بطرق أخرى؟ فسر إجابتك.

دورك الآن (٢)



في الشكل المقابل، ب م قاطع للمستقيمين

س ص، ع ل، في ج، د على الترتيب،

$$\angle \text{ب ج س} = 55^\circ، \angle \text{ع د ب} = 125^\circ،$$

برهن أن س ص $\parallel$ ع ل

الحل:

المعطيات: ب م قاطع للمستقيمين، في ج، د على الترتيب،

$$\angle \text{ب ج س} = 55^\circ، \angle \text{ع د ب} = 125^\circ$$

المطلوب: إثبات أن س ص $\parallel$ ع ل

البرهان: $\angle \text{ب ج س} = 55^\circ$

(معطى)

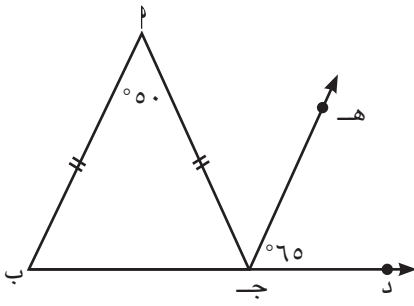
(بالتجاور على خطٍّ مستقيم واحد)
(معطى)
(وهما في وضع)

$$\begin{aligned} \therefore \angle ج د &= 180^\circ - \dots = \dots \\ \therefore \angle &= 120^\circ \\ \therefore \angle ج د &= \angle &= \dots \\ \therefore & // \end{aligned}$$

تذكر



في المثلث المتطابق الضلعين
زاويتا القاعدة متطابقتان .



(معطى)

(مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = 180°)
(معطى)
(وهما في وضع تناظر)

المعطيات : $\angle ب ج د = 50^\circ$ ، $\angle ج د ه = 65^\circ$ ، $\overline{ب ج} = \overline{ج د}$
المطلوب : إثبات أن $\overline{ج ه} // \overline{ب د}$
البرهان : $\angle ب ج د = \angle ج د ه$

$\therefore \Delta ب ج د$ متطابق الضلعين

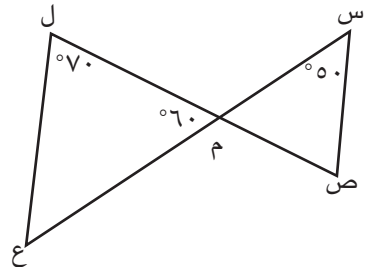
$$\begin{aligned} \therefore \angle ب ج د &= \angle ج د ه = 50^\circ \\ \therefore \angle ج د ه &= 65^\circ \\ \therefore \angle ب ج د &= \angle ج د ه = 65^\circ \\ \therefore \overline{ج ه} & // \overline{ب د} \end{aligned}$$

دورك الآن (3)



في الشكل المقابل ، إذا كان $\overline{س ع} \cap \overline{ص ل} = \{ م \}$ وحسب البيانات المحددة عليه ،
أثبت أن $\overline{س ص} // \overline{ل ع}$

الحل :



تذكر



مجموع قياسات زوايا المثلث
الداخلة يساوي 180° .

المعطيات : $\overline{س ع} \cap \overline{ص ل} = \{ م \}$
 $\angle س م ل = 70^\circ$ ، $\angle ص م ع = 50^\circ$
 $\angle ل م ع = \dots$
المطلوب : إثبات أن $\overline{س ص} // \overline{ل ع}$

البرهان: Δ ع م ل فيه

$\angle ع = (\angle +) - ١٨٠ = (.....)$ (مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة)

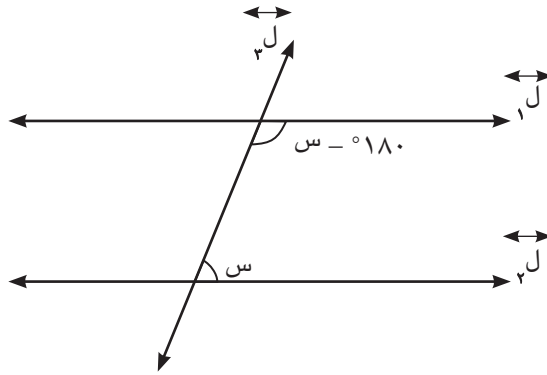
$\therefore \angle س = (.....) = (.....)$ (وهما في وضع)

$\therefore //$

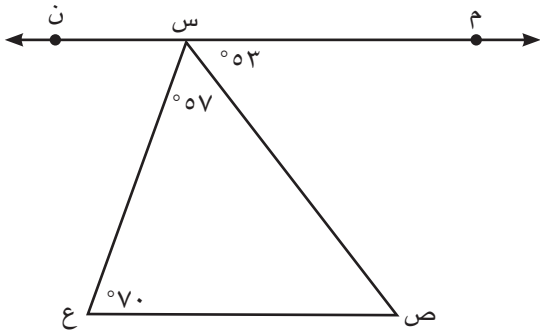
عبر عن فهمك (٢)



يقول يوسف: إن $ل // ل٢$ ، فهل توافقه الرأي؟ وضّح ذلك .



تمارين ذاتية :



١ في الشكل المقابل وحسب البيانات المحددة عليه ،

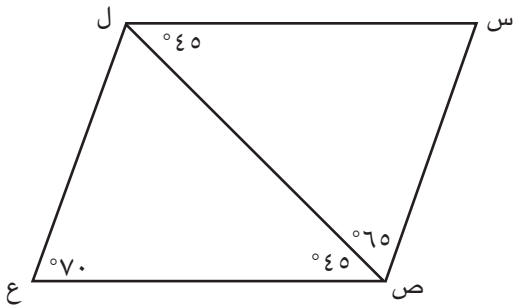
أثبت أن $م ن // ص ع$.

.....

.....

.....

.....



٢ في الشكل المقابل وحسب البيانات المدونة عليه ،

برهن أن :

أ) $س ل // ص ع$

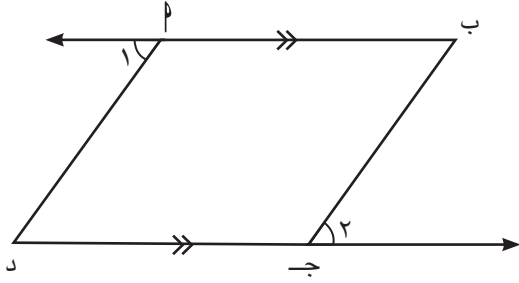
.....

.....

ب) $س ص // ل ع$

.....

.....



٣ في الشكل المقابل : $\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$ ، $\overrightarrow{c} \parallel \overrightarrow{d}$ ،
 $\angle 1 = \angle 2$ برهن أن $\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$ //

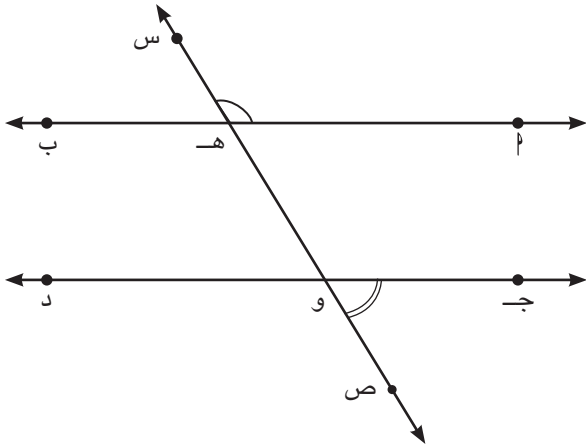
.....

.....

.....

.....

مهارات تفكير عليا :



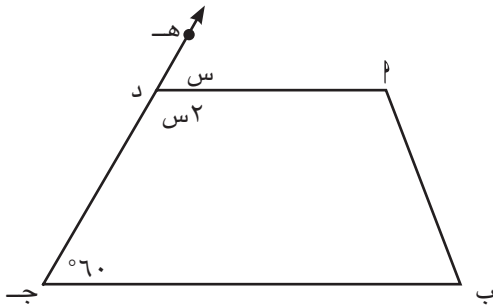
٤ في الشكل المقابل :
 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$
 أثبت أن $\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$ //

.....

.....

.....

.....



٥ في الشكل المقابل وحسب البيانات المدونة عليه ،
 أثبت أن $\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$ جـ د شبه منحرف .

.....

.....

.....

.....

.....

تذكر



شبه المنحرف هو شكل رباعي
 فيه ضلعان فقط متقابلان
 متوازيان .

متوازي الأضلاع – رسم متوازي الأضلاع

Parallelogram - Drawing a Parallelogram

سوف تتعلّم : متوازي الأضلاع وخواصّه – رسم متوازي الأضلاع .

العبارات والمفردات :

Consecutive Angles

زاويتان متتاليتان

Parallelogram

متوازي الأضلاع

Opposite Angles

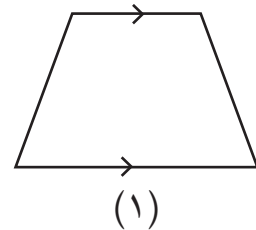
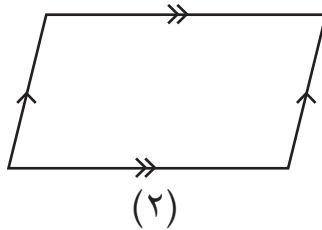
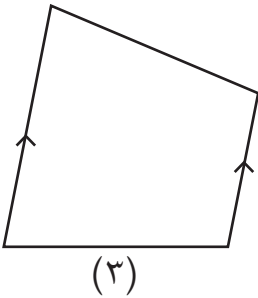
زاويتان متقابلتان



يُستخدم متوازي الأضلاع في العديد من التطبيقات الحياتية والعملية وخاصة في الهندسة ، البناء ، التصميم ، الميكانيكا وحتى الفن .

حلّ وناقش

من الأشكال الرباعية التالية (لاحظ علامات التوازي) ، أيّها يمثل متوازي أضلاع ؟ ولماذا ؟



ماذا تلاحظ ؟

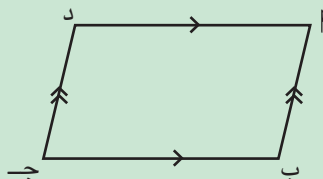
انتبه



- رمز التوازي على الرسم > أو >
- رمز التوازي في التعبير الرياضي //

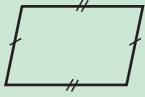
تعلّمت ممّا سبق أنّ :

متوازي الأضلاع هو شكل رباعي فيه كلّ ضلعين متقابلين متوازيان .

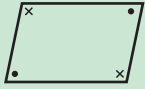


أ ب ج د متوازي أضلاع وعلى ذلك فإنّ :
 • $\overline{a b} \parallel \overline{c d}$ • $\overline{b c} \parallel \overline{d a}$

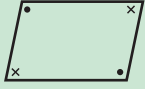
كما تعلّمت خواصّ متوازي الأضلاع :



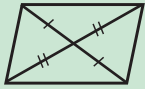
١ في متوازي الأضلاع كلّ ضلعين متقابلين متطابقان .



٢ في متوازي الأضلاع كلّ زاويتين متقابلتين متطابقتان .



٣ في متوازي الأضلاع مجموع قياس كلّ زاويتين متتاليتين يساوي 180° (متكاملتين) .



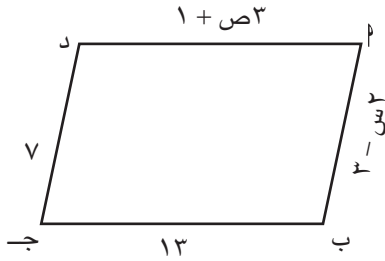
٤ في متوازي الأضلاع القطران ينصف كلّ منهما الآخر .

عبّر عن فهمك



كيف يمكن استخدام مفهوم تطابق مثلثين في إثبات خاصية (القطران ينصف كلّ منهما الآخر) في متوازي الأضلاع ؟ وضّح إجابتك .

مثال (١) :



في الشكل المقابل AB جـ $د$ متوازي أضلاع ، وبحسب البيانات المدوّنة على الرسم ، أوجد بالبرهان قيمة كلّ من $س$ ، $ص$.

الحلّ :

المعطيات : AB جـ $د$ متوازي أضلاع

$$\begin{aligned} AB &= 2 \text{ س} - 3 \text{ وحدة طول} , & B &= 13 \text{ وحدة طول} \\ D &= 7 \text{ وحدات طول} , & D &= (3 + 1) \text{ وحدة طول} \end{aligned}$$

المطلوب : إيجاد قيمة كلّ من $س$ ، $ص$

البرهان : $\because AB$ جـ $د$ متوازي أضلاع (معطى)

$\therefore$ كلّ ضلعين متقابلين متطابقان (من خواصّ متوازي الأضلاع)

$$\therefore AB = D \text{ جـ} , \quad \therefore B = D \text{ جـ}$$

$$13 = 1 + 3$$

$$3 + 1 = 13 - 1$$

$$\frac{3}{1} = \frac{12}{1} \text{ ص}$$

$$ص = 4 \text{ (تحقق من صحّة الحلّ)}$$

$$2 \text{ س} - 3 = 7$$

$$2 \text{ س} - 3 = 3 + 7$$

$$\frac{10}{1} = \frac{10}{1} \text{ س}$$

$$س = 5$$

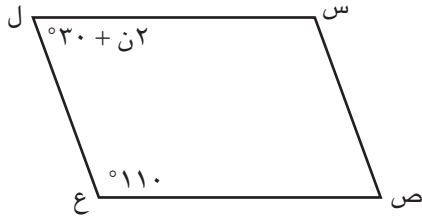
انتبه



لإيجاد قيمة $س$ أو $ص$ ، يُفضّل حلّ المعادلة باستخدام المعكوس الجمعي ثمّ المعكوس الضربي .



في الشكل المقابل ، س ص ع ل متوازي أضلاع ، وبحسب البيانات المدونة على الرسم ، أكمل ما يلي لإيجاد قيمة ن .



المعطيات :

المطلوب :

البرهان : ∴ س ص ع ل متوازي أضلاع

∴ $180^\circ = (\dots\dots\dots) + (\dots\dots\dots)$ (من خواص متوازي الأضلاع كل زاويتين متتاليتين متكاملتان)

$$180^\circ = 110^\circ + 2 + 30^\circ$$

$$180^\circ = 140^\circ + 2$$

$$180^\circ - \dots\dots\dots = 2$$

$$\frac{\dots\dots\dots}{2} = 2$$

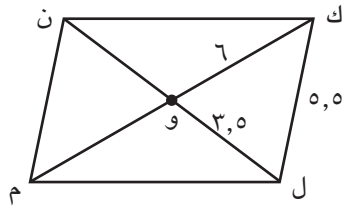
$$\dots\dots\dots = 2$$

انتبه



الزاويتان المتكاملتان مجموع قياسهما 180°

مثال (٢) :



ك ل م ن متوازي أضلاع تقاطع قطريه في و ، ك ل = 5.5 وحدة طول ، ك و = 6 وحدات طول ، ل و = 3.5 وحدة طول ، أوجد محيط Δ م و ن .
الحل :

المعطيات : ك ل م ن متوازي أضلاع

ك ل = 5.5 وحدة طول ، ك و = 6 وحدات طول ، ل و = 3.5 وحدة طول

المطلوب : إيجاد محيط Δ م و ن

البرهان : ∴ ك ل م ن متوازي أضلاع

$$\therefore م = و = ك = 6 \text{ وحدات طول}$$

$$\therefore و ن = ل = 3.5 \text{ وحدة طول}$$

$$\therefore م ن = ك ل = 5.5 \text{ وحدة طول}$$

$$\therefore \text{محيط } \Delta م و ن = م + و + ن$$

$$= 5.5 + 3.5 + 6$$

$$= 15 \text{ وحدة طول}$$

(معطى)

(من خواص متوازي الأضلاع القطران ينصف كل

منهما الآخر)

(من خواص متوازي الأضلاع كل ضلعين متقابلين

متطابقان)

تذكر



محيط المثلث يساوي مجموع أطوال أضلاعه .

اللوازم :

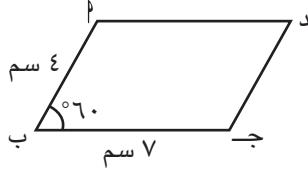
أدوات هندسية

رسم متوازي الأضلاع

إحدى طرق رسم متوازي الأضلاع إذا عُلم فيه طولاً ضلعين متجاورين وقياس إحدى زواياه .

مثال توضيحي :

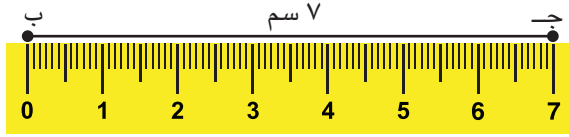
أرسم متوازي الأضلاع $أ ب ج د$ الذي فيه $أ ب = ٤$ سم ، $ب ج = ٧$ سم ، $∠ أ ب ج = ٦٠^\circ$



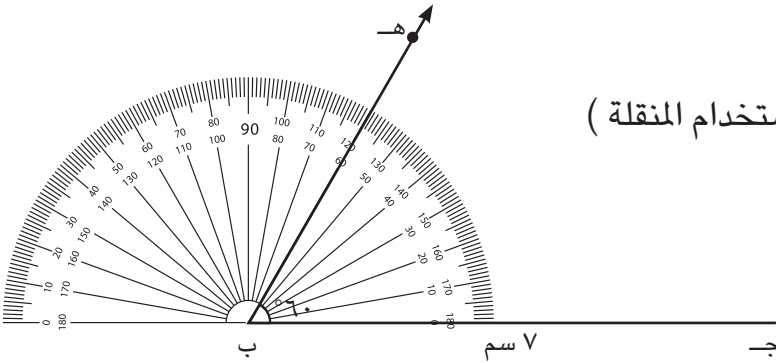
أولاً : أرسم رسماً تخطيطياً لوضع تصوّر لشكل متوازي الأضلاع موضحاً عليه المعطيات .

الحل :

ثانياً : إستخدِم الأدوات الهندسية ، واتبِع خطوات العمل :

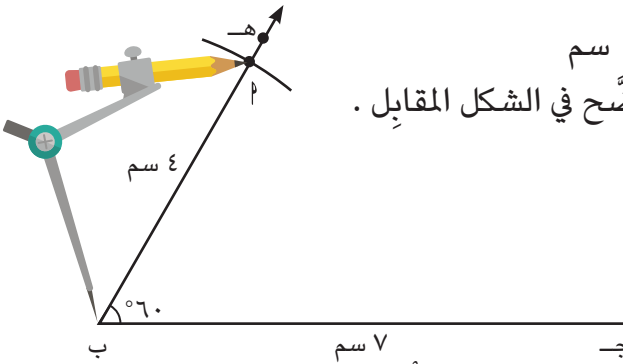


١ أرسم $ب ج$ طولها ٧ سم (باستخدام المسطرة) .



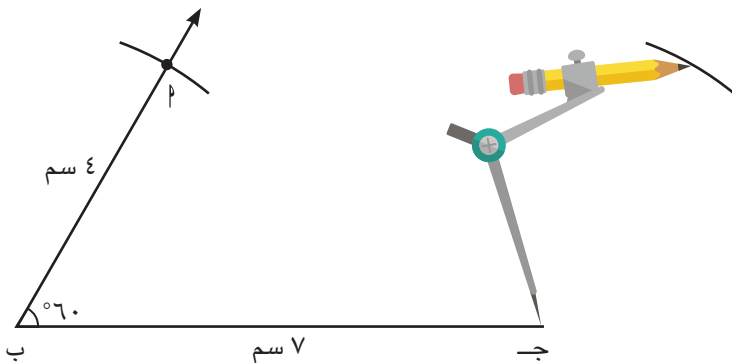
٢ أرسم ($ج ب هـ$) قياسها ٦٠° (باستخدام المنقلة)

كما في الشكل المقابل .



٣ ركَز سنّ الفرجار عند النقطة ب ، وبفتحة طولها ٤ سم أرسم قوساً يقطع $ب هـ$ في النقطة $د$ ، كما هو موضح في الشكل المقابل .

٤ ركَز سنّ الفرجار في النقطة ج ، وبفتحة طولها ٤ سم (لماذا ؟) ، أرسم قوساً .



إِنْتَبِه

- عند استخدام المسطرة ،
- إبدأ من العدد صفر .
- عند استخدام المنقلة ، إنتبه إلى جهة التدريج .

٥ ركّز سنّ الفرجار في النقطة ١

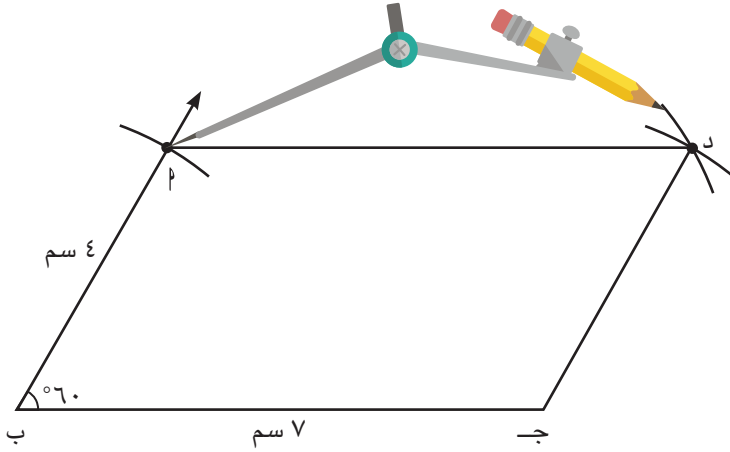
وبفتحة طولها ٧ سم (لماذا ؟) ،

أرسم قوسًا ليتقاطع مع القوس

المرسوم من النقطة جـ في النقطة د .

٦ صل بالمسطرة د جـ ، ١ د لتحصل على

متوازي أضلاع ١ ب جـ د .



معلومة مفيدة :

يُستخدم رسم متوازي الأضلاع في تصميم الجدران والأعمدة بزوايا معينة للحفاظ على التوازن والاستقرار ، كما يُستخدم في تصميم الأثاث مثل الطاولات والمكاتب بزوايا مائلة .

مثال (٣) :

أرسم متوازي الأضلاع س ص ع ل الذي فيه

س ص = ٤,٥ سم ، ص ع = ٦ سم ، $\angle س ل ع = ١١٠^\circ$.

الحل :

أرسم رسمًا تخطيطيًا للشكل موضّحًا المعطيات عليه .

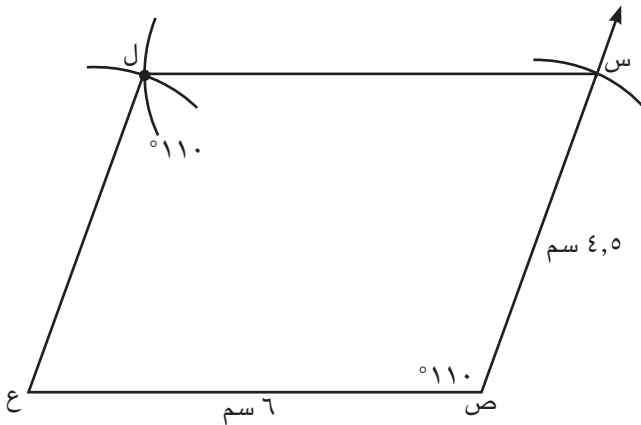
∴ س ص ع ل متوازي أضلاع

∴ $\angle س ص ع = \angle س ل ع = ١١٠^\circ$ ، $\angle س ل ع = \angle س ص ع$

كل زاويتين متقابلتين في متوازي الأضلاع متطابقتان

باستخدام الأدوات الهندسية وتّباع الخطوات

السابقة ، أرسم متوازي الأضلاع س ص ع ل .

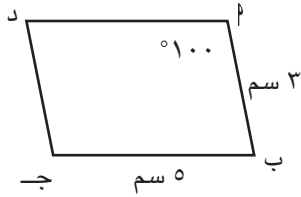


عند رسم متوازي الأضلاع بمعلومية طولي ضلعين متجاورين فيه وقياس إحدى زواياه ، نوظّف خواص متوازي الأضلاع لإيجاد قياس الزاوية بين الضلعين المتجاورين .



أرسم متوازي الأضلاع أ ب ج د الذي فيه أ = ٣ سم ، ب ج = ٥ سم ، $\angle \text{أ} = 100^\circ$

الحل :



أرسم رسماً تخطيطياً للشكل موضحاً عليه المعطيات

∴ أ ب ج د

∴ $\angle \text{أ} = \dots + \dots = \dots$ (من خواص متوازي الأضلاع كل زاويتين متتاليتين متكاملتان)

$\angle \text{ب} = \dots - \dots = \dots$

∴ $\angle \text{ب} = \dots$

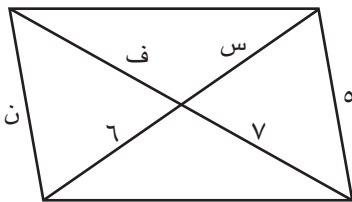
إستخدم الأدوات الهندسية

لرسم متوازي الأضلاع أ ب ج د

تمارين ذاتية :



١ أوجد قيمة كل من س ، ف ، ن في متوازيات الأضلاع التالية مع ذكر السبب :



..... = س

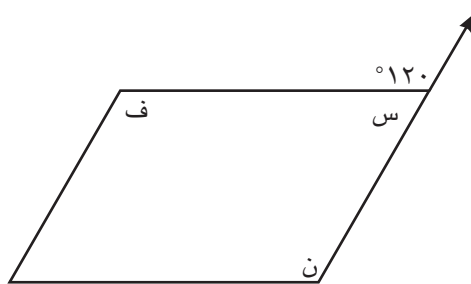
.....

..... = ف

.....

..... = ن

.....



..... = س

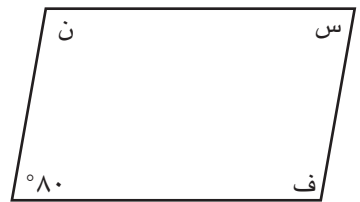
.....

..... = ف

.....

..... = ن

.....



..... = س

.....

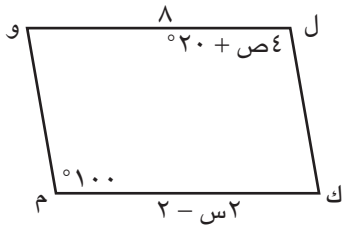
..... = ن

.....

..... = ف

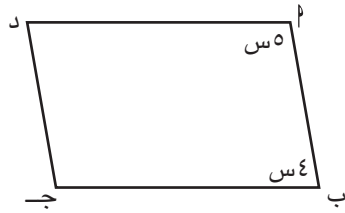
.....

٢ في الشكل المقابل ل ك م و متوازي أضلاع ، وبحسب البيانات المدونة على الرسم ، أوجد بالبرهان قيمة كل من س ، ص .



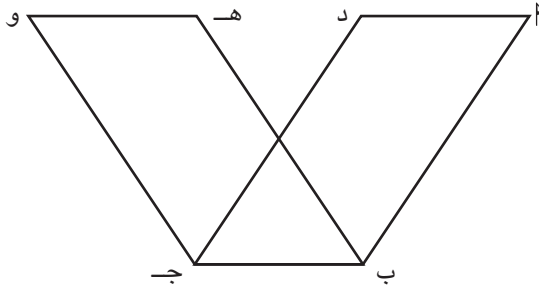
.....	
.....	
.....	
.....	

٣ في الشكل المقابل ، ا ب ج د متوازي أضلاع و (ا ب) = ٥ س ، و (ب ج) = ٤ س أوجد بالبرهان و (ا ب) ، و (ب ج) بالدرجات .



.....
.....
.....

٤ ا ب ج د ، ه ب ج و متوازي أضلاع ، أثبت أن : ا د = ه و .



.....
.....
.....
.....

٥ أرسم متوازي الأضلاع ا ب ج د الذي فيه ا ب = ٤ سم ، ب ج = ٥ سم ، و (ا ب ج) = ٧٠° .

٦ أرسم متوازي الأضلاع س ص ع ل الذي فيه س ص = ٥,٥ سم ، ص ع = ٦,٥ سم ،
 ن (س ل ع) = ٤٥ ° .

٧ أرسم متوازي الأضلاع ل م ن و الذي فيه ل م = ٣,٥ سم ، م ن = ٥ سم ، ن (م ل و) = ١٢٠ ° .

مهارات تفكير عليا :

٨ يُحيط بحديقة سور طوله ٦٠٠ م على شكل متوازي أضلاع ، إذا كان طول السور المقابل للشارع (أ) ضعف طول السور المقابل للشارع (ب) ، فأوجد طول السور المقابل للشارع (د) .



.....

.....

.....

.....

.....

.....

الكشف عن متوازي الأضلاع

Detecting a Parallelogram

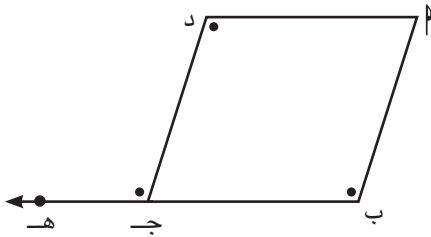
سوف تتعلّم : الكشف عن متوازي الأضلاع .

تعلّمت ممّا سبق أنّ : الشكل الرباعي الذي فيه كلّ ضلعين متقابلين متوازيان يُسمّى متوازي أضلاع .
ومن هذا التعريف تكون هذه هي الحالة الأولى من حالات الكشف عن متوازي الأضلاع .

الحالة الأولى (من التعريف)

يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كان فيه **كلّ** ضلعين متقابلين متوازيان .

دورك الآن (١)



في الشكل المقابل ب ج د شكل رباعي فيه

$$\angle \text{ب} = \angle \text{د} = \angle \text{ج ه}$$

أكمل ما يلي :

$$\therefore \angle \text{ب} = \dots\dots\dots \text{ (وهما في وضع تناظر)}$$

$$\therefore \overline{\text{د ج}} \parallel \dots\dots\dots \text{ (١)}$$

$$\therefore \angle \text{د} = \dots\dots\dots \text{ (وهما في وضع تبادل)}$$

$$\therefore \overline{\text{د ب}} \parallel \dots\dots\dots \text{ (٢)}$$

من (١) ، (٢) ينتج أنّ الشكل الرباعي ب ج د هو
لأنّ فيه

تذكّر



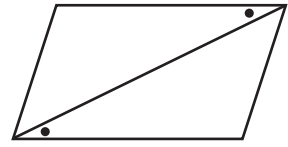
إذا قطع مستقيم مستقيمين فإنّه :
يتوازي المستقيمان إذا وفقط إذا
توافر أحد الشروط التالية :

- ١ زاويتان متبادلتان متطابقتان
- ٢ زاويتان متناظرتان متطابقتان
- ٣ زاويتان متحالفتان متكاملتان

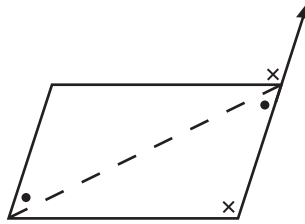


حدّد ما إذا كان الشكل الرباعي بحسب البيانات المدوّنة عليه متوازي أضلاع أم لا .

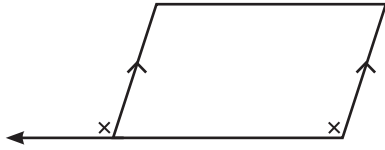
أ



ب



ج



مثال (١):

أ ب ج د شكل رباعي فيه ،

$$\angle \text{هـ أ ب} = \angle \text{ب د ج} = 100^\circ$$

$$\angle \text{د أ ب} = 30^\circ , \angle \text{ب ج د} = 50^\circ$$

برهن أنّ الشكل الرباعي أ ب ج د متوازي أضلاع

الحل :

$$\angle \text{هـ أ ب} = \angle \text{ب د ج} = 100^\circ$$

$$\angle \text{د أ ب} = 30^\circ , \angle \text{ب ج د} = 50^\circ$$

المطلوب : إثبات أنّ الشكل الرباعي أ ب ج د متوازي أضلاع

البرهان :

$$\angle \text{هـ أ ب} = \angle \text{ب د ج} = 100^\circ \text{ وهما في وضع تبادل (معطى)}$$

$$\therefore \overline{\text{أ د}} \parallel \overline{\text{ب ج}} \quad (١)$$

إنتبه

لإثبات أنّ الشكل متوازي أضلاع ،
تحقق من إثبات ما يلي :

(١) $\overline{\text{أ د}} \parallel \overline{\text{ب ج}}$
(٢) $\overline{\text{أ ب}} \parallel \overline{\text{د ج}}$
الحالة الأولى (التعريف)

$$\text{في } \triangle \text{أ ب د} , \angle \text{د} = 180^\circ - (\angle \text{هـ أ ب} + \angle \text{ب د ج}) = 180^\circ - (100^\circ + 50^\circ)$$

$$= 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

$$\angle \text{د أ ب} = 30^\circ \text{ وهما في وضع تناظر}$$

$$\therefore \overline{\text{أ ب}} \parallel \overline{\text{د ج}} \quad (٢)$$

من (١) ، (٢) نستنتج أنّ :

الشكل الرباعي أ ب ج د هو متوازي أضلاع لأنّ فيه كلّ ضلعين متقابلين متوازيان .

عبّر عن فهمك (١)

هل يمكن حلّ مثال (١) بطريقة أخرى لإثبات أنّ الشكل الرباعي $ABCD$ هو متوازي أضلاع؟
وضّح إجابتك.

سنتحقّق معاً بأنّ الشكل الرباعي الذي فيه كلّ ضلعين متقابلين متطابقان كحدّ أدنى من المعطيات تكفي لنقول إنّ الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

استكشف (١)

في الشكل المقابل $ABCD$ شكل رباعي فيه

$$AB = DC, \quad AD = BC$$

أكمل ما يلي لتبرهن أنّ الشكل $ABCD$ هو متوازي أضلاع:

$$\triangle ABC \cong \triangle DCB, \quad \triangle ABD \cong \triangle CDA \text{ فيهما:}$$

$$1. \quad \overline{AB} \cong \overline{DC} \dots\dots\dots$$

$$2. \quad \overline{BC} \cong \overline{AD} \dots\dots\dots$$

$$3. \quad \dots\dots\dots$$

(معطى)

(معطى)

(ضلع مشترك)

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DCB \text{ وحالة التطابق } \dots\dots\dots$$

وينتج من التطابق:

$$\angle A \cong \angle C \text{ وهما في وضع تبادل}$$

$$\therefore \overline{AB} \parallel \overline{DC} \quad (1)$$

$$\angle B \cong \angle D \text{ وهما في وضع تبادل}$$

$$\therefore \overline{BC} \parallel \overline{AD} \quad (2)$$

من (١)، (٢) نستنتج أنّ الشكل الرباعي $ABCD$ هو $\dots\dots\dots$

تذكّر



حالات تطابق مثلثين

$$1. \quad (\text{ض. ض. ض.})$$

$$2. \quad (\text{ز. ض. ز.})$$

$$3. \quad (\text{ض. ز. ض.})$$

$$4. \quad (\angle. \text{و. ض.})$$

الحالة الثانية

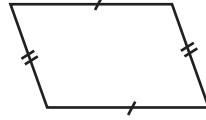
يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كان فيه كلّ ضلعين متقابلين متطابقان.



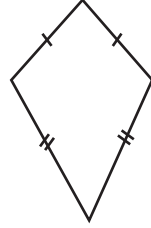
حدّد ما إذا كان الشكل الرباعي بحسب البيانات المدوّنة عليه متوازي أضلاع أم لا .



(ج)

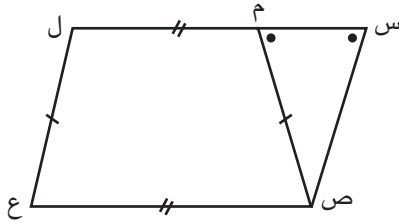


(ب)



(أ)

مثال (٢) :



إذا كان $س ل = ص ع$ ، $م ص = ل ع$ ، $ن (س) = ن (م ص)$

برهن أنّ الشكل الرباعي $س ص ع ل$ متوازي أضلاع

الحل :

المعطيات : $س ل = ص ع$ ، $م ص = ل ع$ ، $ن (س) = ن (م ص)$

المطلوب : إثبات أنّ الشكل الرباعي $س ص ع ل$ متوازي أضلاع

البرهان :

$س ل = ص ع$ معطى

(١)

في $\Delta س م ص$:

$\therefore ن (س) = ن (م ص)$ معطى

معطى

$\therefore س ص = م ص$

$\therefore م ص = ل ع$

$\therefore س ص = ل ع$

$\therefore$ من (١) ، (٢) نستنتج أنّ :

الشكل الرباعي $س ص ع ل$ متوازي أضلاع

لأنّ فيه كلّ ضلعين متقابلين متطابقان .

انتبه



تحقق من إثبات ما يلي :

(١) $س ل = ص ع$

(٢) $س ص = ل ع$

الحالة الثانية (خاصية)

تذكّر



لأيّ مثلث إذا كان فيه زاويتان متطابقتين ، فإنّ المثلث متطابق الضلعين .

لاحظ أنّ :

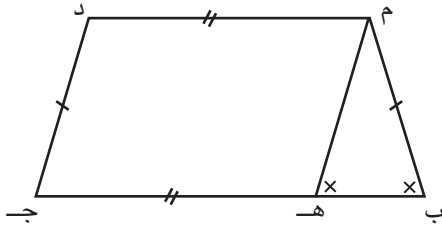


من خواصّ المساواة إذا كان $ب = ب$ ، $ب = ج$ ، فإنّ $ب = ج$

دورك الآن (٤)

حسب البيانات المدونة ، برهن أن الشكل الرباعي م هـ جـ د متوازي أضلاع .

البرهان :



(١) معطى

معطى

السبب :

معطى

(٢) من خواص المساواة

∴ م د = هـ جـ

في Δ م ب هـ : ∠ م ب هـ = ∠ م ب هـ (م هـ ب)

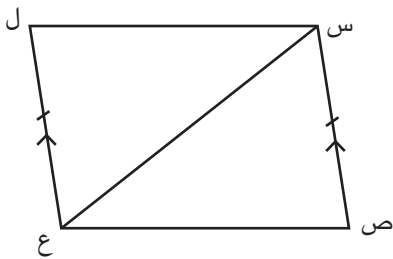
∴ م ب = ب هـ

∴ م ب = ب هـ

∴ م هـ = هـ د

من (١) ، (٢) م هـ جـ د هو لأن

إِسْتِكْشَاف (٢)



في الشكل المقابل س ص ع ل شكل رباعي فيه :

$\overline{س ص} \cong \overline{ل ع}$ ، $\overline{س ص} \parallel \overline{ل ع}$

هل المعطيات السابقة تكفي لأن يكون الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع ؟ (نبحث في تطابق المثلثين س ص ع ، ع ل س)

في Δ س ص ع ، Δ ع ل س فيهما :

معطى

..... $\cong$

(ص س ع) $\cong$ (ع ل س) (بالتبادل والتوازي) حيث $\overline{س ص} \parallel \overline{ل ع}$

ضلع مشترك

∴ Δ س ص ع $\cong$ Δ ع ل س وحالة التطابق

وينتج من التطابق أن : (ص ع س) $\cong$ (ع ل س) (وهما في وضع تبادل)

(١)

∴ $\overline{س ل} \parallel \overline{ص ع}$

(٢) معطى

$\overline{س ص} \parallel \overline{ل ع}$

من (١) ، (٢) نستنتج أن الشكل الرباعي س ص ع ل هو

وعلى ذلك نقول : نعم ، المعطيات في الشكل تكفي لأن يكون الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع .

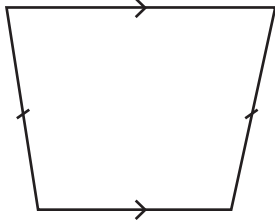
الحالة الثالثة

يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كان فيه ضلعان متقابلان متطابقين ومتوازيين .

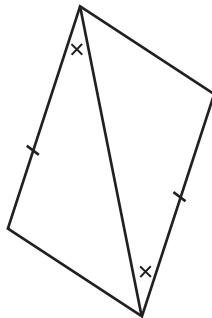


حدّد ما إذا كان الشكل الرباعي بحسب البيانات المدوّنة عليه متوازي أضلاع أم لا .

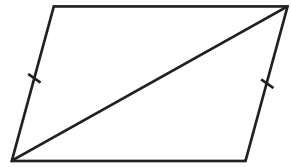
ج



ب



أ



مثال (٣) :

إذا كان AB CD متوازي أضلاع ،

$AB = CD$ ، $AD = BC$ ، $AD \parallel BC$ ، $AB \parallel CD$ ، فبرهن

أنّ الشكل الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .

الحل :

المعطيات : AB CD متوازي أضلاع

$$AB = CD$$

$AD \parallel BC$ ، $AB \parallel CD$ ، $AD = BC$ ، $AB = CD$ ، فبرهن

المطلوب : إثبات أنّ $ABCD$ متوازي أضلاع .

البرهان :

$\because AB$ CD متوازي أضلاع

$$\therefore AB \parallel CD$$

$\because AD \parallel BC$ ، $AB \parallel CD$ ، $AD = BC$ ، $AB = CD$ ، فبرهن

$$\therefore AD \parallel BC$$

$$\therefore AD = BC$$

$$\therefore AB = CD$$

$$\therefore AD = BC$$

من (١) ، (٢) نستنتج أنّ :

الشكل الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع لأنّ فيه ضلعين متقابلين متطابقان ومتوازيان .

انتبه



تحقق من إثبات ما يلي :

$$(١) \quad AD \parallel BC$$

$$(٢) \quad AD = BC$$

الحالة الثالثة (خاصية)

معطى

(من تعريف متوازي الأضلاع)

معطى

(١)

(من خواص متوازي الأضلاع)

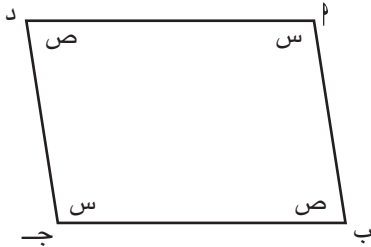
معطى

من خواص المساواة (٢)

عبر عن فهمك (٢)

إذا كان في الشكل الرباعي ضلعان متوازيان وضلعان آخران متطابقان ، فهل يمكننا الجزم أنّ هذا الشكل يمثل متوازي أضلاع ؟ فسّر إجابتك .

استكشف (٣)



في الشكل المقابل أ ب ج د شكل رباعي فيه :

$$\angle أ = \angle ب \quad \angle ج = \angle د$$

$$\angle ب = \angle د \quad \angle ج = \angle أ$$

هل المعطيات كافية لأن يكون الشكل الرباعي أ ب ج د متوازي أضلاع ؟
سوف نبحث في ذلك .

تعلم أنّ :

$$\angle أ + \angle ب + \angle ج + \angle د = 360^\circ$$

$$\therefore 360^\circ = \angle أ + \angle ب$$

$$\therefore 180^\circ = \angle أ + \angle ب$$

$$\angle أ + \angle ب = 180^\circ$$

$$\therefore \dots \parallel \dots$$

$$\text{وكذلك } \angle ب + \angle ج = 180^\circ$$

$$\therefore \dots \parallel \dots$$

وهما زاويتان متحالفتان

(١)

وهما زاويتان متحالفتان

(٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أنّ الشكل الرباعي أ ب ج د هو
وعلى ذلك نقول : نعم ، المعطيات كافية لإثبات أنّ الشكل الرباعي أ ب ج د متوازي أضلاع .

الحالة الرابعة

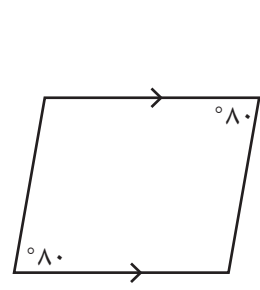
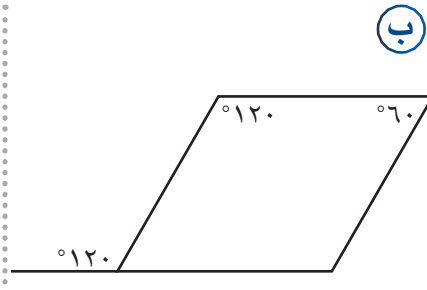
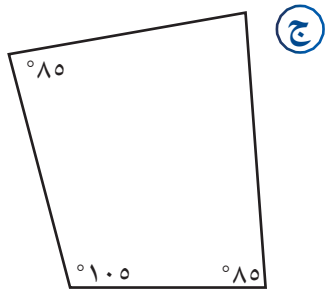
يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كان فيه كل زاويتين متقابلتين متطابقتان .

ملاحظة :

يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كان فيه كل زاويتين متتاليتين متكاملتان .



حدّد ما إذا كان الشكل الرباعي بحسب البيانات المدوّنة عليه متوازي أضلاع أم لا .



مثال (٤) :

أ ب ج د شكل رباعي فيه : $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

و (أ) = 50° ، د هـ $\perp$ ب ج ، و (ج د هـ) = 40°

أثبت أنّ أ ب ج د متوازي أضلاع .

المعطيات : $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

و (أ) = 50° ، و (ج د هـ) = 40°
د هـ $\perp$ ب ج

المطلوب : إثبات أنّ الشكل الرباعي أ ب ج د متوازي أضلاع .

البرهان :

في $\triangle$ د ج هـ :

و (ج د هـ) = $180^\circ - (90^\circ + 40^\circ)$

$50^\circ = 180^\circ - 130^\circ$

$\therefore$ و (أ) = و (ج د هـ) = 50°

$\therefore \overline{AD} \parallel \overline{BC}$

و (ب) = $180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$

$\therefore$ و (أ د ج) = $360^\circ - (50^\circ + 130^\circ + 50^\circ)$ (مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = 360°)

$130^\circ = 360^\circ - 230^\circ$

و (ب) = و (أ د ج) = 130° (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أنّ الشكل الرباعي أ ب ج د هو متوازي أضلاع لأنّ فيه كلّ زاويتين متقابلتين متطابقتان .

انتبه



تحقق من إثبات ما يلي :

(١) $\angle A \cong \angle B$

(٢) $\angle C \cong \angle D$

الحالة الرابعة (خاصية)

(مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلث = 180°)

(١)

معطى

(أ و ب زاويتان متحالفتان متكاملتان)

(مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = 360°)

$130^\circ = 360^\circ - 230^\circ$

و (ب) = و (أ د ج) = 130° (٢)

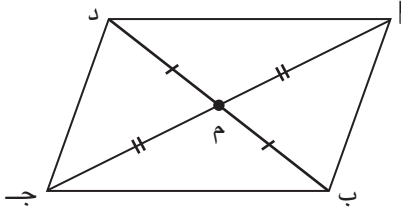
من (١) ، (٢) نستنتج أنّ الشكل الرباعي أ ب ج د هو متوازي أضلاع لأنّ فيه كلّ زاويتين متقابلتين متطابقتان .

عبر عن فهمك (٣)

بالرجوع إلى مثال (٤) ، هل يمكنك إيجاد قياس ($\angle د ج ب$) بطريقة أخرى ؟ وضح إجابتك .

سنتحقق معاً بأنّ الشكل الرباعي الذي فيه القطران ينصف كلّ منهما الآخر كحدّ أدنى من المعطيات تكفي لنقول إنّ الشكل الرباعي متوازي أضلاع .

استكشف (٤)



الشكل المقابل $م ب ج د$ شكل رباعي فيه :

$$\begin{aligned} \angle ج د ب \cap \angle د ب ج &= \{ م \} , \quad \angle م = م = \angle ج د ب \\ \angle د م ب &= \angle م ج د \end{aligned}$$

من خلال معلوماتك عن مفهوم الانعكاس في نقطة

إذا كانت م مركز الانعكاس ، أكمل ما يلي :

صورة $م$ بالانعكاس في م هي

صورة $ب$ بالانعكاس في م هي

صورة $م ب$ بالانعكاس في م هي

تذكر



إذا كانت $م ب$ صورة $م ب$ بالانعكاس في نقطة فإن :

١ $م ب \parallel م ب$

٢ $م ب = م ب$

(من خواص الانعكاس في نقطة)

(١)

$\therefore م ب \parallel م ب$

وبالمثل صورة $ب ج$ بالانعكاس في م هي

(من خواص الانعكاس في نقطة)

(٢)

$\therefore ب ج \parallel ب ج$

من (١) ، (٢) . نستنتج أنّ الشكل الرباعي $م ب ج د$ هو

الحالة الخامسة

يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كان فيه القطران ينصف كلّ منهما الآخر .

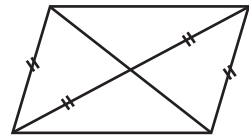
عبر عن فهمك (٤)

هل يمكنك إثبات الحالة الخامسة بطريقة أخرى . اشرح طريقته .

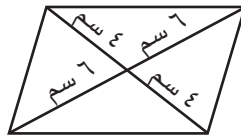


حدّد ما إذا كان الشكل الرباعي بحسب البيانات المدوّنة عليه متوازي أضلاع أم لا .

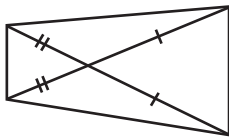
أ



ب



ج



مثال (٥) :

أ ب ج د متوازي أضلاع

تقاطع قطريه في م ، أخذت النقطتان

س ، ص $\exists$ م جـ بحيث $م س = جـ ص$

برهن أنّ س ب ص د متوازي أضلاع .

الحل :

المعطيات : أ ب ج د متوازي أضلاع

$$م س = جـ ص$$

المطلوب : إثبات أنّ س ب ص د متوازي أضلاع .

البرهان :

∴ أ ب ج د متوازي أضلاع

$$∴ م س = جـ د$$

$$م س = جـ د$$

$$∴ م س = جـ د$$

$$∴ م س - م جـ = جـ د - م جـ$$

$$∴ م س = م جـ$$

من (١) ، (٢) نستنتج أنّ س ب ص د متوازي أضلاع لأنّ القطرين ينصف كلّ منهما الآخر .

انتبه



تحقق من إثبات ما يلي :

$$(١) م س = جـ د$$

$$(٢) م س = م جـ$$

الحالة الخامسة (خاصية)

(معطى)

(١) { قطرا متوازي الأضلاع ينصف كلّ منهما الآخر)

(معطى)

(من خواص المساواة)

(٢)

ممّا سبق نجد أنّه : يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا توفّر أحد الشروط التالية :

	١ كلّ ضلعين متقابلين متوازيان (من التعريف) .
	٢ كلّ ضلعين متقابلين متطابقان .
	٣ فيه ضلعان متقابلان متطابقان ومتوازيان .
	٤ كلّ زاويتين متقابلتين متطابقتان .
	٥ القطران ينصف كل منهما الآخر .

دورك الآن (٨)

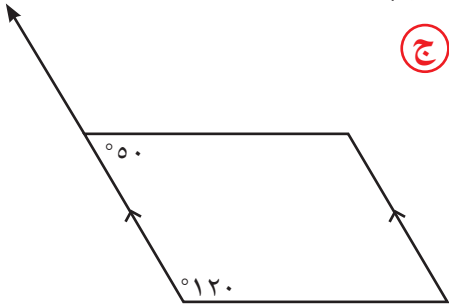
ضع علامة (✓) أسفل الشكل الذي يمثل متوازي أضلاع مع ذكر السبب لكل ممّا يلي :

ج ☐	ب ☐	أ ☐
و ☐	هـ ☐	د ☐

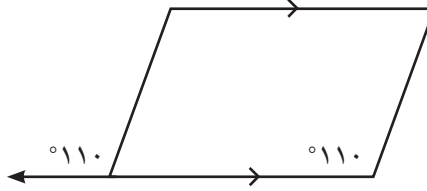


١ أمامك أشكال رباعية ، حدّد أيّا منها يمثل متوازي أضلاع مع ذكر السبب :

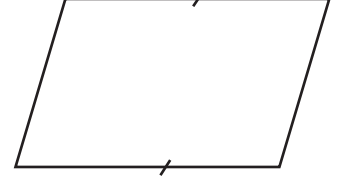
ج



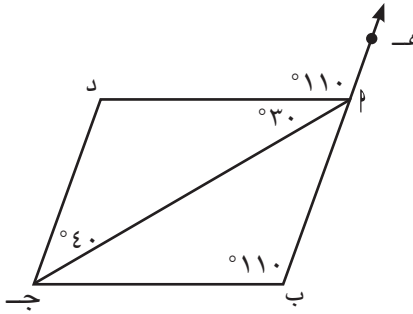
ب



أ

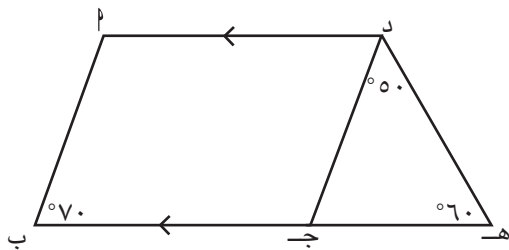


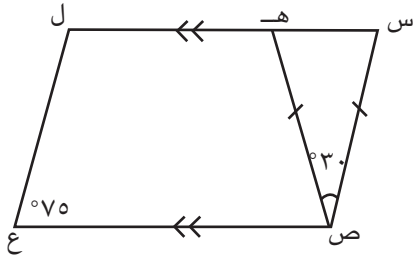
٢ من البيانات على الشكل المقابل ، أثبت أنّ $AB \parallel CD$ متوازي أضلاع .



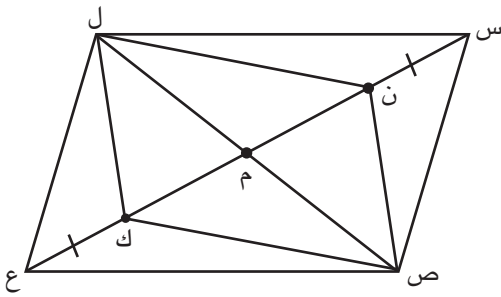
٣ من البيانات على الشكل المقابل ،

أثبت أنّ $AB \parallel CD$ متوازي أضلاع .





٤ في الشكل المقابل س ل // ص ع ، ص س = ص هـ ،
 $\angle ع = 75^\circ$ ، $\angle ص = 30^\circ$ ،
 برهن أن الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع .



٥ إذا كان ن ص ك ل متوازي أضلاع تقاطع قطريه في م ،
 س ن = ع ك ،
 فأثبت أن الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع .

$$v = (n \wedge m) \wedge v, \quad m = n \vee v$$

أثبت أن ل ع م ن متوازي أضلاع .



❶ في الشكل المقابل ، قيمة س ، ص على الترتيب التي تجعل الشكل الرباعي متوازي أضلاع هي :



- ΣΥ

الكشف عن المستطيل

Detecting a Rectangle

سوف تتعلّم : الكشف عن المستطيل .

العبارات والمفردات :

Rectangle

المستطيل

استكشف



تذكّر



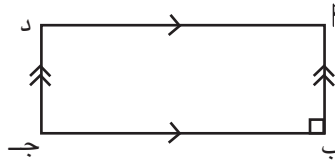
المستطيل هو شكل رباعي
زواياه الأربع قوائم .

تذكّر



خواصّ متوازي الأضلاع :

- ١ كلّ ضلعين متقابلين متطابقان .
- ٢ كلّ زاويتين متقابلتين متطابقتان .
- ٣ كلّ زاويتين متتاليتين متكاملتان .
- ٤ القطران ينصف كلّ منهما الآخر .



أولاً : في الشكل المرسوم :

ا ب ج د متوازي أضلاع ، $\angle ب = 90^\circ$
أكمل ما يلي :

- $\angle د = 90^\circ$ (كلّ زاويتين متقابلتين متطابقتان)
 $\angle ا = 90^\circ$ (.....)
 $\angle ج = 90^\circ$ (.....)

ماذا تلاحظ ؟

الشكل ا ب ج د هو

∴ المستطيل هو متوازي أضلاع إحدى زواياه

ثانياً : في الشكل المرسوم :

س ص ع ل متوازي أضلاع ، س ع = ص ل ،
أكمل ما يلي :

Δ س ص ع ، Δ ل ع ص فيهما :

(١) س ص = (كلّ ضلعين متقابلين متطابقان)

(٢) س ع = (معطى)

(٣) (ضلع مشترك)

∴ Δ س ص ع $\cong$ Δ ل ع ص بحالة وينتج من التطابق أنّ : $\angle ص = \angle ع$

$$\therefore \angle \text{ص} + \angle \text{ع} = 180^\circ \quad (\text{كل زاويتين متتاليتين متكاملتان})$$

$$\therefore \angle \text{ص} = 180^\circ - \angle \text{ع} = \angle \text{ع} \quad \dots\dots\dots$$

$\therefore$ الشكل س ص ع ل هو

إذا المستطيل هو متوازي أضلاع قطراه

يكون متوازي الأضلاع مستطيلاً إذا توفّر فيه أحد الشروط التالية :

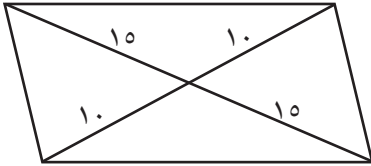
١ إحدى زواياه قائمة

٢ قطراه متطابقان

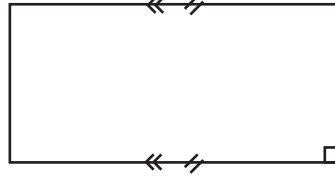
دورك الآن (١)



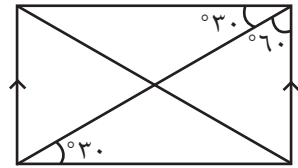
استخدم المعطيات التي على الأشكال التالية لتبين أيّاً منها تمثّل مستطيلاً مع ذكر السبب .



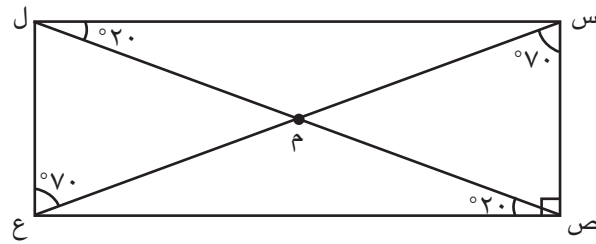
(ج)



(ب)



(أ)



مثال (١):

في الشكل المقابل ، ومن البيانات الموضّحة على الرسم ، أثبت أن س ص ع ل مستطيل .

الحل :

المعطيات :

$$\angle \text{س} = 70^\circ = \angle \text{ل} \quad \angle \text{ع} = 20^\circ = \angle \text{ص} \quad \angle \text{س} = 70^\circ = \angle \text{ل} \quad \angle \text{ع} = 20^\circ = \angle \text{ص}$$

المطلوب : إثبات أن س ص ع ل مستطيل

البرهان :

$$\therefore \angle \text{س} = \angle \text{ل} = 70^\circ \quad \angle \text{ع} = \angle \text{ص} = 20^\circ$$

$$\therefore \text{س} \parallel \text{ل} \quad \text{ص} \parallel \text{ع}$$

$$\therefore \angle \text{س} = \angle \text{ل} = 70^\circ \quad \angle \text{ع} = \angle \text{ص} = 20^\circ$$

$$\therefore \text{س} \parallel \text{ل} \quad \text{ص} \parallel \text{ع}$$

من (١) ، نستنتج أن س ص ع ل متوازي أضلاع لأنّ فيه كلّ ضلعين متقابلين متوازيان

معطى

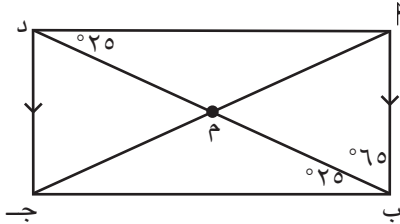
$$\therefore \angle \text{س} = \angle \text{ل} = 70^\circ \quad \angle \text{ع} = \angle \text{ص} = 20^\circ$$

$\therefore$ الشكل س ص ع ل مستطيل لأنّه متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة .



في مثال (١) السابق ، هل يمكن إثبات أنَّ الشكل س ص ع ل مستطيل من خلال إثبات تطابق القطرين ؟ وضح ذلك .

دورك الآن (٢)



أ ب ج د شكل رباعي فيه $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ و $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

$$\angle ADE = 25^\circ = \angle CDE$$

$$\angle ADE = 65^\circ = \angle CDE$$

أثبت أنَّ الشكل الرباعي أ ب ج د مستطيل .

البرهان :

في الشكل الرباعي أ ب ج د

أ ب ج د $\parallel$ (معطى) (١)

$\angle ADE = \angle CDE = (\dots)$ وهما في وضع

أ ب ج د $\parallel$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أنَّ الشكل أ ب ج د (٣)

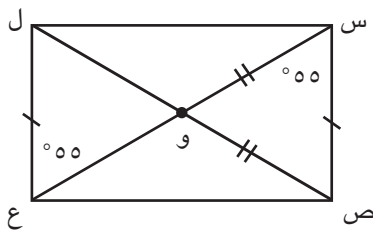
لأنَّ فيه كلَّ (٤)

$$\angle ADE = 25^\circ + \angle CDE = (\dots) + \angle CDE = \dots$$

من (٣) ، (٤) نستنتج أنَّ الشكل أ ب ج د

مستطيل لأنَّه إحدى زواياه

مثال (٢) :



س ص ع ل شكل رباعي تقاطع قطريه في النقطة و

$$SE = LE$$

$$SE = SE$$

$$\angle ADE = 55^\circ = \angle CDE$$

أثبت أنَّ س ص ع ل مستطيل .

الحل :

المعطيات : س ص ع ل شكل رباعي حيث و نقطة تقاطع قطريه

$$\begin{aligned} \text{س ص} &= \text{ل ع} , \text{س و} = \text{ص و} \\ \text{و} &= (\text{ص س و}) = (\text{ل ع و}) = ٥٥^\circ \end{aligned}$$

المطلوب : إثبات أن الشكل الرباعي س ص ع ل مستطيل

البرهان : ∴ س ص ≅ ل ع (معطى) (١)

$$\text{و} = (\text{ص س و}) = (\text{ل ع و}) = ٥٥^\circ \text{ (وهما في وضع تبادل)}$$

∴ س ص // ل ع (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أن :

الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع لأن فيه ضلعين متقابلين متطابقان ومتوازيان (٣)

∴ ص و = ل و ، س و = ع و

$$\text{∴ س و} = \text{ص و}$$

$$\text{∴ س ع} = \text{ل ع}$$

من (٣) ، (٤) نستنتج أن :

س ص ع ل مستطيل لأنه متوازي أضلاع قطراه متطابقان

دورك الآن (٣)



في الشكل المقابل ، دائرة مركزها م

أثبت أن الشكل س ص ع ل مستطيل .

المعطيات : دائرة مركزها م

المطلوب : إثبات أن س ص ع ل مستطيل

البرهان : ∴ م

$$\text{∴ س م} = \text{.....} \text{ (.....)}$$

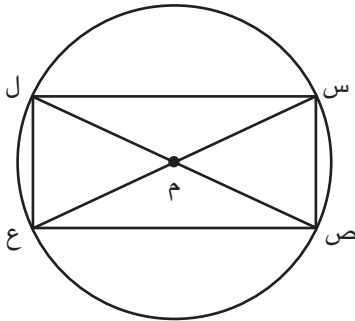
$$\text{ص م} = \text{.....} \text{ (.....)}$$

∴ القطران ينصف كل منهما الآخر

∴ الشكل س ص ع ل لأن فيه

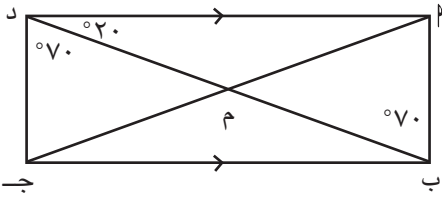
$$\text{∴ س ع} = \text{.....} \text{ (أقطار الدائرة متطابقة)}$$

∴ س ص ع ل لأنه متوازي أضلاع فيه متطابقان





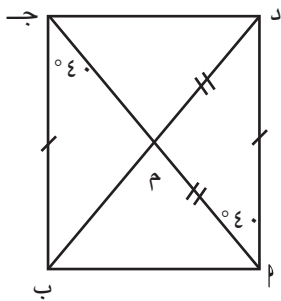
- ١) ب ج د شكل رباعي فيه $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ، $\angle A = 20^\circ$ ، $\angle B = 70^\circ$ ، $\angle C = 70^\circ$ ، $\angle D = 20^\circ$ ، أثبت أن الشكل الرباعي ب ج د مستطيل .



.....

.....

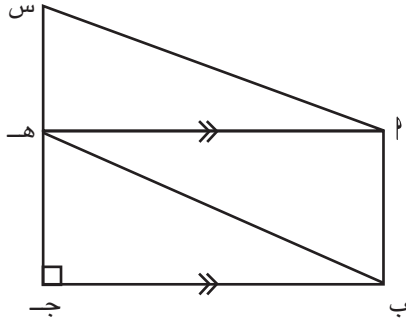
.....



- ٢) ب ج د شكل رباعي يتقاطع قطراه في م ، $\angle A = 40^\circ$ ، $\angle B = 40^\circ$ ، $\angle C = 40^\circ$ ، $\angle D = 40^\circ$ ، $AM = DM$ ، $BM = CM$ ، أثبت أن الشكل ب ج د مستطيل ، ثم أوجد $\angle M$.

.....

.....

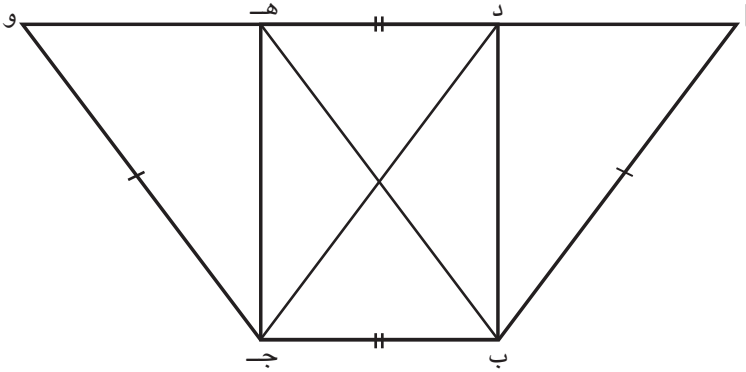


٣ **أ** هـ س متوازي أضلاع ، $\angle ج = 90^\circ$ ،
ب هـ // **ب ج** ، س ، هـ ، ج على استقامة واحدة
 أثبت أن **أ ب ج هـ** مستطيل .

مهارات تفكير عليا :



٤ في الشكل المقابل ، **أ ب ج د** ، هـ **ب ج و** متوازي أضلاع . د ، هـ ينتميان إلى **أ و** ، **أ ب = و ج** ،
ب ج = د هـ
 أثبت أن الشكل **د ب ج هـ** مستطيل .



Detecting a Rhombus

سوف تتعلم : الكشف عن المعين .

العبارات والمفردات :

Rhombus

المعين

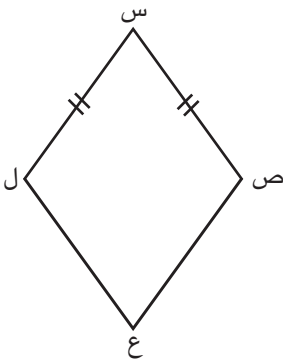
استكشف



تذكر



• **المعين** هو شكل رباعي أضلاعه الأربعة متطابقة .



أولاً : الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع فيه : $\overline{س ص} \cong \overline{س ل}$

أكمل ما يلي :

س ص $\cong$ (كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان)

س ل $\cong$ (كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع)

∴ $\overline{س ص} \cong \overline{س ل}$ (معطى)

∴ = = = (من خواص المساواة)

∴ الشكل س ص ع ل هو

إذا المعين هو متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان

ثانياً : الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع فيه : $\overline{س ع} \perp \overline{ص ل}$

أكمل ما يلي :

Δ س م ص ، Δ س م ل فيهما :

$\angle$ (س م ص) = $\angle$ (.....) = 90° (بالتجاور على خط مستقيم)

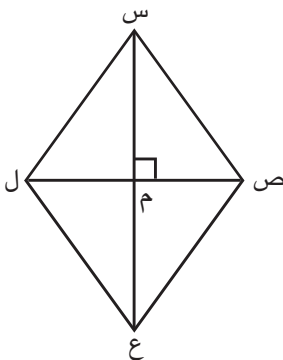
ص م = (قطرا متوازي الأضلاع ينصف كلا منهما الآخر)

..... (ضلع مشترك)

∴ Δ س م ص $\cong$ Δ س م ل (ض . ز . ض)

وينتج من التطابق أن :

س ص $\cong$



∴ س ص ع ل متوازي أضلاع

∴ س ص = ص ع = ع ل = ل س

∴ س ص ع ل هو

إذا المعين هو متوازي أضلاع قطراه متعامدان

مما سبق نلاحظ أن :

يكون متوازي الأضلاع معيّنًا إذا توفّر فيه أحد الشرطين التاليين :

١ إذا تطابق ضلعان متجاوران فيه .

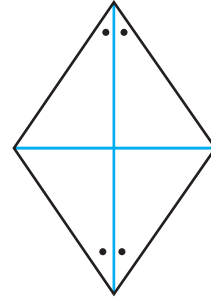
٢ إذا تعامد قطراه .

دورك الآن (١)

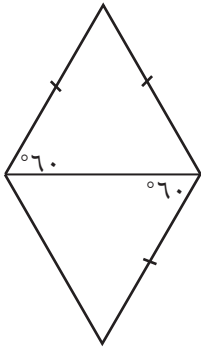


أيّ الأشكال التالية يمثل معيّنًا مع ذكر السبب ؟

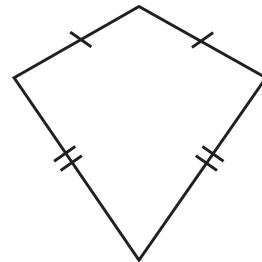
أ



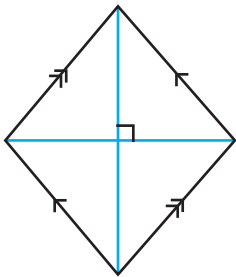
ب



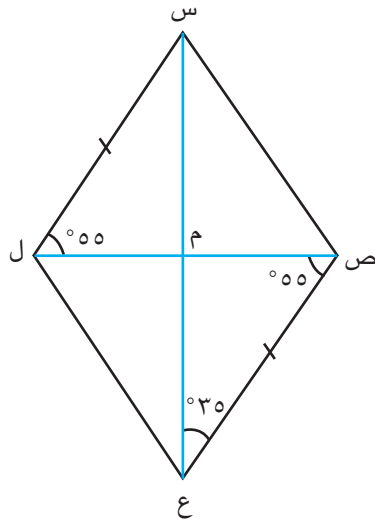
ج



د



مثال (١) :



في الشكل المقابل :

$$\angle ص = \angle س = \angle ع = \angle ل = 55^\circ$$

$$\angle ص = \angle ع = 35^\circ, \angle س = \angle ل$$

أثبت أن الشكل الرباعي س ص ع ل معين .

الحل :

المعطيات :

$$\angle س = \angle ع$$

$$\angle ص = \angle س = \angle ع = \angle ل = 55^\circ$$

$$\angle ص = \angle ع = 35^\circ$$

المطلوب : إثبات أن الشكل س ص ع ل معين .

البرهان :

$$\angle س = \angle ع$$

$$\angle ص = \angle س = \angle ع = \angle ل = 55^\circ \text{ (وهما في وضع تبادل)}$$

(٢)

$$\angle س = \angle ع$$

من (١) ، (٢) الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع لأن فيه ضلعين متقابلين متوازيان ومتطابقان .

في Δ ص م ع فيه :

$$\angle ص = \angle ع = 55^\circ \text{ (معطى)}, \angle م = 35^\circ \text{ (معطى)}$$

$$\angle م = \angle ع = 90^\circ = (55^\circ + 35^\circ) - 180^\circ \text{ (مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة يساوي } 180^\circ \text{)}$$

(٤)

$$\angle م = \angle ع = 90^\circ$$

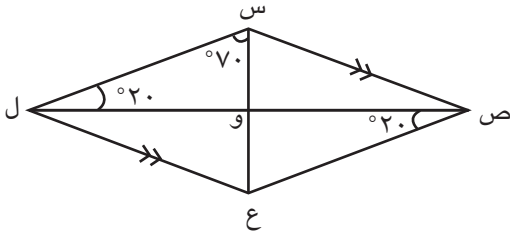
من (٣) ، (٤) : الشكل س ص ع ل معين لأنه متوازي أضلاع قطراه متعامدان .

تذكر



- الرمز $\perp$ هو رمز عمودي على .
- الرمز $\parallel$ هو رمز مواز لـ .
- مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة يساوي 180°

في الشكل المقابل ، ومن البيانات الموضّحة على الرسم ، أثبت أن $SS \perp EC$.



المعطيات :, '

.....: المطلوب

البرهان :

..... // س ص

(۱) (معطی)

(معطی)

$$(\dots\dots\dots) \mathfrak{U} = (\mathfrak{U} \text{ ل } \mathfrak{U})$$

وهما في وضع تبادل

(۶)

.....// س ل ∴

من (١) ، (٢) نستنتج أن :

س ص ع ل متوازي أضلاع لأنَّ..... (٣)

في Δ س و ل :

$$\hat{u}(\text{س و ل}) = (\dots\dots\dots + \dots\dots\dots) - 180^\circ = (\text{مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة يساوي } 180^\circ)$$

(القطران متعامدان) (٤)

..... ⊥ س ع ∴

من (٣)، (٤) .: الشكل س ص ع ل لأنّه متوازي أضلاع

عِبْرٌ عَنْ فَهْمِكَ

يقول شملان إِنَّ كُلَّ متوازي أضلاع هو معيّن . هل تتّفق معه ؟ فسّر إجابتك .

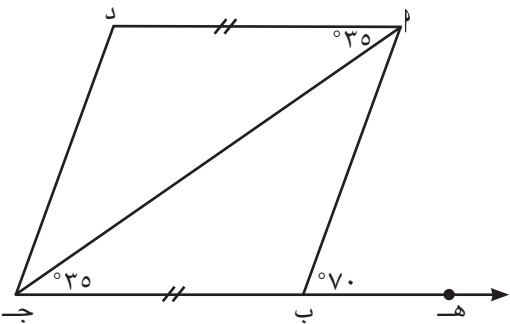
مثال (۲) :

في الشكل المقابل ا ب ج د شكل رباعي فيه :

$$١٤ = \text{ب ج} , \text{ج د} = (\text{ج ا}) \cup (\text{ب ج ا}) = ٣٥$$

۷۰ = (۲۱ هـ)

أثبت أن الشكل الرباعي $ABCD$ معين .



البرهان :

Δ هـ س ، Δ جـ هـ ص فيهما :

$$\left. \begin{array}{l} \text{(معطى)} \\ \text{(بالتقابل بالرأس)} \\ \text{(بالتبادل والتوازي)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{هـ} = \text{جـ هـ} \\ \text{ص} (\text{هـ} \text{ س}) = \text{ص} (\text{جـ هـ}) \\ \text{ص} (\text{س هـ}) = \text{ص} (\text{جـ هـ}) \end{array}$$

Δ هـ س $\cong$ Δ جـ هـ ص بحالة (ز . ض . ز)

وينتج من التطابق أنّ $\text{هـ} = \text{س} = \text{جـ}$ (١)

$\text{هـ} \parallel \text{جـ}$ (من تعريف متوازي الأضلاع)

$\text{س} \supset \text{هـ}$ ، $\text{ص} \supset \text{جـ}$ (معطى)

$\text{هـ} \parallel \text{ص}$ (٢)

من (١) ، (٢) $\text{هـ} \parallel \text{ص}$ جـ س متوازي أضلاع لأنّ فيه ضلعين متقابلين متوازيان ومتطابقان . (٣)

$\text{س} \perp \text{جـ}$ (٤) معطى

من (٣) ، (٤) $\text{هـ} \parallel \text{ص}$ جـ س معيّن لأنّه متوازي أضلاع قطراه متعامدان .

تمارين ذاتية :

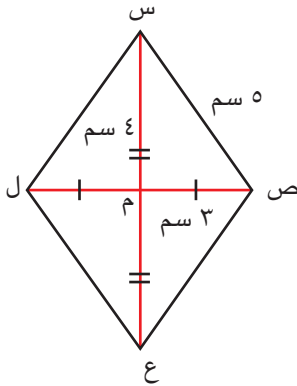


١ س ص ع ل شكل رباعي فيه م نقطة تقاطع القطرين ،

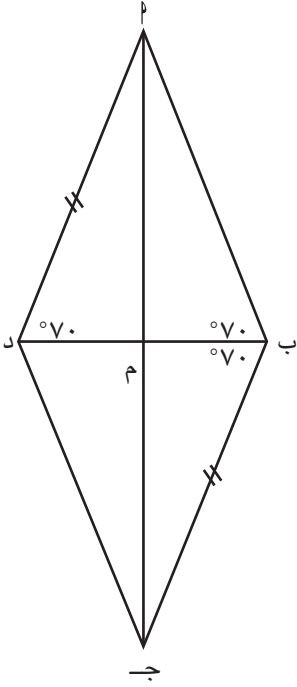
م ص = م ل ، م س = م ع ،

س ص = ٥ سم ، ص م = ٣ سم ، س م = ٤ سم

أثبت أنّ الشكل س ص ع ل معيّن



٢ في الشكل أمامك ، أثبت أن $\angle$ ب ج د معين .



.....

.....

.....

.....

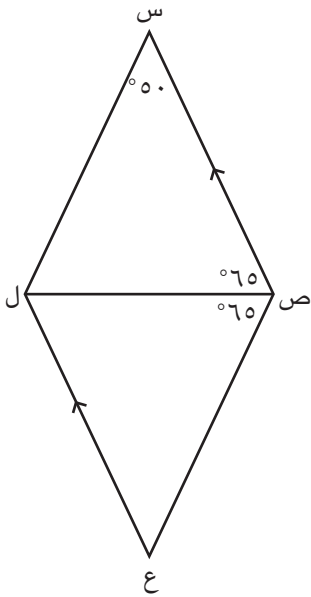
.....

.....

.....

.....

٣ س ص ع ل شكل رباعي فيه $\overline{س ص} \parallel \overline{ع ل}$ ، $\angle س = 50^\circ$ ، $\angle ص = 65^\circ$ ، $\angle ع = 65^\circ$ ، $\angle ل = 50^\circ$. أثبت أن الشكل س ص ع ل معين .



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

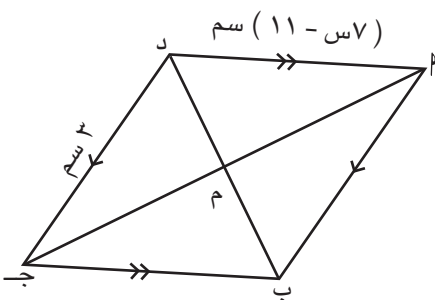
مهارات تفكير عليا :



اختر الإجابة الصحيحة .

٤ في الشكل المقابل . قيمة س التي تجعل متوازي الأضلاع $\angle$ ب ج د ، معيناً هي :

- ١٤ أ ٢ ب ١١ ج ٣ د



Detecting a Square

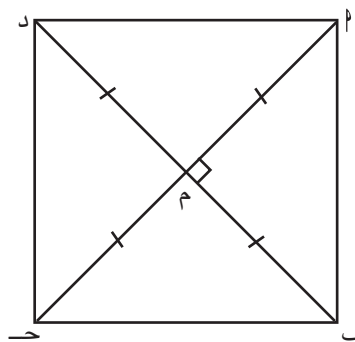
سوف تتعلّم : الكشف عن المربع .

العبارات والمفردات :

Square

المربع

اِسْتَكْشِفْ



في الشكل المقابل M ب ج د متوازي أضلاع ،
 $\overline{AM} \perp \overline{BD}$ ، $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} = \overline{DM}$
 أثبت أن M ب ج د مربع .

أولاً :

∴ M ب ج د متوازي أضلاع ، $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} = \overline{DM}$
 أكمل ما يلي :

$\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} = \overline{DM}$

∴ الشكل M ب ج د هو (١)

لأنه متوازي أضلاع قطراه

من تطابق $\triangle AMB$ ، $\triangle BMC$ ، $\triangle CMD$ ، $\triangle DMA$

ينتج أن :

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$

من (١) ، (٢) M ب ج د هو مربع

لأنه مستطيل فيه ضلعان متجاوران متطابقان .

تذكّر



• يكون متوازي الأضلاع معطى (قطراه متطابقان)
 مستطيلاً إذا توفّر أحد الشرطين .

١ تطابق قطراه .

٢ قياس إحدى زواياه

يساوي 90° .

• يكون متوازي الأضلاع معيّنًا إذا توفّر أحد الشرطين :
 (١) ضلعان متجاوران متطابقان (٢)
 (٢) ضلعان متجاوران متطابقان .

١ قطراه متعامدان .

٢ فيه ضلعان متجاوران متطابقان .

ثانيًا :

∴ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ متوازي أضلاع ، $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ ،

أكمل ما يلي :

$\overline{AC} \perp \overline{BD}$

∴ الشكل $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ هو

لأنه متوازي أضلاع قطراه

∴ $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ مثلث قائم الزاوية ومتطابق الضلعين

معطى (قطراه متعامدان)
(١)

معطى

من خواص المثلث المتطابق الضلعين = $\frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = \angle BAC = \angle BDC$

(قطر المعين ينصف زاويتي الرأس
الواصل بينهما)

∴ $\angle BAC = \angle BDC$ (م $\angle BAC$)

(قياس إحدى زواياه قائمة) (٢)

∴ $\angle BAC = \angle BDC$ (م $\angle BAC$)

من (١) ، (٢) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ هو مربع .

لأنه معين قياس إحدى زواياه 90°

تذكر



للمربع كل خواص المستطيل
وكل خواص المعين .

مما سبق نلاحظ أن :

يكون متوازي الأضلاع مربعًا إذا توفّر فيه أحد الشروط التالية :

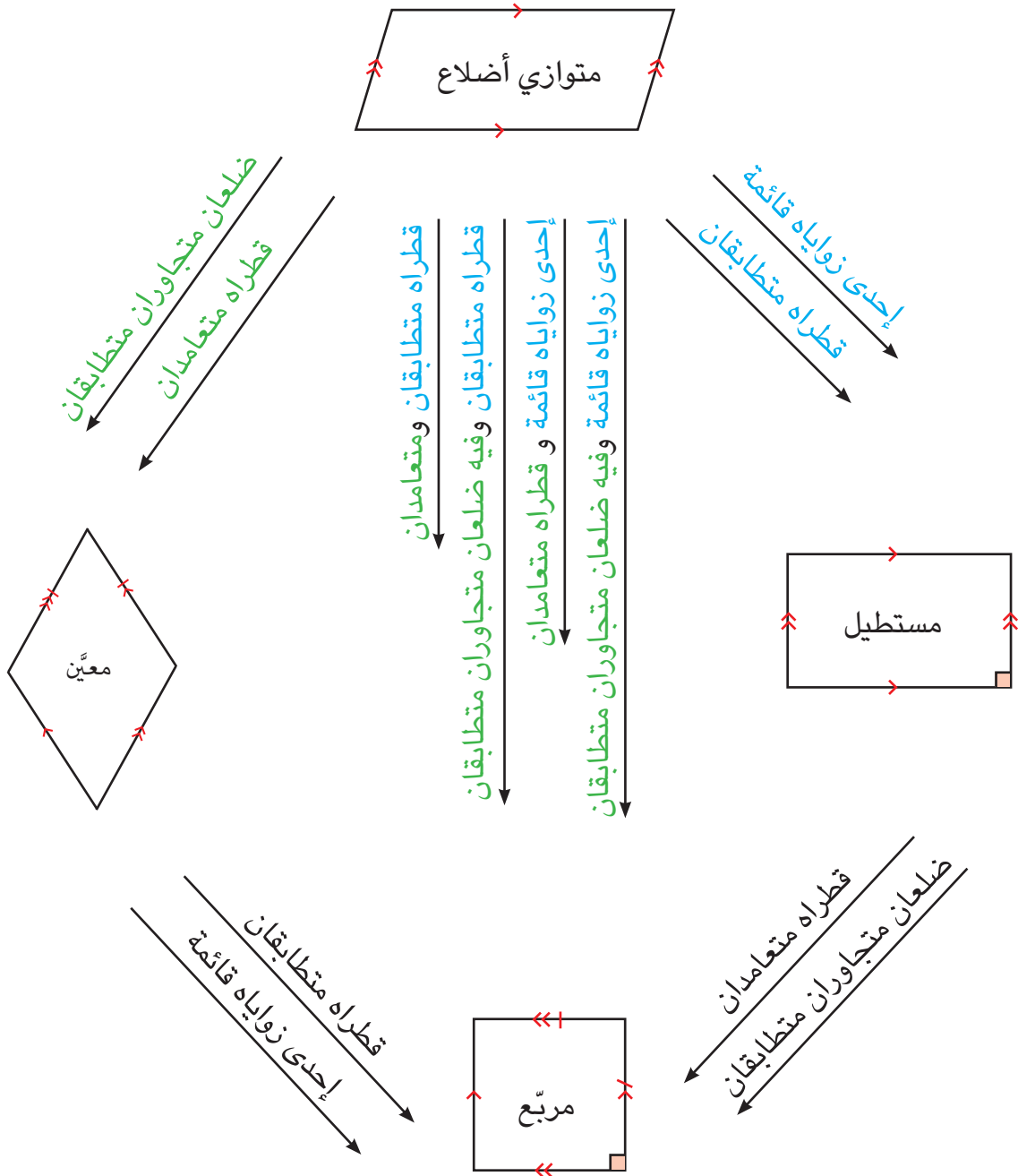
- القطران متطابقان ومتعامدان .
- القطران متطابقان وضلعان متجاوران متطابقان .
- إحدى زواياه قائمة وضلعان متجاوران متطابقان .
- إحدى زواياه قائمة والقطران متعامدان .

ملاحظة :



لإثبات أن الشكل الرباعي مربع ، يجب أن يكون :
متوازي أضلاع ويحقق أحد شرطي المستطيل وأحد شرطي المعين .

(اتَّبِعْ أَحَدَ الْأَسْهُمِ لِتَتَّصِلَ إِلَى الْمَطْلُوبِ)



مثال (١) :

س ص ع ل شكل رباعي فيه :

س ل = ص ع ، $\angle (ل س ع) = \angle (س ل ص) = \angle (س ع ص) = \angle (ص ع ل) = ٤٥^\circ$
 أثبت أن س ص ع ل مربع .

الحل :

المعطيات : س ص ع ل شكل رباعي ، س ل = ص ع

$$\angle (ل س ع) = \angle (س ل ص) = \angle (س ع ص) = \angle (ص ع ل) = ٤٥^\circ$$

المطلوب : إثبات أن الشكل الرباعي س ص ع ل مربع .

البرهان :

معطى (١)

$$س ل = ص ع$$

وهما في وضع تبادل

$$\therefore \angle (ل س ع) = \angle (س ل ص)$$

(٢)

$$\therefore س ل \parallel ص ع$$

من (١) ، (٢) نستنتج أن :

الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع لأن فيه ضلعين متقابلين متطابقان ومتوازيان (٣)

في $\Delta س م ل$:

$$\angle (س م ل) = ١٨٠^\circ - (\angle س م ل + \angle ل م س) = ١٨٠^\circ - (٤٥^\circ + ٤٥^\circ) = ٩٠^\circ$$

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

$$٩٠^\circ = ٩٠^\circ - ١٨٠^\circ =$$

$$\therefore س ع \perp ص ل$$

(٤)

القطران متعامدان

معطى

$$\therefore \angle (ل س م) = \angle (س ل م)$$

من خواص المثلث المتطابق الضلعين

$$\therefore س م = ل م$$

من خواص متوازي الأضلاع

$$\left\{ \begin{array}{l} س م = ل م \\ ل م = ص م \end{array} \right.$$

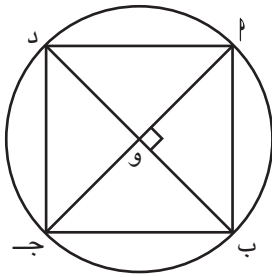
من خواص المساواة

$$\therefore س ع = ص ل$$

(٥)

القطران متطابقان

من (٣) ، (٤) ، (٥) س ص ع ل مربع لأنه متوازي أضلاع تعامد وتطابق قطراه .



في الشكل المقابل $\overline{AB}$ ، $\overline{BD}$ ، قطران في دائرة مركزها $و$ ،
 $\overline{AB} \perp \overline{BD}$.

أثبت أن $\overline{AB}$ $\perp$ $\overline{BD}$ مربع.

المعطيات: $و$ مركز الدائرة، $\overline{AB} \perp \overline{BD}$

المطلوب: إثبات أن $\overline{AB}$ $\perp$ $\overline{BD}$ مربع.

البرهان:

∴ $و$ مركز الدائرة

∴ $\overline{AB} = و$ ، $\overline{BD} = و$ أنصاف أقطار الدائرة الواحدة متطابقة

∴ $\overline{AB}$ $\perp$ $\overline{BD}$ متوازي أضلاع لأنه شكل رباعي فيه القطران ينصف كل منهما الآخر (١)

∴ $\overline{AB} \cong \overline{BD}$ أقطار الدائرة الواحدة متطابقة (٢)

∴ $\overline{AB} \perp \overline{BD}$ (معطى)

∴ القطران متعامدان (٣)

∴ من (١)، (٢)، (٣) ∴ $\overline{AB}$ $\perp$ $\overline{BD}$ متوازي أضلاع تطابق وتعامد قطراه.

عبر عن فهمك



سأل معلم الرياضيات المتعلمين في الفصل عن تعريف المربع، وكانت إجابة كل من يوسف وعلي كالآتي:



المربع هو معين
 قطراه متطابقان.

علي

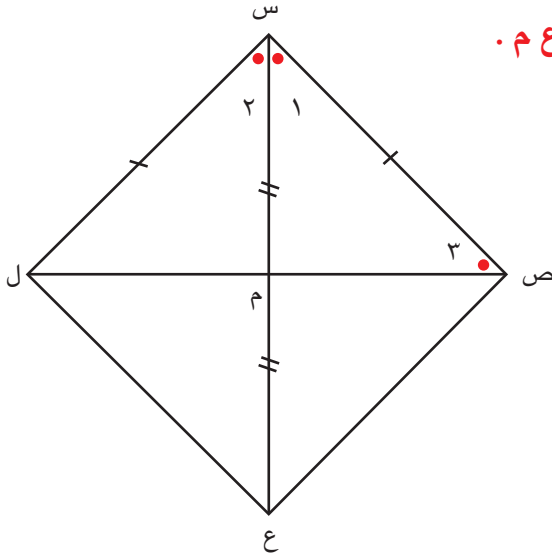


المربع هو متوازي
 أضلاع قطراه متعامدان
 ومتطابقان.

يوسف

في رأيك، هل إجابة كل منهما صحيحة؟ فسّر ذلك.

مثال (٢) :



س ص ع ل شكل رباعي فيه : س ص = س ل ، س م = ع م .

$$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$$

أثبت أن س ص ع ل مربع .

الحل :

المعطيات : س ص ع ل شكل رباعي

$$س ص = س ل ، س م = ع م$$

$$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$$

المطلوب : إثبات أن س ص ع ل مربع .

البرهان : المثلثان س م ص ، س م ل فيهما :

(ضلع مشترك)

(معطى)

(معطى)

$$\left. \begin{array}{l} س م \\ س ص \cong س ل \\ \angle 1 = \angle 2 \end{array} \right\}$$

∴ ∆ س م ص ، ∆ س م ل متطابقان (ض . ز . ض) ومن التطابق ينتج أن :

(١)

$$س م = ص م$$

(٢) (معطى)

$$س م = ع م$$

من (١) ، (٢) ∴ الشكل س ص ع ل متوازي الأضلاع لأن القطرين ينصف كل منهما الآخر (٣)

(معطى)

$$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$$

(من خواص المثلث المتطابق الضلعين)

$$س م = ص م$$

(من خواص المساواة)

$$س ل = ص ع$$

(٤)

∴ القطران متطابقان

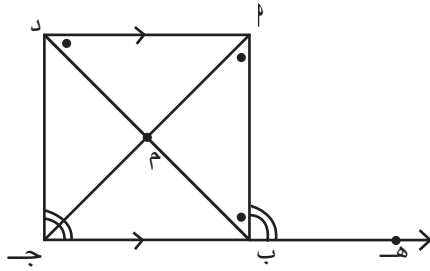
(٥) (معطى)

$$س ص = س ل$$

∴ فيه ضلعان متجاوران متطابقان .

من (٣) ، (٤) ، (٥) ∴ الشكل س ص ع ل مربع لأنه متوازي أضلاع قطراه متطابقان وفيه ضلعان

متجاوران متطابقان .



أ ب ج د شكل رباعي فيه :

$$\overline{AD} \parallel \overline{BC}, \angle A = \angle B, \angle C = \angle D, \angle A = \angle C$$

$$\angle A = \angle B, \angle C = \angle D$$

أثبت أن أ ب ج د مربع

المعطيات :

المطلوب :

البرهان :

(معطى) (١)

$$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$$

(معطى) وهما في وضع

$$\angle A = \angle B$$

(٢)

$$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$$

من (١)، (٢) نستنتج أن أ ب ج د لأن فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان (٣)

في $\triangle ABC$:

(معطى)

$$\angle A = \angle B$$

(من خواص المثلث المتطابق الضلعين)

$$\angle A = \angle B$$

(من خواص متوازي الأضلاع القطران ينصف كل منهما الآخر)

$$\left\{ \begin{array}{l} \angle A = \angle B \\ \angle C = \angle D \end{array} \right.$$

(من خواص المساواة)

$$\angle A = \angle B$$

(٤)

القطران متطابقان

في $\triangle ABC$:

(معطى)

$$\angle A = \angle B$$

(من خواص المثلث المتطابق الضلعين)

$$\angle A = \angle B$$

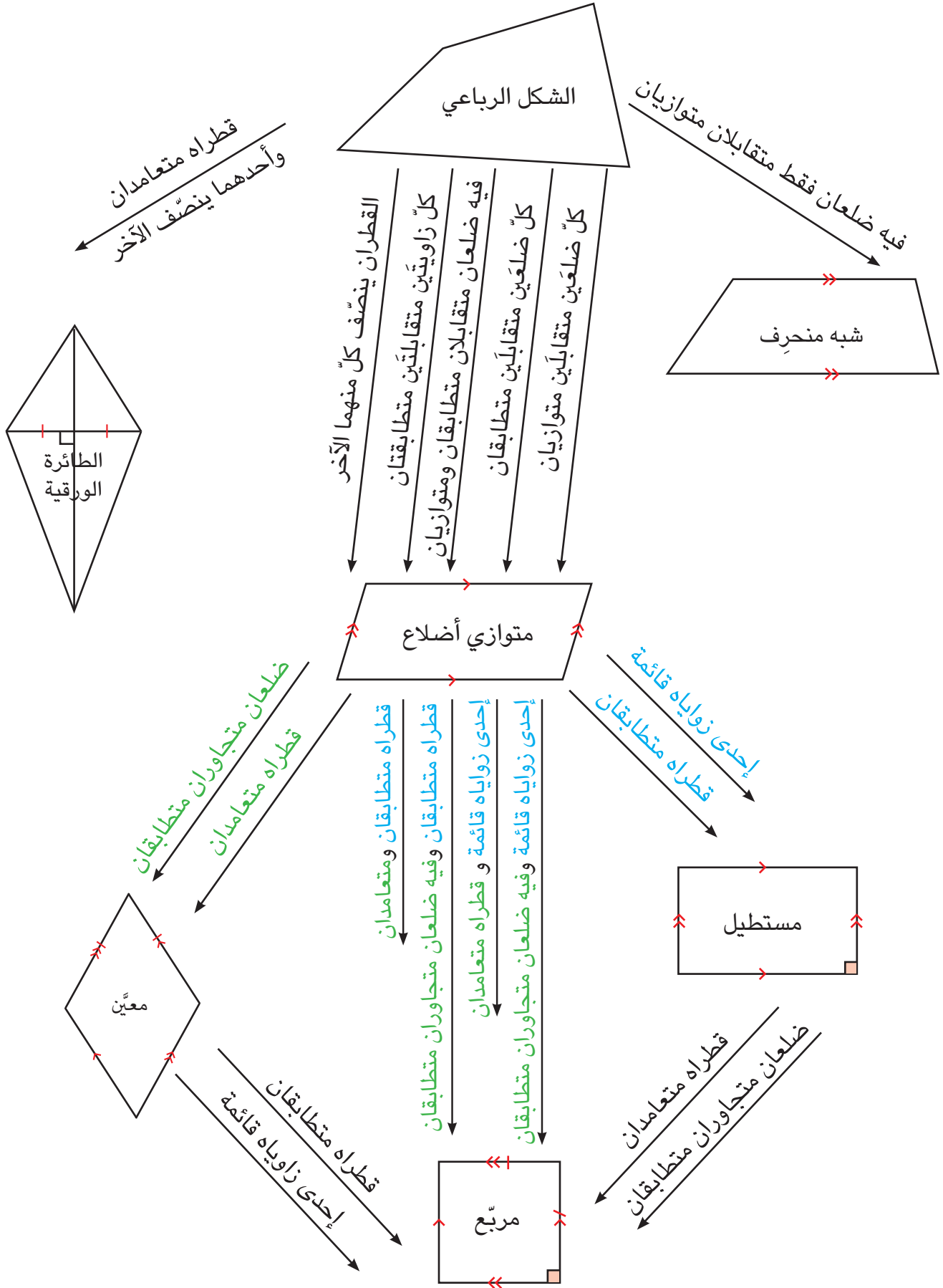
(٥)

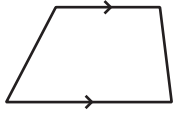
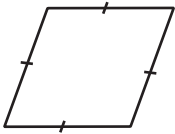
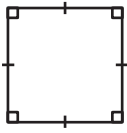
فيه ضلعان متجاوران متطابقان

من (٣)، (٤)، (٥) نستنتج أن أ ب ج د لأن قطريه

وفيه ضلعان متجاوران

ربط الأفكار (اتَّبِعْ أحد الأسهم للوصول إلى المطلوب)

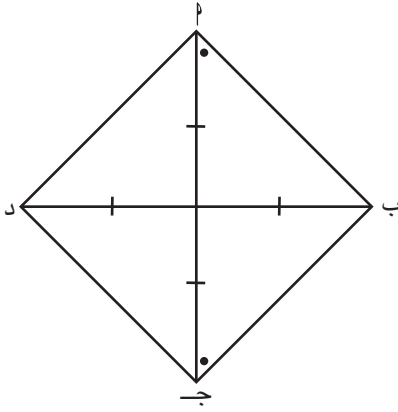


إسم الشكل	رسم الشكل	تعريف الشكل	خواصّ الشكل
شبه المنحرف		هو شكل رباعي فيه ضلعان فقط متقابلان متوازيان .	- زوج واحد فقط من الأضلاع المتقابلة متوازي .
متوازي الأضلاع		هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان .	- الأضلاع المتقابلة متطابقة . - يتقاطع القطران في منتصفهما . - نقطة تقاطع قطريه هي مركز تناظر له . - كلّ زاويتين متقابلتين متطابقتان . - كلّ زاويتين متتاليتين متكاملتان .
المعيّن		هو متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان .	- أضلاعه الأربعة متطابقة . - القطران متعامدان وينصف كلّ منهما الآخر . - كلّ قطر ينصف زاويتي الرأس الواصل بينهما .
المستطيل		هو متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة .	- زواياه الأربع قائمة . - قطراه متطابقان .
المربّع		- هو متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان وإحدى زواياه قائمة . - هو معيّن إحدى زواياه قائمة . - هو مستطيل فيه ضلعان متجاوران متطابقان .	- قطراه متطابقان ومتعامدان ويتقاطعان في منتصفهما . - زواياه الأربع قائمة وأضلاعه متطابقة . - قطر المربّع يصنع مع كلّ ضلع من أضلاعه زاوية قياسها 45° .

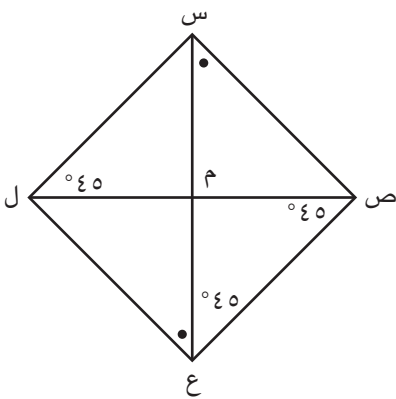
تمارين ذاتية :

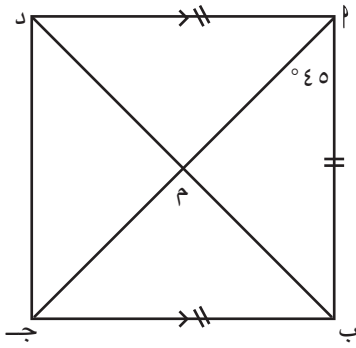


١ ب ج د مستطيل فيه $\angle \text{ب} = \angle \text{ج} = \angle \text{د} = \angle \text{ا} = 90^\circ$ ، أثبت أن الشكل ب ج د مربع .



٢ باستخدام المعطيات في الرسم ، أثبت أن الشكل س ص ع ل مربع .





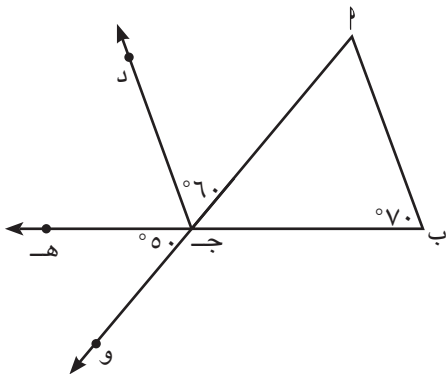
٣ مستعيناً بالمعطيات على الرسم ، أثبت أن الشكل $ABCD$ مربع .

[illegible][illegible]

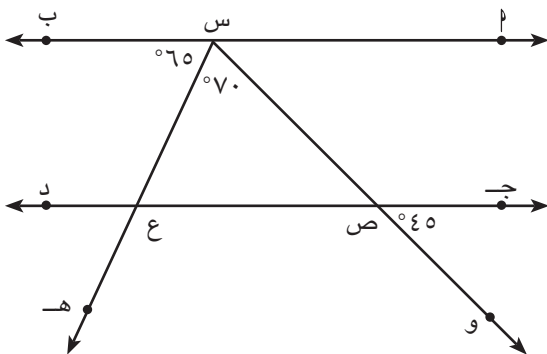
تقويم الوحدة التعليمية الخامسة Unit Five Assessment

أولاً: البنود المقالية

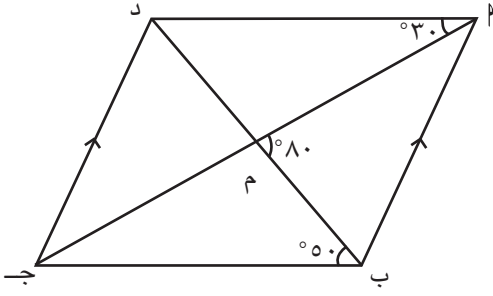
١ في الشكل المقابل ، أثبت أن $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.



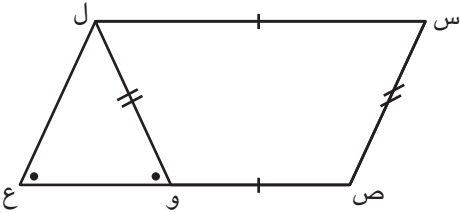
٢ في الشكل المقابل وحسب البيانات المدونة ،
أثبت أن $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.



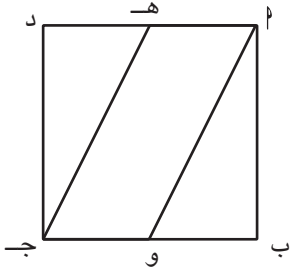
٣ في الشكل المقابل: $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{M\}$ ،
أثبت أن $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ متوازي أضلاع.



٤ أثبت أن الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع.



٥ ا ب ج د مربع، هـ منتصف ا د ، و منتصف ب جـ
أثبت أن ا و جـ هـ متوازي أضلاع.



.....

.....

.....

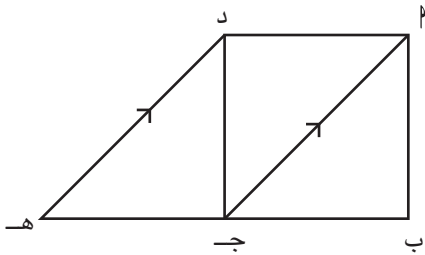
.....

.....

.....

.....

٦ في الشكل المقابل : ا ب ج د مربع ،
هـ ÷ ب جـ ، ا جـ // د هـ
أثبت أن ا جـ هـ د متوازي أضلاع



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ب أوجد ن (هـ)

.....

.....

.....

.....

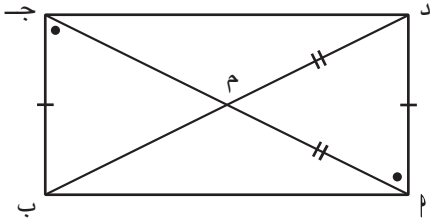
.....

.....

.....

.....

٧ في الشكل المقابل ، أثبت أن الشكل $ABCD$ مستطيل .

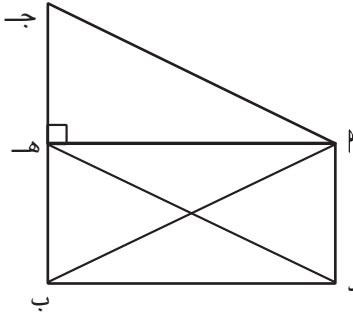


.....

.....

.....

٨ في الشكل $ABCD$ مثلث متطابق الضلعين ، فيه $AB = AC$ ،
 AD متوازي أضلاع ، $AD \perp BC$.
 أثبت أن الشكل $ABCD$ مستطيل .

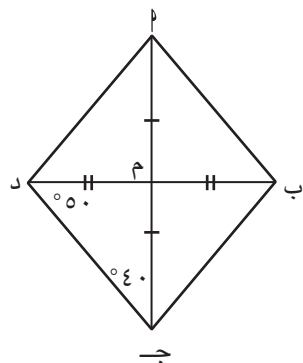


.....

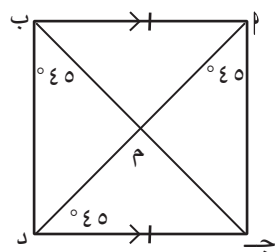
.....

.....

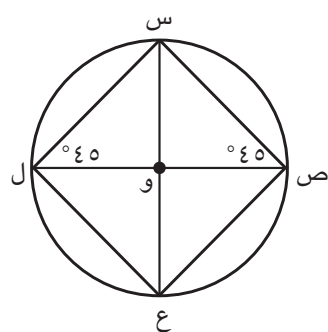
٩ في الشكل المقابل، أثبت أن الشكل $ABCD$ معين.



١٠ في الشكل المقابل، أثبت أن الشكل $ABDC$ مربع.



١١ في الشكل المقابل : و مركز الدائرة ،
أثبت أن الشكل س ص ع ل مربع .



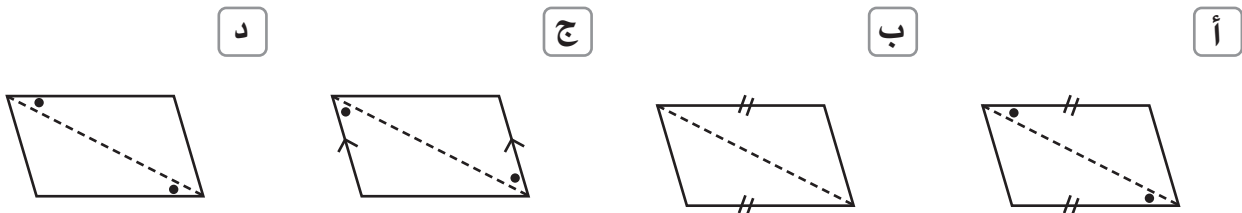
ثانيًا: البنود الموضوعية

في البنود (١ - ٥) ظلّل أ إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلّل ب إذا كانت العبارة غير صحيحة .

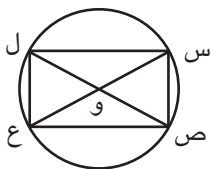
ب	أ	١ الشكل الرباعي المرسوم يمثل متوازي أضلاع .
ب	أ	٢ المستطيل هو متوازي أضلاع قطراه متطابقان .
ب	أ	٣ الشكل المقابل يمثل مربعًا .
ب	أ	٤ من الشكل المرسوم س ص // ع هـ
ب	أ	٥ من الشكل المقابل وحسب البيانات المدوّنة . فإنّ ب // جـ د

في البنود (٦ - ١٤) لكل بند أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلّل الإجابة الصحيحة .

٦ الشكل الذي يمثل متوازي أضلاع فيما يلي هو :



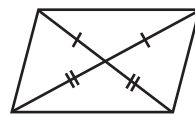
٧ الشكل المقابل يمثل دائرة مركزها و ، فإنّ الشكل س ص ع ل هو :



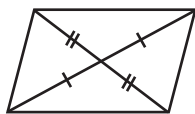
أ مربع ب مستطيل ج معيّن د شبه منحرف

٨ الشكل الذي يمثّل متوازي أضلاع فيما يلي هو :

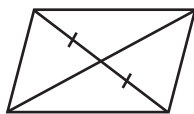
أ



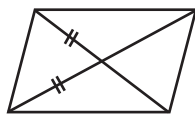
ب



ج



د



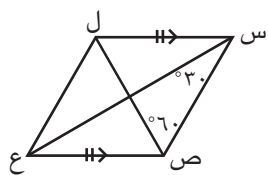
٩ في الشكل المقابل س ص ع ل يمثّل

أ شبه منحرف

ب مربعًا

ج مستطيلًا

د معينًا



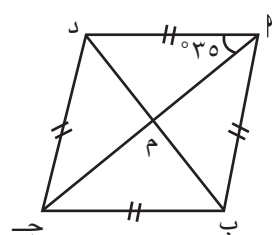
١٠ في الشكل المقابل ن (ج ب د) =

أ ٣٥°

ب ٥٥°

ج ٤٥°

د ٦٥°



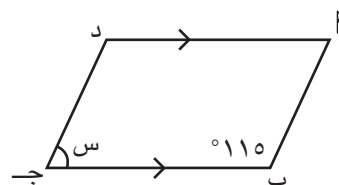
١١ في الشكل المقابل قيمة س التي تجعل الشكل ب ج د متوازي أضلاع هي :

أ ١١٥°

ب ٥٥°

ج ٧٥°

د ٦٥°



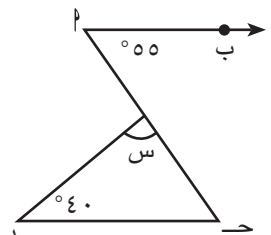
١٢ في الشكل المقابل قيمة س التي تجعل ب ج د // د ج تساوي :

أ ٥٥°

ب ٤٠°

ج ٨٥°

د ٩٥°



١٣ ب ج د متوازي أضلاع فيه ن (ب) = ن (د) فإن الشكل ب ج د يكون :

أ مستطيلًا

ب مربعًا

ج معينًا

د شبه منحرف

١٤ في الشكل المقابل ب ج د متوازي أضلاع حيث

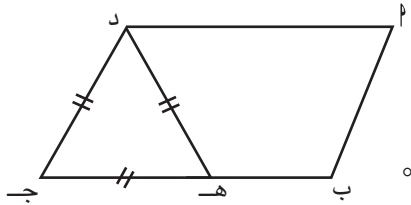
د ج = ج ه = د ه ، فإن ن (ب) يساوي :

أ ١٠٠°

ب ٦٠°

ج ١٢٠°

د ١٣٠°



الوحدة التعليمية السادسة



المقادير الجبرية

الرياضيات تشيّد الأبراج

برج الحمراء هو أطول ناطحة سحاب في دولة الكويت وواحد من أطول الأبراج في العالم .

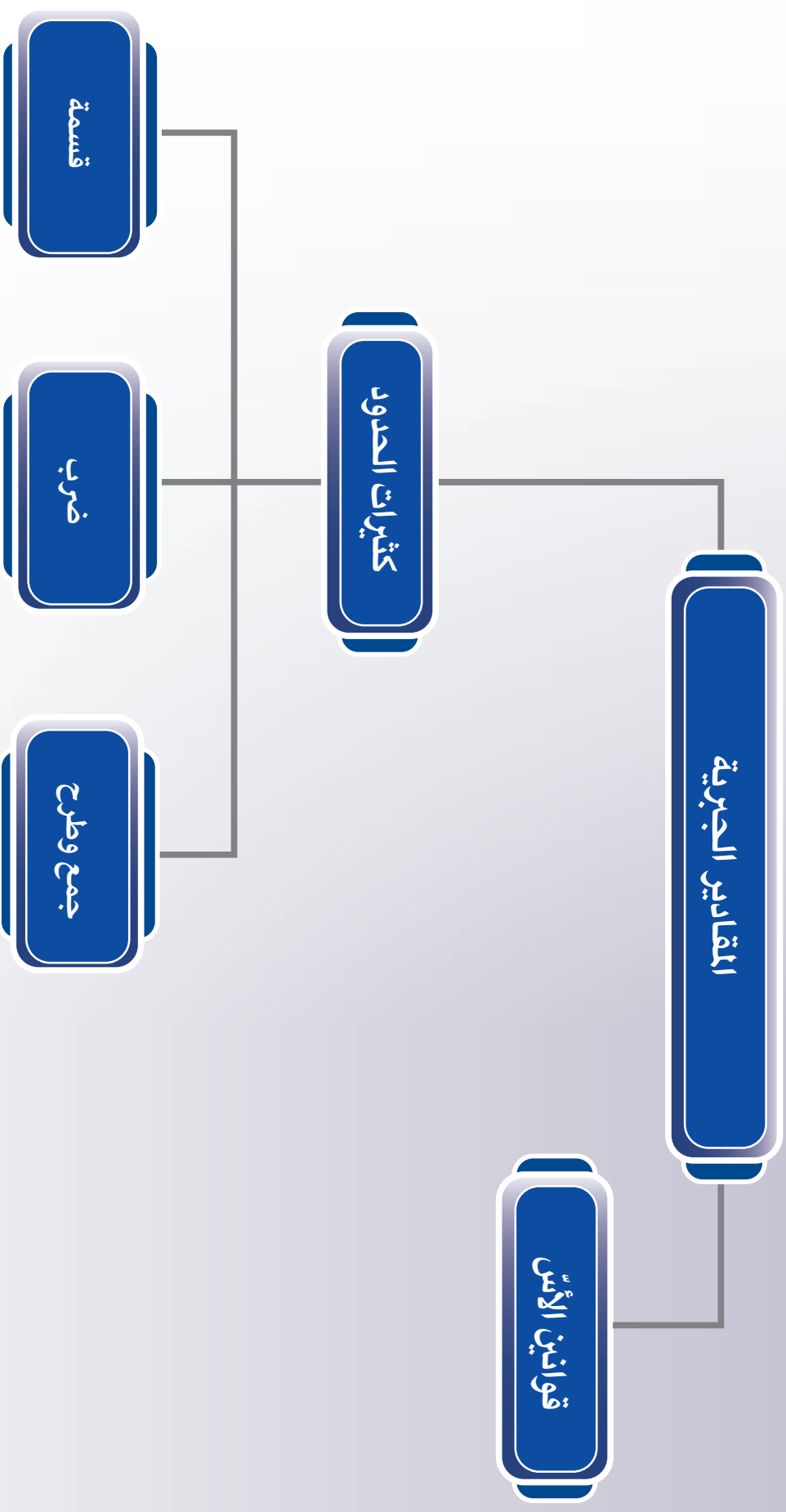
يبلغ ارتفاعه حوالي ٤١٢ مترًا ويضم ٨٦ طابقًا، ممّا يجعله أطول برج مبني بالكامل من الخرسانة في العالم (من دون هيكل فولاذي رئيسي) .

وما يميّزه أنّه يدور تدريجيًا وهو يرتفع إلى الأعلى ، فيبدو وكأنّه وشاح حجري يلتفّ حول المبنى - وهذا الشكل الرائع تمّ تصميمه باستخدام معادلات هندسية دقيقة تعتمد على كثرات الحدود والمنحنيات الرياضية ، لتوازن بين الجمال الفنّي والاستقرار الإنشائي .

كما أنّ تصميم البرج يساعد على تقليل تأثير حرارة الشمس ، إذ تغطّي الجدران المنحنية الواجهات الأكثر تعرّضًا لأشعّة الشمس ، ممّا يقلّل من استهلاك الطاقة .

المجال	معايير المنهج	مؤشر الأداء
العدّ والجبر	تمثيل الأعداد واستخدامها ضمن أشكال متكافئة متنوعة وإدراك أنّ مختلف أشكال الأعداد تتلاءم مع حالات مختلفة .	التعرّف - الفهم - الاستكشاف والنقّصي - التذكّر - الاستنتاج - حلّ المشكلات - القوانين - القراءة - الكتابة - التصنيف - التقويم - العمل الجماعي - الوسائط -
	إختيار العمليات المناسبة واستخدامها لحلّ المسائل وتعليل الخيارات .	التحويل - النمذجة - التحليل والترتيب - معالجة بيانات - التعدّد - التّمييز
	فهم الأنماط والعلاقات والدوالّ .	
	إستخدام إستراتيجيات متنوعة لوصف وتحليل العلاقات والتغيّرات .	
	إستخدام المعادلات والنماذج الرياضية لحلّ المسائل .	
	إستخدام التمثيلات البيانية والجداول والتمثيلات الجبرية للقيام بالتوقّعات ولحلّ المسائل .	
	تمثيل وتحليل المواقف والبنى الرياضية باستخدام الرموز الجبرية .	

مخطط تنظيمية للوحدة التعليمية السادسة



هل أنت مستعد؟

١ أوجد ناتج ما يلي :

- | | |
|-------------------------|----------------------------|
| = (١ -) + ٢ (ب) | = ٧ + ٣ - (أ) |
| = ٥ - × ٣ - (د) | = ٥ - ٣ (ج) |
| = (٢ -) - ٣ (و) | = (٩ -) + ٤ - (هـ) |
| = ٣ - (٧ -) (ح) | = ٢ ÷ ٦ (ز) |

٢ اكتب كلاً ممّا يلي في الصورة الأسية .

- | |
|---|
| $4 \times 4 \times 3 \times 3 \times 3$ (أ) |
| $5 \times 5 \times 2 \times 2$ (ب) |

٣ أوجد ناتج كلّ ممّا يلي :

- | | |
|--------------------------|----------------------------|
| = 4^3 (ب) | = 2^2 (أ) |
| = 116 (د) | = $2(0, 3)$ (ج) |
| = 28 (و) | = 101 (هـ) |
| = $8 \div 2^4$ (ح) | = 32×23 (ز) |
| = $10 + 230$ (ي) | = $10 - 210$ (ط) |

٤ أوجد قيمة كلّ ممّا يلي عندما $s = 2$

- | | |
|----------------------|---------------------|
| s^3 (ب) | $s^2 + 3$ (أ) |
| $8 \div s$ (د) | $5 - s$ (ج) |
| $2 - s$ (و) | s^2 (هـ) |

٥ أوجد المعكوس الجمعي لكلّ ممّا يلي :

- | | |
|-------------------|-----------------|
| ص (ب) | ٥ (أ) |
| $2 -$ ص (د) | $6 -$ (ج) |

٦ أوجد العامل المشترك الأكبر لكلّ ممّا يلي :

- | |
|----------------------|
| ١٥ ، ٣ (أ) |
| ٤٥ ، ٢٥ (ب) |
| ١٢ ، ٨ ، ٤ (ج) |

Laws of Exponents

سوف تتعلّم : قوانين الأسس .

العبارات والمفردات :

Power

قوى

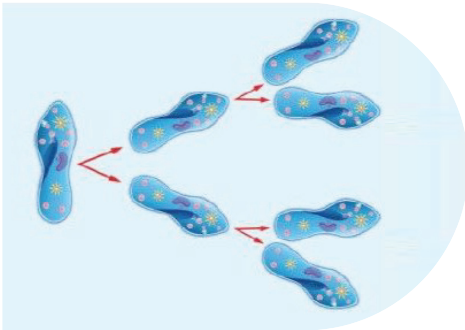
Exponent

أسّ

Base

أساس

استكشف (١) :



إذا كانت خلية يوجلينا واحدة تنقسم إلى خليتين جديتين متماثلتين كل ساعة (تتضاعف كل ساعة) ، فكم عدد الخلايا بعد ٥ ساعات ؟

بعد ساعة واحدة : ٢ خلية

بعد ساعتين : $2 \times 2 = 4$ خلايا

بعد ٣ ساعات : $2 \times 2 \times 2 = 8$ خلايا

بعد ٤ ساعات : $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ خلية

بعد ٥ ساعات : $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ خلية

هل يمكنك كتابة هذه الأعداد بصورة أخرى ؟

$$12 = 2$$

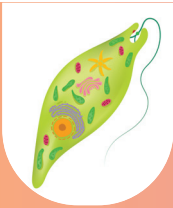
$$12 = 2 \times 2$$

$$12 = 2 \times 2 \times 2$$

$$12 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$12 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

معلومة مفيدة :



اليوجلينا كائن حي مميّز لأنه يجمع

بين صفات النبات والحيوان ، فهي

تشبه النبات لأنها تحتوي على

(الكلوروفيل) وتستطيع صنع غذائها بنفسها

بعملية البناء الضوئي ، وتشبه الحيوان لأنها

تتحرك باستخدام سوط واحد وتتغذى على المواد

العضوية عند غياب الضوء .

١ مكررة ن مرة

$$1^n = 1 \times 1 \times \dots \times 1 \times 1 \times 1$$

حيث ١ عدد نسبي غير صفري ، ن $\in$ ص .

ويُقرأ « ١ أس ن » أو القوّة النونية للعدد ١ .

أكمل الجدول التالي :

الصورة الأسية	الأساس	الأسس	صورة الضرب المتكرر	النتاج
2^3	٣			
2^0		٥		
$2(3-)$			$(3-) \times (3-)$	
$2(5-)$				١٢٥-
$4\left(\frac{1}{2}\right)$				
$2\left(\frac{3-}{5}\right)$				

تذكر



نسَمِّي الصورة 2^2 بالصورة
الأسية حيث ٢ يُسمَّى الأساس
و ٣ الأس ، وتُقرأ ٢ أس ٣
أو ٢ مرفوعاً إلى القوة ٣
أو ٢ تكعيب .

ماذا تلاحظ ؟

ملاحظة :



- ◀ عندما يكون الأساس عدداً سالباً والأس عدداً زوجياً ، يكون الناتج عدداً موجباً .
- ◀ عندما يكون الأساس عدداً سالباً والأس عدداً فردياً ، يكون الناتج عدداً سالباً .

استكشف (٢) :



١. أكمل .

$$(2+2)7 = \square 7 = \dots \times \dots \times 7 \times \dots \times 7 = 2^2 7 \times 7$$

$$(2+\dots)3 = \square 3 = 3 \times \dots \times 3 \times \dots \times 3 \times 3 = 2^4 3 \times 3$$

ماذا تلاحظ ؟

٢. أكمل .

$$(2-5)6 = \square 6 = \dots \times \dots \times \cancel{6} \times \cancel{6} \times \cancel{6} = \frac{2^0 6}{3^6}$$

$$(1-\dots)5 = \square 5 = \dots \times \dots \times 5 \times \cancel{5} = \frac{4^0 5}{5}$$

ماذا تلاحظ ؟

لكل عدد نسبي غير صفري ، م ، ن عدنان صحيحان ، يكون :

$$٢ \quad \frac{٢٢}{٢٢} = \frac{٢٢}{٢٢}$$

$$١ \quad ٢٢ \times ٢٢ = ٢٢^{٢٢}$$

ملاحظة :



لكل عدد نسبي غير صفري ، م ، ن ، ك ، ... أعداد صحيحة ، يكون : $٢٢ \times ٢٢ \times ٢٢ \times \dots \times ٢٢ = ٢٢^{٢٢+٢٢+٢٢+\dots}$

مثال (١) :

انتبه



س = س^١

بسّط كلّ ممّا يلي باستخدام قوانين الأسس .
(المقام أينما وجد $\neq$ صفر)

$$١ \quad ٢٤ \times ٤ \quad ٢ \quad س \times س^٢ \times س^٦ \quad ٣ \quad \left(\frac{١}{٧}\right)^٢ \times \left(\frac{١}{٧}\right)^٢$$

$$٤ \quad \frac{٢}{٢} \quad ٥ \quad \frac{٧}{٢} \quad ٦ \quad \frac{٣}{٣}$$

الحل :

$$١ \quad ٢٤ \times ٤ = ٢٤^{٢+٤} = ٢٤^٦$$

$$٢ \quad س \times س^٢ \times س^٦ = س^{١+٢+٦} = س^٩$$

$$٣ \quad \left(\frac{١}{٧}\right)^٢ \times \left(\frac{١}{٧}\right)^٢ = \left(\frac{١}{٧}\right)^{٢+٢} = \left(\frac{١}{٧}\right)^٤$$

$$٤ \quad \frac{٢}{٢} = ٢^{-٤} = \frac{٢}{٢^٤}$$

$$٥ \quad \frac{٧}{٢} = ٢^{-٧} = \frac{٧}{٢^٧}$$

$$٦ \quad \frac{٣}{٣} = ٣^{-٣} = \frac{٣}{٣^٣}$$

دورك الآن (٢)



بسّط كلّ ممّا يلي باستخدام قوانين الأسس . (المقام أينما وجد $\neq$ صفرًا)

$$\begin{array}{ll} ١ \quad \dots = ٥^٢ \times ٥^٤ & ٥ \quad \dots = \frac{٢}{٣} \\ ٢ \quad \dots = س^٤ \times س^٩ & ٦ \quad \dots = \frac{٧}{٣} \\ ٣ \quad \dots = ٤^٢ \times ٤^٤ & ٧ \quad \dots = \frac{٧}{٣} \\ ٤ \quad \dots = \left(\frac{١}{٢}\right)^٢ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^٤ & ٨ \quad \dots = \frac{٧}{٣} \end{array}$$

عبر عن فهمك (١)



هل العبارات التالية صحيحة ؟ فسّر إجابتك .

$$٢٢ = \frac{٨}{٢٤} \quad (٢)$$

$$٥٦ = ٢٢ \times ٢٣ \quad (١)$$

استكشف (٣) :



أكمل الجدول :

الصورة الأسية	٢٢	٢٢	١٢	□٢	□٢	□٢	□٢
النتاج	٨	٤	٢	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٨}$

$$٢ \div ٢ = ١, \quad ٢ \div ٢ = \frac{١}{٢}, \quad ٢ \div ٢ = \frac{١}{٤}, \quad ٢ \div ٢ = \frac{١}{٨}$$

بملاحظة النمط في الجدول ، نجد أنّ :

$$١ = ٢^{-٢}, \quad \frac{١}{٢} = ٢^{-٣}, \quad \frac{١}{٤} = ٢^{-٤}, \quad \frac{١}{٨} = ٢^{-٥}$$

لكل عدد نسبي غير صفري ، م عدد صحيح ، يكون :

$$\frac{١}{٢^٥} = ٢^{-٥} \quad (٢)$$

$$١ = ٢^٠ \quad (١)$$

مثال (٢) :

بسّط كلّ ممّا يلي باستخدام قوانين الأسس . (المقام أينما وُجد $\neq$ صفر)

$$٧ \times ٧^{-٣} \quad (ج)$$

$$\frac{٧^٤}{٧^٤} \quad (ب)$$

$$٢^{-٣} \quad (أ)$$

$$\frac{٧^٤}{٧^٧} \quad (و)$$

$$٧^٥ \times ٧^{-٤} \quad (هـ)$$

$$\frac{٢^{-٩}}{٢^{-٩}} \quad (د)$$

الحلّ :

$$٢^{-٣} = ٢^{-٣} \quad (أ)$$

$$\frac{٧^٤}{٧^٤} = ٧^{-٤} \quad (ب)$$

$$٧ = ٧^٠$$

$$\frac{٢^{-٩}}{٢^{-٩}} = ٢^{-٩-٩} = ٢^{-١٨} \quad (د)$$

$$\frac{١}{٩} = ٩^{-١} = ٣^{-٢} = ٣^{-٢} = ٣^{-٢} = ٣^{-٢}$$

$$٧^{-٣} = ٧^{-٣} = ٧^{-٣} = ٧^{-٣} \quad (ج)$$

$$\frac{١}{٧^٧} = ٧^{-٧}$$

$$\frac{٧^٤}{٧^٧} = ٧^{-٣} \quad (و)$$

$$\frac{١}{٣^٢} = ٣^{-٢} = (٣^{-٢})^١ = ٣^{-٢}$$

$$٧^٥ \times ٧^{-٤} = ٧^{٥-٤} = ٧^١ = ٧ \quad (هـ)$$

$$٧ = ٧^٠$$



بسّط كلّ ممّا يلي باستخدام قوانين الأسس (المقام أينما وُجد $\neq$ صفرًا) .

..... = $2^5 \times 2^5$ (ب)	 = 2^{-4} (أ)
..... = $\frac{2^9}{2^5}$ (د)	 = 3×2^{-3} (ج)

استكشف (٤) :



أوجد ناتج ما يلي :

..... = $2^3 \times 2^2 = 2^3 \times 2^2$ (ب)	 = $2^6 = 2^2 (2 \times 2)$ (أ)
..... =	 =
..... =	 =

قارن الإجابات في (أ) ، (ب) . ماذا تلاحظ ؟

..... = $2^4 \times 2^5 = 2^4 \times 2^5$ (د)	 = $2^{20} = 2^2 (4 \times 5)$ (ج)
..... =	 =
..... =	 =

قارن الإجابات في (ج) ، (د) . ماذا تلاحظ ؟

انتبه



• $a + b \neq (a + b)^c$

• $a - b \neq (a - b)^c$

لكلّ a ، b عددان نسبيا غير صفريين ، m عدد صحيح ،
يكون : $(a \times b)^c = a^c \times b^c$

استكشف (٥) :



أوجد ناتج ما يلي :

..... = $\frac{2^3}{2^5} = \dots \times \frac{2}{5} = 2 \left(\frac{3}{5} \right)$ (أ)
..... = $\frac{2^2}{2^3} = \dots \times \dots \times \frac{2}{3} = 2 \left(\frac{2}{3} \right)$ (ب)

ماذا تلاحظ ؟

لكلّ a ، b عددان نسبيا غير صفريين ، m عدد صحيح ، يكون : $\left(\frac{a}{b} \right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

ملاحظة :

$${}^{\circ}\left(\frac{p}{m}\right) = {}^{\circ-}\left(\frac{p}{m}\right)$$

مثال (٣) :

بسّط كلّ ممّا يلي باستخدام قوانين الأسس . (المقام أينما وُجد $\neq$ صفرًا)

ج $\frac{{}^6(س \times ٤)}{{}^2-س}$

ب $(٢ س ص)^{\circ}$

أ $(٣ س)^{\circ}$

و $\frac{{}^2(٢ س ٤)}{{}^2(س ٢)}$

هـ ${}^2-\left(\frac{٢}{٥}\right)$

د $\left(\frac{س}{ص}\right)^7$

الحلّ :

ب $(٢ س ص)^{\circ} = {}^{\circ}٢ س^{\circ} ص^{\circ}$

أ $(٣ س)^{\circ} = {}^{\circ}٣ س^{\circ}$

د $\frac{{}^٧س}{{}^٧ص} = {}^٧\left(\frac{س}{ص}\right)$

ج ${}^٨س \times {}^٦٤ = (٢-)^{-١} س \times {}^٦٤ = \frac{{}^٦س \times {}^٦٤}{{}^٢-س} = \frac{{}^٦(س \times ٤)}{{}^٢-س}$

و ${}^٢\left(\frac{{}^٢س ٤}{{}^٢س ٢}\right) = \frac{{}^٢(٢ س ٤)}{{}^٢(س ٢)}$

هـ $\frac{{}^٢٥}{{}^٢٢} = {}^٢\left(\frac{٥}{٢}\right) = {}^٢-\left(\frac{٢}{٥}\right)$

${}^٢س \times {}^٢٢ = {}^٢(س ٢) =$

دورك الآن (٤)



بسّط كلّ ممّا يلي باستخدام قوانين الأسس . (المقام أينما وُجد $\neq$ صفرًا)

ب $(٣ ع ص)^2 = \dots$

أ $(٣ ب)^{\circ} = \dots$

د $\frac{{}^٢(٥ ك)}{{}^٢} = \dots$

ج $\frac{{}^{\circ}(٢ \times ص)}{{}^٢-ص} = \dots$

و $\frac{{}^٢(٤ ص ٢)}{{}^٢(٨ ص)} = \dots$

هـ $\frac{{}^٤٣}{{}^٤٩} = \dots$



أَكْمِلْ مَا يَلِي :

① $(٢٢) = ٢ \times ٢ \times ٢ \times \dots \times \dots$

$\dots = ٢$

$\dots = ٢ \times \dots$

② $(٢٢) = ٢ \times ٢ \times \dots \times \dots$

$\dots \times \dots =$

$\dots \times \dots =$

ماذا تلاحظ ؟

لكل ١، ب عدنان نسبيان غير صفرين، م، ن عدنان صحيحان، يكون: $(٢٢) = ٢ \times ٢ \times \dots \times \dots$

عَبِّرْ عَنْ فَهْمِكَ (٢)



يقول عبدالله أن: $(٢٢) = ٢ \times ٢ \times \dots \times \dots$ ، هل توافقه الرأي؟ وضح ذلك.

مثال (٤) :

بَسِّطْ كُلًّا مِمَّا يَلِيْ بِاسْتِخْدَامِ قَوَانِينِ الْأَسْسِ . (المقام أينما وُجد $\neq$ صفرًا)

① $(٣ \text{ س}) = ٣ \times ٣ \times \dots \times \dots$

② $(٣-٥) = ٣-٥ \times ٣-٥ \times \dots \times \dots$

③ $(٢٤) = ٢ \times ٢ \times \dots \times \dots$

④ $(٣ \text{ ص}) = ٣ \times ٣ \times \dots \times \dots$

⑤ $(٢-٧) = ٢-٧ \times ٢-٧ \times \dots \times \dots$

⑥ $(٢-٥) = ٢-٥ \times ٢-٥ \times \dots \times \dots$

الحل :

① $(٣ \text{ س}) = ٣ \times ٣ \times \dots \times \dots = ٣ \times ٣ \times \dots \times \dots$

② $(٣-٥) = ٣-٥ \times ٣-٥ \times \dots \times \dots = ٣-٥ \times ٣-٥ \times \dots \times \dots$

③ $(٢٤) = ٢ \times ٢ \times \dots \times \dots = ٢ \times ٢ \times \dots \times \dots$

④ $(٣ \text{ ص}) = ٣ \times ٣ \times \dots \times \dots = ٣ \times ٣ \times \dots \times \dots$

⑤ $(٢-٧) = ٢-٧ \times ٢-٧ \times \dots \times \dots = ٢-٧ \times ٢-٧ \times \dots \times \dots$

⑥ $(٢-٥) = ٢-٥ \times ٢-٥ \times \dots \times \dots = ٢-٥ \times ٢-٥ \times \dots \times \dots$

$\frac{٢٦}{٣٥} = \frac{٢٦ \times (٣-٦)}{٣٥} = \frac{٢٦ \times ٣}{٣٥} = \frac{٧٨}{٣٥}$

بسّط كلّاً ممّا يلي باستخدام قوانين الأسس . (المقام أينما وجد $\neq$ صفر)

..... = $(2^1)^{-1}$ (أ) = $(2^1)^0$

..... = $(2^3)^{-1}$ (ب) = $(2^3)^0$

..... = $\frac{2^3(2^3-2^2)}{2^3-2^2}$ (ج) = $(2^3)^{-1} \times 2^6$

..... =

مثال (٥):

تبلغ سعة ذاكرة هاتف من الجيل الأول نحو 10^2 ميجابايت
إذا تمّ تطوير سعة ذاكرة هاتف من الجيل الثالث بنحو
 $7,6 \times 10^2$ مرة من ذاكرة هاتف الجيل الأول .
فما هي سعة ذاكرة هاتف الجيل الثالث ؟

الحلّ :

$$\begin{aligned} \text{سعة ذاكرة هاتف الجيل الثالث} &= 10^2 \times 7,6 \times 10^2 \\ &= 10^2 \times 10^2 \times 7,6 \\ &= (10^2 \times 10^2) \times 7,6 \\ &= 10^{2+2} \times 7,6 \\ &= 10^4 \times 7,6 \text{ ميجابايت} \end{aligned}$$



معلومة مفيدة :



الجيجابايت هي وحدة
لقياس حجم البيانات أو
سعة التخزين في الأجهزة
الذكية مثل الهواتف ، الحواسيب ،
الأجهزة اللوحية وبطاقات الذاكرة .
والجيجابايت = 10^3 ميجابايت



١ أوجد ناتج ما يلي :

..... = $\frac{28}{22}$ (أ)

..... = $2-3$ (ب)

..... = $^{\circ}\left(\frac{4}{14}\right) \times ^{\circ}\left(\frac{4}{5}\right)$ (ج)

..... = $^{\circ}\left(\frac{12}{22}\right)$ (د)

..... = $^{\circ}(0,2 - 1,2) - 6$ (هـ)

٢ بسّط كلّ ممّا يلي باستخدام قوانين الأسس . (المقام أينما وُجد $\neq$ صفرًا)

..... = $ص \times ص^{\circ}$ (أ)

..... = $4 \times 2(24)$ (ب)

..... = $^{\circ}(3-) \times 2(3-)$ (ج)

..... = $س^{11} \times س^9$ (د)

..... = $ص^2 \times ص \times ص^2$ (هـ)

..... = $(ك^2 هـ-^{\circ}) \times (ك^{\circ} هـ-^{\circ})$ (و)

..... = $(ب^2) \times (2 ب^2) \times (2 ب^2)$ (ز)

..... = $^{\circ}(س^2) \times 2(ص^2)$ (ح)

..... = $ك^{\circ} \times ك^2$ (ط)

..... = $2(3- س)$ (ي)

..... = $\frac{ب^2 ج}{ب ج^2}$ (ك)

..... = $\frac{8- س^2 ص^2}{4- س^2 ص}$ (ل)



- ٣ يُنتج مصنع للحلوى ما يقارب ٦×١٠ قطعة من الحلوى يوميًا . يريد صاحب المصنع أن يوزّعها بالتساوي على ١٠×٥ صندوقًا صغيرًا . أوجد عدد قطع الحلوى في كل صندوق .

مهارات تفكير عليا :

- ٤ أكتب الأعداد ٢ ، ٠ ، ٢ ، ٣ في المربّعات الآتية لتحصل على أكبر قيمة ممكنة للتعبير العددي :

$$\boxed{}^{\boxed{}} \times \boxed{}^{\boxed{}} = \dots\dots\dots$$

- ٥ يوضّح الجدول التالي نمطًا للمبلغ الذي تتصدّق به غلا كلّ يوم من أيّام الأسبوع حيث مبلغ كلّ يوم هو ضعف مبلغ اليوم السابق له ، فإنّ مقدار ما تتصدّق به غلا يوم الجمعة هو :

اليوم	الأحد	الاثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس	الجمعة	السبت
المبلغ فئة مئة فلس		 	   				

ب) ١٠٠×٦٢ فلس

أ) ١٠٠×٢٤ فلس

د) ١٠٠×٧٢ فلس

ج) ١٠٠×٢٠ فلس

كثيرات الحدود (الحدوديات) Polynomials

٦ - ٢

سوف تتعلّم : كثيرات الحدود – إيجاد قيمة كثيرات الحدود وكتابتها بالصورة العامّة .

العبارات والمفردات :

Degree	درجة	Polynomial	كثيرة الحدود
Like Terms	حدود متشابهة	Term	حدّ
Non Like Terms	حدود غير متشابهة	Monomial	وحيدة الحدّ
Equivalent Terms	حدود متساوية	Binomial	ثنائية الحدّ (حدّانية)
General Form	الصورة العامّة	Trinomial	ثلاثية الحدّ (حدودية ثلاثية)

حلّ وناقش

تذكّر



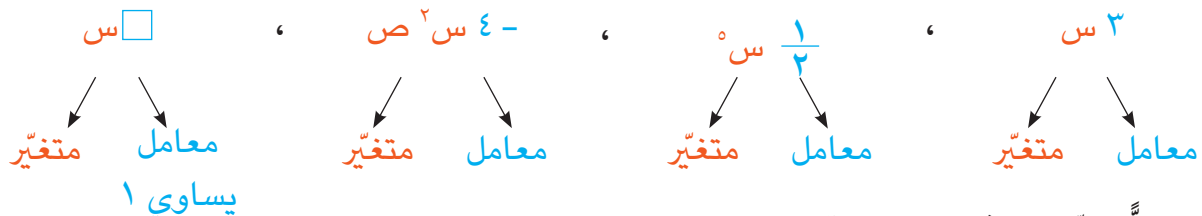
المقدار الجبري هو تعبير رياضي يحتوي على أعداد ومتغيّرات مرتبطة بعمليات حسابية مثل الجمع أو الطرح .

١ أكتب كلّ ممّا يلي في صورة تعبير رياضي :

- ضعف عدد ما :
- عدد ما مرفوعاً إلى الأس ٣ :

مثل هذه التعابير الرياضية تُسمّى **حدّاً جبريّاً** حيث العدد الثابت يُسمّى « **معامل** » والقسم الرمزي يُسمّى « **متغيّر** » .

مثلاً :



٢ أكتب كلّ ممّا يلي في صورة مقدار جبري :

- ضعف عدد ما مضافاً إليه العدد ٥ :
- عدد ما مرفوعاً إلى الأس ٤ ومطروحاً منه العدد ٧ :
- مربع عدد ما مضافاً إليه ٣ أمثاله ثمّ طرح منهم العدد ٥ :

٣ ممّ يتكوّن المقدار الجبري ؟

٤ ماذا تلاحظ على أسس المتغيّرات في المقدار الجبري ؟

كثيرة الحدود (الحدودية) هي مقدار جبري يتكوّن من حدّ جبري أو أكثر يربط بينها عمليات الجمع أو الطرح وتكون أسس المتغيّرات أعدادًا صحيحة غير سالبة .

مثال (١):

حدّد أيّ المقادير الجبرية التالية يمثل حدودية وأيّها لا يمثل ذلك مع ذكر السبب في حالة النفي :

١ $٣س^٤ - ٧س^٢ + س - ١$

حدودية

٢ $١ - س^٢$

حدودية

٣ $س^٢ - ٢$

ليست حدودية (الأسّ عدد صحيح سالب)

٤ $٣س^٢ - س + ٥$

حدودية

٥ $\sqrt{٥س - ١}$

ليست حدودية (المتغيّر س تحت الجذر التربيعي)

٦ $٦س^٣ + س^٢$

ليست حدودية (المتغيّر في الأسّ)

٧ $\frac{٢}{س} + س^٢$

ليست حدودية (الأسّ عدد صحيح سالب (المتغيّر في المقام))

دورك الآن (١)

حدّد أيّ المقادير الجبرية التالية يمثل حدودية وأيّها لا يمثل ذلك مع ذكر السبب في حالة النفي :

١ $٥س^٢ + ٢س^٢ - ٨س$

.....

٢ $٦س^٤ - \sqrt{٧س}$

.....

٣ $س^٢ - ٣س^٢ + س$

.....

٤ $\frac{٧}{س}$

.....

٥ $٩ - ص + ٢ص + ص - ٢س$

.....

٦ $٥ + س^٢$

.....

٧ $٦ع - ٢ - ٩ن$

.....

عبّر عن فهمك (١)

هل ٤ تُعتبر كثيرة حدود ؟ فسّر إجابتك .

.....

أنواع كثيرات الحدود

كثيرة الحدود (الحدوديات)	تصنيف الحدودية (طبقاً لعدد الحدود)
- س ، ٣ س ^٤ ، ٧ ص ، ٥	وحيدة الحدّ
م + ٢ ، ٨ س ^٢ - س ، ل ٣ - ٢	ثنائية الحدّ (حدّانية)
٣ + س + ٧ س ^٢ ، س ^٥ - ٦ س ^٢ + ٢ س ^٣	ثلاثية الحدّ (حدودية ثلاثية)

جميع الحدوديات في الجدول السابق تُسمّى **حدوديات في متغيّر واحد** ،
بينما الحدوديات - س - ٢ ص ، ٥ س^٢ - س ص + ص^٢ - ٩ تُسمّى **حدوديات في متغيرين** .

درجة الحدودية وترتيبها

• **درجة كثيرة الحدود ذات متغيّر واحد** هي قيمة أكبر قوّة للمتغيّر (أكبر أس) يظهر في أيّ حدّ .

حدودية من الدرجة الثالثة

مثلاً : س^٢ - ٢ س^٢ + ٩

حدودية من الدرجة الخامسة

ص + ص^٥ - ٣ ص^٢

• **درجة كثيرة الحدود ذات أكثر من متغيّر** هي قيمة أكبر مجموع لقوى المتغيّرات (مجموع أكبر أسس للمتغيّرات) التي تظهر في أيّ حدّ .

حدودية من الدرجة الخامسة

مثلاً : ٢ س^٢ ص^٢ + ٧ س + ٣ ص

حدودية من الدرجة التاسعة

ل م ن^٢ - ٤ ل^٢ م^٢ ن^٥ + ل

انتبه



$$٦ = ٦ \text{ س}$$

دورك الآن (٢)



أكمل الجدول الآتي :

كثيرة الحدود	تصنيف الحدودية (طبقاً لعدد الحدود)	درجة الحدودية
١ ٦		الدرجة صفر
٢ ٢ س ^٢ + ٣		الدرجة الثانية
٣ ص ^٢ + ٥ ص - ٧	حدودية ثلاثية	
٤ م ن ^٢ + م ^٢ + ١		الدرجة الرابعة
٥ س ص ع - ٢ س ص ^٢ ع ^٢ + س - ٩		

عبّر عن فهمك (٢)



تقول حنان إنّ الحدودية ٩ س^٤ + ٤ ص^٢ هي من الدرجة السادسة .
هل توافقها الرأي ؟ فسّر إجابتك .

ملاحظة :

- يمكن كتابة كثيرة الحدود بمتغير واحد بأي ترتيب (تصاعدي - تنازلي) حسب قوى المتغير .
- عند ترتيب كثيرة الحدود بمتغير واحد تنازلياً حسب قوى المتغير يُسمى هذا **بالصورة العامة** .
- معامل الحد الذي له أكبر أس يُسمى (المعامل الرئيسي) .
- (الحد الثابت) في كثيرة الحدود هو الحد الذي لا يحتوي على أي متغير ، وهو الحد الذي درجته صفراً .

دورك الآن (٣)

اكتب كثيرات الحدود التالية بالصورة العامة وحدد درجتها :

الحد الثابت	المعامل الرئيسي	درجة الحدودية	الصورة العامة	الحدودية
٤ -	٥	الدرجة الثانية	٥ س ^٢ + ٣ س - ٤	١ ٣ س - ٤ + ٥ س ^٢
.....		الدرجة الرابعة	ع ^٤ + ع ^٣ - ٢, ٠ ع	٢ ع ^٣ - ٢, ٠ ع + ع ^٤
.....			س ^٤ - + -	٣ س ^٤ + ٧ س - ١ - س ^٣
.....				٤ ٣ م ^٢ - ٨ م + م ^٥ + ١٠
.....				٥ - ٣, ٠ + ٥, ٢ ص + ٦ ص ^٢
.....				٦ ٢ س ^٢ - ٥ س ^٢ + $\frac{١}{٤}$ س

عبّر عن فهمك (٣)

ما هو معامل س^٢ في كثيرة الحدود ٢ س^٢ - ٧ س + ٥ ؟ فسّر إجابتك .

الحدود المتشابهة والحدود المتساوية

الحدود المتساوية	الحدود المتشابهة	التعريف
هي حدود متشابهة بمعاملات متساوية	هي الحدود التي لها المتغير نفسه مرفوع إلى الأس نفسه	
١ ٤ هـ ^٢ ، ٤ هـ ^٢	١ ٣ ص ^٢ - ، $\frac{٢}{٥}$ ص ^٢ ، ٣, ٠ ص ^٦	أمثلة
٢ $\frac{١}{٣}$ س ، $\frac{١}{٣}$ س	٢ م ، ٧ - م	
٣ ل ع ^٢ ، ٢ ع ^٢ ل	٣ ل ع ^٢ - ، ٣ ل ع ^٢	



تقول فوزيه إنَّ : $\frac{1}{4}$ س ، $\frac{1}{4}$ ص هي حدود جبرية متشابهة . هل تتفق معها ؟ فسّر إجابتك .

دورك الآن (٤)



تذكّر



ترتيب العمليات الحسابية :

- ١ ما داخل الأقواس
- ٢ الأسس والجذور
- ٣ الضرب والقسمة
- ٤ الجمع والطرح

١ أوجد قيمة كثيرة الحدود التالية عندما $5 = س$ ، $3 = ص$

$$\frac{1}{5} س^2 - 2 ص^2 + 18$$

$$= \frac{1}{5} (.....)^2 - 2 (.....)^2 + 18$$

$$= - 2 \times + =$$

$$= - + =$$

٢ اختر الإجابة الصحيحة .

أي المقادير الآتية يكون الناتج ١٤

عندما $7 = س$ ، $7 = ص$ ، $3 = ن$ ؟

أ $س \times (ص + ن)$

ب $س \times ص \times ن$

ج $ن \times ص - س$

د $(ص + ن) \div س$

تمارين ذاتية :



١ ظلّل أ إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلّل ب إذا كانت العبارة غير صحيحة .

س° - $\frac{3}{س} + 7$	كثيرة الحدود	أ	ب
$\sqrt{ص} - ص^3 + \frac{2}{5} س$	ليست كثيرة حدود	أ	ب
$-\frac{2}{5} س^3 - ٤,٤ ص^2 س$	حدّان جبريان متساويان	أ	ب
$- س^2 - \frac{2}{5} ص^2 س + س^2 ص$	حدودية من الدرجة الرابعة	أ	ب

٢ ضع علامة (✓) أسفل الوصف المناسب للحدود الموضّحة في الجدول التالي :

حدود جبرية غير متشابهة	حدود جبرية متشابهة	حدود جبرية
☐	☐	٣ س ، - ٥ س ، ١٢ س
☐	☐	٤ ص ^٢ ، ص ^٢
☐	☐	٧ س ^٢ ص ، ٧ س ص ^٢
☐	☐	٢ ل م ، ٥ م ل
☐	☐	٣، ١٠، ٣ ^٤ ب ^٢ ، $\frac{١}{٢}$ ب ^٢

٣ ضع الحدوديات التالية في الصورة العامّة ، ثم حدّد درجة الحدودية :

١) $٩ س - ٧ س + ٢ س - ٣$

.....

ب) $٤ + ٧ ع - ٧ ع + ٣ ع$

.....

ج) $٨ + ٢ ل + ٣ ل - ٨$

.....

د) $٥ ك - ٣ ك + \frac{٣}{٢} ك + \frac{١}{٢}$

.....

تذكّر



خاصيّة توزيع الضرب على الجمع

$٢(س + ص) = ٢س + ٢ص$

٤ إذا كانت $٣ + ١ = ب$ ، $٥ = ج$ ، $٤ =$ ، فما قيمة $٣ + (ب + ج)$ ؟

.....

٥ أوجد قيمة كل من كثيرات الحدود التالية :

١ - ٤ س + ٣ س + ١ س + ٥ + ٢ س ، عندما س = ٢

ب - س ص + ٢ ص + ٣ س - ٩ ، عندما س = ٤ ، ص = ١

مهارات تفكير عليا :



٦ يتشكّل فريق التخضير في المدرسة من المتعلّمين عيسى وشملان وعبدالله . إذا زرع شاملان عدد س من الشتلات وزرع عبدالله ضعف عدد الشتلات التي زرعها شاملان أمّا عيسى فزرع ٨ شتلات فقط .
فأيّ الحدوديات تعبّر عن جميع الشتلات التي زرعها المتعلّمون الثلاثة ؟

ب ٢ س - ٨

أ ٢ س + س + ٨

د ١١ س

ج ٣ س + ٨



٧ في أحد المطارات ، يتم الاستعانة بروبوت يُنجز عددًا من المهامّ في اليوم الواحد وفق الحدودية ٦ س + ٥ ص + ١٢ حيث س تمثل عدد مستشعرات الوزن (sensor) ، ص تمثل عدد وحدات المسح الإلكتروني (QR) .
كم مهمّة يُنجز الروبوت في اليوم الواحد إذا تمّ تركيب ٢ مستشعر وزن ، و ٣ وحدات مسح إلكتروني ؟

جمع كثيرات الحدود وطرحها

Adding and Subtracting Polynomials

٣ - ٦

سوف تتعلّم : جمع كثيرات الحدود وطرحها .

العبارات والمفردات :

Simplifying

تبسيط

Like Terms

حدود متشابهة

جمع كثيرات الحدود

حلّ وناقش



أكمل ما يلي :

يقوم ربّ أسرة بجمع بعض التبرّعات من أفراد أسرته ليقدمها كصدقة على العمّال في فصل الشتاء مثل : قبّعات ، جوارب ، شالات ومبلغاً من المال فئة دينار . إذا تمّ حصر التبرّعات من أفراد الأسرة كما في الجدول التالي :

أفراد الأسرة	التبرّعات
الأب	١٠ دنانير ، ٣ قبّعات ، ٥ جوارب ، ٢ شال
الأمّ	٧ شالات ، ٦ جوارب ، ١ قبّعة ، ٨ دنانير
الإبن	٥ قبّعات ، ٦ دنانير ، ٣ جوارب ، ٣ شالات
الابنة	٣ جوارب ، ٥ دنانير ، ٦ شالات ، ٤ قبّعات

فساعد ربّ الأسرة في جمع التبرّعات المتشابهة حتّى يسهل عليه توزيعها على العمّال ، استعن بالجدول التالي ليسهل عليك جمع هذه التبرّعات .

أفراد الأسرة	النوع	المبلغ المالي	قبّعات	
الأب	١٠ دنانير			
الأمّ		٧ شالات		
الإبن				
الابنة			٣ جوارب	
المجموع			١٣ قبّعة	

معلومة مفيدة :

الصدقة

ليست دائماً مالاً

فالإتسامة صدقة ،
وحسن الحديث صدقة ،
وصنع المعروف صدقة ،
ودعوة للمسلمين بظهر
الغيب صدقة .

كذلك ، عند جمع كثيرات الحدود نقوم بجمع الحدود الجبرية المتشابهة (نجمع المعاملات العددية لهذه الحدود) .

لجمع كثيرات الحدود نقوم بجمع الحدود الجبرية المتشابهة معًا .

مثال (١) :

أوجد ناتج جمع كثيرات الحدود الآتية :

$$٣س٢ + ٤س - ٦ مع - ٤س٢ + ٢س - ١$$

الحل :

الطريقة الرأسية :

$$\begin{array}{r} ٣س٢ + ٤س - ٦ \\ + \\ - ٤س٢ + ٢س - ١ \\ \hline - ٢س٢ + ٦س - ٧ \end{array}$$

الطريقة الأفقية :

$$\begin{aligned} & (٣س٢ + ٤س - ٦) + (- ٤س٢ + ٢س - ١) \\ & = (٣س٢ - ٤س٢) + (٤س + ٢س) + (- ٦ - ١) \\ & = - ٢س٢ + ٦س - ٧ \end{aligned}$$

لاحظ أن :

- ١ خطوات الحل :
- أكتب الحدودية بالصورة العامة .
- ٢ حدّد ورتّب الحدود المتشابهة .
- ٣ اجمع معاملات الحدود المتشابهة .

تذكّر

- من خواصّ عملية الجمع :
- الخاصّة الإبدالية
 - الخاصّة التجميعية

دورك الآن (١)

اجمع الحدوديات الآتية :

$$٢س٢ + ٥س - ٢ ، - ٣س٢ + ١٠س - ٢$$

الحل :

$$\begin{array}{r} ٢س٢ + ٥س - ٢ \\ + \\ - ٣س٢ + ١٠س - ٢ \\ \hline \end{array}$$

انتبه

أنقل الحدّ بإشارته عند كتابة الحدودية في الصورة العامة .

عبّر عن فهمك (١)

طلبت المعلّمة من متعلّقات الفصل استخدام البطاقات الخاطفة لإيجاد ناتج $س + س$ ، وكان من ضمن الإجابات التي رأتها المعلّمة $س٢$ ، $٢س$. في رأيك ، أيّ إجابات صحيحة ؟ فسّر إجابتك .

مثال (٢) :

إِجْمَعِ الحُدُودِيَّاتِ الْآتِيَّةِ :

$$٣س + ٣س - ٤س - ٧س ، - ٢س - ٩س ، ٥س + ٢س - ٨س$$

الحل :

أكتب الحدودية بالصورة العامة ، ثم اجمعها بالطريقة الرأسية .

$$\begin{array}{r} ٣س + ٣س - ٤س - ٧س \\ + ٩س - ٢س - ٨س \\ - ٦س - ٧س + ٢س - ٢س \\ \hline \end{array}$$

تذكّر



إذا لم يُكتب الحدّ في الحدودية ، فهذا يعني أنّ معاملته يساوي صفرًا .

انتبه



أترك فراغًا مكان الحدّ الذي معاملته صفر في الحدودية .

دورك الآن (٢)

إِجْمَعِ الحُدُودِيَّاتِ الْآتِيَّةِ :

$$٨س - ٥س + ٢س + ١ ، - ٢س + ٣س + ٢س + ٣ ، - ٣س + ٢س$$

الحل :

$$\begin{array}{r} ٨س - ٥س + ٢س + ١ \\ + ٢س - ٣س + ٣س + ٣ \\ - ٣س + ٢س \\ \hline \end{array}$$

انتبه



عند جمع الحدود المتشابهة ، نجمع المعاملات فقط وليس الأسس .

طرح كثيرات الحدود

دورك الآن (٣)

أكتب المعكوس الجمعي لكلّ من كثيرات الحدود الآتية :

كثيرة الحدود	المعكوس الجمعي
٣س	
٢س - ٤	
٤س - ٧س - ٣	$-(٤س - ٧س - ٣) = -٤س + ٧س + ٣$
$-٩ + ١١س - ٨س$	

١

٢

٣

٤

مثال (٣) :

أوجد ناتج ما يلي :

$$٧س٣ - ٢س٢ + ٥ - (٣س٣ - ٤س٢ - ٧)$$

الحل :

الطريقة الأفقية :

$$٧س٣ - ٢س٢ + ٥ - (٣س٣ - ٤س٢ - ٧)$$

$$٧س٣ - ٢س٢ + ٥ + (٧ + ٤س٢ + ٣س٣) =$$

$$(٧ + ٥) + (٢س٢ + ٤س٢) + (٣س٣ + ٧س٣) =$$

$$١٢ + ٢س٢ + ٣س٣ =$$

(إضافة المعكوس الجمعي للمطروح)

إجمع الحدود المتشابهة

عبّر عن فهمك (٢)



أوجد طارق ناتج $(٥س٢ + ٣س٣ - ٦) - (٣س٣ - ٢س٢ - ٦)$ كما يلي :

$$٥س٢ + ٣س٣ - ٦ - ٣س٣ + ٢س٢ + ٦ =$$

$$٨س٢ - ٦ =$$

وضّح ما الخطأ الذي وقع فيه طارق ؟

انتبه



المطروح منه يأتي بعد كلمة «من» دائماً .

ضع الحدوديات بالصورة العامة

مثال (٤) :

إطرح $١٠س٣ + ٧س٢ - ١$ من $(٤س٢ - ٣س٣ + ١)$

الحل :

$$٤س٢ - ٣س٣ + ١ - (١٠س٣ + ٧س٢ - ١)$$

$$٤س٢ - ٣س٣ + ١ - ١٠س٣ - ٧س٢ + ١ =$$

إضافة المعكوس الجمعي للمطروح

الطريقة الرأسية :

$$٤س٢ + ١ - ٣س٣$$

$$+ ١٠س٣ - ٧س٢ - ١$$

$$- ١١س٣ - ٦س٢ + ٢ =$$

انتبه



لإيجاد المعكوس الجمعي لحدودية ، أكتب المعكوس الجمعي لكل حد من حدودها .

دورك الآن (٤)

من (٤ س - ٨ + س - ٤ س) اِطرح (٦ س + ٧ س + ٤ س + ٥)
الحلّ :

$$س - ٤ س + ٢ س - ٨ - (.....)$$

.....

.....

.....

.....

تمارين ذاتية :

١ اِجمع كلّاً من كثيرات الحدود الآتية :

أ) ٥ س + ٣ س + ٤ س - ٤ س + ٢ س + ٤ س

.....

.....

.....

.....

.....

ب) - ٢ س + ٢ س - ٤ س ، ٥ س - ٨ س - ٣ س ، ٩ س + ٢ س

.....

.....

.....

.....

.....

ج) ٣ س - ٢ س + ١ س ، ٢ س + ٧ س - ٢ س ، ٤ س - ١ س

.....

.....

.....

.....

.....

٢ أكتب المعكوس الجمعي لكلّ من كثيرات الحدود الآتية :

المعكوس الجمعي	كثيرة الحدود
..... = (.....) -	$\frac{1}{4}س^{\circ} - 2س^2 - 3س^3$
..... = (.....) -	$2س^2 - 3س^3 + \frac{2}{3}$
..... = (.....) -	$2س^2 - 5س + 2$
..... = (.....) -	$8س^3 + 3س^2 - 6س + 2س^2$

٣ أوجد ناتج ما يلي :

أ) $(2س^2 - 2س + 1) - 7س + 2س^2 - 7س + 1$

.....

.....

.....

.....

.....

ب) $(6س^2 - 2س + 4) - (8س^2 - 4س - 20)$

.....

.....

.....

.....

.....

٤ اِطرح $(5س^2 + 6س^3 - 1س)$ من $(4س^4 - 14س^2 + 5س)$

.....

.....

.....

.....

٥ من $(2س^2 - 9س + 4س^2)$ اِطرح $(5س + 8س^3 + 4س^2 + 1س)$

.....

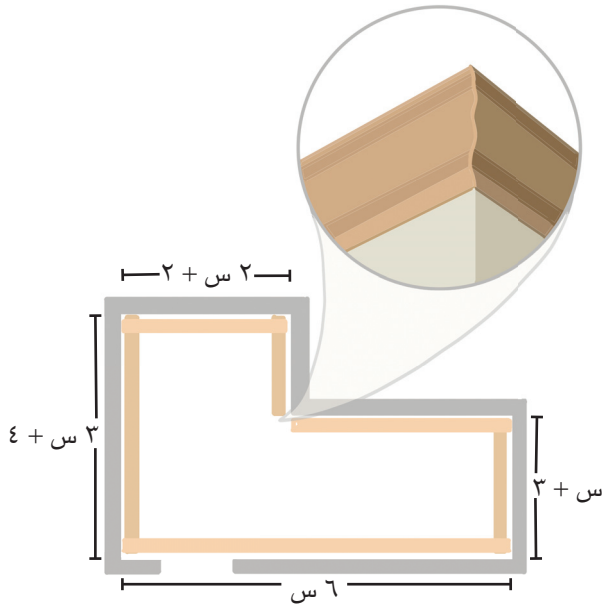
.....

.....

.....



٦ تم تركيب قوالب خشبية حول حواف الغرفة ،
إذا كانت أبعاد الغرفة من الداخل موضحة في
الشكل المقابل ، فأوجد محيط هذه الغرفة
بدلالة س .



.....

.....

.....

.....

.....

.....

Multiplying Polynomials

سوف تتعلّم : ضرب كثيرات الحدود .



نستخدم كثيرات الحدود في الحياة اليومية في مجالات متعدّدة كالعلوم والهندسة والاقتصاد ، وذلك من خلال استخدامها مثلاً في حساب المساحات والأحجام ، وتصميم الهياكل مثل الجسور وإنشاء رسومات الحاسوب ، ونمذجة سلوك الأسواق المالية .

إِسْتِكْشِف (١)



من خلال معلوماتك من درس قوانين الأسس ، أوجد ناتج ما يلي :

١ $٣س \times ٤س^٢ = (٣ \times ٤) \times (س \times س^٢) = ١٢ \times س^٣ = ١٢س^٣$

٢ $٥ص - (٢ص - ٣ص) = ٥ص - ٢ص + ٣ص = ٦ص$

تذكّر



$$٢٢ \times ٣٣ = ٣٣ + ٢٢$$

حيث $٢ \neq ٣$ ،

م ، ن $\Rightarrow ص$

نلاحظ أن :

عند ضرب حدّ جبري في حدّ جبري آخر ، نضرب المعاملات ببعضها ونجمع أسس المتغيّرات المتشابهة إن وُجدت .

دورك الآن (١)



أوجد ناتج ما يلي :

١ $٦س^٢ \times ٤س^٢ = ٢٤س^٤$

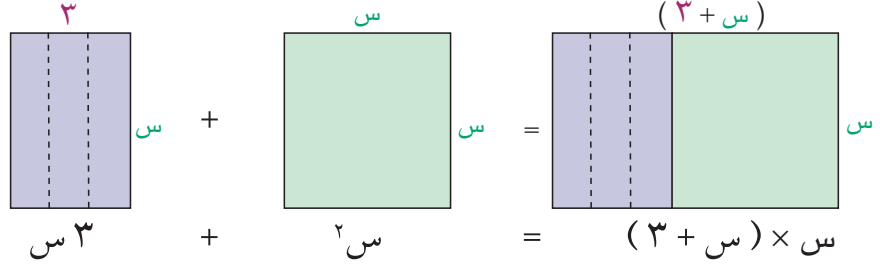
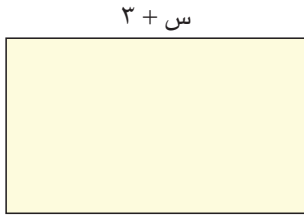
٢ $٣س^٠ \times ٢س = ٦س$



في الشكل المقابل مستطيل بعده س وحدة طول ، (س + ٣) وحدة طول
أوجد مساحة المنطقة المستطيلة .

نقسم المستطيل إلى جزئين ، ثم نكتب النمذجة التي حصلنا عليها كالآتي :

مساحة المنطقة المستطيلة = مجموع مساحات المناطق التالية



وكذلك تساعدنا خاصية التوزيع في إيجاد ناتج ضرب حدّ
في كثيرة حدود كالآتي :

$$(س \times س) + (س \times 3) = (س + 3) \times س$$

$$س^2 + 3س =$$

إذاً مساحة المنطقة المستطيلة = (س^٢ + ٣س) وحدة مربعة

تذكّر



الخاصية التوزيعية للضرب
على الجمع
= (س + ٣) × س
(س × ٣) + (س × س)

مثال (١) :

أوجد ناتج ما يلي :

أ) $٢س^٢ \times (٨س^٢ + ٥س^٤)$

ب) $٣س \times (٢س^٢ - س + ٤)$

الحل :

أ) $٢س^٢ \times (٨س^٢ + ٥س^٤) = (٢س^٢ \times ٨س^٢) + (٢س^٢ \times ٥س^٤)$
 $= ١٦س^٤ + ١٠س^٦$

ب) $٣س \times (٢س^٢ - س + ٤) = (٣س \times ٢س^٢) - (٣س \times س) + (٣س \times ٤)$
 $= ٦س^٣ - ٣س^٢ + ١٢س$

انتبه



عند استخدام خاصية توزيع
الضرب على الجمع ، يجب
مراعاة إشارات الحدود .

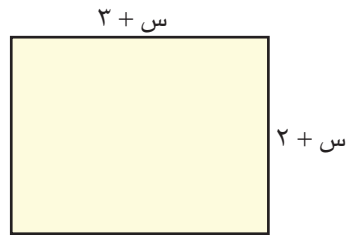


أوجد ناتج ما يلي :

١ $٤ س \times (٢ س + ٣ س) = \dots\dots\dots =$

٢ $٢ س \times (٥ س - ٧ س - ١) = \dots\dots\dots =$

إستكشِف (٣)

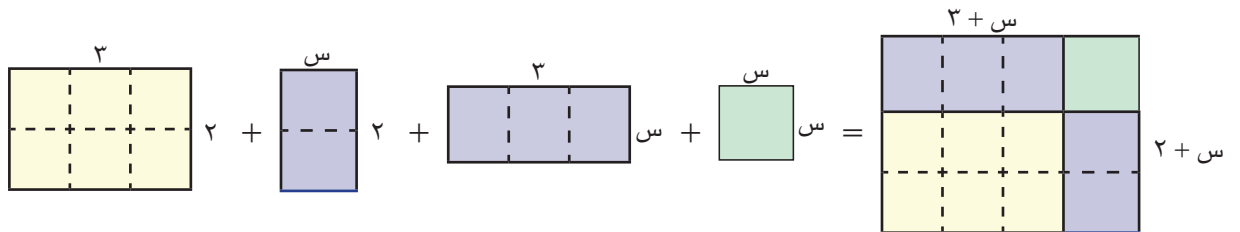


في الشكل المقابل مستطيل بعده (س + ٣) وحدة طول ،

(س + ٢) وحدة طول ، أوجد مساحة المنطقة المستطيلة .

نقسّم المستطيل إلى أربعة أجزاء كما في الشكل المقابل ، ثم نكتب النمذجة التي حصلنا عليها كالآتي :

مساحة المنطقة المستطيلة = مجموع مساحات المناطق التالية



$$٦ + ٢ س + ٣ س + ٢ س = (٢ + س) \times (٣ + س)$$

$$٦ + ٥ س + ٢ س =$$

كذلك ، يمكننا استخدام الخاصية التوزيعية لإيجاد ناتج الضرب كما يلي :

$$(٢ + س) (٣ + س)$$

خاصية توزيع الضرب على الجمع

$$٣ (٢ + س) + س (٢ + س) =$$

$$(٢ \times ٣) + (س \times ٣) + (٢ \times س) + (س \times س) =$$

نجمع الحدود المتشابهة

$$٦ + ٣ س + ٢ س + ٢ س =$$

$$٦ + ٥ س + ٢ س =$$

إذا مساحة المنطقة المستطيلة = (س + ٥ + ٦) وحدة مربعة

دورك الآن (٣)



أوجد ناتج ما يلي :

$$(٦ + س) (٢ + س) = (٢ + س) (٦ + س)$$

$$١٢ + \dots\dots\dots + ٢ س =$$

$$١٢ + \dots\dots\dots + ٢ س =$$

مثال (٢) :

أوجد ناتج ما يلي :

أ) $(٣ + س) (٣ - س)$

ب) $(٣ + س) (٤ - س)$

الحل :

أ) $(٣ + س) (٣ - س)$

$س (٣ - س) + ٣ (٣ - س) =$

$٣س - س^٢ + ٩ - ٣س =$

$٩ - س^٢ =$

ب) $(٣ + س) (٤ - س)$

الطريقة الأفقية :

$(٣ + س) (٤ - س)$

$س (٤ - س) - (٣ + س) س =$

$٤س - س^٢ - ٣س - س^٢ =$

$٤س - ٣س - س^٢ - س^٢ =$

الطريقة الرأسية :

$$\begin{array}{r} ٣ + س - س^٢ \\ \times \quad ٤ - س \\ \hline ١٢ - ٣س + س^٢ \end{array}$$

نضرب الحد (س) في الحدودية (٣ + س - س^٢)

نضرب الحد (٤ - س) في الحدودية (٣ + س - س^٢)

نجمع الحدود المتشابهة

$$\begin{array}{r} ١٢ - ٣س + س^٢ \\ + \quad ٤س - ٣س - س^٢ - س^٢ \\ \hline ١٢ - ٣س + س^٢ + ٤س - ٣س - س^٢ - س^٢ \end{array}$$

انتبه



ناتج جمع كل حد ومعكوسه
الجمعي يساوي صفراً
- ٣س + ٣س = صفراً

انتبه



- ناتج ضرب حدّين متّفقين في الإشارة هو حدّ موجب .
- ناتج ضرب حدّين مختلفين في الإشارة هو حدّ سالب .

نجمع الحدود المتشابهة

مثال (٣) :

أوجد مربع (س + ٥)

الحل :

مربع (س + ٥) هو (س + ٥)^٢

$(س + ٥) (س + ٥) =$

$س (س + ٥) + ٥ (س + ٥) =$

$س^٢ + ٥س + ٥س + ٢٥ =$

أجمع الحدود المتشابهة

انتبه



- مربع س هو س^٢
- ضعف س هو ٢س

لاحظ أن :

$(س + ٥)^2$ هي مربع الحداينة $(س + ٥)$ حيث :

س هي الحد الأول ، ٥ الحد الثاني

حدودية ثلاثية على صورة مربع كامل

ناتجها $س^2 + ١٠س + ٢٥$

$س^2$: مربع الحد الأول
 $١٠س$: $٢ \times$ الحد الأول $\times$ الحد الثاني
 ٢٥ : مربع الحد الثاني

عمومًا

$$(س \pm ص)^2 = س^2 \pm ٢سص + ص^2$$

$س^2$: مربع الحد الأول
 $٢سص$: $٢ \times$ الحد الأول $\times$ الحد الثاني
 $ص^2$: مربع الحد الثاني

عبر عن فهمك



ما التشابه والاختلاف بين ناتج $(س - ٨)^2$ ، $(س + ٨)^2$ ؟

مثال (٤) :

أوجد ناتج ما يلي :

أ) $(س - ٦)^2$

الحل :

$$(س - ٦)^2 = س^2 - ٢ \times س \times ٦ + ٦^2$$

$$= س^2 - ١٢س + ٣٦$$

ب) $(٢م + ٤ل)^2$

الحل :

$$(٢م + ٤ل)^2 = (٢م)^2 + ٢ \times ٢م \times ٤ل + (٤ل)^2$$

$$= ٤م^2 + ١٦مل + ١٦ل^2$$

دورك الآن (٤)



أوجد ناتج $(ص - ٤)^2$

$$(ص - ٤)^2 = ص^2 - ٢ \times \dots + \dots = \dots$$

تمارين ذاتية :

١ أوجد ناتج كل ممّا يلي :

أ) $٣ س \times ٤ س^٢$

ب) $\frac{١}{٣} ص \times \left(\frac{٢}{٣} ص^٢ - ٩ ص + \frac{٣}{٢} \right)$

ج) $(٣ س^٢ + س - ٤) \times (٢ - س)$

د) $(س - ص) (س + ص)$

هـ) $(س + ٢) (س - ٧)$

و) $(٣ س + ٢ ص)^٢$

ز) $(١ - ٢ ع) (١ - ٢ ع + ٣ ع^٢)$

ح) $(١ - ٢ ص) (٥ - ٢ ص + ٢ ص^٢)$

٢ أوجد مربّع كل حدّانية في ما يلي :

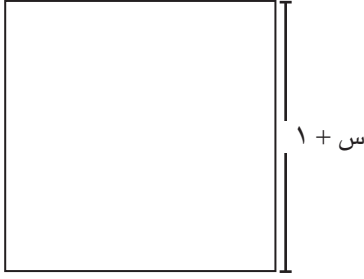
أ) $س - ٣$

ب) $٢ ص + ٣ س^٢$

٣ أوجد ناتج ما يلي :

أ) $(٣ هـ - ٢ م)^٢$

ب) $(٩ ك - ١)^٢$

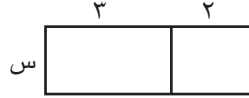


في البنود (٤ - ٦) ، إختَر الإجابة الصحيحة .

٤ مساحة المربع المقابل بالوحدات المربعة هي :

- ☐ أ $٢ + س$ ☐ ب $س^٢ + ٢ + س + ١$
☐ ج $س^٢ + س + ١$ ☐ د $س^٢ + ١$

٥ المقدار الجبري الذي يمثل مساحة الشكل أدناه بالوحدات المربعة هو :



- ☐ أ $٣ + ٢ س$
☐ ب $٣ + ٢ س$
☐ ج $٥ + س$
☐ د $٥ س$

٦ المقدار $٥ (س - ص) - (٥ س - ٥ ص)$ يساوي :

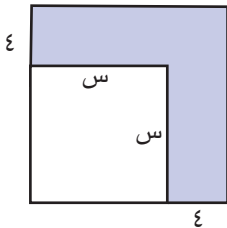
- ☐ أ $١٠ س - ١٠ ص$
☐ ب صفر
☐ ج $١٠ س$
☐ د $١٠ - ص$

مهارات تفكير عليا :

في البنود (٧ ، ٨) ، إختَر الإجابة الصحيحة .

٧ إذا كانت $١٦ = ب^٢$ ، $٩ = ب^٢$ ، فإن أكبر قيمة للمقدار $(ب - ١)^٢ =$

- ☐ أ ١ ☐ ب ٢٥ ☐ ج ٤٩ ☐ د ٧



٨ في الشكل المقابل ، مربع طول ضلعه س وحدة طول ،

تمت زيادة طول كل ضلع من أضلاعه

بمقدار ٤ وحدات كما هو موضح في الشكل .

أوجد مساحة المنطقة المظللة بدلالة س .

قسمة كثيرة حدود على حدّ جبري

Dividing Polynomials by Algebraic Terms

سوف تتعلّم : قسمة حدّ جبري على حدّ جبري آخر ، وقسمة كثيرة حدود على حدّ جبري .

استكشف



مساحة المنطقة المستطيلة
= الطول × العرض

تذكّر



$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$$

حيث $a \neq 0$ ، m ، $n \in \mathbb{Z}$

شاركت إدارة المدرسة متعلّميها فرحة الاحتفال باليوم الوطني
ويوم التحرير ، بوضع شاشة عرض مستطيلة الشكل أمام
مدخل الإدارة .

إذا كانت مساحة الشاشة هي ($١٠س^٢ + ٤س$) وحدة مربعة
وعرضها هو $٢س$ وحدة طول ، فأوجد طول الشاشة .

باستخدام قسمة الأعداد النسبية وما تعلّمته من قوانين الأسس ،
أكمل ما يلي :

$$\frac{\text{مساحة الشاشة}}{\text{عرض الشاشة}} = \text{طول الشاشة}$$

$$\frac{\dots\dots\dots}{س^٢} + \frac{\dots\dots\dots}{س^٢} = \frac{١٠س^٢ + ٤س}{س^٢} =$$

$$\dots\dots\dots + \dots\dots\dots = \text{وحدة طول}$$

ماذا تلاحظ ؟

عند قسمة كثيرة حدود على حدّ جبري ، نقسم كلّ حدّ من حدود كثيرة الحدود على هذا الحدّ الجبري .

ملاحظة : المقام أينما وُجد لا يساوي صفرًا .

مثال (١) :

أوجد ناتج ما يلي :

$$\frac{٤س^٥ص^٢ + ٢س^٣ص^٢}{٢س^٢} = \frac{٢س^٣ص^٢ + ٢س^٣ص^٢}{٢س^٢}$$

$$\frac{١٢س^٢ص^٣ + ٦س^٦ص}{٣س^٣} = \frac{١٢س^٢ص^٣ + ٦س^٦ص}{٣س^٣}$$

$$\frac{١٢س^٢ص^٣}{٣س^٣} + \frac{٦س^٦ص}{٣س^٣} = \frac{٤س^٢ص^٣ + ٢س^٣ص}{١} = ٤س^٢ص^٣ + ٢س^٣ص$$

اقسم كلّ حدّ على المقسوم عليه
بسّط



أوجد ناتج ما يلي :

$$\frac{٢٠ م ن ٤ - ٤ م ن}{٤ م ن} \quad ٢$$

$$\frac{٣ م ٢ ل ٦}{٢٧ م ٨ ل} = \dots\dots\dots ١$$

$$\dots\dots\dots - \dots\dots\dots =$$

$$\dots\dots\dots - \dots\dots\dots =$$

مثال (٢) :

إقسم (٨ س ٢ + ٢ س ٢ - ١٢ س) على ٢ س

الحل :

إقسم كل حد على المقسوم عليه
بسّط

$$\frac{٨ س ٢ + ٢ س ٢ - ١٢ س}{٢ س} = \frac{٨ س ٢}{٢ س} + \frac{٢ س ٢}{٢ س} - \frac{١٢ س}{٢ س}$$

$$٤ س + ٢ س - ٦ =$$



إقسم (٧ س ٥ - ٩ س ٢ + ٢ س ٢) على ٢ س

$$\frac{٧ س ٥}{\dots\dots\dots} + \frac{\dots\dots\dots}{٢ س} - \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} =$$

$$\dots\dots\dots + \dots\dots\dots - \dots\dots\dots =$$

عبّر عن فهمك



هل ناتج $\frac{١٥ س ٢ + ١٠ س - ٥}{٥ س}$ يمثل حدودية ؟ فسّر إجابتك .

تمارين ذاتية :



١ بسّط كلّ ممّا يلي : (حيث المقام لا يساوي صفرًا أينما وُجد .)

$$\dots\dots\dots = \frac{١٠ س ٤}{٢ س ٥} \quad \text{ب}$$

$$\dots\dots\dots = \frac{٦ س ٤}{٤ س} \quad \text{أ}$$

$$\dots\dots\dots = \frac{٢٨ ص ٥}{٢ ص ٧} \quad \text{د}$$

$$\dots\dots\dots = \frac{٣ ص ٢ - ٣ ص ٢}{٣ ص ٢} \quad \text{ج}$$

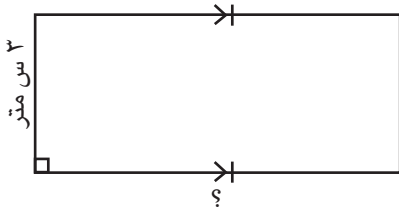
٢ إقسم ٨ س ٢ ص ٤ + ١٦ س ٤ ص ٥ - ٣٦ ص ٤ على ٢ س ٢ ص ٣

٣ إقسم ٩ هـ ٢ و ٥ - ٢٧ هـ ٢ و ٤ + ٥٤ هـ ٢ و ٤ على ٣ هـ ٢ و ٥

٤ أوجد ناتج ما يلي في أبسط صورة : (حيث س $\neq$ صفرًا)

$$\frac{٥ \text{ س } ٢ \text{ ص } ٤ + ٣ \text{ س } ٦ \text{ ص } ٧ - ١٥ \text{ س } ١٥}{١٥ \text{ س}}$$

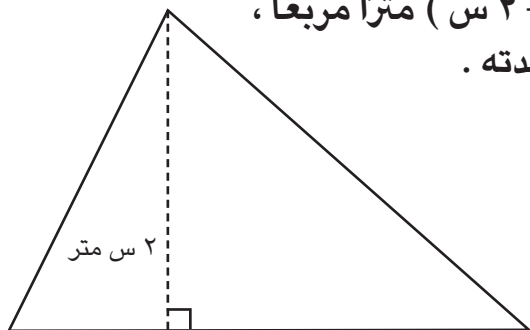
٥ مساحة المنطقة المستطيلة في الشكل المرسوم هي (٩ س ٢ + ٣ س) مترًا مربعًا ،
إذا كان عرض هذا المستطيل هو ٣ س مترًا ، فأوجد طول هذا المستطيل .



مهارات تفكير عليا :



٦ في الشكل المقابل مساحة المنطقة المثلثة هي (٤ س ٢ + ٢ س) مترًا مربعًا ،
إذا كان ارتفاع هذا المثلث ٢ س مترًا ، فأوجد طول قاعدته .



تقويم الوحدة التعليمية السادسة

Unit Six Assessment

أولاً: البنود المقالية

١ بسّط كلّ ممّا يلي : (المقام أينما وُجد $\neq$ صفراً)

..... = $\frac{٤ع}{٢ع}$ (ب)

.....

.....

..... = $\left(\frac{٢٢ - ٢}{٣ ب} \right)$ (د)

.....

.....

..... = $(٣ - س ص) (س٢ ص٢)$ (أ)

.....

.....

..... = $\frac{٣٦ - س٢ ص٢}{٩ س٢ ع}$ (ج)

.....

.....

٢ أحسب قيمة كلّ من كثيرات الحدود التالية عندما $س = ٢$

..... (أ) $٣ س٢ - ٢ س + ٤$

..... (ب) $٢ س٢ - س + ٧$

..... (ج) $\frac{١}{٨} س٤ + \frac{٣}{٢} س$

٣ اجمع كثيرات الحدود الآتية :

..... (ب) $٢ ع٢ - ٤ ع٢ + ٩ ، ٣ ع٢ + ٩ - ٥ ع٢ - ٢ ع٢$

.....

.....

.....

..... (أ) $٢ س٢ + ٦ س - ٤ ، ٥ س - س٢ - ٤$

.....

.....

.....

٤ اطرح ($٢ ص٢ - ٣ ص٢ + ٢ ص٢ - ٣$) من ($٣ ص٢ + ٣ ص٢ - ٣$)

.....

.....

.....

.....

.....

٥ إ طرح (س^٣ ص + س ص^٢ + ٧) من (٤ س ص^٢ + ٣ س^٢ ص + ٧)

٦ أوجد ناتج كلّ ممّا يلي :

أ (س + ٣) (س - ٩) =

ب مربع (ص^٢ + ١) =

ج (٣ + س) (٥ س^٢ - ٤ س - ٧) =

..... =

٧ إ قسم ٤ س^٢ ص^٣ + ١٢ س^٥ ص^٤ + ٥٤ س^٣ ص^٢ على ٣ س^٢ ص^٢.

٨ إ قسم ١٥ هـ^٢ ل^٢ - ١٢ هـ^٣ ل + ٩ هـ^٤ ل^٤ على ٦ هـ^٢ ل.

٩ منطقة مستطيلة مساحتها (٤ س^٤ + ٦ س^٢ - ٤ س) وحدة مربّعة ، وعرضها ٢ س وحدة طول . أوجد طولها .

ثانيًا: البنود الموضوعية

في البنود (٨ - ١) ظلّل أ إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلّل ب إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١	ناتج $\left(\frac{٣ \text{ س } ٤}{٦ \text{ س } ٤}\right) = ١$ ، حيث س $\neq ٠$	أ	ب
٢	٤ س - $\frac{١}{س}$ + ٥ س ^٢ هي كثيرة حدود	أ	ب
٣	ناتج جمع ٦ ص ^٢ ، ٢ ص ^٤ هو ٨ ص ^٦	أ	ب
٤	١٢ ل ^٢ ع ^٢ ، $\frac{١}{٥}$ ل ^٢ ع ^٢ ، ل ^٢ ع ^٢ هي حدود متشابهة	أ	ب
٥	٠,٢٥ س ^٢ ، $\frac{١}{٤}$ س ^٢ هما حدّان متساويان	أ	ب
٦	ناتج طرح ٥ س ^٢ من ٤ س ^٢ هو ٤ س ^٢	أ	ب
٧	س × س = ٢ س	أ	ب
٨	$\frac{١}{٥} = ٥ \times ٢ - ٥$	أ	ب

في البنود (٩ - ٢١) لكلّ بند أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلّل الإجابة الصحيحة :

٩ المعكوس الجمعي لكثيرة الحدود ٤ ص^٤ - ٢ ص^٢ + ٥ هو :

- أ ٤ ص^٤ + ٢ ص^٢ + ٥ ب ٤ ص^٤ - ٢ ص^٢ - ٥
- ج ٤ ص^٤ + ٢ ص^٢ - ٥ د ٤ ص^٤ - ٢ ص^٢ + ٥

١٠ ٢ س (٣ س + ٤) =

- أ ٦ س^٢ + ٤ ب ٦ س + ٨ ج ٦ س^٢ + ٨ س د ٦ س + ٨ س

(حيث س $\neq$ صفر) ،

١١ $\frac{٨ \text{ س } ٤ + ٢ \text{ س } ٨}{٤ \text{ س}}$

- أ ٢ س^٢ + ١ ب ٢ س^٢
- ج ٢ س^٢ + س د $\frac{١}{٢ \text{ س}}$

١٢) ناتج جمع $٣س٤ + ٤س٢ - ٣س٢ + ٢س٢ - ٤س٢ - ١س٢$: يساوي :

- أ $٥س٢ + ٤س٢ - ٢س٢ + ٢$ ب $٣س٢ + ٤س٢ - ٢س٢ - ٧س٢ + ١$
 ج $٣س٢ + ٣س٢ - ٧س٢ + ١$ د $٣س٢ + ٤س٢ - ٢س٢ + ٢س٢ - ٧س٢ + ١$

١٣) ناتج طرح $(٣س٢ - ٤س٢)$ من $(٣س٢ + ٤س٢)$:

- أ $٦س٢ - ٨س٢$ ب $٦س٢ + ٨س٢$ ج $٨س٢$ د $٦س٢$

١٤) إذا كان $\left(\frac{٦س٢}{٢س٢}\right) = ١$ ، فإن $م =$ ، (حيث $س \neq ٠$) :

- أ صفر ب ١ ج $\frac{٤س٢}{٢}$ د $١ -$

١٥) مربع الحدانية $٢س٢$ هو :

- أ $٤س٢ + ٤س٢$ ب $٤س٢ + ٤س٢$
 ج $٤س٢ + ٢س٢ + ٤س٢$ د $٤س٢ - ٢س٢ + ٤س٢$

١٦) ناتج جمع $٣س٢ - ٥س٢ + ١س٢$ ، $٥س٢ - ٣س٢$ يساوي :

- أ $٨س٢ - ٨س٢ + ١س٢$ ب $٦س٢ - ١٠س٢ + ١س٢$
 ج $٨س٢ - ٨س٢$ د ١

١٧) $\frac{٥س٢ص٢}{١٥س٢} =$ ، (حيث $س \neq ٠$) :

- أ $٣س٢ص٢$ ب $٣س٢ص٢$
 ج $٥س٢ص٢$ د $\frac{١}{٣}س٢ص٢$

١٨ عدد الحدود في كثيرة الحدود الناتجة من ضرب $(س + ٣)$ $(س + ٤)$ هو :

- أ ١ ☐ ب ٢ ☐ ج ٣ ☐ د ٤ ☐

١٩ ناتج $(٢١٠)^٢ \times ١٠^{-٤}$ هو :

- أ $١٠^{-١٠}$ ☐ ب ٢١٠ ☐ ج ١٠ ☐ د ١٠١٠ ☐

٢٠ ناتج $٨,٢ \times ١٠^٩ \div ٤,١ \times ١٠^٦$ هو :

- أ ٢×١٠^٩ ☐ ب ٢×١٠^٣ ☐ ج ٢×١٠^٢ ☐ د ٢×١٠^١٥ ☐

٢١ غرفة طعام مستطيلة الشكل قرّر ربّ الأسرة زيادة عرضها ، إفتراض أنّ عرض الغرفة زاد بمقدار ٨ أمتار ، إذا كانت الأبعاد كما هي موضّحة في المخطط ، فإنّ المساحة الكلّية لغرفة الطعام الجديدة بالمتّر المربّع تساوي :



أ $٨ + س$ ☐

ب $٨ ص + س ص$ ☐

ج $٨ س ص$ ☐

د $٨ ص + س$ ☐



س

٨

ص

المشروع الثالث : الرياضيات والحياة



لدينا في الحياة أمثلة كثيرة عن الأشكال الرباعية ،
يمكننا معرفة وتمييز كل شكل من خلال خواص كل
منها .

خطة العمل :

إصنع خريطة ذهنية لتصنيف الأشكال الرباعية توضّح العلاقة بين الأشكال الرباعية ، وتدريب المتعلمين على المقارنة والتعليل البصري والهندسي من خلال خصائص كل منها .

خطوات تنفيذ المشروع :

- ▶ يمكن تصنيف الأشكال الرباعية من خلال عمل خريطة ذهنية (مخطّط شجرة) لتوضيح العلاقة بين الأشكال الرباعية من خلال ذكر خواص كل منها .
- ▶ دَعِّم الخريطة بصور من الحياة اليومية تمثل كل شكل من الأشكال الرباعية .

علاقات وتواصل :

يمكن للمجموعات تبادل الأوراق للتأكد من صحّة ودقّة البيانات وتطبيق المشروع .

عرض العمل :

تعرض كل مجموعة عملها وتناقش خطوات تنفيذ العمل .

المراجع

- الرياضيات ، الصف الثامن ، الطبعة الثالثة ٢٠١٧ - ٢٠١٨ م ،
وزارة التربية ، قطاع البحوث التربوية والمناهج .
- الرياضيات ، الصف الثامن ، الطبعة الخامسة ٢٠٢٤ - ٢٠٢٥ م ،
وزارة التربية ، قطاع البحوث التربوية والمناهج .
- الرياضيات ، الصف الثامن ، الطبعة التجريبية ٢٠٢٣ - ٢٠٢٤ م ،
وزارة التربية ، قطاع البحوث التربوية والمناهج .

مصادر بعض الصور

- الغلاف : صورة الرجل الآلي ، مزوّدة من لجنة الرياضيات .
- ص ٢٦ : الصورة مزوّدة من لجنة الرياضيات .
- ص ٣٣ : الصورة مزوّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ٩٠ : الصورة مزوّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ٩٩ : الصورة مزوّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ١٠٠ : الصورة مزوّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ١٠٧ : الصورة مزوّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ١١٦ : الصورة مزوّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ١٢١ : الصورة مزوّدة من لجنة الرياضيات .



الرياضيات

الصف الثامن

الفصل الدراسي الثاني - القسم الثاني





الرياضيات

الصف الثامن

الفصل الدراسي الثاني – القسم الثاني

تأليف

أ. دلال مبارك فلاح الحجرف (رئيسًا)

أ. نوره عبد الله أبورقة العتيبي أ. ساره زايد شينان العجمي

أ. وسميه بادي هادي الرشيدي أ. عصام عبد الهادي السيد حسن

أ. عفاف عبد العزيز يعقوب الصانع

الطبعة الأولى

١٤٤٧ هـ

٢٠٢٥ – ٢٠٢٦ م

حقوق التأليف والطبع والنشر محفوظة لوزارة التربية – الإدارة العامة للتواحيه والبحوث والمناهج
إدارة البحوث التربوية والمناهج



أ. سمير عبدالله أحمد مرسي

ذات السلاسل - الكويت

أودع بمكتبة الوزارة تحت رقم (٩١) بتاريخ ١٦ / ١ / ٢٠٢٦ م





حضرة صاحب السمو الشيخ مشعل آل أحمد آل جابر آل صباح
أمير دولة الكويت

H.H. Sheikh Meshal AL-Ahmad AL-Jaber AL-Sabah
Amir Of The State Of Kuwait



سَمُو الشَّيْخِ صَبَّاحٍ خَالِدٍ الْحَمَادِ السَّبَّاحِ
وَلِيِّ عَهْدِ دَوْلَةِ الْكُوَيْتِ

H. H. Sheikh Sabah Khaled Al-Hamad Al-Sabah
Crown Prince Of The State Of Kuwait

مقدّمة

الحمد لله ربّ العالمين والصلاة والسلام على سيد المرسلين محمد بن عبدالله وصحبه أجمعين.

إنطلاقاً من التوجيهات السامية لحضرة صاحب السموّ أمير البلاد الشيخ مشعل الأحمد الجابر الصباح ، حفظه الله ورعاه ، بضرورة الإسراع في تنفيذ كافّة مشاريع الدولة التنموية ومن ضمنها على وجه الخصوص المشاريع التعليمية ، وتماشياً مع رؤية الكويت ٢٠٣٥ والتي تنادي بكويت جديدة فقد شرعت وزارة التربية في تطوير مناهجها التعليمية مستندة ، في ذلك إلى أهميّة رأس المال البشري كعنصر أساسي في تنمية الوطن ورفعته.

ولأنّ المناهج التعليمية هي قاعدة الهرم التعليمي إلى جانب المعلّم والمتعلّم ، وتعدّ أحد الروافد المهمّة في خلق جيل متعلّم وواع ، قادر على المشاركة في بناء المجتمع ، ولأنّ المناهج عبارة عن كمّ الخبرات التربوية والتعليمية التي تُقدّم للمتعلّم ، فقد أولت الوزارة أهميّة بتطوير المناهج حسب المعايير العلمية وذلك لتحقيق نقلة نوعية في الشكل والمضمون ، وإيماناً بأهميّتها وإنطلاقاً من أنّها ذات صفة عالمية مع الأخذ في الاعتبار خصوصية المجتمع الكويتي وبيئته المحليّة ، ملتزمة بأنّ تصبّ جميعها في تعزيز الهوية الوطنية وبعقلية منفتحة على الآخرين مع احترام حقوق الإنسان وحرّياته الأساسية والتمسك بمبادئ الإسلام والتسامح من جهة ، وغزيرة بمهارات القرن الواحد والعشرين لتعزيز المفاهيم الرياضية لجميع المتعلّمين من جهة أخرى لكي يكونوا في طليعة المنافسين في المسابقات العلمية والدولية ، وذلك عبر بناء الخطط التعليمية المعتمّدة من قطاع المناهج مؤكّدين على أهميّة التكامل بين الجوانب العلمية والتطبيقية حتّى تكون ذات طبيعة وظيفية مرتبطة بحياة المتعلّم ، متضمّنة في الكثير من بنودها التمارين ذات المستويات العليا في التفكير والفهم والتحليل والتركيب .

وقد تمّت صياغة وترتيب الكتاب المدرسي في منهجية خاصة ذات هيكل ومجالات معينة تتمحور حول العدّ والجبر والهندسة والقياس ، وأخيراً الإحصاء والاحتمال .

فقد تمّ بناء الكتاب وفق منهجية تربوية حديثة تراعي التدرّج المنطقي في المفاهيم والمهارات لبناء معرفة رياضية تراكمية تراعي الفروق الفردية بين المتعلّمين وتعزّز التفكير الرياضي العميق .

كما ويحوي الكتاب على وحدات تعليمية وموضوع محوري يتمّ إبرازه في مقدّمة كلّ وحدة ، تساعد على تنمية الفهم البنائي وربط المفاهيم الجديدة مع سياقات من واقع الحياة .

وحرصنا على إدراج التمارين المتنوعة مع نهاية كل درس ، والتي تنوّعت بين الأسئلة المباشرة والمسائل الحياتية وأسئلة مهارات تفكير عليا ، مثل التبرير والنقد وتعدّد طرق الحلّ والاستنتاج .

تنتهي كلّ وحدة بقسم خاصّ للتقويم لقياس مدى تحقيق الأهداف متضمّنة أسئلة شاملة للمفاهيم والمهارات التي تمّ تناولها ، حتّى تكون أداة تمكّنا من تحديد الاحتياجات التعليمية لاحقا .

ممّا سبق من معطيات وغيرها من الجوانب التعليمية والتربوية ، فقد تمّت صياغة وإعداد كتب الرياضيات لتحقيق نقلة نوعية ذات جودة عالية تلبي الطموحات المطلوبة وتكون نافذة واسعة تُطلّ على آمالنا وتطلّعاتنا في المستقبل لما نهدف إليه من تأسيس فكر رياضي في عقول أجيالنا القادمة تنهض بها أمتنا وتضعها في مكانها المناسب في الصفوف المتقدّمة ، ويُشار إليها بالبنان مع كلّ محفل.

المحتويات

الجزء الأول :

الوحدة التعليمية الأولى :

المجموعات والعلاقة

الوحدة التعليمية الثانية :

الأعداد النسبية

الوحدة التعليمية الثالثة :

الهندسة والقياس

الوحدة التعليمية الرابعة :

النسبة والتناسب – التحويلات الهندسية

الجزء الثاني :

الوحدة التعليمية الخامسة :

الأشكال الرباعية

الوحدة التعليمية السادسة :

المقادير الجبرية

الوحدة التعليمية السابعة :

تحليل المقادير الجبرية

الوحدة التعليمية الثامنة :

الاحتمال – الإحصاء

الوحدة التعليمية السابعة

تحليل المقادير الجبرية

رقم الصفحة	المحتوى
١٢٨	معايير المنهج ومؤشرات الأداء للوحدة التعليمية السابعة
١٢٩	مخطّط تنظيمي للوحدة التعليمية السابعة
١٣٠	هل أنت مستعدّ ؟ للوحدة التعليمية السابعة
١٣٢	(٧ - ١) العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ)
١٣٦	(٧ - ٢) التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر
١٤١	(٧ - ٣) تحليل الفرق بين مربّعين
١٤٧	(٧ - ٤) حلّ معادلة من الدرجة الأولى في متغيّر واحد
١٥٥	(٧ - ٥) حلّ معادلة من الدرجة الثانية في متغيّر واحد بالتحليل
١٦١	(٧ - ٦) حلّ متباينة من الدرجة الأولى في متغيّر واحد
١٦٨	تقويم الوحدة التعليمية السابعة

الوحدة التعليمية الثامنة

الاحتمال - الإحصاء

رقم الصفحة	المحتوى
١٧٦	معايير المنهج ومؤشرات الأداء للوحدة التعليمية الثامنة
١٧٧	مخطّط تنظيمي للوحدة التعليمية الثامنة
١٧٨	هل أنت مستعدّ ؟ للوحدة التعليمية الثامنة
١٨٠	(٨ - ١) طرق العدّ.....
١٩١	(٨ - ٢) فضاء العيّنة.....
١٩٧	(٨ - ٣) الاحتمال.....
٢٠٤	(٨ - ٤) مخطّطات الساق والأوراق المزدوج.....
٢١٠	(٨ - ٥) تمثيل البيانات باستخدام القطاعات الدائرية.....
٢١٥	(٨ - ٦) المتوسط الحسابي - الوسيط - المنوال.....
٢٢٢	تقويم الوحدة التعليمية الثامنة.....
٢٣٠	المشروع الرابع.....

الوحدة التعليمية السابعة



تحليل المقادير الجبرية

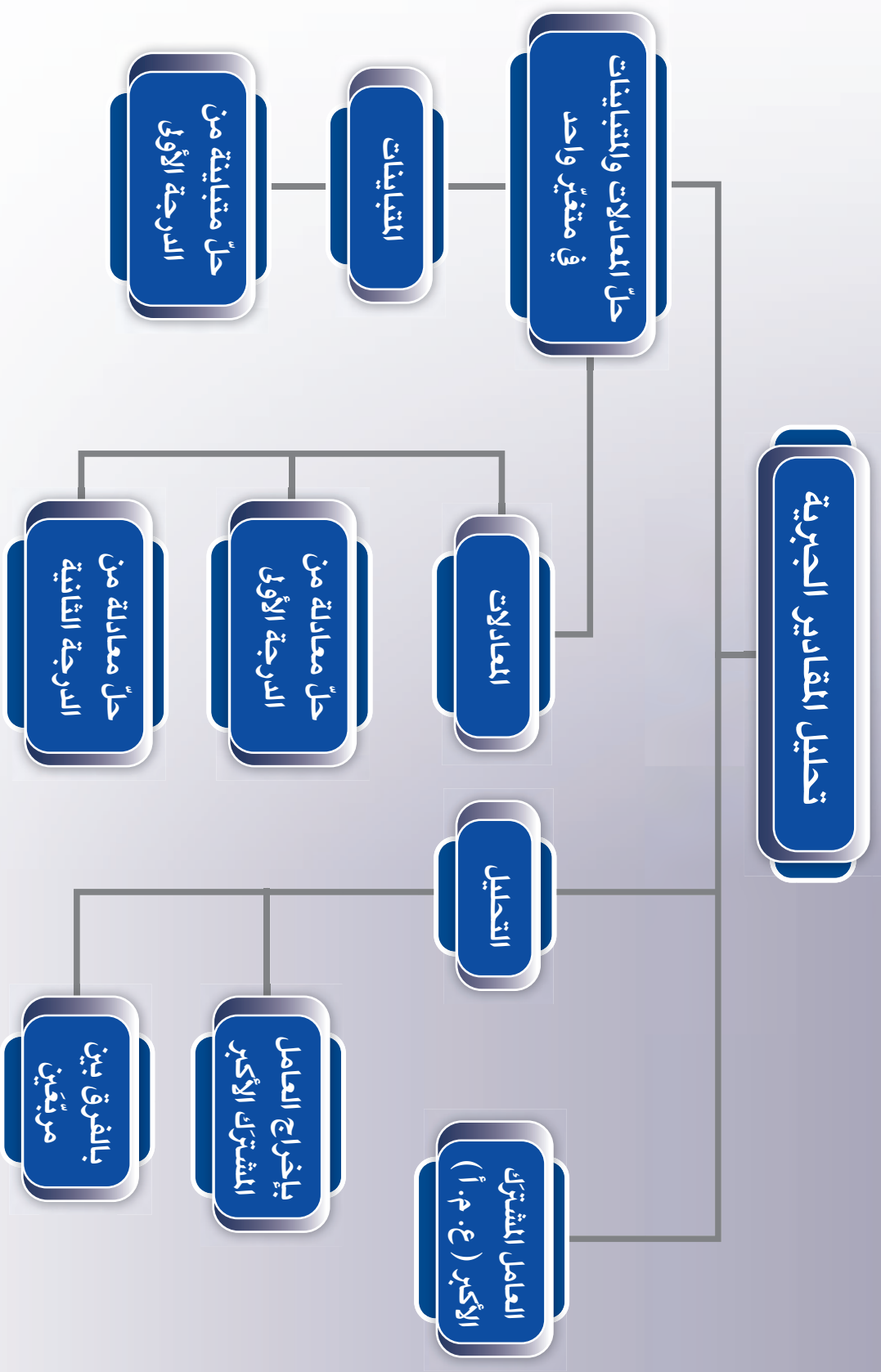
« الرياضيات والتطور في دولة الكويت »

في دولة الكويت ، تعتمد الكثير من المجالات العلمية والهندسية على المقادير الجبرية ؛ فالمخطّطون العمرانيون يستخدمونها للتعبير عن التغيّر في عدد السكّان عند إنشاء المدن الجديدة ، والمهندسون يستخدمونها لتمثيل تغيّر الحرارة والضغط في مشاريع الطاقة ، والعلماء في الفيزياء والكيمياء والأحياء يعبرون بها عن السرعة والكتلة والزمن ومعدّلات النموّ . المقادير الجبرية هي اللغة التي تسمح للمتخصّصين بوصف الظواهر المتغيّرة بدقّة ، ووضع توقّعات تساعد على تطوير الدولة وبناء المعرفة العلمية .



المجال	معايير المنهج	مؤشر الأداء
العدّ والجبر	- تمثيل الأعداد واستخدامها ضمن أشكال متكافئة متنوعة وإدراك أنّ مختلف أشكال الأعداد تتلاءم مع حالات مختلفة .	التذكر - الفهم - التحليل والتركيب - حلّ المشكلات - الاستنتاج - الاستكشاف والتقصي - النمذجة - الوسائط - التعرف - العلاقات - المقارنة والتمييز - التصنيف - معالجة البيانات - الترميز - التعليل - التعدّد - القراءة - التقويم
	- اختيار العمليات المناسبة واستخدامها لحلّ المسائل وتعليل الخيارات .	
	- استخدام إستراتيجيات متنوعة لوصف وتحليل العلاقات والتغيّرات .	
	- استخدام التمثيلات البيانية والجداول والتمثيلات الجبرية للقيام بالتوقّعات ولحلّ المسائل .	
	- تمثيل وتحليل المواقف والبنى الرياضية باستخدام الرموز الجبرية .	

مخطط تنظيمي للوحدة التعليمية السابعة



هل أنت مستعد؟

١ أوجد العامل المشترك الأكبر (ع.م.أ) لكل مما يلي :

- أ) ٦ ، ٤
 ب) ٨ ، ٢
 ج) ٣٦ ، ٩
 د) ٣٩ ، ٢٦ ، ١٣

٢ أوجد العوامل الموجبة للأعداد التالية :

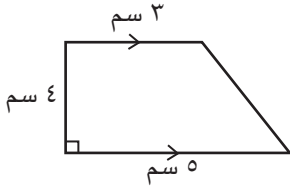
- أ) ٦
 ب) ١٨

٣ حلّ كلًا من الأعداد التالية إلى عواملها الأولية :

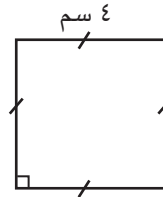
- أ) ٨
 ب) ٢١

٤ أوجد كلًا مما يلي :

ب)



أ)



مساحة المنطقة المربعة = مساحة منطقة شبه المنحرف =

٥ ضع كلًا مما يلي في أبسط صورة :

- أ) $\frac{5}{25}$ =
 ب) $\frac{63}{36}$ =

٦ حلّ كلّاً من المعادلات الآتية ، حيث $s \in \mathbb{Z}$:

أ) $s + 4 = 12$ ب) $s - 22 = 2$

.....
.....

ج) $s - 3 = 15$ د) $s + 5 = 7$

.....
.....
.....

هـ) $s + \frac{3}{6} = 7$

.....
.....
.....

٧ أوجد قيمة كلّ ممّا يلي :

أ) $2^4 = \dots$ ب) $2^7 = \dots$

ج) مربع العدد 3 = $\dots$ د) $\sqrt{100} = \dots$

هـ) $\sqrt{36} = \dots$ و) $\sqrt{0,16} = \dots$

٨ قارن بوضع $>$ أو $<$ أو $=$:

أ) $3 \bigcirc 5$

ب) $4 \bigcirc 6$

ج) $7 \bigcirc (7 -)$

٩ أوجد ناتج كلّ ممّا يلي :

أ) $10 \times 0,6 = \dots$

ب) $100 \times 0,15 = \dots$

ج) $0,4 \times 0,4 = \dots$

العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ) Greatest Common Factor (GCF)

٧ - ١

سوف تتعلّم : إيجاد (ع . م . أ) لحدّين جبريّين أو أكثر .

العبارات والمفردات :

Common Factor

عامل مشترك

Greatest Common Factor (GCF)

العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ)

حلّ وناقش



معلومة مفيدة :

العالم إقليدس هو أحد أبرز علماء الرياضيات في الحضارة اليونانية القديمة ، ويُلقَّب بـ « أبي الهندسة » ، عاش في مدينة الإسكندرية قبل أكثر من ألفي عام ، ووضع كتابه الشهير « العناصر » الذي يُعدّ من أهمّ المراجع في تاريخ الرياضيات . ومن أبرز ما نُسب إليه طريقة إيجاد العامل المشترك الأكبر (GCF) بين عددين ، وتُعرف اليوم باسم خوارزمية إقليدس .

١ أوجد العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ) للعددين ١٢ ، ١٨ بطريقة التحليل إلى العوامل الأولية :

$$\dots \times \dots \times 2 = 12$$

$$\dots \times \dots \times 2 = 18$$

العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ) للعددين هو :

$$\dots \times 2 = \dots$$

٢ وظّف معلوماتك السابقة في إيجاد (ع . م . أ) للحدود الجبرية في كلّ ممّا يلي :

أ) س ، س^٢

$$\text{س} = \text{س}$$

$$\text{س}^2 = \text{س}^2$$

ع . م . أ للحدّين هو س

ب) ٢ س^٥ ، ٤ س^٢

$$2 = 2$$

$$4 = 2 \times 2$$

ع . م . أ للحدّين هو

ج) ٣ ص^٢ ، ١٢ ص ، ٦ ص^٣

$$\dots = 3 \text{ ص}^2$$

$$\dots = 12 \text{ ص}$$

$$\dots = 6 \text{ ص}^3$$

ع . م . أ للحدود هو

تذكّر



العدد الأوّلي هو العدد الذي له عاملان موجبان مختلفان فقط ، هما الواحد والعدد نفسه .



لإيجاد العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ) لحدّين جبريّين أو أكثر :

١ نوجد العامل المشترك الأكبر للمعاملات العددية .

٢ نوجد العامل المشترك الأكبر للمتغيّرات (نأخذ كلّ متغيّر مشترك في جميع الحدود بأصغر أس له) .

٣ نضرب العوامل المشتركة معًا .

مثال (١) :

أوجد العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ) للحدود في كلّ ممّا يلي :

أ ١٥ س^٢ ، ٣٥ س^٤

الحلّ :

$$١٥ س^٢ = ٣ \times ٥ \times س^٢$$

$$٣٥ س^٤ = ٧ \times ٥ \times س^٤$$

نأخذ (ع . م . أ)
للمعاملات العددية
نأخذ
المتغيّر
المشترك
بأصغر أس

(ع . م . أ) للحدّين هو ٥ س^٢

ب ١٤ س^٢ ص^٢ ، ٢٨ س ص^٥ ، ٧ س^٤ ص

الحلّ :

$$١٤ س^٢ ص^٢ = ٢ \times ٧ \times س^٢ \times ص^٢$$

$$٢٨ س ص^٥ = ٢ \times ٢ \times ٧ \times س \times ص^٥$$

$$٧ س^٤ ص = ٧ \times س^٤ \times ص$$

نأخذ (ع . م . أ)
للمعاملات العددية
نأخذ
المتغيّر
المشترك
بأصغر أس

(ع . م . أ) للحدود هو ٧ س ص

دورك الآن (١)



أوجد العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ) للحدود في كلّ ممّا يلي :

أ ٦ م^٢ س^٤ ، ٤٢ م^٣ س^٢

$$٦ م^٢ س^٤ = ٢ \times \dots \times م^٢ \times س^٤$$

$$٤٢ م^٣ س^٢ = ٢ \times \dots \times م^٣ \times س^٢$$

(ع . م . أ) للحدّين هو

∴ (ع . م . أ) للحدّين هو

ب ١٠ ب^٥ ، ٣٠ ب^٢ ، ٤٠ ب^٣

$$\dots = ١٠ ب^٥$$

$$\dots = ٣٠ ب^٢$$

$$\dots = ٤٠ ب^٣$$

(ع . م . أ) للحدود هو

عبر عن فهمك



يقول خالد : إنَّ العامل المشترك الأكبر للحدَّين s^6 ، s^4 هو s^2 ، هل خالد على صواب ؟
وضَّح إجابتك .

مثال (٢) :

أوجد (ع . م . أ) للحدود المقدار الجبري الآتي :

$$4s + 6s^2 - 8s^3$$

الحل :

$$4s = 2 \times 2 \times s$$

$$6s^2 = 2 \times 3 \times s^2$$

$$8s^3 = 2 \times 2 \times 2 \times s^3$$

(ع . م . أ) للحدود في المقدار الجبري هو s^2

دورك الآن (٢)



أوجد (ع . م . أ) للحدود في كلٍّ من المقادير الجبرية الآتية :

(ب) $14m^2s^3 + 7m^3s^2 + 21ms^4$

(أ) $5s^2 - 10s^4 + 15s^3$

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

تمارين ذاتية :

١ أوجد (ع . م . أ) لكل ممّا يلي :

أ ١٦ ، ٣٢

ب ٣س^٢ ، س^٥

ج ٤ص^٣ ، ١٢ص^٢ ، ٢٤

د ٤س^٥ص^٣ ، ٨س^٢ص^٦

هـ ٤ل^٢ ، ١٤ل^٣ ، ١٨ل^٥

و ٢٦ب^٢ ، ٩ب

ز ٢١ب^٢ن^٣ ، ٧ب م ن^٤

ح ٥ص ع ، ٢٠س^٢ص

٢ أوجد (ع . م . أ) لحدود كلّ مقدار ممّا يلي :

أ ٤٨س^١ص + ٦س

ب ١٤هـ^٥ص^٢ - ٦٣ل^٣هـ^٣

ج ١٢ع^٢ص^٥س^٢ + ٦ع ص س + ٢٤ع س

د ٢٠س^٥ص^٦ - ١٥س^٦ص^٤ + ١٠ص^٣س^٢

مهارات تفكير عليا :

٣ أكتب ثلاثة حدود جبرية مختلفة بحيث يكون العامل المشترك الأكبر لها هو : ٦س ص^٢

التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر

Factorising Using The GCF

سوف تتعلّم : التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر للمقادير الجبرية .

العبارات والمفردات :

Prime Factorisation تحليل إلى عوامل أولية

Factor

عامل

Prime Factor

عامل أولي

حلّ وناقش

تذكّر



الخاصية التوزيعية :

س (ب + ج)

= س × ب + س × ج

١ أوجد (ع . م . أ) لحدود المقدار الجبري :

٦ س^٤ + ٣ س^٣ - ١٢ س^٢

(ع . م . أ) لحدود المقدار هو :

٢ إقسم (٦ س^٤ + ٣ س^٣ - ١٢ س^٢) على ٣ س^٢

$$\frac{6s^4 + 3s^3 - 12s^2}{3s^2} = \frac{6s^4}{3s^2} - \frac{3s^3}{3s^2} + \frac{-12s^2}{3s^2} = 2s^2 - s - 4$$

تذكّر



$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

حيث $a \neq 0$ ، $m, n \in \mathbb{Z}$

٣ أوجد ناتج ٣ س^٢ (٢ س^٢ + س - ٤)

$$3s^2(2s^2 + s - 4) = 6s^4 + 3s^3 - 12s^2$$

لاحظ أنّ :

$$6s^4 + 3s^3 - 12s^2 = 3s^2(2s^2 + s - 4)$$

• أصبح المقدار الجبري عبارة عن حاصل ضرب عاملين :

العامل الأول هو : العامل المشترك الأكبر لحدود المقدار الجبري

العامل الثاني هو : ناتج قسمة كل حد من حدود المقدار الجبري على العامل المشترك الأكبر .

• نسمّي ذلك بالتحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر .

خطوات التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر لمقدار جبري :

١ نوجد (ع . م . أ) بين حدود المقدار الجبري .

٢ نقسم كل حد من حدود المقدار الجبري على (ع . م . أ) .

٣ نضع المقدار الجبري على صورة حاصل ضرب عاملين .

المقام أينما وُجد لا يساوي صفرًا

مثال (١) :

حل المقدار الجبري : $٢٢ب + ٦ب - ٨ج$ بإخراج العامل المشترك الأكبر .

الحل :

(ع . م . أ) للحدود هو ٢

$$\frac{٢٢ب}{٢} + \frac{٦ب}{٢} - \frac{٨ج}{٢} = ١١ب + ٣ب - ٤ج$$

نوجد (ع . م . أ) بين حدود المقدار الجبري

نقسم كل حد من حدود المقدار على (ع . م . أ)

نضع المقدار الجبري على صورة حاصل ضرب عاملين $\therefore ٢٢ب + ٦ب - ٨ج = ٢(١١ب + ٣ب - ٤ج)$

دورك الآن (١)

حل كلاً مما يلي بإخراج العامل المشترك الأكبر :

أ ٥س - ١٠ص

(ع . م . أ) للحدود هو ٥

$$\frac{٥س}{٥} - \frac{١٠ص}{٥} = س - ٢ص$$

ب $٢٣ب + ١٩ب$

(ع . م . أ) للحدود هو

$$\frac{٢٣ب}{٢٣} + \frac{١٩ب}{٢٣} = ب$$

د ٨ص - ١٢ص

(ع . م . أ) للحدود هو

$$٨ص - ١٢ص = ٤ص(٢ - ٣)$$

ج ٦س + ٩س - ١٢س

(ع . م . أ) للحدود هو

$$\frac{٦س}{٦} + \frac{٩س}{٦} - \frac{١٢س}{٦} = س + ١.٥س - ٢س = ٠.٥س$$

$$٠.٥س(٢ + ٣ - ٤)$$

عبر عن فهمك (١)

يقول نواف إن: $8س^3 + 6س^2 + 2س = 2س = 2س (4س^2 + 3س)$
هل توافقه الرأي؟ فسر إجابتك.

مثال (٢):

حلّ المقدار $3س(2س - 2) + ص(2س - 2)$ بإخراج العامل المشترك الأكبر.
الحل:

$$(ع.م.أ) \text{ للحدّين هو } (2س - 2)$$

$$3س(2س - 2) + ص(2س - 2) = (2س - 2)(3س + ص)$$

مثال (٣):

أكتب المقدار في أبسط صورة: $\frac{3س^2ص + 5سص^2}{سص}$ مستخدماً التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر.
الحل:

$$(ع.م.أ) \text{ للمقدار } (3س^2ص + 5سص^2) \text{ هو } سص$$

$$\frac{3س^2ص + 5سص^2}{سص} = \frac{3س(سص) + 5ص(سص)}{سص} = \frac{3س + 5ص}{1}$$

أوجد (ع.م.أ) للبسط
حلّ البسط
بسّط المقدار

عبر عن فهمك (٢)

هل يمكنك حلّ مثال (٣) بطريقة أخرى؟ وضّح ذلك.

دورك الآن (٢)

أكتب المقدار التالي في أبسط صورة مستخدماً التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر.

$$\frac{2س^2 + 4س^3 - 12س^4}{2س}$$

ع.م.أ. لحدود المقدار $(2س^2 + 4س^3 - 12س^4)$ هو

$$\frac{2س^2 + 4س^3 - 12س^4}{2س} = \frac{2س^2(1 + 2س - 6س^2)}{2س} = \frac{2س(1 + 2س - 6س^2)}{2} = س(1 + 2س - 6س^2)$$



١ حلّ المقادير الجبرية التالية بإخراج العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ) :

أ) $9 + 9$ س

ب) 6 س $3 + 2$ س

ج) 5 س 2 ص + ص ل

د) 8 س 2 + 12 ص س

هـ) 7 ص 2 س 3 - 7 س 2

و) 6 س 2 ص 3 - 8 س 2 ص

ز) 12 س ص 2 + 7 س 2 ص 2

ح) 6 ل 2 ع 2 + 3 ل 3 ع 2 + 9 ع 6 ل 2

ط) س (م - ٣) - ص (م - ٣)

ي) 8 (ص + ٢) س + (ص + ٢) س

٢ أكتب المقادير التالية في أبسط صورة مستخدمًا التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر .

أ $\frac{س^٢ - س^٣}{س}$

ب $\frac{س^٣ - ٦س}{س^٣}$

ج $\frac{٥س^٤ص - ١٥ص^٢س^٣ + ١٠س^٢ص^٣}{٥س٥ص}$

د $\frac{ص(س + ٥) - ٣(س + ٥)}{٥ + س}$

مهارات تفكير عليا :

اختر الإجابة الصحيحة :

٣ إذا كان $س + ٢ص = ٧$ ، فإن قيمة المقدار $٢س + ٤ص$ هي :

أ ١٤

ب ٢٨

ج ١٨

د ٥٦

٤ إذا كانت $س - ٧ = ل + م = ١٠$ ، فإن $ل(س - ص) - م(س - ص) =$

أ ٣

ب ١٧

ج ٥١

د ٧٠

تحليل الفرق بين مربعين

Factorising the Difference of Two Squares

سوف تتعلّم : تحليل ثنائية الحدّ في صورة فرق بين مربعين .

العبارات والمفردات :

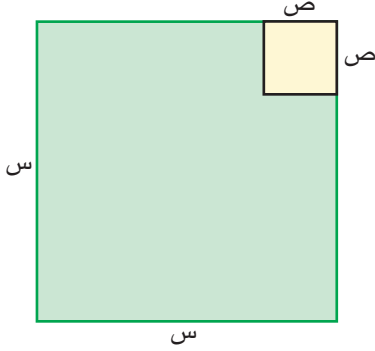
Difference of Two Squares

Factorising The Difference of Two Squares

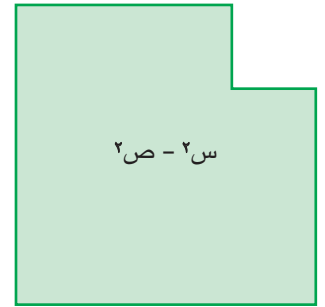
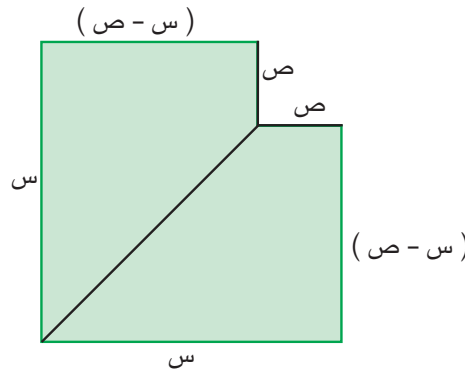
فرق بين مربعين

تحليل الفرق بين مربعين

استكشف



لدى فرج أرض زراعية مربّعة الشكل طول ضلعها س . إذا أراد استقطاع جزء مربّع الشكل طول ضلعه ص من إحدى زوايا المزرعة لعمل إسطبل للخيّل ، فساعِد فرجًا على حساب مساحة المنطقة المتبقّية .



معلومة مفيدة :



صفات الخيول العربية الأصيلة

الصحة الجيّدة ، الصبر والقدرة على تحمّل المشقات والفوز في السباقات الطويلة ، الشجاعة والحماس ، الذكاء والفتنة ، الوفاء لصاحبها وحبّ التعلّم .

نقسم الجزء المتبقّي إلى منطقتين متطابقتين

كلّ منهما تمثّل شبه منحرف .

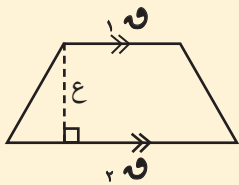
مساحة الجزء المتبقّي = ٢ × مساحة شبه المنحرف

$$س^2 - ص^2 = ٢ \times \left(\frac{\text{مجموع القاعدتين المتوازيّتين}}{٢} \right) \times \text{الارتفاع}$$

$$(\dots\dots\dots) \times \frac{\dots\dots\dots}{\cancel{٢} \times \cancel{٢}} =$$

$$(\dots\dots\dots) (\dots\dots\dots) = \text{وحدة مربّعة}$$

تذكّر



شبه المنحرف هو شكل رباعي فيه ضلعان فقط متقابلان متوازيان .

انتبه



$$٢ب + ٢ \neq (ب + ٢)(ب + ٢)$$

حيث $٢ \neq ٠$ ، $ب \neq ٠$

الفرق بين مربّعَي كمّيتين يساوي حاصل ضرب مجموع الكمّيتين في الفرق بينهما ، أي أنّ : $٢ب - ٢ = (ب + ٢)(ب - ٢)$

مثال (١) :

حلّل $٩ - ٢س$ ، ثمّ تحقّق من صحّة إجابتك .

الحلّ :

لاحظ أنّ : ٩ مربّع ٣ ، كذلك $٩ - ٢س$ مربّع ٣

$$٩ - ٢س = (٣ - س)(٣ + س)$$

$$= (٣ - س)(٣ + س)$$

التحقّق : إضرب $(٣ - س)(٣ + س)$

$$(٣ - س)(٣ + س) = ٩ - ٢س$$

إجمع الحدود المتشابهة

تذكّر



$$٢س = س \times س$$

دورك الآن (١)



حلّل ما يلي تحليلًا تامًّا :

أ) $٤ - ٢ص$

$$٤ - ٢ص = (٢ - ص)(٢ + ص)$$

$$= (٢ - ص)(٢ + ص)$$

ب) $٣٦ - ٢ص$

$$٣٦ - ٢ص = (٦ - ص)(٦ + ص)$$

$$= (٦ - ص)(٦ + ص)$$

ج) $١٦ - ٢ل$

$$١٦ - ٢ل = (٤ - ل)(٤ + ل)$$

$$= (٤ - ل)(٤ + ل)$$

د) $٦٤ - ٢ب$

$$٦٤ - ٢ب = (٨ - ب)(٨ + ب)$$

$$= (٨ - ب)(٨ + ب)$$

تذكّر



$$٢ب \times ٢ب = ٤ب$$

حيث $٢ \neq ٠$ ، $ب \neq ٠$ ، $٤ \neq ٠$

الضرب عملية إبدالية .

مثال (٢) :

حلّل ما يلي تحليلًا تامًّا :

أ) $١٨ - ٢ل$

الحلّ :

$$١٨ - ٢ل = (٣ - ل)(٣ + ل)$$

$$= (٣ - ل)(٣ + ل)$$

الحلّ :

$$١٨ - ٢ل = (٣ - ل)(٣ + ل)$$

$$= (٣ - ل)(٣ + ل)$$

مثال (٣) :

حلّ ما يلي تحليلًا تامًا :

أ) $(س - ٢)^٢ - ٦٤$

الحلّ :

$$(س - ٢)^٢ - ٦٤$$

$$= (س - ٢)^٢ - ٨^٢$$

$$= (س - ٢ - ٨) (س - ٢ + ٨)$$

$$= (س - ١٠) (س + ٦)$$

ب) $٤٩ - (س + ص)^٢$

الحلّ :

$$٤٩ - (س + ص)^٢$$

$$= ٧^٢ - (س + ص)^٢$$

$$= (٧ - (س + ص)) (٧ + (س + ص))$$

$$= (٧ - س - ص) (٧ + س + ص)$$

دورك الآن (٢)



وظّف التحليل في إيجاد ناتج كلّ ممّا يلي :

أ) $(١٥٥)^٢ - (٥٥)^٢$

$$= (١٥٥ + ٥٥) (١٥٥ - ٥٥)$$

$$= ٢١٠ \times \dots$$

$$= \dots$$

ب) $(١٢,٥)^٢ - (٢,٥)^٢$

$$= (\dots + \dots) (\dots - \dots)$$

$$= \dots \times \dots$$

$$= \dots$$

مثال (٤) :

حلّ ما يلي تحليلًا تامًا :

ص $(١ - ص) - ٩ (١ - ص)$

الحلّ :

$$ص (١ - ص) - ٩ (١ - ص) = (١ - ص) (ص - ٩)$$

$$= (١ - ص) (٣ - ص)$$

دورك الآن (٣)



حلّ كلّ ممّا يلي تحليلًا تامًا :

أ) $١٠٠ س - \frac{ص}{٨١}$

$$= ١٠٠ (س - \frac{ص}{٨١})$$

$$= (١٠٠ س - \frac{ص}{٨١}) (١٠٠ س + \frac{ص}{٨١})$$

ب) $\frac{٢٥}{٤٩} - \frac{١}{٤} س$

$$= \dots$$

$$= \dots$$



هل $(٢ + ب + ٥) (٢ + ب - ٥)$ يمثلان عاملين لفرق بين مربعين ؟ فسّر ذلك .

مثال (٥) :



أرض مربعة الشكل طول ضلعها هو $س$ وحدة طول ،
قامت شركة مقاولات ببناء أربع عمارات متطابقة ،
أرضية كل منها مربعة الشكل طول ضلعها هو $ص$ وحدة طول .
اكتب تعبيراً جبرياً يبين مساحة الأرض المتبقية ،
مستخدماً $س$ ، $ص$ ، ثم حلّ هذا التعبير .

الحل :

$$\begin{aligned} \text{مساحة الأرض المتبقية} &= \text{مساحة الأرض الكلية} - ٤ \times \text{مساحة أرض العمارة الواحدة} \\ &= س^2 - ٤ص^2 \\ &= (س - ٢ص) (س + ٢ص) \text{ وحدة مربعة} \end{aligned}$$

تمارين ذاتية :



١ أكمل كلاً ممّا يلي لتصبح العبارة صحيحة :

أ $س^2 - \dots = \dots (٨ + \dots) (٨ - س)$

ب $٤ص^2 - \dots = \dots (٩ + \dots) (٩ - \dots)$

ج $\dots - ٢٥س^2 = \dots (٤ + \dots) (\dots - ٤)$

د $٠,٢٥ - ٩ص^2 = ٢(\dots) - ٢(\dots)$

٢ حلّ كلاً ممّا يلي تحليلًا تامًا ، ثمّ تحقّق من صحّة إجابتك :

أ $١٠٠ - س^2$

ب $٢٥ - ٢ل$

.....	
.....	

٣ حلّ كلّ ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

أ) ٩ - ص^٢

ب) ١ - م^٢

ج) ٦٤ س^٢ - ٩ ص^٢

د) ٤٩ ن^٢ - ١٤٤

هـ) ٢٥ س^٢ - ١٠٠

و) ٢٠ ع^٢ - ٤٥

ز) ٧٥ - م^٢٣

ح) ٣٢ س^٢ - ٢ س

٤ حلّ كلّ ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

أ) (س + ٣)^٢ - ١٦

ب) (ن - ٤)^٢ - (٠, ١٦)^٢

٥ وظّف التحليل في إيجاد ناتج كلّ ممّا يلي :

أ) (٨٧)^٢ - (١٣)^٢

ب) (٩٥)^٢ - ٢٥

ج) (٢١٠)^٢ - (٢٠٩)^٢

د) (١١, ٦)^٢ - (١, ٦)^٢

٦ حلّ كلّ ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

أ $\frac{٤س}{٢ب} - \frac{٢ج}{٩}$

ب $\frac{١}{٣٦ص} - \frac{١}{٢س}$

ج $(٥ - ٤م)٢ - ١٢١$

د $\frac{١}{٤}هـ - ٢٥ع٢ل٢$

مهارات تفكير عليا :

اختر الإجابة الصحيحة :

٧ إذا كان $س + ص = ١٦$ ، $س - ص = ٤$ ، فإنّ $\sqrt[٣]{ص٢ - س٢}$ يساوي :

أ $٨ -$

ب $٨ -$

ج $٤ -$

د $٤ -$

حلّ معادلة من الدرجة الأولى في متغير واحد

٧ - ٤

Solving a First Degree Equation With One Variable

سوف تتعلّم : كيفية حلّ معادلة من الدرجة الأولى في متغير واحد .

العبارات والمفردات :

Additive Inverse

معكوس جمعي

First Degree Equation معادلة من الدرجة الأولى

Multiplicative Inverse

معكوس ضربّي

Variable متغيّر

Inverse Property

عملية عكسية

حلّ وناقش



في معرض الكويت الدولي للكتاب ، قدّمت إحدى دور النشر عرضاً لبيع القصّة المصوّرة الواحدة بمبلغ ٣ دنانير ، إذا أراد سالم شراء عدد من القصص المصوّرة بمبلغ ٢٦ ديناراً (علماً بأنّه يملك بطاقة خصم قيمتها ٤ دنانير عند شرائه من المعرض) ، فكم عدد القصص المصوّرة التي يستطيع سالم شراؤها ؟ أكتب معادلة تمثّل الموقف ثمّ حلّها .

نفرض أنّ عدد القصص المصوّرة = س

المبلغ ٢٦

خصم ٤ دنانير

التعبير اللفظي : قيمة القصص المصوّرة

٢٦ =

٤ -

٣ × س

المعادلة :

$$٣س - ٤ = ٢٦$$

$$٣س - ٤ + ٤ = ٢٦ + ٤ \quad (\text{العملية العكسية لعملية الطرح})$$

تكافئ المعكوس الجمعي

$$٣س = ٣٠$$

$$٣س \times \dots = ٣٠ \times \dots \quad (\text{العملية العكسية لعملية الضرب})$$

تكافئ المعكوس الضربي

$$\dots = ٣٠$$

∴ عدد القصص المصوّرة التي يستطيع سالم شراؤها قصص .

تحقّق من صحّة الحلّ .



معلومة مفيدة :

أقيم أوّل معرض

للكتاب في دولة الكويت

بتاريخ ١ نوفمبر ١٩٧٥ تحت اسم

« معرض الكويت للكتاب العربي » ،

ويوصف بأنّه ثاني أكبر معرض

للكتاب في العالم العربي بعد

معرض القاهرة الدولي للكتاب ،

وينظّمه المجلس الوطني للثقافة

والفنون والآداب في الكويت .

مثال (١):

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية حيث $s \in \mathbb{Z}$:

أ) $4s + 5 = 21$

الحل:

$$4s + 5 = (5 -) + 21 = (5 -) + 5 + 16$$

إضافة المعكوس

الجمعي للعدد ٥ لطرفي
المعادلة

$$4s = 16$$

$$s = \frac{16}{4} = 4$$

$$s = 4, \quad s \in \mathbb{Z}$$

∴ مجموعة الحل = { 4 }

ب) $2(s - 7) = 9$

الحل:

$$2(s - 7) = 9$$

$$2s - 14 = 9$$

$$2s = 9 + 14 = 23$$

$$2s = 23$$

$$s = \frac{23}{2} = 11 \frac{1}{2}$$

$$s = 11 \frac{1}{2}, \quad s \in \mathbb{Z}$$

∴ مجموعة الحل = { 11 }
١٤٨

تذكر



• المعكوس الجمعي للعدد ٢

هو (-2) بحيث

$$2 + (-2) = 0$$

• المعكوس الضربي للعدد ٢

هو $\frac{1}{2}$ بحيث $2 \times \frac{1}{2} = 1$

$$2 \times \frac{1}{2} = 1$$

الضرب في المعكوس الضربي للعدد ٤ لطرفي المعادلة

تذكر



الخاصية التوزيعية

$$2(s + 7) = 2s + 14$$

خاصية توزيع الضرب على الجمع

إضافة المعكوس الجمعي للعدد -١٤ لطرفي المعادلة

الضرب في المعكوس الضربي للعدد ٢ لطرفي المعادلة

تذكر



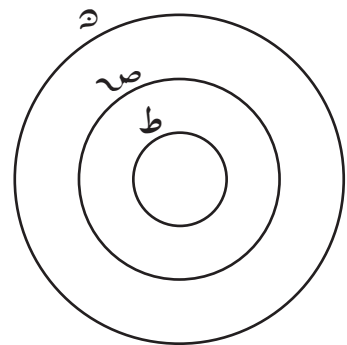
مجموعات الأعداد

ط : مجموعة الأعداد الكليّة

(الطبيعيّة)

ص : مجموعة الأعداد الصحيحة

ز : مجموعة الأعداد النسبية



$$\mathbb{Z} \supseteq \mathbb{V} \supseteq \mathbb{T}$$

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية حيث $s \in \mathbb{Z}$:

أ) $3s + 4 = 19$

$3s + 4 = \dots\dots\dots 19 = \dots\dots\dots$

$3s = 15$

$3s = 15 \dots\dots\dots$

$s = \dots\dots\dots$

$\{ \dots\dots\dots \} = \text{م. ح.}$

ب) $5(s - 2) = 4$

$5s - 10 = 4$

$5s = 14$

$5s = 14$

$5s = 14 \dots\dots\dots$

$s = \dots\dots\dots$

$\{ \dots\dots\dots \} = \text{م. ح.}$

مثال (٢):

أوجد مجموعة حل المعادلات التالية حيث $s \in \mathbb{Z}$:

أ) $\frac{1}{5}s + 8 = 19$

الحل:

$\frac{1}{5}s + 8 = 19 \Rightarrow \frac{1}{5}s = 11$

$\frac{1}{5}s = 11$

$\frac{1}{5}s \times 5 = 11 \times 5$

$s = 55$

$\{ 55 \} = \text{م. ح.}$

ب) $4s - 3 = 18$

الحل:

$4s - 3 = 18 \Rightarrow 4s = 21$

$4s = 21$

$4s = 21 \Rightarrow s = \frac{21}{4}$

$s = \frac{21}{4}$

$s = \frac{21}{4}$

$\{ \frac{21}{4} \} = \text{م. ح.}$

عبّر عن فهمك

طلب المعلم من محمد ونواف كتابة أول إجراء لحل المعادلة: $3s + 4 = 19$

$3s + 4 = 19 \Rightarrow 3s = 15$

$3s = 15$

نواف

$3s + 4 = 19 \Rightarrow 3s = 15$

$3s = 15$

محمد

في رأيك، أيهما على صواب؟ ولماذا؟

استخدام حلّ معادلة من الدرجة الأولى في متغيّر واحد لتحويل العدد الدوري إلى كسر اعتيادي :

مثال (٣) :

أكتب $0, \overline{3}$ على شكل كسر في أبسط صورة .

الحلّ :

كتابة العدد الدوري في صورة معادلة .

ليكن $n = 0, \overline{3}$ (١) افرض متغيّرًا واجعله يساوي العدد الدوري

إضرب الطرفين في ١٠ (لأن العدد الدوري فيه رقم عشري واحد يتكرّر)

$$10 \times n = 10 \times 0, \overline{3} \quad (2)$$

طرح الخطوة في (١) من الخطوة في (٢)

$$10n - n = 10 \times 0, \overline{3} - 0, \overline{3}$$

$$9n = 10 \times \frac{3}{10}$$

$$n = \frac{10 \times \frac{3}{10}}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} = 0, \overline{3} \therefore$$

أكتب الكسر في أبسط صورة

دورك الآن (٢)

أكتب $0, \overline{15}$ على شكل كسر في أبسط صورة .

ليكن $n = \dots\dots\dots$ (١) افرض متغيّرًا واجعله يساوي العدد الدوري

إضرب الطرفين في ١٠٠ (لأن العدد الدوري فيه رقمان عشريان يتكرران)

$$100n = \dots\dots\dots (2)$$

إطرح (١) من (٢) =

$$100n - n = \dots\dots\dots$$

$$\frac{99n}{99} = \frac{15}{1}$$

$$n = \frac{15}{99} = \dots\dots\dots$$

أكتب الكسر في أبسط صورة

$$\therefore 0, \overline{15} = \frac{5}{33}$$

مثال (٤) :

أوجد ثلاثة أعداد صحيحة متتالية مجموعها ١٨ .

الحل :

لنفرض أنّ الأعداد الصحيحة المتتالية هي س ، س + ١ ، س + ٢

إجمع الحدود المتشابهة $١٨ = (س + ١) + (س + ٢) + س$

$$١٨ = ٣ + س$$

أضف المعكوس الجمعي للطرفين $٣ + س = (٣ -) + ١٨ = (٣ -) + ٣ + س$

إضرب في المعكوس الضربي للطرفين $\frac{١}{٣} \times س = \frac{١}{٣} \times ١٥$

$$س = ٥$$

∴ الأعداد الصحيحة المتتالية هي : ٥ ، ٦ ، ٧ (تحقق)

مثال (٥) :

يقول سالم : تبلغ أختي من العمر ٤ أضعاف العمر الذي يبلغه أخي ،
وعند جمع عمريهما معًا ، فإنّ المجموع يصبح ٢٠ . فكم عمر أخ سالم ؟

الحل :

لنفرض أنّ عمر أخ سالم هو س

إذاً عمر أخت سالم هو ٤ س

$$٢٠ = س + ٤ س$$

$$٢٠ = س ٥$$

$$\frac{١}{٥} \times س = \frac{١}{٥} \times ٢٠$$

$$س = ٤$$

∴ عمر أخ سالم هو ٤ سنوات .

(تحقق)



إجمع الحدود المتشابهة

إضرب الطرفين في المعكوس الضربي للعدد ٥



١ أوجد مجموعة حلّ المعادلات التالية في $\mathbb{R}$.

١٤٣٣ هـ = ١٩١٥ م

ب ۵ سے $15 = 7 -$

ج ۵ + ۴ س = ۱۱

$$1 = 9 - \frac{2}{3} \text{ د}$$

$$6 = (2 - \text{س}) \times 4$$

و ۶ س ۱ - = ۸ - س

ز ۵ س = ۲ (س + ۳) .

٢ ستّة أضعاف عدد مضافًا إليه ١٢ يساوي ٣٠ ، أوجد هذا العدد .

.....

.....

.....

.....

٣ أكتب كلّ ممّا يلي على شكل كسر في أبسط صورة موضّحًا خطوات الحلّ :

أ) $\frac{٠,٦}{٠,١٨}$ ب) $\frac{٠,١٨}{٠,٦}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



٤ اشتريت فرح سماعات وشاحن تلفون بنصف الثمن أثناء تخفيضات هلا فبراير ، فدفعت ٢١ دينارًا . إذا كان السعر الأصلي للشاحن ٢٤ دينارًا ، فما ثمن السماعات الأصلي ؟

.....

.....

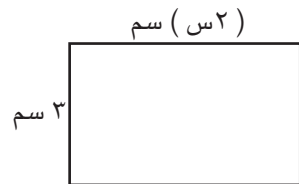
.....

.....

.....

.....

اختر الإجابة الصحيحة .



٥ في الشكل المقابل : إذا كان محيط المستطيل = ٣٤ سم ، فإنّ طول المستطيل بالسنتيمتر هو :

أ) ١٠ ب) ١٤ ج) ٧ د) ٢٠

٦ إذا كان ٣س + ١ = ١٦ ، فإنّ قيمة المقدار س^٢ - ٥ تساوي :

أ) صفر ب) ٣٠ ج) ٢٠ د) ٢٥

مهارات تفكير عليا :



٧ في حفل عشاء ، جلس الضيوف حول ٣ طاولات كبيرة بحيث كان عدد الضيوف متساوياً حول كل طاولة ، وجلس ٧ ضيوف وصلوا متأخرين حول طاولة جانبية أصغر . إذا كان العدد الإجمالي للضيوف ٣٧ ضيفاً ، فاكتب معادلة تصف الموقف ، ثم أوجد عدد الأشخاص الذين جلسوا حول كل طاولة من الطاولات الكبيرة .

اختر الإجابة الصحيحة .



٨ اشترى فهد مضرب تنس وثلاث كرات بثمان ٤٠ ديناراً ، إذا علمت أنّ ثمن المضرب يبلغ خمسة أضعاف ثمن الكرة الواحدة ، فإنّ ثمن المضرب بالدينار يساوي :

د ٥

ج ١٥

ب ٢٥

أ ٣٠

حلّ معادلة من الدرجة الثانية في متغيّر واحد بالتحليل

Solving Second Degree Equation with One Variable
by Factorising

سوف تتعلّم : كيفية حلّ معادلة من الدرجة الثانية في متغيّر واحد باستخدام التحليل .

العبارات والمفردات :

Second Degree Equation with One Variable
Factoriseمعادلة من الدرجة الثانية في متغيّر واحد
تحليل

حلّ وناقش

أوجد ناتج :

١ $0 \times 3 = \dots$

٢ $0 \times 4 = \dots$

٣ $0 \times 0 = \dots$

٤ $0 \times (2 - \text{س}) = \dots$

٥ $0 \times (5 - \text{س}) = \dots$

لتكن $0 = \text{ب} \times \text{ا}$ ماذا تتوقع ؟ إمّا $0 = \text{ا}$ أو $0 = \text{ب}$

معلومة مفيدة :

يُستخدم حلّ المعادلات
التربيعية في صناعة
الروبوتات لحساب
الزمن والسرعة بدقّة .

تذكّر



الضرب عملية إبدالية

تذكّر



«أو» تعني أحدهما أو كليهما

خاصية الضرب الصفري

إذا كان $0 = \text{ب} \times \text{ا}$ ، وكان $0 = \text{ب} \times \text{ا}$ ، فإن : $0 = \text{ا}$ أو $0 = \text{ب}$

مثال (١):

أوجد مجموعة حلّ المعادلة $(س + ٢) (س + ٣) = ٠$ ، حيث $س \in \mathbb{R}$ ، ثمّ تحقّق من صحّة الحلّ .

الحلّ :

$$(س + ٢) (س + ٣) = ٠$$

$$\text{إمّا } س + ٢ = ٠$$

$$س = -٢$$

$$-٢ \in \mathbb{R}$$

$\therefore$ مجموعة الحلّ = $\{-٢, -٣\}$

التحقّق من صحّة الحلّ :

$$\text{عندما } س = -٢$$

$$٠ \stackrel{?}{=} (-٢ + ٢) (-٢ + ٣)$$

$$٠ \stackrel{?}{=} ١ \times ٠$$

$$٠ \stackrel{\checkmark}{=} ٠$$

نعوّض

$$\text{عندما } س = -٣$$

$$٠ \stackrel{?}{=} (-٣ + ٢) (-٣ + ٣)$$

$$٠ \stackrel{?}{=} ٠ \times ١$$

$$٠ \stackrel{\checkmark}{=} ٠$$

نعوّض

وظّف خاصيّة الضرب الصفري

$$\text{أو } س + ٣ = ٠$$

$$س = -٣$$

$$-٣ \in \mathbb{R}$$

دورك الآن (١)



أوجد مجموعة حلّ المعادلة $(س - ٣) (س - ٤) = ٠$ ، حيث $س \in \mathbb{R}$ ، ثمّ تحقّق من صحّة الحلّ .

$$(س - ٣) (س - ٤) = ٠$$

$$\therefore \text{إمّا } س - ٣ = ٠$$

$$س = ٣$$

$$س = \frac{٣}{\dots} , \dots \in \mathbb{R}$$

$\therefore$ مجموعة الحلّ = $\{\dots, \dots\}$

التحقّق من صحّة الحلّ :

$$\text{عندما } س = \dots$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$\dots$$



يقول عبد العزيز إنَّ : $س = ١$ هو حلٌّ للمعادلة : $(س - ١) = ٢$.
فهل توافقه الرأي ؟ وضِّح ذلك .

مثال (٢) :

أ) أوجد مجموعة حلِّ المعادلة $٥س - ٢ = ٢س = ٠$ ، حيث $س \in \mathbb{Z}$.
الحل :

$$٥س - ٢ = ٢س = ٠$$

$$س (٥س - ٢) = ٠$$

$$٠ = ٢س - ٥س \quad \text{أو} \quad ٠ = ٥س - ٢س$$

$$٢ = ٥س$$

$$\frac{٢}{٥} = س$$

$$\therefore س = \frac{٢}{٥}$$

$$\frac{٢}{٥} \notin \mathbb{Z}$$

$$٠ \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore م. ح = \{ ٠ \}$$

ب) أوجد مجموعة حلِّ المعادلة $٩ = ٢س$ ، حيث $س \in \mathbb{Z}$.

الحل :

$$٩ = ٢س$$

$$٠ = ٩ - ٢س$$

$$٠ = (س - ٣) (س + ٣)$$

$$٠ = ٣ - س \quad \text{أو} \quad ٠ = ٣ + س$$

$$\therefore س = ٣ \quad \text{أو} \quad س = -٣$$

$$٣ \in \mathbb{Z} \quad -٣ \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \{ ٣, -٣ \}$$

حلل (باستخراج ع. م. أ)

وظف خاصية الضرب الصفري

لاحظ أن :

$$\text{المعادلتين : } ٩ - ٢س = ٠$$

$$(س - ٣) (س + ٣) = ٠$$

تُسمَّيان معادلتين متكافئتين .

حلل (فرق بين مربَّعين)

وظف خاصية الضرب الصفري

عَبِّرْ عَنْ فَهْمِكَ (٢)



هل للمعادلة $٠ = ٩ + ٢$ حلّ في $\mathbb{R}$ (مجموعة الأعداد النسبية) ؟ فسّر إجابتك .

دورك الآن (٢)



أوجد مجموعة حلّ المعادلة الآتية :

$$٢ ل - ٣٢ = ٠ \quad , \quad \text{حيث } ل \in \mathbb{R}$$

$$٢ = (٢ ل - \dots) - \dots$$

$$٠ = (\dots + ل) (\dots - ل)$$

$$٠ \neq ٢ \quad \text{إمّا } ٠ = ٤ + ل \quad \text{أو} \quad ٠ = ٤ - ل$$

$$\therefore ل = \dots \quad \text{أو} \quad ل = \dots$$

$$\mathbb{R} \ni ٤ - \quad \mathbb{R} \ni ٤$$

$\therefore$ مجموعة الحلّ = $\{\dots, \dots\}$

مثال (٣) :

أوجد مجموعة حلّ المعادلة $(٢ + س) - ١ = ٠$ ، حيث $س \in \mathbb{P}$.

الحلّ :

$$(٢ + س) - ١ = ٠$$

$$٠ = (١ - (٢ + س)) (١ + (٢ + س))$$

$$٠ = (١ + س) (٣ + س)$$

$$\text{إمّا } ٠ = ٣ + س \quad \text{أو} \quad ٠ = ١ + س$$

$$\therefore س = -٣ \quad \text{أو} \quad س = -١$$

$$\mathbb{P} \ni -٣ \quad \mathbb{P} \ni -١$$

$\therefore$ مجموعة الحلّ = $\emptyset$

حلّ (فرق بين مربّعين)

وظّف خاصيّة الضرب الصفري

عَبِّرْ عَنْ فَهْمِكَ (٣)



من مثال (٣) السابق ، أوجد مجموعة الحلّ إذا كانت $س \in \mathbb{V}$.

أوجد مجموعة حلّ المعادلة :

$$(س + ٣) - ٤ = ٠ \quad , \quad \text{حيث } س \in \mathbb{R}$$

$$٠ = (..... - (س + ٣)) (..... + (.....))$$

$$٠ = (..... + س) (..... + س)$$

$$٠ = (..... + س) \quad \text{أو} \quad ٠ = (..... + س)$$

$$..... = س \quad \text{.....} = س$$

$$س \in \quad س \in$$

∴ مجموعة الحلّ = {.....,}

تمارين ذاتية :

١ أوجد مجموعة حلّ كلّ من المعادلات التالية حيث $س \in \mathbb{R}$.

$$٠ = (س + ٦) (س + ٧) \quad \text{ب}$$

$$٠ = (س + ٣) (س - ١) \quad \text{أ}$$

$$٠ = ٧س - ٣س \quad \text{د}$$

$$٠ = (س + ٢) (س + ٥) \quad \text{ج}$$

٥ س^٢ - ٤٥ = ٠ (هـ)

.....

.....

.....

.....

٤ س^٢ = ٦٤ (و)

.....

.....

.....

.....

٠ = ٢٥ - ٢(٣ + س) (ز)

.....

.....

.....

.....

اختر الإجابة الصحيحة :

٢ إذا كانت س^٢ - ٤٩ = ٠ ، س $\geq$ ط ، فإن قيمة المقدار ٥ س + ٤ تساوي :

- أ) ٣٩ ب) ٣١ - ج) ٣٥ د) ٣٥ -

٣ مجموعة حل المعادلة ٩ س^٢ + ١ = ٠ ، حيث س $\geq$ ٥ تساوي :

- أ) $\{\frac{1}{3}\}$ ب) $\{-\frac{1}{3}\}$ ج) $\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\}$ د) $\emptyset$

مهارات تفكير عليا :

اختر الإجابة الصحيحة :

٤ إذا كان مربع عدد (لا يساوي صفرًا) مضافاً إليه نصفه يساوي العدد نفسه ،

فإن العدد هو :

- أ) ١ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{4}$ د) $\frac{1}{2} -$

حلّ متباينة من الدرجة الأولى في متغيّر واحد

Solving First Degree Inequality with One Variable

سوف تتعلّم : كيفية حلّ متباينة من الدرجة الأولى في متغيّر واحد .

العبارات والمفردات :

First Degree Inequality with One Variable
Solving Inequality

متباينة من الدرجة الأولى في متغيّر واحد
حلّ متباينة

حلّ وناقش



تهتمّ منيرة بمعرفة عدد السعرات الحرارية التي تحصل عليها كلّ يوم حتّى تحافظ على وزنها . إذا كانت تريد أن تأكل قطعاً من لوح الشوكولاتة بشرط ألا يزيد عدد السعرات الحرارية التي تحصل عليها منه عن ١٥٠ سعرة حرارية في اليوم الواحد ، وكانت كلّ قطعة صغيرة في لوح الشوكولاتة تحوي ١٥ سعرة حرارية ، فساعد منيرة على معرفة عدد القطع المسموح لها أن تأكلها في اليوم الواحد .



معلومة مفيدة :

يستخدم النّجّارون المتباينات لإيجاد العدد الأكبر من الخزائن التي يريدون صنعها إذا كان لديهم كمية محدّدة من الخشب .

أكمل ما يلي : لنفرض أنّ عدد القطع هو

عدد السعرات الحرارية في القطعة الواحدة يساوي

∴ العدد الكليّ للسعرات التي سوف تحصل عليها نعبر عنه بـ

أقصى عدد للسعرات التي تودّ أن تحصل عليها من لوح الشوكولاتة في اليوم الواحد يساوي

نعبر عن عدد القطع التي يمكن أن تأكلها منيرة بالمتباينة $150 \geq$ س

المتباينة : هي جملة رياضية (تعبير رياضي) تربط بين أعداد أو مقادير بإحدى العلاقات (الرموز) :

$\leq$ ، $\geq$ ، $<$ ، $>$

نحلّ المتباينة بإيجاد جميع قيم المتغيّر التي تحقّق صحّة المتباينة .
إذا عدد القطع التي يُسمح أن تأكلها منيرة هو

المتباينات				
التعبير اللفظي	• أصغر من	• أكبر من	• أصغر من أو يساوي	• على الأكثر
	• أقلّ من	• أكثر من	• أقلّ من أو يساوي	• لا يزيد على
الرموز	$>$	$<$	$\geq$	$\leq$

تعلم أن: $2 < 5$

عبارة صحيحة

لاحظ أن:

$$3 + 2 < 3 + 5$$

إضافة عدد نسبي موجب لطرفي المتباينة

$$1 - 2 < 1 - 5$$

إضافة عدد نسبي سالب لطرفي المتباينة

$$4 \times 2 < 4 \times 5$$

الضرب في عدد نسبي موجب لطرفي المتباينة

$$\text{بينما } 5 \times (-2) > 2 \times (-2) \quad \text{الضرب في عدد نسبي سالب لطرفي المتباينة}$$

خواص المتباينات: إذا كانت a, b, c أعدادًا نسبية وكانت $a < b$ ، فإن:

$$1 \quad a + c < b + c$$

$$2 \quad a - c < b - c$$

$$3 \quad a \times c < b \times c \quad , \quad c > 0 \quad (c \text{ عدد نسبي موجب})$$

$$4 \quad a \times c > b \times c \quad , \quad c < 0 \quad (c \text{ عدد نسبي سالب})$$

تذكر



خطوات حل المتباينة من الدرجة الأولى في متغير واحد هي نفسها خطوات حل المعادلة من الدرجة الأولى في متغير واحد.

التعبير عن المجموعة بذكر العناصر

مثال توضيحي:

أوجد مجموعة حل المتباينة $3 > 2 - s$

أ) عندما $s \geq 0$

$$s - 2 + 2 > 2 + 3 - 2 \quad \text{حل متباينة من الدرجة الأولى}$$

$$s > 5$$

$$\text{نلاحظ } s \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

أو

حل المتباينة هو مجموعة الأعداد الطبيعية الأصغر من 5 التعبير عن المجموعة بالصفة المميزة اللفظية

ب) عندما $s < 0$

$$s - 2 + 2 > 2 + 3 - 2$$

$$s > 5$$

$$\text{نلاحظ } s \in \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, -1, -2, \dots\}$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, -1, -2, \dots\}$$

أو

حل المتباينة هو مجموعة الأعداد الصحيحة الأصغر من 5 التعبير عن المجموعة بالصفة المميزة اللفظية

ج) عندما $س \geq ٥$

$$س - ٢ - ٣ > ٢ + ٢$$

$$س > ٥$$

- هل تستطيع كتابة مجموعة الحلّ بذكر العناصر ؟ كلاً
- أكتب مجموعة الحلّ بالصفة المميّزة اللفظية .

حلّ المتباينة هو مجموعة الأعداد النسبية الأصغر من ٥ التعبير عن المجموعة بالصفة المميّزة اللفظية

مثال (١) :

حلّ كلاً من المتباينات التالية حيث $س \geq ٥$.

أ) $٣ \leq س$

$$\frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣} \leq \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣}$$

$$س \leq ٣$$

حلّ المتباينة هو مجموعة الأعداد النسبية الأكبر من
أو تساوي ٣

ب) $٢ > س + ٤$

$$٢ > س + ٤ - ٤$$

$$\frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣} > \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣}$$

$$س > ١$$

حلّ المتباينة هو مجموعة الأعداد النسبية الأصغر
من ١ -

دورك الآن (١)

حلّ كلاً من المتباينات التالية حيث $س \geq ٥$.

أ) $١ > س + ٣$

$$٢ > س$$

$$٢ \times \dots > \dots \times \dots$$

حلّ المتباينة هو

ب) $\frac{٣-}{٤} \geq \frac{س}{٨}$

$$\frac{٣-}{٤} \times \dots \geq \frac{س}{٨} \times \dots$$

$$\dots \geq س$$

حلّ المتباينة هو

عبّر عن فهمك

هل $س = ٥$ أحد حلول المتباينة : $٩ - س \geq ١$ ؟ فسّر إجابتك .

مثال (٢) :

حلّ كلاً من المتباينات التالية حيث $s \in \mathbb{R}$.

أ) $5 - 6 \leq 7$

الحلّ :

$$5 - 6 \leq 7$$

$$6 - 6 \leq 7 - 6$$

$$0 \leq 1$$

$$0 \leq 1 \Rightarrow 13 - \left(\frac{1}{5} - \right) \leq \left(\frac{1}{5} - \right) \times 13$$

$$0 \leq \frac{13}{5}$$

$$0 \leq \frac{2}{5}$$

حلّ المتباينة هو مجموعة الأعداد النسبية الأصغر من أو تساوي $\frac{3}{2}$

ب) $5 + s < 4 - 3 - s$

الحلّ :

$$5 + s < 4 - 3 - s$$

$$7 < 4 - 3$$

$$7 < 4 - 3 - 4$$

$$7 < -3$$

$$1 - \frac{1}{5} < \frac{1}{5} \times \frac{1}{5}$$

$$1 < \frac{1}{5}$$

حلّ المتباينة هو مجموعة الأعداد النسبية الأكبر من -1

انتبه



عند ضرب طرفي المتباينة في عدد نسبي سالب نعكس العلاقة بين طرفي المتباينة .

انتبه



ضع المتغيرات في جهة واحدة من المتباينة .

حلّ المتباينة

دورك الآن (٢)



حلّ المتباينة $2 + s \geq 1,5$ حيث $s \in \mathbb{R}$.

$$2 + s \geq 1,5$$

$$0 \geq 1,5$$

$$1,5 - 0 \geq 0$$

$$s \geq 0$$

حلّ المتباينة هو

مثال (٣) :

قدّمت إحدى شركات الطيران عرضاً لدرجة رجال الأعمال بحيث يكون مجموع وزني الحقيبتين معاً لا يتجاوز ٦٥ كجم ، حجز يوسف رحلة على درجة رجال الأعمال . إذا كان وزن حقيبته الأولى ٣٣ كجم ، فكم يبلغ وزن حقيبة يوسف الثانية بحيث لا يتجاوز وزن الحقيبتين معاً الحدّ المسموح به ؟

الحلّ :



لنفرض أنّ وزن حقيبة يوسف الثانية هو س

$$س + ٣٣ \geq ٦٥$$

$$س + ٣٣ - (٣٣ -) + ٦٥ \geq (٣٣ -) + ٣٣ + ٣٣$$

$$س \geq ٣٢$$

إذاً وزن حقيبة يوسف الثانية أصغر من أو يساوي ٣٢ كجم .

تمارين ذاتية :



١ حلّ كلّاً من المتباينات التالية في ٥ .

أ) $١١ \leq ٧ - س$

ب) $١ > ٥ + \frac{١}{٢} ص$

ج) $٥ - ٤ ع \leq ٢$

د) $٩ < ٥ - (٣ + س) ٢$

٥) $3س + 7 > 5س + 3$

و) $3(س - 6) \geq 5(س - 4)$

ز) $2ص + 4,8 < 2,4$

ح) $5س + 2 \geq 2(س - 3)$

٢) أراد معلّم شراء خمس هدايا من النوع نفسه لتوزيعها على المتعلّمين المتفوّقين في الفصل، بحيث لا يتعدّى ثمن ما يُنفقه على هذه الهدايا ٧٠ دينارًا والتي تشمل ١٠ دنانير مصاريف الشحن. أكتب متباينة تعبّر عن ذلك، ثمّ حلّ المتباينة لإيجاد أعلى سعر للهدية الواحدة.



٣) أوجد أصغر ثلاثة أعداد زوجية متتالية مجموعها أكبر من ١٢٦.

اختر الإجابة الصحيحة :

٤ أي المتباينات الآتية تعبر عن الموقف التالي ؟
« يحتاج ناصر ساعتين على الأقلّ لحلّ الواجب »

ب) $2 \geq$ س

أ) $2 >$ س

د) $2 \leq$ س

ج) $2 <$ س

٥ المتباينة التي تعبر عن « ضعف العدد س أكبر من ٧ » هي :

ب) $7 > 2 - س$

أ) $7 > 2 + س$

د) $7 < 2 س$

ج) $7 > 2 س$

٦ المتباينة التي يكون أحد حلولها في $س$ هو $س = -3$ هي :

د) $3 < س -$

ج) $س + 3 < -2$

ب) $س - 3 \leq -5$

أ) $2 - س < -6$

٧ إذا كانت $6 \geq س \geq 2$ ، $3 - س \geq 5$ ، فإنّ أكبر قيمة للمقدار : $س^2 - ص^2$ هي :

د) ٣٦

ج) ٤٥

ب) ٢٧

أ) ٦١

تقويم الوحدة التعليمية السابعة Unit Seven Assessment

أولاً : البنود المقالية

١ أوجد العامل المشترك الأكبر (ع.م.أ) لكل ما يلي :

أ) ٩ هـ^٣ و ٢٧ هـ^٢

ب) ١٤ س^٥ ص^٣ ، ٧ س^٢ ص^٥

ج) ١٥ ك^٦ ل^٦ ، ٢٥ ك^٥

٢ حلّ كلّاً من المقادير الجبرية التالية بإخراج العامل المشترك الأكبر (ع.م.أ) :

أ) ٩ ص^٢ + ٢٧ ص

ب) ٤ س - ٨ س^٣ ص^٢ + ٢٤ س^٤ ص^٣

٣ حلّ كلّاً ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

أ) ٣٦ هـ^٢ - ٣٦

ب) (٩ - ك)^٢ - ٢٥

٤ حلّ كلّاً من المعادلات التالية حيث س ، ص ∈ م .

أ) $\frac{س}{٤} - ٢ = ١٠$

ب) ٣ س - ١ = ٥ + س

ج) $0 = (ص - ٢) (ص + ٧)$

د) $0 = ٦٤ - ٢(٥ - س)$

هـ) $0 = (س + ٣) (٢س + ٩)$

و) $١٠ص - ٩٠ = ٠$

ز) $١٠٠ = ٤س - ٢$

٥ حلّ كلّاً من المتباينات التالية حيث س ، ص $\in \mathbb{R}$.

أ) $١١ < ٥ - ٤س$

ب) $٨ > ٢ - ٦ص$

ج) $7 - 3 \geq 5$

د) $9 \text{ ص} - 2,9 \leq 7,1$

هـ) $8(3 - 3) < 4(3 - 3)$

ثانيًا: البنود الموضوعية

في البنود (١ - ٨) ظلّل أ إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلّل ب إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١	العامل المشترك الأكبر (ع.م.أ) بين ٣ هـ و ١٢ هـ و ٣ هـ و ٣ هـ و	أ	ب
٢	٥ ص + ١٠٠ ص = ٥ ص (٢٠ + ص)	أ	ب
٣	مجموعة حلّ المعادلة س ^٢ - ٣٦ = ٠ حيث س ∈ ط هي { ٦ - ، ٦ }	أ	ب
٤	حلّ المتباينة ٧ س < ٤٢ حيث س ∈ ط هو { ٦ - }	أ	ب
٥	حلّ المتباينة ٣ س > ٢١ ، حيث س ∈ ط هو مجموعة الأعداد النسبية الأكبر من ٧	أ	ب
٦	حلّ المعادلة س ^٢ = -١٦ حيث س ∈ ط هو ∅	أ	ب
٧	٢ + ٨ س = ٢ × ٤ س	أ	ب
٨	س ^٢ + ٩ = (س + ٣)(س - ٣)	أ	ب

لكل بند من البنود (٩ - ٢١) أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلّل الإجابة الصحيحة :

٩ المقدار $\frac{٥س٥ص}{٢٥س٥ص}$ في أبسط صورة هو :

- أ ٢٠ ص ب $\frac{١}{٥}$ ص ج $\frac{٥}{ص}$ د ٣٠ ص

١٠ إذا كان (س + ص) = ٣ ، (س - ص) = ٤ ، فإن س^٢ - ص^٢ =

- أ ١ ب ٧ ج ١٢ د ٢٥

١١ إذا كان س^٢ - ص^٢ = ٣٦ ، (س + ص) = ٦ ، فإن (س - ص) =

- أ ٦ - ب ٦ ج ١٢ د ٣٦

١٢ إذا كان $٢ = ١٦$ ، $٩ = ٢$ ، فإن $(٢ + ب) (ب - ١) =$

د ٧

ج ١٤٤

ب ٧ -

أ ٢٥

١٣ مجموعة حلّ المعادلة $٢ = -٦٤$ حيث $٣ \ni ٣$ هو :

د $\{٤ - ، ٤\}$

ج $\{٨ -\}$

ب $\emptyset$

أ $\{٨ - ، ٨\}$

١٤ مجموعة حلّ المعادلة $٢ = ١٤٤$ حيث $٣ \ni ٣$ هو :

د $\{١٢ - ، ١٢\}$

ب $\{١٤ - ، ١٤\}$

ج مجموعة خالية

أ $\{١٢\}$

١٥ العدد الذي يمثل حلّ المعادلة $(٥ - ص) = ٠$ حيث $(٣ \ni ٣)$ هو :

د ١٠

ج ٥ -

ب ٥

أ صفر

١٦ حلّ المتباينة $٥ > ٢٠$ ، حيث $٣ \ni ٣$ هو :

أ مجموعة الأعداد النسبية الأكبر أو تساوي ٤

ب مجموعة الأعداد النسبية الأصغر أو تساوي ٤

ج مجموعة الأعداد النسبية الأصغر من ٤

د مجموعة الأعداد النسبية الأكبر من ٤

١٧ المتباينة $٣ > ٢٧$ تكافئ المتباينة :

د $١ < ٣$

ج $١ > ٣$

ب $٩ < -$

أ $٩ < س$

١٨ إذا كان ثمن تذكرة الدخول إلى مدينة ألعاب هو ٥ دنانير وثمان تذكرة كلّ لعبة هو ٠,٧٥٠ دينارًا ، فإنّ تكلفة لعب عدد س من الألعاب نعبر عنها بـ :

د $٠,٧٥٠ \times س$

ج $٠,٧٥٠ \times ٥ + س$

ب $٠,٧٥٠ + س$

أ $(٥ + س) \times ٠,٧٥٠$

١٩ إذا كان $هـ + ل = ٤٠$ وكان كل من $هـ$ ، $ل$ عددًا صحيحًا موجبًا يقبل القسمة على العدد ٥ وكان $هـ < ل$ ، فإن إحدى قيم $هـ$ الممكنة هي :

د ٤٥

ج ٤٠

ب ٣٠

أ ١٥

٢٠ تحليل المقدار $س^٢ (س + ٢) - ٢٥ (س + ٢)$ تحليلًا تامًا هو :

ب $(س + ٢) (س - ٥) (س - ٥)$

أ $(س - ٢) (س - ٥) (س - ٥)$

د $(س + ٢) (س - ٥) (س + ٥)$

ج $(س - ٢) (س + ٥) (س + ٥)$

٢١ إذا كان $٣س - ١ = ١١$ ، فإن قيمة $٨س - ٧$ هي :

د ١٧

ج ٣٩

ب ٢٨

أ ٢٥

الوحدة التعليمية الثامنة



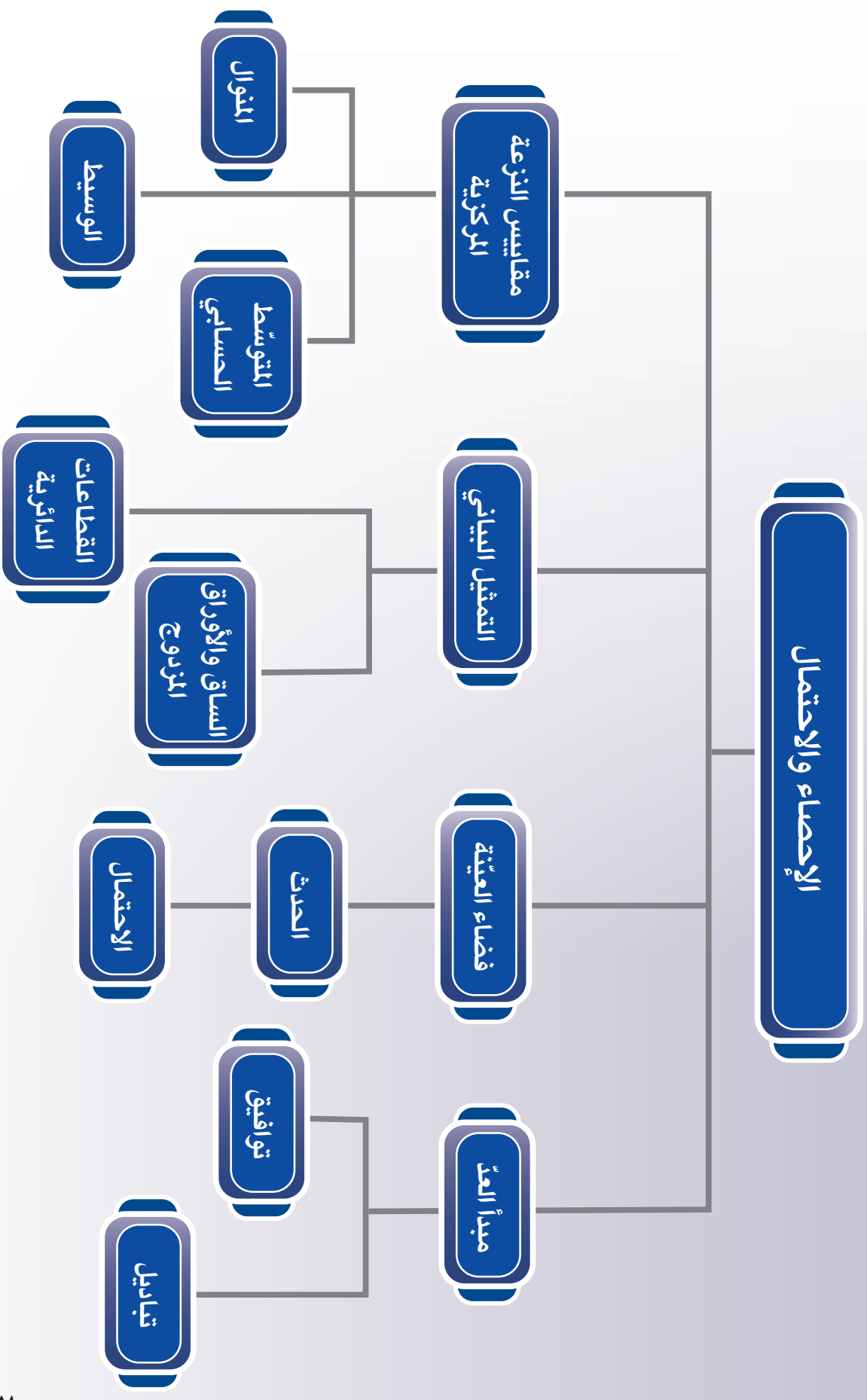
الاحتمال – الإحصاء

علم الوراثة

يستخدم علماء الأحياء مخططات الشجرة البيانية لتحليل ما قد يحدث في أجيال مختلفة من الحيوانات للتقليل من احتمالية حدوث طفرات وراثية غير مرغوب فيها ، والتمكّن من إنتاج سلالات حيوانية جديدة يمكن الاستفادة منها .

المجال	معايير المنهج	مؤشر الأداء
الإحصاء والاحتمال	جمع البيانات وتنظيمها وعرضها وتحليلها وتفسيرها باستخدام تمثيلات ومقاييس وإجراءات إحصائية .	الفهم - التذكّر - الاستنتاج - التعرّف - الاستدلال - التنظيم - التمثيل - التحليل والتركيب - معالجة البيانات - النمذجة - التصنيف - القوانين - حلّ المشكلات - الاستكشاف والتقصي - الوسائط - التعدّد - المقارنة والتمييز
	تطبيق مفاهيم الاحتمال النظري والتجريبي للقيام بالتوقعات والاستنتاجات .	

مخطط تنظيمي للوحدة التعليمية الثامنة



هل أنت مستعدّ ؟

١ أكتب كلّاً من الكسور التالية في أبسط صورة :

$$\dots\dots\dots = \frac{2}{4} \text{ (أ) } \dots\dots\dots = \frac{2}{10} \text{ (ب) }$$

$$\dots\dots\dots = \frac{3}{9} \text{ (ج) } \dots\dots\dots = \frac{4}{16} \text{ (د) }$$

٢ استخدام مبدأ العدّ لإكمال ما يلي :

عدّ النواتج الممكنة التي تحصل عليها :

١ عند رمي مكعب مرّقم من ١ إلى ٦ ، ثمّ قطعة نقود معدنية وملاحظة الوجه العلوي لكلّ منهما .

٢ عند طلب شوكولاتة وقهوة من ضمن الخيارات (٦ أنواع شوكولاتة ، و ٣ أنواع قهوة) .

٣ عند اختيار ثلاثة أنواع ألوان مختلفة من ضمن الخيارات (٥ ألوان خشبية ، و ٧ ألوان زيتية ، و ٨ ألوان مائية) .

٤ عند رمي مكعب منتظم مرّقم من ١ إلى ٦ مرّة واحدة ، وملاحظة الرقم الظاهر على الوجه العلوي . أوجد كلّاً ممّا يلي :

١ احتمال (الحصول على العدد ٥)

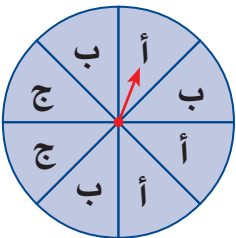
٢ احتمال (الحصول على العدد ٧)

٣ احتمال (الحصول على عدد أكبر من ٦)

٤ احتمال (الحصول على عدد فردي)

٥ احتمال (الحصول على عدد أولي)

٤ عند تدوير الدوّارة وملاحظة موضع المؤشّر ، أجب عمّا يلي :



١ ل (ظهور أ)

٢ ل (عدم ظهور ب)

٣ ل (ظهور ك)

٤ ل (ظهور ب أو ج)

٥ اصنع مخطّط الشجرة لتمثيل الثنائيات الممكنة التي تستطيع تشكيلها من رمي قطعة نقود ، ثم مكعب منتظم مرقّم من ١ إلى ٦ .



٦ حوّل النسبة المئوية إلى كسر اعتيادي :

- = ٢٥% (أ) = ٣٠% (ب) = ٥٠% (ج)

٧ أوجد ناتج ما يلي :

- = ٥٠% من ٣٦٠ (أ) = ٢٠% من ٣٦٠ (ب)

٨ أوجد المدى ، والوسيط ، والمتوسّط الحسابي ، والمنوال للقيم التالية :

٥ ، ٤ ، ٦ ، ٥ ، ٤ ، ٤ ، ٧

-
 (أ) المدى =
 (ب) الوسيط =
 (ج) المتوسّط الحسابي =

 (د) المنوال =

٩ من مخطّط الساق والأوراق المقابل ،

أجب عمّا يلي :

- (أ) ما هي أكبر قيمة ؟ ،
 ما هي أصغر قيمة ؟

(ب) ما القيمة الأكثر ظهورًا ؟

(ج) كم عدد مرّات ظهور القيمة ٤٦ ؟

(د) ما القيمة الأكبر من ٣٤ مباشرة ؟

(هـ) ما القيمة الأصغر من ١٥ مباشرة ؟

الأوراق	الساق
٢٥٦	١
٣٤٤٦٧	٢
٣٣٤٥٧	٣
١٢٥٦٦٦	٤

Counting Methods

سوف تتعلّم : تنظيم قائمة - مبدأ العدّ - التباديل - التوافيق .

العبارات والمفردات :

Factorial	مضروب	Counting Principle	مبدأ العدّ
Combination	توافيق	Organizing a List	تنظيم قائمة
		Permutation	تباديل

١. مبدأ العدّ

حلّ وناقش (١)



قرّر عبدالله زيارة اثنين من المباني الرئيسية في مركز الشيخ جابر الأحمد الثقافي خلال يومين متتاليين . إذا علمت أنّ المباني الرئيسية هي مبنى (المسرح - الموسيقى - المؤتمرات - المكتبة) ، فما هو عدد الطرق المختلفة المتاحة لاختيار المبنىين ؟

١ القائمة المنظّمة

اليوم الأول	اليوم الثاني	المبنيان المختاران
مبنى المسرح	مبنى الموسيقى	(المسرح ، الموسيقى)
	مبنى المؤتمرات	(..... ،)
	مبنى المكتبة	(..... ،)
مبنى الموسيقى		(..... ،)
	مبنى المؤتمرات	(..... ،)
	مبنى المكتبة	(..... ،)
.....		(..... ،)
	مبنى الموسيقى	(..... ،)
	مبنى المكتبة	(..... ،)
.....		(..... ،)
	مبنى المؤتمرات	(..... ،)
	مبنى الموسيقى	(..... ،)
عدد طرق اختيار مبنى في اليوم الأول	عدد طرق اختيار مبنى في اليوم الثاني	عدد طرق اختيار المبنىين
٤ طرق	٣ طرق	

معلومة مفيدة :

يتكوّن مركز الشيخ جابر الأحمد الثقافي من أربعة مباني رئيسية وهي :

١ مبنى المسرح

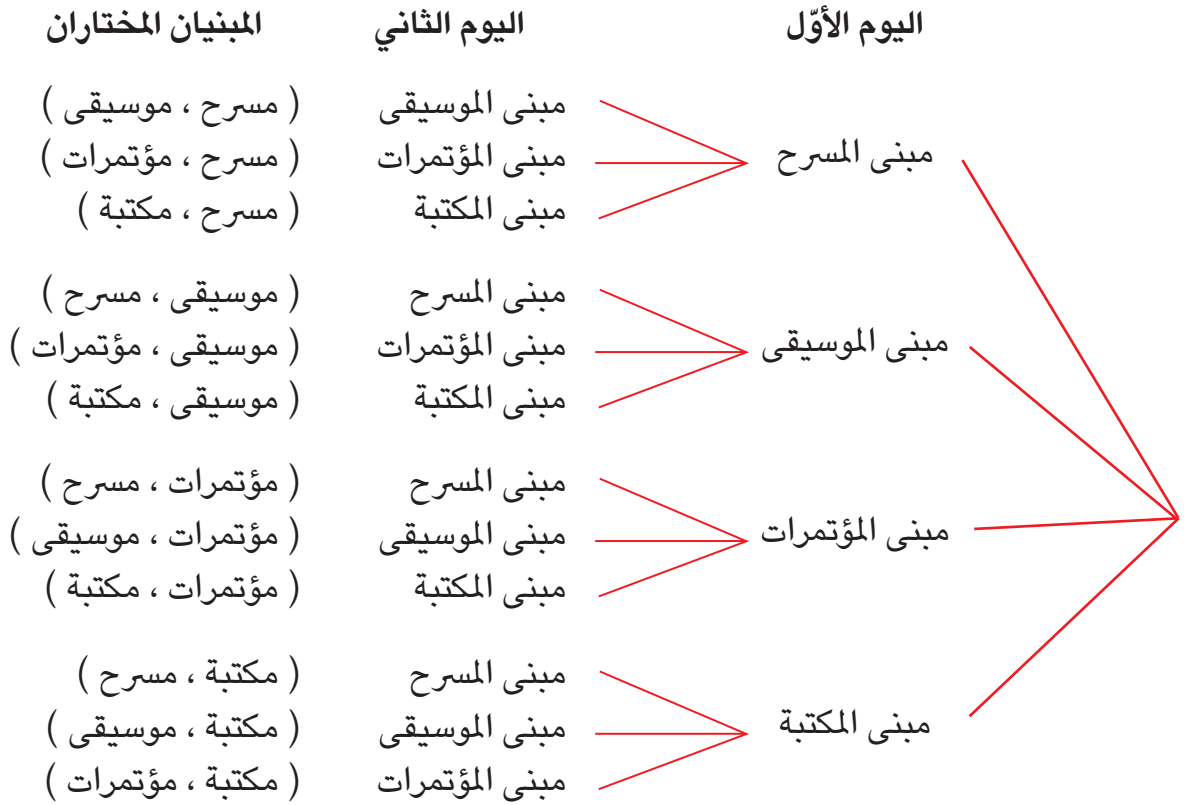
٢ مبنى الموسيقى

٣ مبنى المؤتمرات

٤ مبنى المكتبة

والمستندات التاريخية

وتمّ افتتاحه عام ٢٠١٦ م .



إذا عدد طرق اختيار المبنيين = عدد طرق اختيار مبنى في اليوم الأول × عدد طرق اختيار مبنى في اليوم الثاني
 $\dots \times \dots =$
 طريقة . =

هذه الطريقة تُسمّى « مبدأ العدّ »

مبدأ العدّ : هو عملية تتكوّن من خطوتين متتاليتين أو أكثر، إذا كان عدد طرق إجراء الخطوة الأولى n_1 ، وعدد طرق إجراء الخطوة الثانية n_2 وهكذا ك من الخطوات ، فإنّ عدد الطرق الممكنة لإجراء العملية هو : $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$.

مثال (١) :



يقدم مطعم وجبات . تحتوي كلّ وجبة منها على طبق رئيسي و طبق مقبّلات ، في الطبق الرئيسي يمكنك اختيار اللحم أو السمك أو الدجاج ، ومن المقبّلات يمكنك اختيار الحساء أو السلطة . كم عدد الوجبات التي يمكن تقديمها ؟

الحلّ :

عدد الوجبات = عدد طرق اختيار طبق رئيسي × عدد طرق اختيار طبق مقبّلات
 $6 = 2 \times 3$

توجّه عمر إلى مكتبة المدرسة حيث توجد ٥ كتب دينية ، ٣ كتب علمية ، ٤ كتب تاريخية .
كم عدد الطرق المختلفة لاختيار عمر كتاباً واحداً من كلّ نوع؟

عدد الطرق = × × =

٢. التباديل (الترتيبات)

حلّ وناقش (٢)

أراد حسن التعرّف على جميع الأعداد والتي يتكوّن كلّ منها من رقمين فقط من مجموعة الأرقام { ٣ ، ٤ ، ٨ ، ٩ } ، على ألاّ يُسمح بتكرار الرقم في العدد ، فهل تستطيع أن تساعد في إكمال مخطّط الشجرة التالي ؟



معلومة مفيدة :

تُستخدم التباديل

لحساب الطرق

المختلفة لترتيب أشياء عندما

يكون لمكان كلّ عنصر أهمية في

تغيير النتيجة .

الأعداد الممكنة	الرقم الثاني (رقم العشرات)	الرقم الأوّل (رقم الآحاد)
--------------------	---------------------------------	--------------------------------

٤٣

٤



٣

٨٣

٨



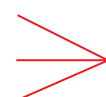
٩٣

٩



٣٤

٣



٤

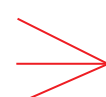
٨٤

٨



.....

.....



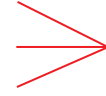
.....

.....



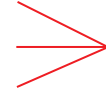
.....

.....



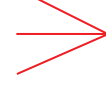
.....

.....



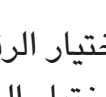
.....

.....



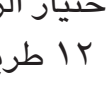
.....

.....



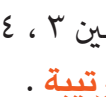
.....

.....



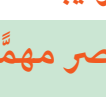
.....

.....



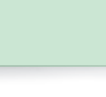
.....

.....



.....

.....



.....

.....



.....

.....

توجد ١٢ طريقة ممكنة لاختيار الرقمين المسموح بهما لنكوّن بهما العدد ، أي أنّ :
عدد الطرق = عدد طرق اختيار الرقم الأوّل × عدد طرق اختيار الرقم الثاني
= ٤ × ٣ = ١٢ طريقة .

لاحظ أنّ : عند تبديل الرقمين ٣ ، ٤ مثلاً حصلنا على العددين (٤٣) ، (٣٤) لذلك يكون الترتيب هنا مهماً ، وتُسمّى كلّ منهما **ترتيبة** .

عندما يكون ترتيب العناصر مهماً دون تكرار ، نسمّي هذا الاختيار **تبديلاً** ونرمز إليه بالرمز (ل) .

من « حُلّ وناقش (٢) » السابق :

إستطعنا مع حسن أن نحصل على ١٢ طريقة (تبديلة) لنكوّن العدد المطلوب عند اختيار عنصرين مختلفين من ٤ عناصر دون تكرار مع مراعاة الترتيب فيهما ، ويمكننا كتابة ذلك على **الصورة الرمزية** :

$$12 = 3 \times 4 = \text{ل}^4$$

عدد العناصر المجموعة عدد العناصر التي يتم اختيارها في كلّ مرّة

مثال (٢) :

ما هو عدد التبديلات الممكنة لاختيار ٣ عناصر من { ٩ ، ٧ ، ٥ ، ٣ ، ١ } لنكوّن بها أعدادًا يتكوّن كلّ منها من ثلاثة أرقام مختلفة ؟

الحل :

مئات	عشرات	آحاد	منازل العدد
٣	٤	٥	عدد طرق الاختيار

$$\text{عدد التبديلات} = 3 \times 4 \times 5 =$$

$$60 = \text{تبديلة}$$

$$\text{ل}^5 = 3 \times 4 \times 5 = 60$$

دورك الآن (٢)

ما هو عدد التبديلات الممكنة لاختيار ٤ عناصر من { ٨ ، ٦ ، ٤ ، ٢ } لنكوّن بها أعدادًا يتكوّن كلّ منها من أربعة أرقام مختلفة ؟

آحاد	مئات	عشرات	آحاد	منازل العدد
الألوف			٤	عدد طرق الاختيار

$$\text{عدد التبديلات} = 4 \times \dots \times \dots \times \dots =$$

$$=$$

$$\text{ل}^4 = 4 \times \dots \times \dots \times \dots =$$

في « دورك الآن (٢) » ، عملية الضرب على الصورة $4 \times 3 \times 2 \times 1$ (العوامل تبدأ بالعدد ٤ وتتناقص بمقدار ١ وتنتهي بالعدد ١) يمكن كتابتها على الصورة **(٤!)** وتُقرأ **(مضروب ٤)** .

مضروب العدد : اختيار (ن) عنصر من بين (ن) عنصر مختلف وبدون تكرار أيّ عنصر منها ، حيث ترتب العناصر مهمّ وسنرمز إليه بالرمز **ن!** ويكتب على الصورة :

$$\text{ن!} = \text{ن} (\text{ن} - 1) (\text{ن} - 2) \dots \times 2 \times 1 = \text{ل}^{\text{ن}} \text{ ، حيث } \text{ن} \geq 1$$

ملاحظة :

١ = ١٠

١ = ١١

٣ = ١! = ١ × (١ - ١) ، حيث $n \geq ٣$

فمثلاً : ١٧ = ١٦ × ٧

١٥ × ٦ × ٧ =

١٤ × ٥ × ٦ × ٧ = وهكذا ...

لاحظ أنه يمكننا كتابة $٢٠ = \frac{١٥}{!(٢-٥)} = \frac{١٥}{!٣} = \frac{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥}{١ \times ٢ \times ٣} = ٤ \times ٥ = ٢٠$

قيمة التباديل

في صورة مضروب

في صورة مفكوك

التباديل

التباديل : عند اختيار (م) عنصر من بين (ن) عنصر مختلف ($n \geq m$) ومن دون تكرار أي عنصر منها ، حيث ترتيب العناصر مهم وسنرمز إليه برمز التبديلة ($n!$) ويكتب على الصورة :

١ $n! = n(n-1)(n-2) \dots$ إلى م من العوامل .

٢ $n! = \frac{n!}{(n-m)!}$ ،

حيث $n \geq m$ ، $n! = m! \times (n-m)!$

دورك الآن (٣)

أكمل كلاً مما يلي :

أ $٣! = ٣ \times \dots \times \dots = \dots$

ب $٦! = ٦ \times \dots \times \dots \times \dots \times \dots = \dots$

ج $٨! = ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = \dots$

د $٧! = ٧ \times \dots \times \dots = \dots$

هـ $١١! = ١١ \times \dots \times \dots = \dots$

و $٩! = ٩ \times ٨ \times ٧ \times ٦ = \dots$

ز $(١٠-٥)! = \dots = \dots$

ح $٦(٢-٥)! = \dots$

انتبه



لايجاد ناتج $٦(٢-٥)!$ عليك أولاً إيجاد $(٢-٥)!$ ثم ضرب الناتج في العدد ٦ .



يريد فيصل وضع رقم سرّي من أربعة أرقام لحسابه الشخصي في تطبيق « سهل » بدون تكرار أيّ رقم (وباستخدام الأرقام من ١ إلى ٩) ، فكم عدد طرق الاختيار المتاحة له ؟

عدد طرق اختيار الرقم الأوّل (الآحاد) = ٩ طرق

عدد طرق اختيار الرقم الثاني (العشرات) = طرق

عدد طرق اختيار الرقم الثالث (المئات) = طرق

عدد طرق اختيار الرقم الرابع (آحاد الألوف) = طرق

∴ عدد طرق اختيار الرقم السريّ = ٩ × × × = طريقة .

منازل العدد	آحاد	عشرات	مئات	آحاد الألوف
عدد طرق الاختيار	٩			

حلّ آخر:

∴ ترتيب العناصر مهمّ ، وبدون تكرار فإنّ :

عدد طرق اختيار الرقم السريّ = ٩! = =

عبّر عن فهمك (١)



من « دورك الآن (٤) » ، كم عدد طرق اختيار الرقم السريّ إذا سُمح بتكرار الرقم ؟

ملاحظة :



١. ١! = ١

٢. ٢! = ٢ × ١

٣. ٣! = ٣ × ٢ × ١

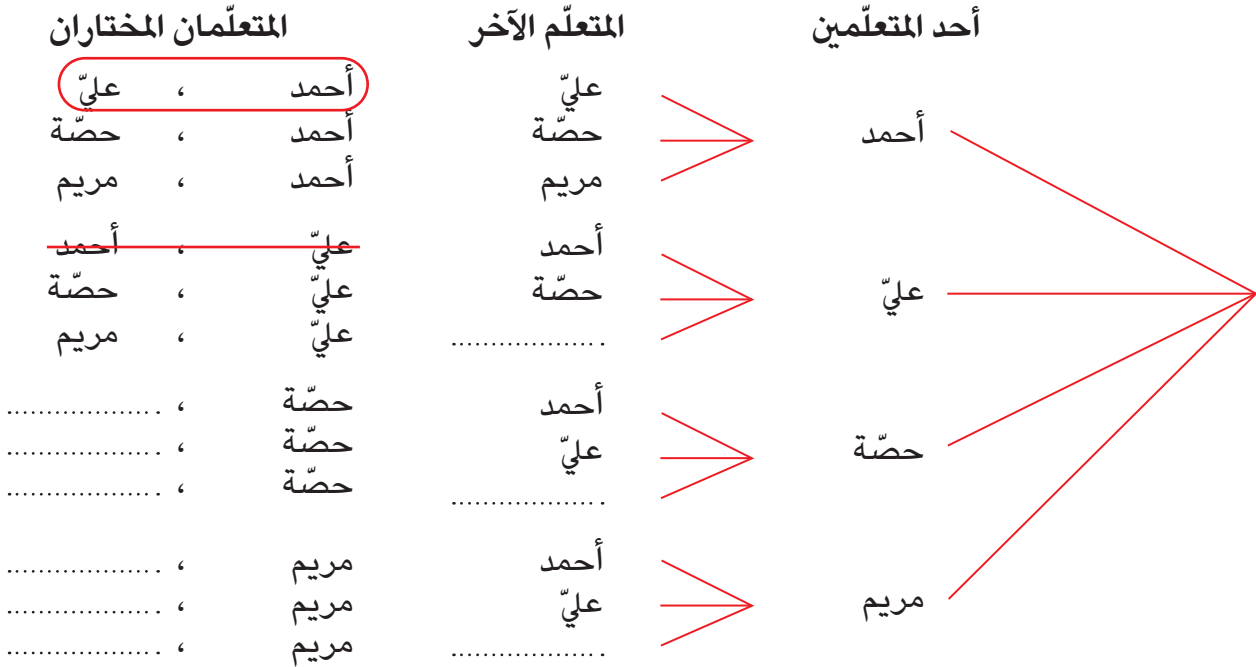
حيث $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1$

دورك الآن (٥)



بكم طريقة يمكن اختيار ٣ معلّمين من بين ٥ معلّمين لإعداد أسئلة مسابقة أولمبياد الرياضيات بحيث معلّم يُعدّ أسئلة الهندسة والثاني يُعدّ أسئلة الجبر والثالث يُعدّ أسئلة الإحصاء ؟
عدد طرق اختيار المعلّمين الثلاثة =

يتكوّن فريق الأولبياد في الكويت من { أحمد ، عليّ ، حصّة ، مريم } يُراد اختيار متعلّمين منهم للمشاركة في مسابقة الأولبياد الخليجي ، فبكم طريقة يمكن اختيار المتعلّمين ؟



أكمل ما يلي :

- ١ هل اختيار أحمد ، عليّ هو نفسه اختيار عليّ ، أحمد ؟
- ٢ هل الترتيب مهمّ لإيجاد عدد طرق اختيار متعلّمين ؟ ولماذا ؟
- ٣ حوِّط الاختيارات المختلفة واشطب المكرّر منها كما هو موضح في اختيار أحمد وعليّ .
- ٤ عدد طرق اختيار المتعلّمين =

مما سبق عندما يكون ترتيب العناصر غير مهمّ نسَمّي هذا الاختيار توافيق ونرمز إليه بالرمز (ق) .

إنّ اختيار عنصرين من أربعة عناصر لا يحتاج إلى ترتيب ؛ أي أنّنا نعتبر ترتيب عنصرين اختيارًا واحدًا .
لذلك نقسّم عدد التباديل $4!$ على $(2!)$ التي تمثّل عدد المجموعات الثنائية المكرّرة ، أي أنّ :

$$6 = \frac{4 \times 3}{1 \times 2} = \frac{4!}{2!} = \text{ق}^4_2$$

عدد عناصر المجموعة

عدد العناصر التي يتمّ اختيارها في كلّ مرّة

التوافيق : عند اختيار (م) عنصر من بين (ن) عنصر مختلف (م ≥ ن) حيث ترتيب العناصر غير مهمّ وسنرمز إليه بالرمز (ن م) أو **نق_م** وتكتب على صورتين :

$$\bullet \text{ نق}_m = \frac{n!}{m!}$$

$$\bullet \text{ نق}_m = \frac{n!}{m! \times (n-m)!}$$

حيث $n \geq m$ ، $m \geq 0$ ، $n \in \{0\}$

مثال (٣) :

أوجد ${}^3\text{ق}_5$

الحل بالصورة الأولى للقانون :

$$\begin{aligned} {}^3\text{ق}_5 &= \frac{5!}{3!} \\ &= \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 3} \\ &= 10 \end{aligned}$$

الحل بالصورة الأخرى للقانون :

$$\begin{aligned} {}^3\text{ق}_5 &= \frac{5!}{(5-3)! \times 3!} \\ &= \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 1 \times 2 \times 3} \\ &= 10 \end{aligned}$$

عبّر عن فهمك (٢)



يقول أحمد إن $n! = m!$ أحياناً بينما يقول عليّ إنّها غير صحيحة دائماً ، فأيهما على صواب ؟
فسّر إجابتك .

دورك الآن (٦)



يقدم مطعم أنواعاً من البيتزا حسب طلب الزبون فمنها (الخضار ، الدجاج ، اللحم ، البيروني ، المارغريتا ، المارينارا و هاواي) .
ما عدد الطرق المختلفة :

- لاختيار نوعين من البيتزا ؟
- لاختيار خمسة أنواع من البيتزا ؟
- لاختيار سبعة أنواع من البيتزا ؟
- لعدم اختيار أي نوع من البيتزا ؟

عبّر عن فهمك (٣)



من « دورك الآن (٦) » ، ماذا تلاحظ في إجابتك عن كلّ من (أ) ، (ب) ، وكذلك إجابتك عن كلّ من (ج) ، (د) ؟

ملاحظة :



$$١ = ١!$$

$$٢ = ٢!$$

$$٣ = ٣!$$

$$٤ = ٤!$$

$$\text{حيث } n \geq ٠, \{0\} \cup \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$$

تمارين ذاتية :



١ توجد أربعة طرق ممكنة تصل بين المدينة (أ) والمدينة (ب) ، وتوجد ثلاثة طرق ممكنة تصل بين المدينة (ب) والمدينة (ج) . كم عدد الطرق المختلفة من المدينة (أ) إلى المدينة (ج) مرورًا بالمدينة (ب) ؟

٢ ما عدد طرق اختيار حقيبة سفر من بين ٥ أنواع ، و ٦ ألوان ، و ٣ أحجام ؟

٣ أكمل كلاً ممّا يلي :

$$٥! = \dots$$

$$٦! - ٤! = \dots$$

$$٦! \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = \dots$$

$$٦! = \dots$$

$$١٠! = \dots$$

$$٣! \times ٤! = \dots$$

$$٥ \times ٤! = \dots$$

٤ أوجد عدد الطرق الممكنة لاختيار ثلاثة أرقام من ١ إلى ٦ ، إذا كان :

أ لا يمكن تكرار الرقم .

ب يمكن تكرار الرقم .

٥ اشتري والد مبارك ٧ أحواض للزراع و ٧ شتلات مختلفة ،

بكم طريقة يمكن توزيع الشتلات على الأحواض بحيث يكون في كل حوض شتلة واحدة ؟



٦ ذهب بدر وعبد العزيز إلى السينما لمشاهدة أفلام ، كم عدد الطرق التي يمكن أن يتم بواسطتها :
اختيار فيلمين مع مراعاة الترتيب أو أن يكون واحد تلو الآخر من بين ١٠ أفلام معروضة على شاشة الاختيارات ؟

٧ أوجد قيمة كل من :

أ ${}^4P_4 =$

ب ${}^8P_8 =$

ج ${}^7P_7 =$

د ${}^8P_8 =$

هـ ${}^8P_8 = {}^8P_8 + {}^8P_7 + {}^8P_6 + {}^8P_5 + {}^8P_4 + {}^8P_3 + {}^8P_2 + {}^8P_1$

٨ وقع اختيار عائلة أحمد في عطلة نهاية الأسبوع على مطعم هندي لتناول وجبة الغداء فيه .
يقدم المطعم ١٠ أنواع من الأطباق الهندية المختلفة ، فبكم طريقة يمكن للعائلة اختيار ٤ من
هذه الأطباق لمشاركتها فيما بينهم ؟

.....

.....

.....

٩ اشترك عبد الرحمن في شركة وجبات صحيّة ، ما هو عدد الطرق المختلفة لاختيار ٣ وجبات
صحيّة من بين قائمة تحوي ١٠ وجبات ليوم واحد ؟

.....

.....

.....

مهارات تفكير عليا :



آحاد	عشرات	مئات

١٠ إذا كانت $S = \{ ٠, ١, ٢, ٣, ٤ \}$ ، تمّ تكوين أعداد من ثلاث منازل
باستخدام عناصر S أوجد :

أ) عدد الأعداد الممكن تكوينها .

عدد الأعداد = × × =

آحاد	عشرات	مئات

ب) عدد الأعداد المختلفة الأرقام الممكن تكوينها .

عدد الأعداد = × × =

انتبه

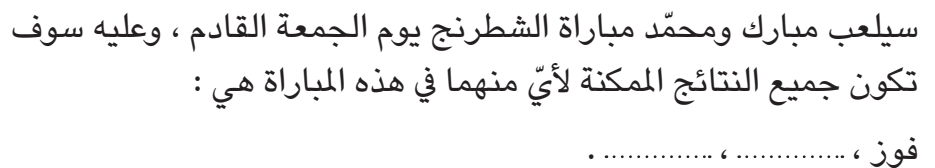


إبدأ دائماً بكتابة عدد طرق
إجراء الخطوة التي عليها
شرط .

سوف تتعلّم: إيجاد فضاء العينة.

فضاء العينة

Sample Space



يُسَمَّى ما سبق بالتجربة العشوائية بحيث نعلم مسبقًا النتائج الممكنة للمباراة ، ولكننا لا نستطيع تحديد النتيجة التي ستنتهي بها المباراة لصالح أحدهما .

التجربة العشوائية: هي تجربة نستطيع تحديد جميع نواتجها قبل إجرائها ، إلا أننا لا نستطيع أن نجزم أنّ أيّاً من هذه النواتج سيتحقّق فعلاً عند إجرائها .

فضاء العينة (ف) : هو مجموعة كل النواتج الممكنة الحدوث لتجربة عشوائية .

أكتب فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعة نقود معدنية مرّة واحدة ، وحدّد عدد النواتج .

الحل :

كلّ النواتج الممكنة هي ظهور صورة (ص) أو ظهور كتابة (ك)

فضاء العينّة (ف) = { ص ، ك }

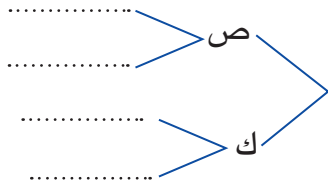
عدد النواتج = ٢



دورك الآن (١)

أكتب فضاء العيّنة لتجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين ، وحدد عدد النواتج .

أ أكمل الجدول لتبين كل النواتج الممكنة :



ك	ص	الرمية الثانية الرمية الأولى
		ص
(..... ،)	(ص ، ص)	ص
(ك ، ك)	 ،	ك

ب فضاء العيّنة (ف) = { (ص ، ص) ، (ص ،) ، (ك ،) ، (..... ،) } .

ج عدد النواتج = ٢ × =

دورك الآن (٢)

أكتب فضاء العيّنة لتجربة رمي ثلاث قطع نقود متميزة مرة واحدة ، وحدد عدد النواتج .

أ أكمل مخطط الشجرة لتبين كل النواتج الممكنة :

٢٠ فلساً

٥٠ فلساً

١٠٠ فلس

تذكر

متميزة تعني مختلفة من حيث اللون أو الشكل أو الحجم .

لاحظ أن :

ناتج التجربة (١ ، ب) يُسمى زوجاً مرتباً ، (٢ ، ب ، ج) يُسمى ثلاثياً مرتباً .

(ص ، ص ، ص)

(ص ، ص ، ك)

(ص ، ،)

(..... ، ك ،)

(..... ، ،)

(..... ، ،)

(..... ، ،)

(..... ، ،)

ص
ك

ص
.....

ص
.....

ص
.....

ص
ك

.....
.....

ص
ك

ب) فضاء العينة = { (ص ، ص ، ص) ، (ص ، ص ، ك) ، }

ج) عدد النواتج =

د) عدد الاختيارات باستخدام مبدأ العد = $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$

عبر عن فهمك



هل عدد النواتج الممكنة لرمي قطعة نقود ثلاث مرّات متتالية يساوي عدد النواتج الممكنة لرمي ثلاث قطع نقود متمايضة مرّة واحدة ؟ وضح ذلك .

دورك الآن (٣)



تريد موزي اختيار خلفية لشاشة هاتفها من بين ثلاثة خيارات (صورة شخصية - منظر طبيعي - نمط هندسي) كما ستختار أيضاً غطاء (cover) من بين ثلاثة خيارات (شفاف - أسود - ملوّن).

١ أكتب فضاء العينة .

ف =

.....

.....

٢ أوجد عدد النواتج الممكنة التي يمكن أن تحصل عليها .

.....

.....

٣ أكتب عناصر الحدث اختيار خلفية الشاشة صورة شخصية والغطاء (cover) غير شفاف .

.....

.....

الحدث : هو مجموعة جزئية من فضاء العينة (ف) .

تذكّر



- **الحدث المؤكّد** : هو الحدث الذي يقع دائماً عند إجراء التجربة العشوائية .
- **الحدث المستحيل** : هو الحدث الذي لا يمكن وقوعه عند إجراء التجربة العشوائية .
- **الحدث البسيط** : هو الحدث الذي يتكوّن من ناتج واحد فقط من نواتج التجربة العشوائية .
- **الحدث المركّب** : هو الحدث الذي يتكوّن من أكثر من ناتج من نواتج التجربة العشوائية .

مثال (٢) :



كوّن جدولاً تجد من خلاله فضاء العينة لرمي مكعبين منتظمين مرقّمين من ١ إلى ٦ وملوّنين ، أحدهما بالأزرق والآخر بالأخضر .
أكتب النواتج كأزواج مرتّبة ، وحدّد عدد النواتج مستخدماً مبدأ العدّ .

الحلّ :

أزرق \ أخضر	١	٢	٣	٤	٥	٦
١	(١، ١)	(٢، ١)	(٣، ١)	(٤، ١)	(٥، ١)	(٦، ١)
٢	(١، ٢)	(٢، ٢)	(٣، ٢)	(٤، ٢)	(٥، ٢)	(٦، ٢)
٣	(١، ٣)	(٢، ٣)	(٣، ٣)	(٤، ٣)	(٥، ٣)	(٦، ٣)
٤	(١، ٤)	(٢، ٤)	(٣، ٤)	(٤، ٤)	(٥، ٤)	(٦، ٤)
٥	(١، ٥)	(٢، ٥)	(٣، ٥)	(٤، ٥)	(٥، ٥)	(٦، ٥)
٦	(١، ٦)	(٢، ٦)	(٣، ٦)	(٤، ٦)	(٥، ٦)	(٦، ٦)

عدد نواتج المكعب الأزرق = ٦ نواتج

عدد نواتج المكعب الأخضر = ٦ نواتج

عدد النواتج = $6 \times 6 = 36$ ناتجاً

دورك الآن (٤)



صندوق فيه ثلاث بطاقات متماثلة ألوانها هي : الأسود (س) ، الأبيض (ب) ، الأصفر (ص) . إذا سحبت بطاقة من الصندوق عشوائياً ثم أعدتها ، وسحبت بطاقة مرّة أخرى عشوائياً :
أكمل لكتابة فضاء العينة (ف) .

لون البطاقة	س	ب	ص
س	(س ، س)	(..... ،)	(..... ،)
ب	(..... ،)	(..... ،)	(ب ، ص)
ص	(..... ،)	(..... ،)	(..... ،)

ف = { (س ، س) ، (..... ،) ، (..... ،) ، (..... ،) }

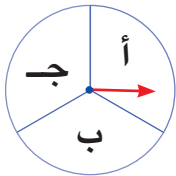
{ (..... ،) ، (ب ، ص) ، (..... ،) ، (..... ،) }



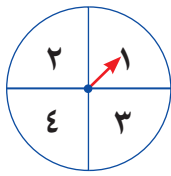
١ أكتب فضاء العينة لتجربة إلقاء حجر نرد منتظم ،
ثم إلقاء قطعة نقود معدنية .



الثانية



الأولى



٢ عند تدوير الدوّارة الأولى ، ثمّ الدوّارة الثانية .
أكتب فضاء العينة وحدّد عدد النواتج الممكنة .

٣ إختارت المعلّمة شيماء عمل مسابقة في برنامجها الإذاعي وهو ترتيب الأرقام لتكوّن المتعلّمة أعدادًا مختلفة وكانت الأرقام المستخدمة كالتالي : ٥ ، ٤ ، ٢
أرسم مخطّط الشجرة البيانية لتبيّن كلّ الأعداد المؤلّفة من ٣ أرقام مختلفة والتي يمكن اختيارها من بين هذه الأرقام .

٤ أراد محمد السفر مع أسرته إلى دولة خليجية ، فعرض عليهم خيارات السفر إما بواسطة السيارة أو الطائرة ، وكذلك الاختيار من بين المدن (الرياض - الدوحة - المنامة)
 أ) اصنع مخطط الشجرة .

ب) أوجد عدد النواتج الممكنة .

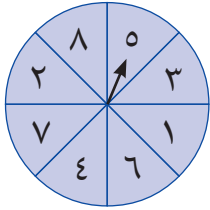
.....

ج) ما فضاء العينة لرحلة محمد ؟

.....

سوف تتعلّم : احتمال وقوع الحدث .

حلّ وناقش



دخل جاسم أحد المحلات التجارية في يوم افتتاحها وشارك في مسابقة على لعبة الدوّارة المبيّنة في الشكل . يربح جاسم جائزة إذا وقف المؤشّر على عدد يقبل القسمة على ٤ . أكمل ما يلي لمعرفة مدى إمكانية فوز جاسم بجائزة :

- عناصر فضاء العيّنة = ، عددها =
- عناصر الحدث « المؤشّر يقف على عدد يقبل القسمة على ٤ » = ، عددها =
- نسبة عدد عناصر الحدث إلى عدد عناصر فضاء العيّنة =
- النسبة المئوية لفوز جاسم بجائزة = $100\% \times \dots\dots\dots$ =



معلومة مفيدة :

يستخدم علماء الأرصاد الجوية علم الاحتمال لتوقع فرصة هطول المطر في وقت معيّن .

تذكّر

- فضاء العيّنة (ف) هو مجموعة جميع النواتج الممكنة لتجربة عشوائية .
- الحدث هو مجموعة جزئية من فضاء العيّنة .
- يمكن التعبير عن الاحتمال أيضًا في صورة نسبة مئوية .

إنّ احتمال وقوع حدث ما هو ناتج قسمة عدد الطرق التي يمكن أن يقع بها هذا الحدث على عدد كلّ النواتج الممكنة .
يرمز إلى احتمال وقوع (حدث ١) بالرمز P .
ويعبّر عن الاحتمال كالتالي :

$$\text{إحتمال وقوع (حدث ١)} = \frac{\text{عدد عناصر الحدث ١}}{\text{عدد عناصر فضاء العيّنة ف}}$$

$$\Leftarrow P = \frac{\text{عدد عناصر ١}}{\text{عدد عناصر ف}}$$

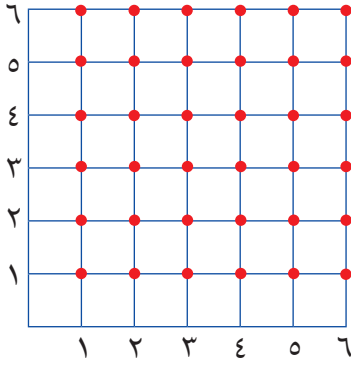
لاحظ أنّ :

- ١ احتمال فضاء العيّنة (الحدث المؤكّد) = ١ أي أنّ $P(F) = 1$
- ٢ احتمال الحدث المستحيل = صفرًا أي أنّ $P(\emptyset) = 0$
- ٣ $0 \leq P \leq 1$

مثال (١):

في تجربة إلقاء حجرَي نرد منتظمين متمايزين ،
مستعينًا بالشبكة المقابلة ،
أحسب كلاً من الاحتمالات التالية :

أ) ل (مجموع العددين الظاهريين أصغر من ٥)



نفرض أنَّ ١ حدث « مجموع العددين الظاهريين أصغر من ٥ »

$$\therefore ١ = \{(١, ١), (١, ٢), (٢, ١), (٣, ١), (١, ٢), (٢, ٢), (١, ٣)\}$$

عدد عناصر ١ = ٦ ، عدد عناصر ف = ٣٦ = ٦ × ٦

$$\therefore ل (١) = \frac{\text{عدد عناصر ١}}{\text{عدد عناصر ف}} = \frac{٦}{٣٦} = \frac{١}{٦}$$

ب) ل (ظهور العدد ٥ في الحجر الأول والعدد ٤ في الحجر الثاني)

نفرض أنَّ ب حدث « ظهور العدد ٥ في الحجر الأول وظهور
٤ في الحجر الثاني »

$$ب = \{(٤, ٥)\}$$

عدد عناصر ب = ١ ، عدد عناصر ف = ٣٦

$$\therefore ل (ب) = \frac{١}{٣٦}$$

ج) ل (مجموع العددين الظاهريين ٩ أو ١٢)

$$\text{نفرض أنَّ ج حدث « مجموع العددين الظاهريين ٩ أو ١٢ »}$$

$$ج = \{(٦, ٣), (٣, ٦), (٥, ٤), (٤, ٥), (٦, ٦)\}$$

عدد عناصر ج = ٥

$$\therefore ل (ج) = \frac{٥}{٣٦}$$

د) ل (مجموع العددين الظاهريين ١٣) = صفرًا

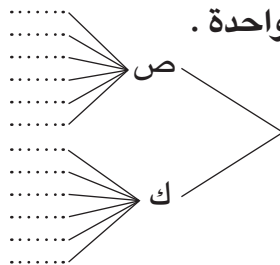
لاحظ أنَّ:

فضاء العينة لتجربة إلقاء
حجري نرد متمايزين هو
نفسه فضاء العينة لتجربة
إلقاء حجر نرد مرتين
متتاليتين .

دورك الآن (١)

إذا تمَّ رمي قطعة نقود معدنية ، ثمَّ حجر نرد منتظم مرَّة واحدة .

أ) أكمل مخطَّط الشجرة واكتب فضاء العينة .



ف =
.....
.....

ب) نفرض أنَّ ج حدث ظهور صورة وعدد زوجي .

$$ج = \{ (\dots , \dots) , (\dots , \dots) \}$$

عدد عناصر ج = ، عدد عناصر ف =

$$\therefore \text{إحتمال ظهور صورة وعدد زوجي} = \frac{\text{عدد عناصر ج}}{\text{عدد عناصر ف}} = \dots\dots\dots$$

مثال (٢) :

مجموعة بطاقات متماثلة مرقّمة من ١ إلى ٢٤ سُحبت منها بطاقة واحدة عشوائيًا .
أحسب كلّاً من الاحتمالات التالية :

٦	٥	٤	٣	٢	١
١٢	١١	١٠	٩	٨	٧
١٨	١٧	١٦	١٥	١٤	١٣
٢٤	٢٣	٢٢	٢١	٢٠	١٩

أ) « ظهور عدد من مضاعفات العدد ٦ » .

ب) « ظهور عدد أولي أصغر من ١٥ » .

ج) « ظهور عدد يقبل القسمة على ٢٥ » .

الحلّ :

$$ف = \{ ٢٤ , \dots , ٣ , ٢ , ١ \}$$

عدد عناصر ف = ٢٤

$$أ) = \{ ٢٤ , ١٨ , ١٢ , ٦ \}$$

عدد عناصر أ = ٤

$$ل (أ) = \frac{\text{عدد عناصر أ}}{\text{عدد عناصر ف}} = \frac{٤}{٢٤} = \frac{١}{٦}$$

$$ب) = \{ ١٣ , ١١ , ٧ , ٥ , ٣ , ٢ \}$$

عدد عناصر ب = ٦

$$ل (ب) = \frac{\text{عدد عناصر ب}}{\text{عدد عناصر ف}} = \frac{٦}{٢٤} = \frac{١}{٤}$$

$$ج) = \emptyset$$

$\therefore$ عدد عناصر ج = صفر

$$ل (ج) = \frac{\text{عدد عناصر ج}}{\text{عدد عناصر ف}} = \frac{٠}{٢٤} = ٠$$

مثال (٣) :



يحتوي كيس على ١٠ كرات متماثلة ، منها كرتان حمراوا اللون ،
٣ زرقاء اللون ، ٥ بيضاء اللون . سُحِبَت كرة واحدة عشوائيًا .
فاحسب احتمال كلٍّ من الأحداث التالية :

- ١ « الكرة المسحوبة حمراء » .
- ٢ « الكرة المسحوبة زرقاء » .
- ٣ « الكرة المسحوبة ليست زرقاء » .

الحلّ :

عدد عناصر ف = ١٠

١ « عدد عناصر ب = ٢ »

$$\therefore \text{ل (ب)} = \frac{\text{عدد عناصر ب}}{\text{عدد عناصر ف}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

٢ « عدد عناصر ب = ٣ »

$$\therefore \text{ل (ب)} = \frac{\text{عدد عناصر ب}}{\text{عدد عناصر ف}} = \frac{3}{10}$$

٣ « عدد عناصر ج = ٧ »

$$\therefore \text{ل (ج)} = \frac{\text{عدد عناصر ج}}{\text{عدد عناصر ف}} = \frac{7}{10}$$

دورك الآن (٢)



صندوق يحوي هدايا مختلفة وُضعت داخل علب ملوّنة متماثلة . إذا كان هناك علبتان حمراوان ،
و ٧ زرقاء ، و ٤ سوداء وتمّ سحب علبة واحدة عشوائيًا ، أوجد احتمال كلٍّ من الأحداث التالية :

١ « العلبة المسحوبة حمراء » .

٢ « العلبة المسحوبة زرقاء » .

٣ « العلبة المسحوبة بيضاء » .

٤ « العلبة المسحوبة ليست سوداء » .



١ إذا أُلقي حجر نرد منتظم مرّة واحدة ولو حُظّ العدد الظاهر على الوجه العلوي ، فأوجد احتمال كلّ من الأحداث التالية :

- أ) « ظهور عدد أكبر من ٥ » .
 ب) « ظهور عدد أولي » .
 ج) « ظهور عدد فردي » .
 د) « ظهور عدد أصغر من ٧ » .
 هـ) « ظهور عدد يساوي ٧ » .

٢ في أحد فصول الصفّ الثامن يوجد ٢٥ متعلّمًا منهم ٥ متعلّمين يرتدون نظّارات طبّية ، إذا تمّ اختيار متعلّم واحد عشوائيًا ، أجب عمّا يلي :

- أ) ما احتمال أن يكون المتعلّم يرتدي نظّارة ؟
 ب) ما احتمال أن يكون المتعلّم لا يرتدي نظّارة ؟

٣ يحوي كرتون في المخزن ١٤ كتابًا متماثلًا : ٥ كتب علوم ، ٤ كتب رياضيات ، ٣ كتب لغة عربية ، ٢ كتاب تربية إسلامية . إذا تمّ سحب كتاب واحد عشوائيًا ، فأوجد احتمال كلّ من الأحداث التالية :

- أ) « الكتاب من كتب العلوم أو كتب اللغة العربية » .

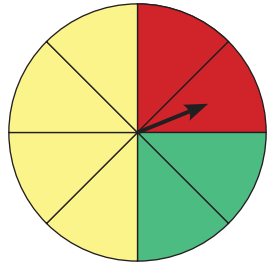
- ب) « الكتاب ليس من كتب الرياضيات » .



٤ يوجد في فصل ٢٥ متعلّمًا ، منهم ١٠ يلعبون كرة القدم ، ٦ يلعبون كرة السلة ، ٤ يلعبون كرة الطائرة . عند اختيار متعلّم من الفصل عشوائيًا . فما احتمال أن يكون ممّن لا يلعب أيّا من الألعاب السابقة ؟ (ملاحظة : لا يلعب أيّ متعلّم أكثر من لعبة) .

٥ يحتوي صندوق على ٩ كرات متماثلة مرقّمة من ١ إلى ٩ . سُحبت كرة عشوائياً من الصندوق . أوجد احتمال كلّ من الأحداث التالية :

- أ) « ظهور عدد أكبر من ٧ » .
 ب) « ظهور عدد زوجي » .
 ج) « ظهور عدد أكبر من ٧ أو ظهور عدد زوجي » .



٦ عند تدوير القرص المجاور مرّة واحدة ، أوجد احتمال أن يتوقّف المؤشّر عند :

- أ) « اللون الأحمر » .
 ب) « اللون الأصفر أو الأخضر » .
 ج) « لون غير الأخضر » .

٧ يحتوي كيس على كرة صفراء ، ٦ كرات حمراء ، ٣ كرات زرقاء جميعها متماثلة . إذا سُحبت كرة عشوائياً من الكيس ولوِحظ لونها ، فما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة :

- أ) « حمراء » .
 ب) « خضراء » .
 ج) « صفراء أو زرقاء » .
 د) « ليست صفراء » .

مهارات تفكير عليا :



٨ في إحدى الأسواق التجارية يتم إعطاء بطاقات متماثلة « امسح واربح » ، على كلّ بطاقة يوجد أحد الأعداد (من ١ إلى ١٠) بحيث جميع الأعداد لها الفرصة نفسها في الظهور . إذا كانت البطاقة تحمل عدداً فردياً يحصل العميل على خصم ١٠% من قيمة المشتريات النهائية لفاتورة الشراء ، أمّا إذا كانت البطاقة تحمل عدداً زوجياً أكبر من ٤ فيحصل العميل على خصم ٢٠% ، وفي الحالات الأخرى تكون قيمة الخصم ٥% . أجب عمّا يلي :

- أ) ما احتمال حدوث خصم ١٠% ؟
 ب) ما احتمال حدوث خصم ٢٠% ؟
 ج) ما احتمال حدوث خصم ٥% ؟

٥ إذا خَصَّصَ مدير التسويق للزبائن ٢٠٠ بطاقة « إمسح واربح » ، فما عدد العملاء الذين سيحصلون على الخصم ذي الاحتمال الأكبر ؟ وضح إجابتك .

.....

.....

.....

.....

اختر الإجابة الصحيحة .

٩ يحتوي كيس على عدد من الكرات المتماثلة منها ٤ حمراء اللون والباقي من اللون الأخضر ، سُحِبَت منه كرة عشوائياً . إذا كان احتمال سحب كرة خضراء يساوي $\frac{2}{3}$ ، فإن العدد الكلي للكرات يساوي :

١٢ (ب)

٢٠ (د)

٨ (أ)

١٦ (ج)

مخططات الساق والأوراق المزدوجة

Double Stem-and-Leaf Diagrams

٨ - ٤

سوف تتعلّم : صنع مخطّط الساق والأوراق المزدوج .

العبارات والمفردات :

Double Stem-and-Leaf Diagram

مخطّط الساق والأوراق المزدوج

حلّ وناقش

معلومة مفيدة :

يستخدم علماء الإحصاء مخطّط الساق والأوراق المزدوج لترتيب البيانات .

يبين الجدول التالي عدد الصفحات التي قرأها كلّ من ضاري وأخته مراتب من المصحف في العشر الأواخر من شهر رمضان .

اليوم	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
ضاري	٢٣	٢٥	٢٧	٢٩	١٩	٣٠	٣٤	٣٧	٣٤	٤٣
مراحب	١٧	٢٠	٣٢	٢٠	٢٧	٣١	٤٠	٤٢	٤٥	٤٠

تذكّر



مخطّط الساق والأوراق هو طريقة لتنظيم عرض البيانات العددية بناء على القيم المكانية للأرقام .

تذكّر



لتنظيم عرض البيانات لمخطّط الساق والأوراق :

- أرسم خطين متعامدين .
- أكتب الساق جهة اليسار ، ثم الأوراق جهة اليمين مرتبة تصاعدياً .
- إذا كان العدد مكوّنًا من رقم واحد ، فاكتب جهة اليسار (الساق) صفرًا .

ب) أكمل مخطّط الساق والأوراق لبيانات مراتب :

الساق	الأوراق
.....	
.....	
.....	
.....	

أ) أكمل مخطّط الساق والأوراق لبيانات ضاري :

الساق	الأوراق
١	٩
٢	٣.....
.....	 ٧
.....	

ج) يمكن تمثيل الجدول بمخطّط ساق وأوراق واحد مزدوج ، يُدمج جدول ضاري مع جدول مراتب كما يلي :

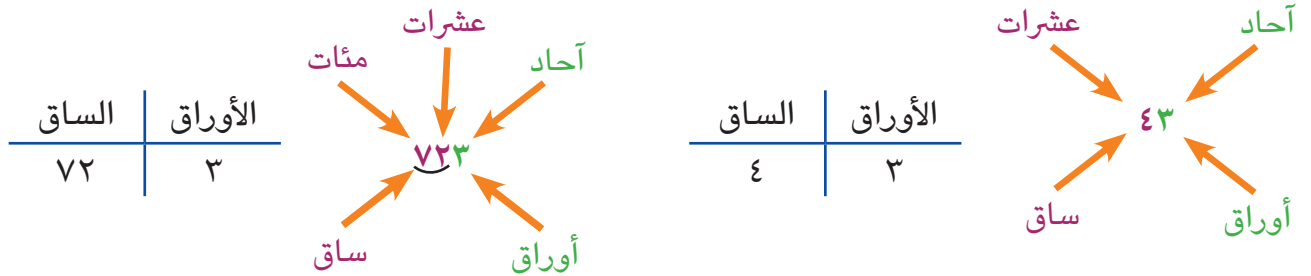
مراتب	الساق	ضاري
الأوراق	الساق	الأوراق
٧	١	٩
٧٠٠	٢	٣٥٧٩
٢١	٣	٠٤٤٧
٥٢٠٠	٤	٣

لاحظ أن :

- كل عدد من البيانات يُجزأ إلى ساق وأوراق .
- إذا كان العدد مؤلفاً من رقمين ، يكون رقم منزلة العشرات يمثل الساق ورقم منزلة الآحاد يمثل الأوراق .
- إذا كان العدد مؤلفاً من ٣ أرقام ، يكون رقما منزلتي العشرات والمئات يمثلان الساق ورقم منزلة الآحاد يمثل الأوراق .

مثلاً :

الساق والأوراق في العددين ٧٢٣ ، ٤٣



مثال (١) :

قام أحد المراكز الصحية في دولة الكويت بتسجيل عدد المراجعين خلال أسبوعين متتاليين ، فكان كالآتي :

الأسبوع الأول : ١٥٧ ، ٢٤٩ ، ١٦٨ ، ٢٣٢ ، ١٥٠ ، ٢٤١ ، ٢٤٥

الأسبوع الثاني : ١٥١ ، ١٥٢ ، ٢٣٤ ، ٢٤١ ، ١٦٣ ، ٢٤٠ ، ١٦٣

إصنع مخطط الساق والأوراق المزدوج للبيانات السابقة .

الحل :

الأسبوع الأول	الأسبوع الثاني	
الأوراق	الساق	الأوراق
٧	١٥	٢١
٨	١٦	٣٣
٢	٢٣	٤
١٥٩	٢٤	١٠

انتبه

يختلف اتجاه الترتيب التصاعدي لآحاد البيانات في عمود الأوراق الأيمن عنه في عمود الأوراق الأيسر .

مثال (٢) :

يبين الجدول أدناه متوسط أسعار تذاكر الطيران من الكويت إلى كل من تركيا وماليزيا في بعض أشهر السنة بالدينار الكويتي .

الشهر	يناير	فبراير	مارس	إبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر
تركيا	١٥٥	١٦٠	١٥١	١٦٥	١٥٠	١٧٢	١٨١	١٧٤	١٥٨
ماليزيا	١٨٥	١٧٨	١٩٢	١٨٨	١٩٩	١٩٥	١٩٨	١٨٠	١٨٤

١ اصنع مخطط الساق والأوراق المزدوج لهذه البيانات .

الحل :

ماليزيا		تركيا
الأوراق	الساق	الأوراق
	١٥	٠ ١ ٥ ٨
	١٦	٠ ٥
٨	١٧	٢ ٤
٨ ٥ ٤ ٠	١٨	١
٩ ٨ ٥ ٢	١٩	

٢ أجب عما يلي :

- ما هو أدنى سعر للتذاكر إلى تركيا ؟ ١٥٠ دينارًا
- ما هو أعلى سعر للتذكرة إلى تركيا ؟ ١٨١ دينارًا
- ما هو أدنى سعر للتذكرة إلى ماليزيا ؟ ١٧٨ دينارًا
- ما هو أعلى سعر للتذكرة إلى ماليزيا ؟ ١٩٩ دينارًا
- ما سعر التذكرة إلى ماليزيا الذي يسبق ١٨٠ دينارًا مباشرة ؟ ١٧٨ دينارًا
- ما سعر التذكرة إلى تركيا الذي يلي ١٧٤ مباشرة ؟ ١٨١ دينارًا

يوضّح الجدول التالي عدد الزوّار (بالآلاف) في يوميّ الجمعة والسبت خلال ١٠ أسابيع في مجمّع الأفنيوز .

الأسبوع	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الجمعة	٥٢	٥٥	٦٠	٥٨	٧٠	٦٦	٧٢	٦٩	٧٢	٤١
السبت	٤٨	٥٠	٥٧	٥٤	٥٩	٦٠	٤٥	٦٤	٦٢	٥٥

أكمل مخطّط الساق والأوراق المزدوج لهذه البيانات .

الجمعة	الساق	السبت
الأوراق	الساق	الأوراق
.....	٤	
٢.....	٥	 ٤٠
.....		
.....		

تمارين ذاتية :

١ استخدم مخطّط الساق والأوراق المزدوج التالي الذي يوضّح عدد زوّار مدينة الألعاب (ونترلاند) وعدد زوّار المركز العلمي في أيّام من شهر فبراير .

عدد زوّار ونترلاند الكويت	الساق	عدد زوّار المركز العلمي
الأوراق	الساق	الأوراق
٣	٥١	٩ ٨
٤ ٥	٥٢	٩ ٨ ٧
٢ ٣ ٧	٥٣	٦ ٥ ٤
٤ ٥ ٦ ٦	٥٤	٣ ١ ٠
٠ ١ ٢ ٥	٦١	٥ ٤ ٣

أجب عمّا يلي :

- ما أكبر عدد وصل إليه زوّار ونترلاند ؟
- ما أصغر عدد وصل إليه زوّار المركز العلمي ؟
- ما العدد الذي تكرّر في زوّار ونترلاند ؟
- ما العدد الذي يسبق العدد ٥٢٧ مباشرة في زوّار المركز العلمي ؟
- ما العدد الذي يلي العدد ٥٤٦ مباشرة في زوّار ونترلاند ؟

٢ في عام ٢٠٢٥ ، بدأ الكثير من قاطني البيوت الحديثة استخدام روبوتات مساعدة ذكية (تنظيف - مراقبة - ذكاء اصطناعي) . تقدّم شركتان عالميتان مثل هذه الخدمات ، الشركة (أ) التي تصنّع روبوتًا منزليًا يعتمد على الذكاء الاصطناعي ، والشركة (ب) التي تصنّع روبوتًا مخصّصًا للأعمال المنزلية اليومية . يبيّن الجدول التالي مقارنة بين عدد مستخدمي الروبوتات لبعض الأشهر (بالآلاف) .

١١٢	١١٨	١٢٥	١٣٠	١٤٢	١٥٠	عدد مستخدمي روبوتات الشركة (أ)
١٥٠	١١١	١٢٠	١٣٣	١٤٧	١٥٥	عدد مستخدمي روبوتات الشركة (ب)

إصنع مخطّط الساق والأوراق المزدوج لهذه البيانات .

الشركة (أ)		الشركة (ب)
الأوراق	الساق	الأوراق

٣ قامت الصّحة المدرسية بمتابعة متعلّمي الصفّ الثامن لمدرستين (بنين - بنات) ، وذلك عبر الزيارات الميدانية وقياس أطوال عيّنة من المتعلّمين بوحدة السنتيمتر .
أطوال المتعلّّمات : ١٣٣ ، ١٣٥ ، ١٤٣ ، ١٥٣ ، ١٦٠ ، ١٦٣ ، ١٧٠ ، ١٧٥ ، ١٥٣ ، ١٦٢ ، ١٤٠ ،
أطوال المتعلّمين : ١٤٣ ، ١٤٠ ، ١٨٠ ، ١٧٣ ، ١٧٨ ، ١٦٣ ، ١٦٥ ، ١٥٥ ، ١٥٨ ، ١٨٥ ، ١٨٤ ،
إصنع مخطّط الساق والأوراق المزدوج للبيانات المعطاة السابقة .

٤ يُظهر مخطّط الساق والأوراق المزدوج عدد الأمتار التي يقطعها فريقا السباحة في الماراثون باستخدام السباحة الحرّة وسباحة الظهر وسباحة الفراشة .

فريق السباحة (ب)		فريق السباحة (أ)
الأوراق	الساق	الأوراق
٣٢١	٢	٥٦
٣٣٢١	٣	١٥٧٧
٥١	٤	٢٣٤٤
٥٤٢٠	٥	١٣٤

أجب عمّا يلي :

- ١ ما عدد الأمتار الأكثر لكلّ فريق ؟
 الفريق (أ) الفريق (ب)
- ٢ ما عدد الأمتار الأقلّ للفريق (ب) ؟

- ٣ ما الأمتار الأكثر تكرارًا عند الفريق (أ) ؟

- ٤ ما الأمتار التي تكرّرت في كلا الفريقين ؟

تمثيل البيانات باستخدام القطاعات الدائرية

Representing Data Using Pie Charts

٥ - ٨

سوف تتعلّم : تمثيل البيانات باستخدام القطاعات الدائرية .

العبارات والمفردات :

القطاعات الدائرية Pie Charts زاوية القطاع Central (Sector) Angle

اِسْتَكْشِفْ



سأل معلّم التربية البدنية المتعلّمين في أحد فصوله عن الرياضة المفضّلة لديهم ، وكانت الإجابات وفق الجدول التالي :

الرياضة المفضّلة	كرة قدم	كرة طائرة	كرة سلّة	تنس طاولة	المجموع
عدد المتعلّمين	٨	٦	٤	٢	٢٠

١ ما هي نسبة تفضيل المتعلّمين لكل رياضة بالنسبة إلى متعلّمي الفصل ؟

• نسبة من يفضّلون كرة القدم = $\frac{٨}{٢٠}$

• نسبة من يفضّلون كرة الطائرة =

• نسبة من يفضّلون كرة السلّة =

• نسبة من يفضّلون تنس الطاولة =

٢ ما هو قياس الدائرة ؟

٣ كم تمثّل النسبة $\frac{٨}{٢٠}$ من قياس الدائرة ؟

$$\frac{٨}{٢٠} \times \dots = \dots$$

∴ قياس زاوية القطاع للمتعلّمين الذين يفضّلون كرة القدم =

٤ أكمل ما يلي :

قياس زاوية القطاع لكرة الطائرة = × =

قياس زاوية القطاع لكرة السلّة = × =

قياس زاوية القطاع لتنس الطاولة = × =

٥ مجموع قياسات زوايا القطاعات = + + + =

تذكّر



قياس الدائرة ٣٦٠°



تذكّر



• تُستخدم القطاعات الدائرية لمقارنة أجزاء من البيانات بمجموعة البيانات كلّها .

• **القطاع الدائري** هو جزء من



سطح الدائرة
محدّد بنصفَي قطر
وقوس محصور بينها .

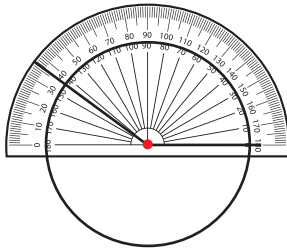
اللازم

فرجار - منقلة - مسطرة -
آلة حاسبة

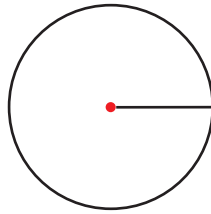
$$\text{قياس زاوية القطاع} = \frac{\text{التكرار المقابل لكل قطاع}}{\text{مجموع التكرارات}} \times 360^\circ$$

٦ مثل البيانات بالقطاعات الدائرية .

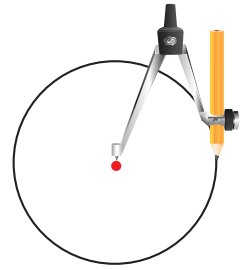
الرياضة المفضلة	كرة قدم	كرة طائرة	كرة سلة	تنس طاولة	المجموع
عدد المتعلمين	٨	٦	٤	٢	٢٠
قياس زاوية القطاع	$360^\circ \times \frac{8}{20} = 144^\circ$	$360^\circ \times \frac{6}{20} = 108^\circ$	$360^\circ \times \frac{4}{20} = 72^\circ$	$360^\circ \times \frac{2}{20} = 36^\circ$	360°



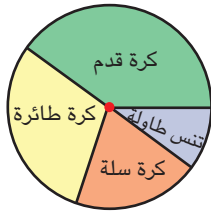
(٣)



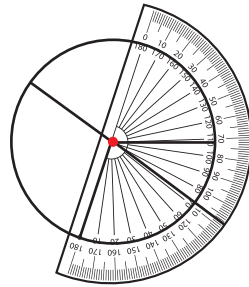
(٢)



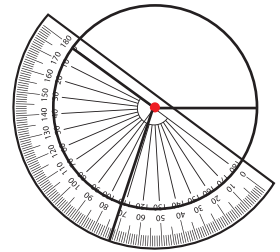
(١)



(٦)



(٥)



(٤)

ملاحظة :

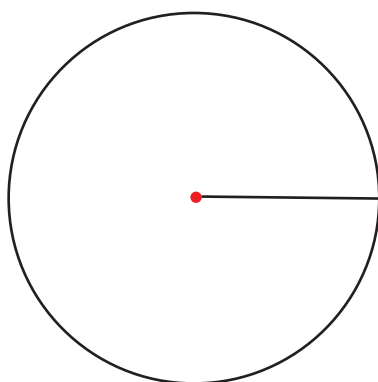
خطوات تمثيل البيانات بالقطاعات الدائرية :

- ١ أوجد مجموع التكرارات .
- ٢ أوجد قياس زاوية كل قطاع .
- ٣ أرسم دائرة وحدد مركزها ، وارسم أي نصف قطر فيها ، ثم استخدم المنقلة لرسم القطاعات كل بحسب قياس زاويته .



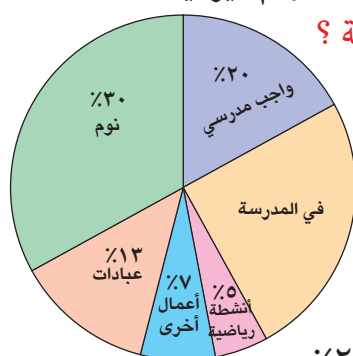
يبين الجدول التالي هوايات مجموعة من المتعلمين . أكمل الجدول ، ثم مثل البيانات بالقطاعات الدائرية .

الهواية	السباحة	ركوب الخيل	الرماية	القراءة	الكتابة	المجموع
عدد المتعلمين (التكرار)	١٠	٣٠	٢٠	٢٥	١٥	
قياس زاوية القطاع	$360^\circ \times \frac{10}{100}$ =					



مثال (١) :

المهام اليومية لحصة



استخدم التمثيل البياني بالقطاعات الدائرية المقابل للإجابة عما يلي :

- ١ ما هي النسبة المئوية التي تمثل الوقت الذي تقضيه حصة في المدرسة ؟
- ٢ كم ساعة تقضيها حصة في كتابة واجباتها كل يوم تقريباً ؟
- ٣ ما عدد الساعات التقريبي الذي تقضيه حصة في النوم ؟

الحل :

١ النسبة المئوية التي تمثل الوقت الذي تقضيه حصة في المدرسة

$$20\% = 70\% - 100\% = (5\% + 7\% + 13\% + 30\% + 20\%) - 100\% =$$

٢ عدد الساعات التي تقضيها حصة في كتابة واجباتها كل يوم تقريباً

$$5 = \frac{24}{100} \times 20 = \frac{24}{100} \times 20 = 4.8 \text{ ساعات تقريباً}$$

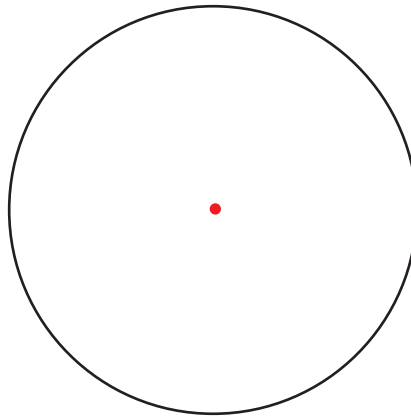
٣ عدد الساعات التقريبي الذي تقضيه حصة في النوم

$$7 = \frac{24}{100} \times 30 = \frac{24}{100} \times 30 = 7.2 \text{ ساعات تقريباً}$$



يمثل الجدول التالي توزيع استخدام المتعلمين في الجامعة للأجهزة الرقمية خلال اليوم ، وكان عددهم ٣٠٠ متعلم جامعي . أكمل الجدول ، ثم مثل البيانات بالقطاعات الدائرية :

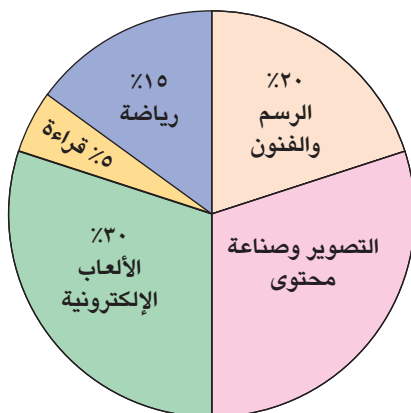
نوع الجهاز	الهاتف الذكي	الحاسوب المحمول	الجهاز اللوحي	الساعة الذكية
النسبة المئوية	٥٠٪	٢٥٪	١٥٪	١٠٪
قياس زاوية القطاع	$360^\circ \times \frac{50}{100}$	$360^\circ \times \frac{25}{100}$	$360^\circ \times \frac{15}{100}$	$360^\circ \times \frac{10}{100}$
عدد المتعلمين الذين يستخدمون هذا الجهاز	$300 \times 50\%$	$300 \times 25\%$	$300 \times 15\%$	$300 \times 10\%$



تمارين ذاتية :



هوايات متعلمي الصف الثامن



١ يوضح التمثيل البياني بالقطاعات الدائرية المقابل النسبة المئوية لأكثر الهوايات انتشارًا بين متعلمي الصف الثامن . إذا كان عددهم ٢٠٠ متعلم ، فأوجد كلاً مما يلي :

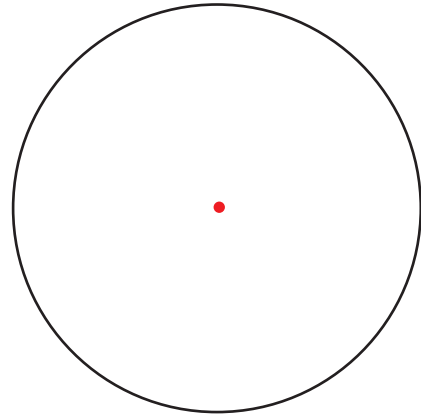
أ النسبة المئوية لهواة التصوير وصناعة محتوى .

ب عدد متعلمي هواية الرسم والفنون .

ج عدد متعلمي هواية القراءة .

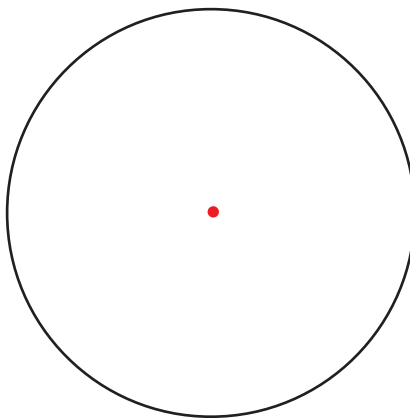
٢ أكمل الجدول ، ثم مثل البيانات التالية بالقطاعات الدائرية .

عادات الأكل لدى المتعلمين		
نوع الوجبات	النسبة المئوية	قياس زاوية رأس القطاع
سريعة	٣٠%	
منزلية	٣٥%	
صحّية	١٥%	
حلويات وقهوة	٢٠%	
المجموع		



٣ يُنفق متعلّم مبتعث مكافأته الشهرية بما يعادل الدينار كالاتي : ٤٠٠ دينار للسكن ، ٣٠٠ دينار للمأكل ، ٥٠ دينارًا للكهرباء ، ١٥٠ دينارًا للملبس ، ٧٠ دينارًا للمواصلات و ٣٠ دينارًا للكتب .
أكمل الجدول ، ثم مثل البيانات بالقطاعات الدائرية .

جوانب الصرف	السكن	المأكل	الكهرباء	الملبس	مواصلات	الكتب	المجموع
مبلغ المكافأة الشهرية							
النسبة المئوية							
قياس زاوية القطاع							



المتوسط الحسابي – الوسيط – المنوال

The Mean - Median - Mode

٦ - ٨

سوف تتعلّم : كيفية تنظيم البيانات وإيجاد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال .

العبارات والمفردات :

Outlier	قيمة متطرّفة	Mean	متوسط حسابي
Center of an Interval	مركز الفئة	Median	وسيط
		Mode	منوال

حلّ وناقش (١)

طلب المعلم من ١٠ متعلّمين تسجيل عدد الخطوات التي يمضونها خلال يوم واحد من أحد تطبيقات الأجهزة الذكية الخاصة برصد النشاط البدني اليومي بالكيلومترات كما هو موضّح في الجدول المقابل .

١ أكمل الجدول التكراري لهذه البيانات .

خطوات المتعلّمين بالكيلومترات				
٥	٢	٤	٥	٦
٣	٤	٢	٦	٤

خطوات المتعلّمين	٢ كم	٣ كم	٤ كم	٥ كم	٦ كم	المجموع
علامات التكرار						
التكرار						

٢ أوجد المتوسط الحسابي من خلال الجدول السابق .

$$\frac{(\dots \times 6) + (\dots \times 5) + (\dots \times 4) + (\dots \times 3) + (\dots \times 2)}{10} = \text{المتوسط الحسابي}$$

$$\dots = \dots =$$

٣ رتب خطوات المتعلّمين ترتيباً تصاعدياً ، ثم أوجد الوسيط .

الوسيط هو

٤ أكثر البيانات تكراراً من الجدول السابق

ويُسمى

تذكّر



مقاييس النزعة المركزية التي تصف البيانات هي :

١ **المتوسط الحسابي**

$$\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}} =$$

٢ **الوسيط** هو القيمة

الوسطى لمجموعة البيانات بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً .

٣ **المنوال** هو أكثر القيم

تكراراً .

تتصدّق عادة على الفقراء بمبالغ متفاوتة شهرياً بالدينار الكويتي كالآتي :

٤، ٦، ٧، ٧، ٩، ٧، ٦، ٨، ٥، ٨، ٧، ١٠

أ) الجدول التكراري (البسيط) هو :

القيمة	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	المجموع
التكرار								

ب) المتوسط الحسابي = $\frac{(\dots \times 10) + (\dots \times 9) + (\dots \times 8) + (\dots \times 7) + (\dots \times 6) + (\dots \times 5) + (\dots \times 4)}{\dots}$

..... =

ج) الوسيط =

د) المنوال =

مثال (١) :

وصلت شحنة فاكهة عند ميناء الشويخ البحري تحمل أوزاناً من الفاكهة بالطنّ كما يلي :

٧٥، ٥٩، ٦٢، ٣٠٢، ٦٥، ٦٧، ٦٢، أوجد :

أ) المتوسط الحسابي .

ب) الوسيط .

ج) المنوال .

د) هل توجد قيمة بعيدة عن البيانات ؟ ما هي ؟

هـ) أوجد المتوسط الحسابي ، والوسيط ، والمنوال للأوزان السابقة من دون القيمة المتطرّفة .

الحلّ :

أ) المتوسط الحسابي = $\frac{67 + 65 + 302 + (62 \times 2) + 59 + 75}{7} = \frac{692}{7} = 98,8$

ب) لإيجاد الوسيط نرتّب الأعداد ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً

٣٠٢، ٧٥، ٦٧، ٦٥، ٦٢، ٦٢، ٥٩

الوسيط = ٦٥

ج) المنوال = ٦٢

د) نعم ، ٣٠٢

هـ) المتوسط الحسابي $= \frac{٦٧ + ٦٥ + (٦٢ \times ٢) + ٥٩ + ٧٥}{٦} = \frac{٣٩٠}{٦} = ٦٥$

الوسيط $= \frac{٦٥ + ٦٢}{٢} = ٦٣,٥$

المنوال = ٦٢

عبّر عن فهمك (١)

من « مثال (١) » ، ما تأثير القيم المتطرفة على المتوسط الحسابي والوسيط لمجموعة البيانات ؟

حلّ وناقش (٢)



يستخدم المتعلمون وأولياء الأمور تطبيق « سهل » لمتابعة المتعلم في أمور عديدة منها الغياب ، وكذلك درجاتهم في نهاية العام الدراسي . الجدول المقابل يوضّح عدد الساعات لمستخدمي البرنامج خلال شهر ، كما هو موضّح في الجدول التكراري ذي الفئات المقابل :

جدول تكراري ذو فئات	
الفئات	التكرار
-١	٥
-٣	٧
-٥	٤
-٧	٣
٩ - ١١	١
المجموع	٢٠

مركز الفئة : هو المتوسط الحسابي لطرفيها
 $\text{مركز الفئة} = \frac{\text{الحد الأدنى} + \text{الحد الأعلى}}{٢}$

أ) أوجد مراكز الفئات ، ثم أكمل الجدول .

مركز الفئة (-١) $= \frac{٣ + ١}{٢} = ٢$

مركز الفئة (-٣) $= \frac{٥ + ٣}{٢} = ٤$

مركز الفئة (-٥) $= \frac{..... +}{٢} =$

مركز الفئة (-٧) $= \frac{..... +}{.....} =$

مركز الفئة (-٩) $= \frac{..... +}{.....} =$

تذكّر



- المدى يساوي أكبر قيمة - أصغر قيمة
- طول الفئة يساوي الحد الأعلى للفئة - الحد الأدنى للفئة

الفئات	التكرار (ت)	مركز الفئة (م)	(ت) × (م)
-١	٥	٢	٢ × ٥
-٣	٧		
-٥	٤		
-٧	٣		
١١ - ٩	١		
المجموع = ٢٠			المجموع =

ب) أوجد المتوسط الحسابي للبيانات السابقة مستخدمًا مراكز الفئات .

$$\text{المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع (التكرار} \times \text{مركز الفئة)}}{\text{مجموع التكرارات}}$$

$$= \frac{\text{مجموع (ت} \times \text{م)}}{\text{مجموع (ت)}} = \dots\dots\dots$$

دورك الآن (٢)

تستخدم معظم البيوت شبكة إنترنت فائقة السرعة ، ولكن تختلف سرعة الاتصال من خلال هذه الشبكة من يوم إلى آخر . لذا ، فقد طلبت شركة الاتصالات من عملائها تسجيل سرعة الإنترنت حتى يتسنى للشركة تطوير خدماتها . فكانت البيانات كالاتي : ١٢ ، ١٥ ، ١٨ ، ٢٢ ، ١٣ ، ١٦ ، ١٢ ، ١٧ ، ١٤ ، ١٦ ، ١٩ ، ١٧ ، ١٤ ، ١٣ ، ١٦ ، ١٨ ، ١٥ ، ٢٤ ، ٢٣ ، ٢٦ ، ٢٧ ، ٢٣ ، ١٩ ، ١٧ ، ١٣ .

أ) أكمل الجدول التكراري التالي :

الفئات	علامات العدّ	التكرارات	مركز الفئة	(ت) × (م)
-١٠	///	٥	$١٢ = \frac{١٤ + ١٠}{٢}$	$٦٠ = ١٢ \times ٥$
-١٤		١٠	$\frac{..... +}{٢}$	
-١٨			$\frac{..... +}{٢}$	
-٢٢			$\frac{..... +}{٢}$	
-٢٦			$\frac{..... +}{٢}$	
المجموع = ٢٥			المجموع =	

ب) أوجد المتوسط الحسابي لهذه البيانات مستخدمًا مراكز الفئات .

$$\text{المتوسط الحسابي} = \dots\dots\dots$$

في الشكل الآتي، مخطّط الساق والأوراق المزدوج لمجموعتين من بيانات أعمار متعلّمي اللغة الإنجليزية واللغة الصينية ، في معهد التدريب للغات العالمية .

متعلّمو اللغة الصينية		متعلّمو اللغة الإنجليزية	
الأوراق	الساق	الأوراق	الساق
٣١١١	٢	١٣٥٧	٢
٤٠	٣	٢٢٤	٣

استخدم المخطّط السابق للإجابة عمّا يلي :

- ما منوال البيانات لأعمار متعلّمي اللغة الإنجليزية ؟
- ما منوال البيانات لأعمار متعلّمي اللغة الصينية ؟
- ما وسيط البيانات لمتعلّمي اللغة الإنجليزية ؟
- ما وسيط البيانات لمتعلّمي اللغة الصينية ؟
- أوجد المتوسط الحسابي لبيانات متعلّمي اللغة الصينية .

الحلّ :

أ المنوال = ٣٢

ب المنوال = ٢١

ج الوسيط = ٢٧

د الوسيط = $\frac{23+21}{2} = \frac{44}{2} = 22$

هـ المتوسط الحسابي = $\frac{34+30+23+(3 \times 21)}{6} = \frac{187}{6} = \frac{100}{6} = 25$

عبّر عن فهمك (٢)



إذا كان المتوسط الحسابي لمجموعة من القيم هو ٣٠ ، وأضفنا العدد ٥ إلى جميع قيم البيانات ، فهل تستطيع معرفة المتوسط الحسابي للبيانات الجديدة ؟

تمارين ذاتية :



١ يبيّن الجدول المقابل أسعار مجموعة من الألعاب الإلكترونية بالدينار الكويتي .

أوجد المتوسط الحسابي ، والوسيط ، والمنوال لتلك البيانات .

أسعار الألعاب الإلكترونية بالدينار الكويتي				
٢٠	٤٠	١٥	١٨	١٢
١٠	١٧	١٥	٢٠	١٤
٢٥	٩	٤٠	١٨	١٥
٢٤	١٠	٢٢	٢١	٢٠

.....

.....

.....

.....

السعر بالدينار	الصف
٤	دجاج مشوي
٣	كباب
٥	سمك
١٢	ستيك لحم
٤	روبيان
٤	خضار

٢ قام أحد المطاعم بإعداد قائمة لأسعار وجبات الغداء بالدينار الكويتي ، كما هي موضحة في الجدول التالي :

عين القيمة المتطرفة ، واحسب المتوسط الحسابي لسعر الوجبات والوسيط والمنوال لمجموعة البيانات مع القيمة المتطرفة مرة ، وبدون القيمة المتطرفة مرة أخرى .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

٣ يبيّن مخطّط الساق والأوراق عدد الدقائق التي يستغرقها الفرد في استخدام الهاتف للمكالمات الهاتفية ومشاهدة برامج التواصل الاجتماعي في عشرة أيّام .

الأوراق (المكالمات)	الساق	الأوراق (برامج التواصل الاجتماعي)
٠١	١٢	٣٢١
٣	١٣	٣٣٣
٢٤٤٤	١٤	٦٥
٠١٣	١٥	٥٤

أ) ما منوال بيانات (المكالمات) ؟

.....

ب) أوجد الوسيط لبيانات (المكالمات) والوسيط (لبرامج التواصل الاجتماعي) .

.....

.....

ج) أوجد المتوسط الحسابي لبيانات (المكالمات) .

.....

٤ في مسابقة ألعاب القوى (مسابقة الجري) التي نظّمتها إحدى المدارس ، بلغت سرعة المتسابقين بالأمّطار للدقيقة كما يلي :

٢٠٠ ، ١٩٠ ، ٢٠٨ ، ١٨٠ ، ١٦٠ ، ١٦٥ ، ١٥٠ ، ١٥٣ ، ١٦٤ ، ١٥٣ ، ١٩٥ ، ١٥٤ ، ١٥٦ ، ١٩٢ ، ١٦٠ ، ١٧٨ ، ١٨٨ ، ١٦٧

أ) أوجد المدى لهذه البيانات .

ب) أكمل الجدول التكراري التالي :

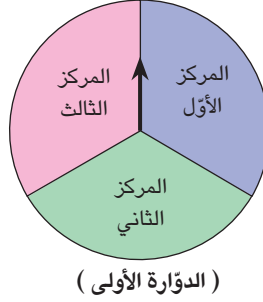
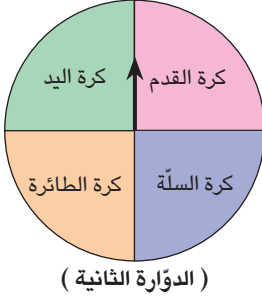
الفئات	علامات العدّ	التكرار (ت)	مركز الفئة (م)	(ت) × (م)
-١٥٠				
-١٦٠				
-١٧٠				
-١٨٠				
-١٩٠				
-٢٠٠				
		المجموع =		المجموع =

تقويم الوحدة التعليمية الثامنة

Unit Eight Assessment

أولاً : البنود المقالية

١ أرسم مخطط الشجرة لتوضيح النواتج الممكنة لتدوير اللوحتين الدوّارتين :



٢ أوجد ناتج كلّ ممّا يلي :

..... = $٣ل^١$ (ب)

..... = $٢ق^٥$ (د)

..... = $١٢ \times ٤!$ (أ)

..... = $٥(٣ - ٤)!$ (ج)

..... = $\left(\frac{٧}{٣}\right)$ (هـ)

٣ إختارت ياسمين ٣ أرقام سرّية لفتح خزانة المركز الرياضي التابعة له ، إذا كان اختيارها للأرقام من ١ إلى ٨ ، فأوجد عدد الطرق المختلفة في اختيار ذلك الرقم السريّ للخزانة .

.....

.....

.....

٤ بكم طريقة يمكن تكوين مجلس المتعلّمين بحيث يكون فيه رئيس ونائب رئيس من بين ١٠ متعلّمين ؟

.....

.....

.....

٥ يوجد في مدرسة خمسة من المتعلمين المتميزين في مادة الرياضيات ، وقد طلبت إدارة المدرسة اختيار ثلاثة متعلمين منهم لتمثيل المدرسة في مسابقة الحساب الذهني (أباكس) .
ما عدد الطرق المختلفة لإرسال ٣ منهم لتقديم المسابقة ؟

٦ يوجد في صندوق ٣٠ بطاقة متماثلة مرقمة بالأرقام من ١ إلى ٣٠ .
سُحبت بطاقة واحدة بطريقة عشوائية .
أوجد احتمال كل من الأحداث التالية :
أ (ظهور عدد يقبل القسمة على العدد ٥) .

ب (ظهور عدد فردي أصغر من ٧) .

ج (ظهور عدد أكبر من ٢١ أو ظهور العدد ١٣) .

د (ظهور عدد مربع كامل) .

٧ لدى أحد محلات تغليف الهدايا ٢٠ نوعاً من الورق المزيّن للتغليف ، و ١٠ أنواع من الأشرطة للزينة ، و ٤ أنواع من بطاقات التهنئة . ما عدد الاختيارات المختلفة المتوفرة لتغليف الهدية ؟

٨ يمكن تصميم بطاقة دعوة إلكترونية باستخدام برنامج الذكاء الاصطناعي ، عند التصميم تمّ تقديم عدّة خيارات : ٤ خلفيات ، ٥ ألوان ، ٦ صوتيات . ما عدد الخيارات المختلفة المتوفرة لتصميم تلك البطاقة ؟

٩ في أحد سباقات الزوارق السريعة للشباب ، تمّت مقارنة أطوال الزوارق بوحدة السنتيمتر لثمانية مشاركين من كلّ فريق فكانت كما يلي :

أطوال زوارق الفريق الأوّل : ٢٥٨ ، ٢٧٠ ، ٢٦٨ ، ٢٥٨ ، ٢٦٩ ، ٢٧٥ ، ٢٧٦ ، ٢٥٤ :
أطوال زوارق الفريق الثاني : ٢٦٠ ، ٢٧٤ ، ٢٥١ ، ٢٥٩ ، ٢٦٠ ، ٢٧٣ ، ٢٦٨ ، ٢٧٧

أ) مثّل البيانات التالية باستخدام مخطّط الساق والأوراق المزدوج .

الأوراق (الفريق الثاني)	الساق	الأوراق (الفريق الأوّل)



ب) أكمل الجدول التالي مستخدماً مخطّط الساق والأوراق المزدوج .

الفريق الثاني	الفريق الأوّل	
		الوسيط
		المدى
		المنوال

١٠ يبيّن الجدول التالي درجات ٥٠ متعلّمًا في مادّة الرياضيات .

الفئات	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠	المجموع
التكرار	٨	١٢	١٤	٩	٧	٥٠

أ أكمل الجدول التكراري التالي :

الفئات	التكرار (ت)	مركز الفئة (م)	(ت) × (م)
-١٠			
-٢٠			
-٣٠			
-٤٠			
-٥٠			
	المجموع =		المجموع =

ب أوجد المتوسط الحسابي للبيانات السابقة مستخدمًا مراكز الفئات .

.....

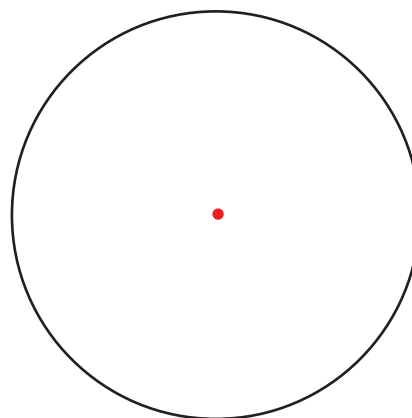
.....

.....

.....

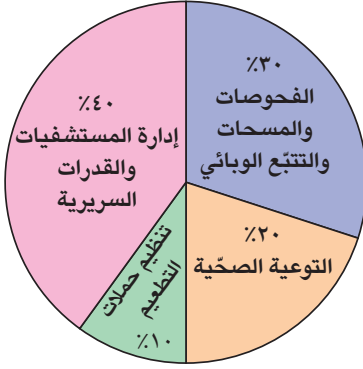
١١ يبيّن الجدول التالي أنواع القصص وعدد المتعلّمين الذين يفضّلون قراءة كلّ نوع في إحدى المدارس . أكمل الجدول ، ثمّ ممثّل البيانات بالقطاعات الدائرية .

أنواع القصص	عدد	قياس زاوية القطاع
خيال علمي	٩٠	
كوميديّة	١٥٠	
دينيّة	٥٠	
إجتماعيّة	٧٠	
المجموع	٣٦٠	



١٢ يبين التمثيل بالقطاعات الدائرية أدناه توزيع النسب المئوية للمخصصات المالية لوزارة الصحة أثناء جائحة كورونا .

أ) ما القطاع الذي حصل على أكثر مخصصات مالية ؟



ب) ما القطاع الذي يمثل ثلاثة أمثال قطاع تنظيم حملات التطعيم ؟

ج) بكم تزيد نسبة مخصصات التوعية الصحية عن نسبة مخصصات تنظيم حملات التطعيم ؟

د) إذا كانت قيمة المخصصات المالية لوزارة الصحة هي ٤ ملايين دينار أثناء جائحة كورونا ، فما حصة كل قطاع من القطاعات الآتية ؟

التوعية الصحية :

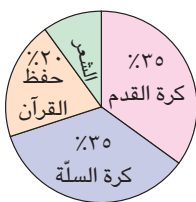
إدارة المستشفيات :

حملات التطعيم :

ثانيًا: البنود الموضوعية

في البنود (١ - ٩) ظلّ أ إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلّ ب إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١	عند رمي حجرٍ نرد متميّزين مرّة واحدة ، فإنّ عدد عناصر فضاء العيّنة يساوي ١٢	أ	ب
٢	$١٢ = ٣!$	أ	ب
٣	$٣ق^٧ = ٧ق^٣$	أ	ب
٤	$١٢ = ١٤ \times ٨$	أ	ب
٥	عند سحب بطاقة عشوائية من صندوق فيه ٦ بطاقات مرقّمة من ١ إلى ٦ ، فإنّ احتمال (ظهور عدد أولي) هو $\frac{1}{3}$	أ	ب
٦	مجموعة من البيانات مكوّنة من ٦ قيّم والمتوسّط الحسابي لهذه القيم هو ٩ ، فإنّ مجموع هذه القيم يساوي ٥٤	أ	ب
٧	إذا كان التمثيل البياني بالقطاعات الدائرية المقابل يوضّح النسبة المئوية للأنشطة التي يمارسها المتعلّمون في الصفّ الثامن خلال حصّة النشاط ، فإنّ نشاط الشعر يمثل ٢٠٪ من الأنشطة .	أ	ب
٨	عدد الطرق المختلفة لقراءة ٣ كتب من بين ٦ كتب مختلفة خلال الإجازة الصيفية هو $٣ق^٦$	أ	ب
٩	في التمثيل البياني المقابل : إذا كان الإيراد الشهري للمطعم هو ٣٦٠٠ دينار ، فإنّ صافي أرباح المطعم شهريًّا هو ٢١٦٠ دينارًا .	أ	ب



في البنود (١٠-١٩) لكلّ بند أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، اختر الإجابة الصحيحة :

١٠ في تجربة إلقاء حجرَي نرد متمايزَيْن مرّة واحدة وملاحظة الوجه العلوي ، فإنّ احتمال الحصول على رقمَيْن مجموعهما يساوي ١٠ هو :

- أ $\frac{5}{36}$ ب $\frac{1}{6}$ ج ١ د $\frac{1}{12}$

١١ إذا كان الساق ٩ والورقة ٥ ، فإنّ العدد هو :

- أ ٥٩ ب ٩٠٥ ج ٩٥ د ٥٠٩

١٢ عدد الطرق المختلفة عند الاختيار من قائمة أحد المطاعم الذي يقدّم ٧ أطباق مختلفة ، بحيث يمكنك اختيار ٣ من هذه الأطباق هو :

- أ 3×7 ب 7P_3 ج 7P_1 د 7P_3

١٣ $8 \times 17 =$

- أ ٥٦ ب ٨! ج ١٥! د ٥٦!

١٤ العدد ٧٢٠ في صورة مضروب يساوي :

- أ ٣! ب ٦! ج ٤! د ٥!

١٥ المدى لمجموعة البيانات التالية : ١٨ ، ٢٨ ، ٣٨ ، ٤٨ ، ٩٨ هو :

- أ ٣٨ ب ٧٠ ج ٨٠ د ١١٦

١٦ الوسيط لمجموعة القيم : ٤ ، ٦ ، ٢ ، ٤ ، ٥ ، ١٠ هو :

- أ ٤ ب $\frac{1}{2}$ ج ٥ د ١٠

١٧ العدد الذي لا يمثل متوسطاً حسابياً ولا وسيطاً ولا منوالاً لمجموعة البيانات التالية :

١٨، ١٨، ٢٠، ٢٤ هو :

أ ٢٠

ب ١٨

ج ١٩

د ٢٢

١٨ في التمثيل المقابل :

أعلى درجة حرارة سيليزية تم تسجيلها هي :

أ ٥٣

ب ٤٤

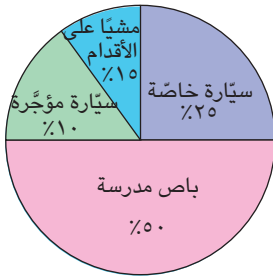
ج ٧٢

د ٣٩

درجات الحرارة المسجلة لأيام من شهر مايو بالدرجة السيليزية		
أوراق (دولة الكويت)	الساق	أوراق (دولة تركيا)
٧٧٨٩	٢	٧٦٥
٢٢٣٤	٣	٥٤٤٣٢
	٤	

١٩ تمثل الدوّارة وسائط النقل التي يستخدمها المتعلّمون للذهاب

إلى المدرسة ، إذا كان عدد المتعلّمين ٨٠٠ متعلّم في المدرسة ، فإنّ المتعلّمين الذين يمشون على الأقدام يساوي :



أ ١٢٠ متعلّماً

ب ١٦٠ متعلّماً

ج ٤٠ متعلّماً

د ١٥٠ متعلّماً

المشروع الرابع : الرياضيات والحياة

الاحتمال هو فرع من فروع الرياضيات يساعدنا على التوقُّع بمدى إمكانية وقوع حدث معيَّن ، فنحن نستخدمه كثيرًا في حياتنا اليومية ، مثل توقُّع نتيجة مباراة أو معرفة فرصة فوزنا في لعبة ما .



خطة العمل :

تقوم كل مجموعة باختيار لعبة من اللعب الثلاثة الموجودة ، كالدَّوارة أو حجر النرد أو قطعة النقود ، للتعرف على النتائج الممكنة إذا تمَّ اللعب بأيٍّ منها ٣ مرَّات متتالية .

خطوات تنفيذ المشروع :

- تقوم كل مجموعة باختيار إحدى اللعب المعطاة وتصميم نموذج لها .
- قُم بتصميم جدول لتسجيل النتائج الممكنة عند اللعب بأيٍّ منها ٣ مرَّات متتالية .

علاقات وتواصل :

تتبادل المجموعات الأوراق للتأكد من صحَّة ودقَّة تطبيق المشروع .

عرض العمل :

تعرض كل مجموعة عملها وتناقش خطوات تنفيذ العمل .

المراجع

- الرياضيات ، الصف الثامن ، الطبعة الثالثة ٢٠١٧ - ٢٠١٨ م ،
وزارة التربية ، قطاع البحوث التربوية والمناهج .
- الرياضيات ، الصف الثامن ، الطبعة الخامسة ٢٠٢٤ - ٢٠٢٥ م ،
وزارة التربية ، قطاع البحوث التربوية والمناهج .
- الرياضيات ، الصف الثامن ، الطبعة التجريبية ٢٠٢٣ - ٢٠٢٤ م ،
وزارة التربية ، قطاع البحوث التربوية والمناهج .

مصادر بعض الصور

- صفحة ١٣٢ : الصورة مزوّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ١٤٤ : الصورة مزوّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ١٤٧ : الصورة مزوّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ١٥١ : الصورة مزوّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ١٥٣ : الصورة مزوّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ١٥٤ : الصورة مزوّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ١٦٠ : الصورة مزوّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ١٦٤ : الصورة مزوّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ١٦٥ : الصورة مزوّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ١٧٠ : الصورة مزوّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ١٧٧ ، ١٨٩ ، ١٩٣ ، ١٩٦ : الصورة مزوّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ١٧٨ : الصورة مزوّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ١٨٠ والغلاف : الصورة مزوّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ١٨٣ : الصورة مزوّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ١٨٥ : الصورة مزوّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ١٨٩ : الصورة مزوّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ١٩١ : الصورة مزوّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ١٩٥ : الصورة مزوّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ١٩٧ : الصور مزوّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ١٩٨ : الصورة مزوّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ٢٠٠ : الصورة مزوّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ٢١٤ : الصورة مزوّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ٢٢٠ : الصورة مزوّدة من لجنة الرياضيات .



قيّم مناهجنا



الكتاب كاملاً