وزارة التربية
Ministry of Education
State of Kuwait | دولـــة الكويــت

الرياضيات

الصفّ الثامن

الفصل الدراسي الثاني ـ القسم الأوّل

المرحلة المتوسّطة

1/2

وزارة التربية
Ministry of Education
State of Kuwait | دولـــة الكويـت

الرياضيات

الصفّ الثامن

الفصل الدراسي الثاني ـ القسم الأوّل

تأليف
أ. دلال مبارك الحجرف (رئيسًا)

أ.نـوره عبـد الله أبورقبـة العتيبـي | أ. ســاره زايــد شــيــنــان الـعـجـمـي
أ. وسـميه بـادي هادي الرشـيدي | أ. عصـام عبـد الهـادي السـيد حسـن
أ. عفـاف عبـد العزيـز يعقـوب الصانـع

الطبعة الأولى
١٤٤٧ هـ
٢٠٢٥ - ٢٠٢٦ م

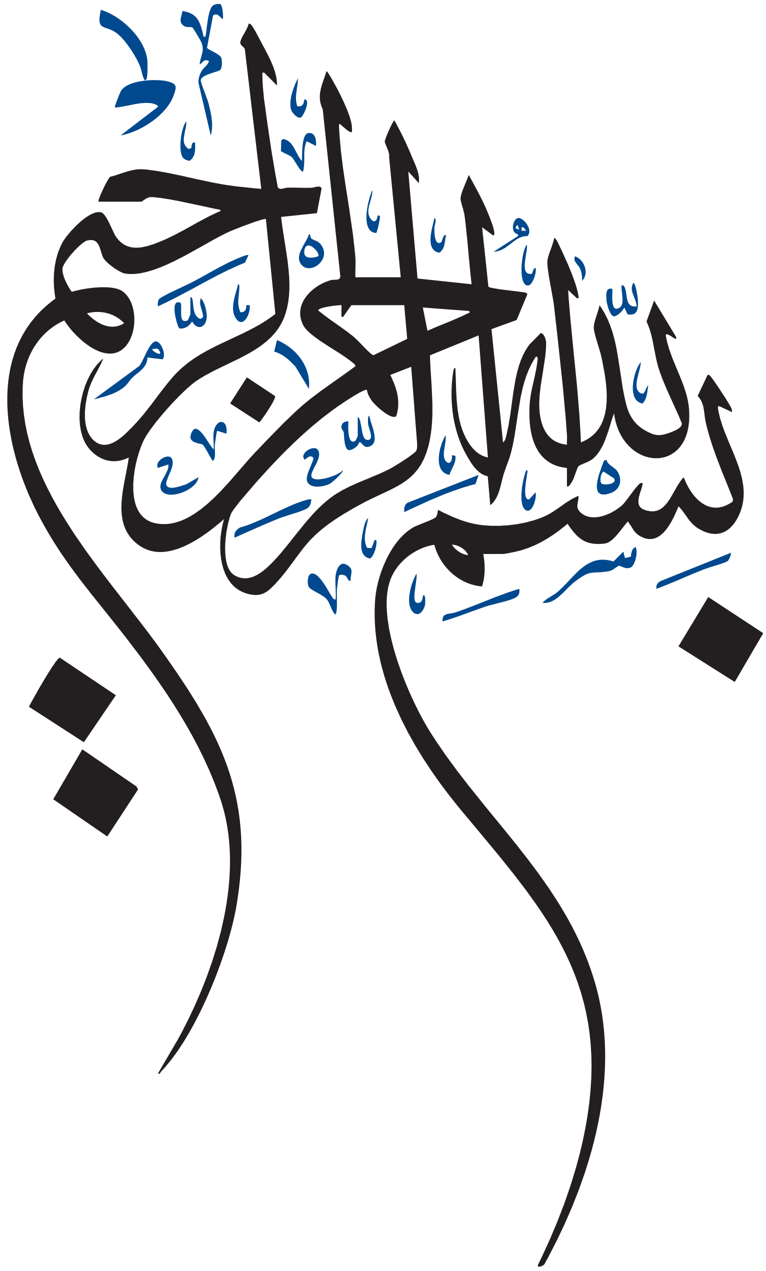
الطبعة الأولى: ٢٠٢٥ / ٢٠٢٦ م

المراجعة العلمية

أ. سمير عبدالله مرسي

ذات السلاسل - الكويت

أودع بمكتبة الوزارة تحت رقم (٩١) بتاريخ ١٦/ ١/ ٢٠٢٦ م


بسم الله الرحمن الرحيم

حضرة صاحب السمو الشيخ مشعل الأحمد الجابر الصباح

أمير دولة الكويت

H.H. Sheikh Meshal AL-Ahmad Al-Jaber Al-Sabah

Amir Of The State Of Kuwait

سمو الشيخ صباح خالد الحمد الصباح
ولي عهد دولة الكويت

H. H. Sheikh Sabah Khaled Al-Hamad Al-Sabah
Crown Prince Of The State Of Kuwait

مقدّمة

الحمدلله ربّ العالمين والصلاة والسلام على سيد المرسلين محمد بن عبدالله وصحبه أجمعين.

اِنطلاقًا من التوجيهات السامية لحضرة صاحب السموّ أمير البلاد الشيخ مشعل الأحمد الجابر الصباح ، حفظه الله ورعاه ، بضرورة الإسراع في تنفيذ كافّة مشاريع الدولة التنموية ومن ضمنها على وجه الخصوص المشاريع التعليمية ، وتماشيًا مع رؤية الكويت ٢٠٣٥ والتي تنادي بكويت جديدة فقد شرعت وزارة التربية في تطوير مناهجها التعليمية مستندة ، في ذلك إلى أهمّية رأس المال البشري كعنصر أساسي في تنمية الوطن ورفعته.

ولأنّ المناهج التعليمية هي قاعدة الهرم التعليمي إلى جانب المعلّم والمتعلّم ، وتُعدّ أحد الروافد المهمّة في خلق جيل متعلّم وواعٍ ، قادر على المشاركة في بناء المجتمع ، ولأنّ المناهج عبارة عن كمّ الخبرات التربوية والتعليمية التي تُقدَّم للمتعلّم ، فقد أولت الوزارة أهمّية بتطوير المناهج حسب المعايير العلمية وذلك لتحقيق نقلة نوعية في الشكل والمضمون ، وإيمانًا بأهمّيتها وانطلاقًا من أنّها ذات صفة عالمية مع الأخذ في الاعتبار خصوصية المجتمع الكويتي وبيئته المحلّية ، ملتزمة بأن تصبّ جميعها في تعزيز الهويّة الوطنية وبعقلية منفتحة على الآخرين مع احترام حقوق الإنسان وحرّياته الأساسية والتمسّك بمبادئ الإسلام والتسامح من جهة ، وغزيرة بمهارات القرن الواحد والعشرين لتعزيز المفاهيم الرياضية لجميع المتعلّمين من جهة أخرى لكي يكونوا في طليعة المنافسين في المسابقات العلمية والدولية ، وذلك عبر بناء الخطط التعليمية المعتمَدة من قطاع المناهج مؤكِّدين على أهمّية التكامل بين الجوانب العلمية والتطبيقية حتّى تكون ذات طبيعة وظيفية مرتبطة بحياة المتعلّم ، متضمّنة في الكثير من بنودها التمارين ذات المستويات العليا في التفكير والفهم والتحليل والتركيب .

وقد تمّت صياغة وترتيب الكتاب المدرسي في منهجية خاصة ذات هيكل ومجالات معينة تتمحور حول العدّ والجبر والهندسة والقياس ، وأخيرًا الإحصاء والاحتمال .

فقد تمّ بناء الكتاب وفق منهجية تربوية حديثة تراعي التدرّج المنطقي في المفاهيم والمهارات لبناء معرفة رياضية تراكمية تراعي الفروق الفردية بين المتعلّمين وتعزّز التفكير الرياضي العميق .

كما ويحوي الكتاب على وحدات تعليمية وموضوع محوري يتمّ إبرازه في مقدّمة كلّ وحدة ، تساعدهم على تنمية الفهم البنائي وربط المفاهيم الجديدة مع سياقات من واقع الحياة .

وحرصنا على إدراج التمارين المتنوّعة مع نهاية كلّ درس ، والتي تنوّعت بين الأسئلة المباشرة والمسائل الحياتية وأسئلة مهارات تفكير عليا ، مثل التبرير والنقد وتعدّد طرق الحلّ والاستنتاج .

تنتهي كلّ وحدة بقسم خاصّ للتقويم لقياس مدى تحقيق الأهداف متضمّنة أسئلة شاملة للمفاهيم والمهارات التي تمّ تناولها ، حتّى تكون أداة تمكّننا من تحديد الاحتياجات التعليمية لاحقًا .

ممّا سبق من معطَيات وغيرها من الجوانب التعليمية والتربوية ، فقد تمّت صياغة وإعداد كتب الرياضيات لتحقّق نقلة نوعية ذات جودة عالية تلبيّ الطموحات المطلوبة وتكون نافذة واسعة تُطلّ على آمالنا وتطلّعاتنا في المستقبل لما نهدف إليه من تأسيس فكر رياضي في عقول أجيالنا القادمة تنهض بها أمّتنا وتضعها في مكانها المناسِب في الصفوف المتقدّمة ، ويُشار إليها بالبنان مع كلّ محفل.

المحتويات

الجزء الأوّل :

الجزء الثاني :

الوحدة التعليمية الخامسة

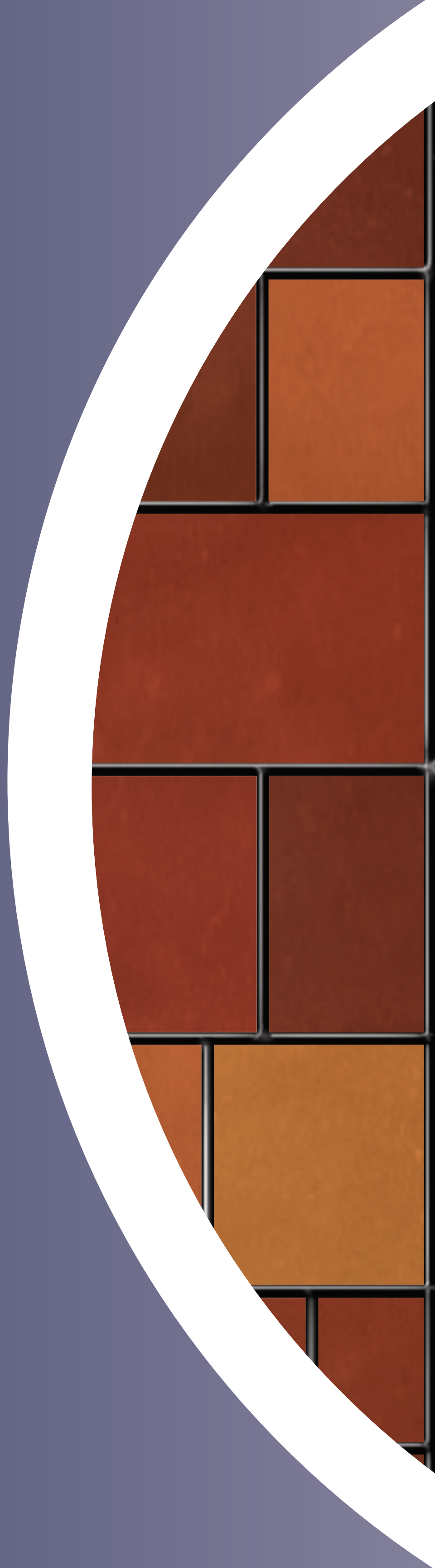
الأشكال الرباعية

الوحدة التعليمية السادسة

المقادير الجبرية

الوحدة التعليمية
الخامسة

الأشكال الرباعية

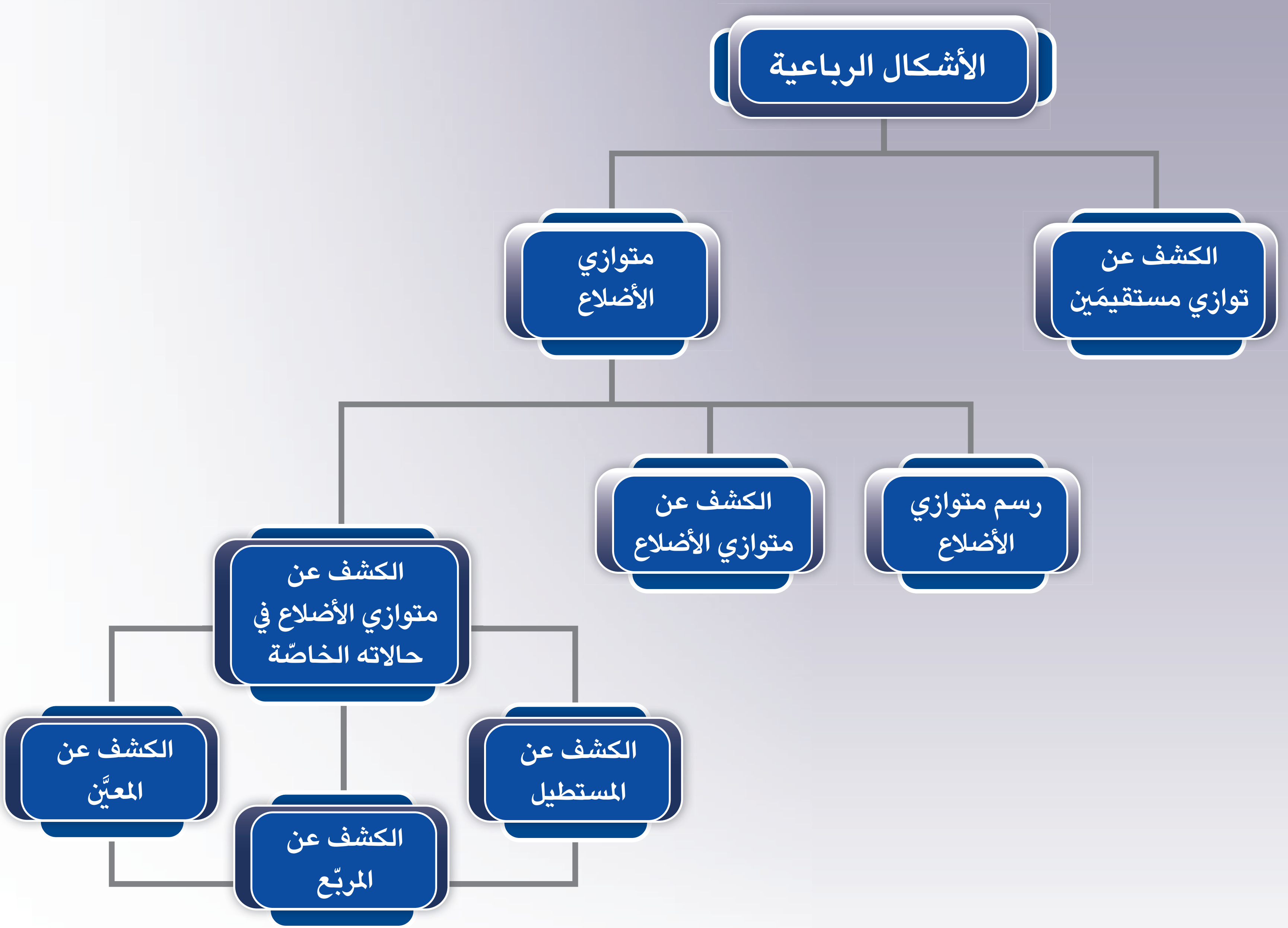


«من الهندسة إلى الجمال : الأشكال الرباعية في الفسيفساء »

تُستخدم الأشكال الرباعية في الهندسة والفنّ لتصميم الفسيفساء والزخارف الهندسية التي نراها في المساجد والقصور القديمة . يعتمد الفنّانون والمهندسون على خصائص الأشكال الرباعية مثل المربّعات والمستطيلات والمعيَّنات ، لتكوين أنماط متناسقة ومتكرّرة تُضفي جمالًا ودقّة على التصاميم المعمارية .

المجال	معايير المنهج	مؤشّر الأداء
الهندسة والقياس	- تحليل صفات وخصائص الأشكال الهندسية ذات البعدَين والثلاثة الأبعاد ، وتنمية التفكير الرياضي حول العلاقات الهندسية والمقارنة بين الأشكال ووصفها .	الفهم - التذكّر - الاستكشاف والتقصّي - العمل الجَماعي - العلاقات - الربط - التعرّف - الاستنتاج - التمييز - التصنيف - الاستدلال - التحليل والتركيب - التعاون - الوسائط - التقويم - التعليل - حلّ المشكلات
	- إِستخدام التصوّر البصري والتعليل المكاني والنمذجة الهندسية لتمثيل عالمه المادّي ووصفه وحلّ مشكلاته .	
	- تطبيق الأساليب والأدوات والصيغ الملائِمة لتحديد قياسات .	
	- فهم خواصّ القياس للأشياء والوحدات والأنظمة وعمليات القياس .	

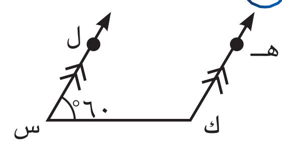
مخطّط تنظيمي للوحدة التعليمية الخامسة



هل أنت مستعدّ؟

١ في كلّ من الأشكال التالية ك هـ ⟵ // س ل ⟵ . أوجِد ق (س كَ^ هـ) مع ذكر السبب .

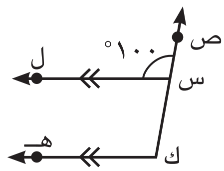
(أ)



....

....

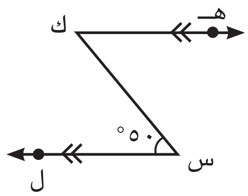
(ب)



....

....

(ج)

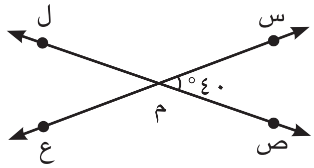


....

....

٢ في الشكل المقابِل ، س ع ⟷ ∩ ص ل ⟷ = { م } ،

ق (س مَ^ ص) = ٤٠° . أكمِل :



ق (ل مَ^ ع) = ...

السبب : ....

ق (س مَ^ ل) = ...

السبب : ....

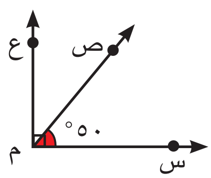
٣ إذا كانت سَ^ ، صَ^ زاويتَين متكاملتَين ، ق (سَ^) = ٥٥° ، فأوجِد مع ذكر السبب .

ق (صَ^) = ...

السبب : ....

٤ في الشكل المقابِل ، بحسب البيانات على الرسم ،

أكمِل :

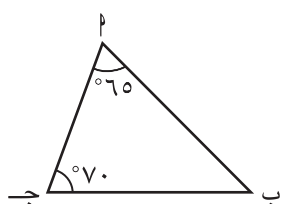


ق (ص مَ^ ع) = ...

السبب : ....

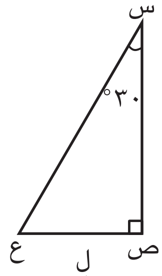
٥ في الشكل المقابِل ، بحسب البيانات على الرسم ،

أكمِل :



ق (بَ^) = ...

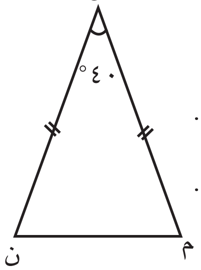
السبب : ....



٦ في الشكل المقابِل ، أكمِل :

ق (ع^) = ...

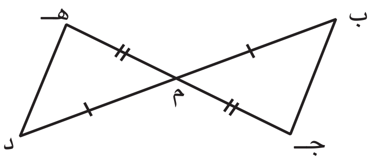
السبب : ....



٧ في الشكل المقابِل ، أكمِل :

ق (ل م^ ن) = ...

السبب : ....



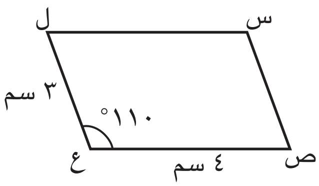
٨ في الشكل المقابِل ، أكمِل :

م ب ≅ ....

م جـ ≅ ....

ب م^ جـ ≅ .... السبب : ....

∴ Δ م ب جـ ≅ .... الحالة : ....



٩ س ص ع ل متوازي أضلاع فيه :

ع ل = ٣ سم ، ع ص = ٤ سم ، ق (ع^) = ١١٠°

أوجِد ما يلي مع ذكر السبب .

ق (س^) = ... السبب : ....

ق (ص^) = ... السبب : ....

س ص = ... السبب : ....

س ل = ... السبب : ....

١٠ في الشكل المقابِل ، بحسب البيانات المدوَّنة على الرسم ، أكمِل :

ق (س^) = ...

السبب : ....

١١ حُلّ كلًّا من المعادلات التالية حيث س ∈ ط :

(أ) ٢ س – ٤ = ٦

....

....

(ب) ٥ س + ٩ = ١٤

....

....

٥ - ١ الكشف عن توازي مستقيمَين
Detecting the Parallelism of Two lines

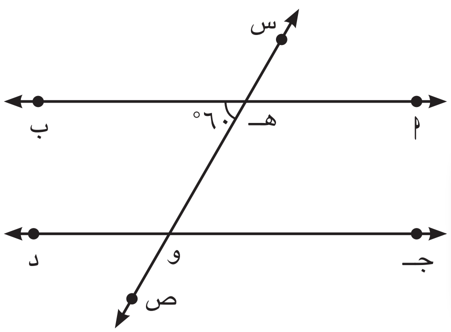
سوف تتعلّم : الكشف عن توازي مستقيمَين .

العبارات والمفردات :

يوازي	Parallel	زوايا متبادلة	Alternate Angles
زوايا متناظرة	Corresponding Angles	زوايا متحالفة	Allied Angles

إستكشِف

في الشكل المقابِل :



أوّلًا : باستخدام المنقلة ، أوجِد ق (هـ و̂ جـ) :

ق (هـ و̂ جـ) = ...

اللوازم :
أدوات هندسية

ثانيًا : أكمِل :

١ ق (هـ و̂ جـ) = ق (...........̂)

وهما في وضع تبادل

٢ ق (د و̂ ص) = ق (...........̂)

بالتقابل بالرأس

∴ ق (د و̂ ص) = ق (...........̂)

وهما في وضع تناظر

٣ ق (هـ و̂ د)

= ١٨٠° − .... = ...

بالتجاور على خطّ مستقيم واحد

مع (جـ و̂ هـ)

∴ ق (هـ و̂ د) + ق (ب هـ̂ و)

= .... + ... = ١٨٠°

وهما زاويتان متحالفتان

ثالثًا : باستخدام المسطرة والمثلّث القائم ، تحقَّق من صحّة توازي المستقيمَين : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$.

ماذا تلاحظ ؟ ....

....

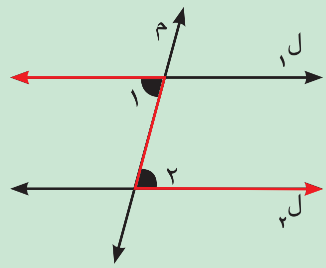
تذكّر

- الزاويتان المتكاملتان مجموع قياسهما ١٨٠°
- الزاويتان المتجاورتان على خطّ مستقيم واحد متكاملتان .
- الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان .

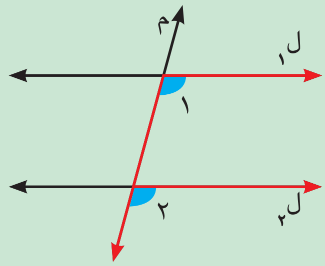
نستنتج أنّ :

إذا قطع مستقيم مستقيمَين في المستوى ، فإنّ المستقيمَين يكونان متوازيَين ، **إذا وفقط إذا** توفّر أحد الشروط التالية :

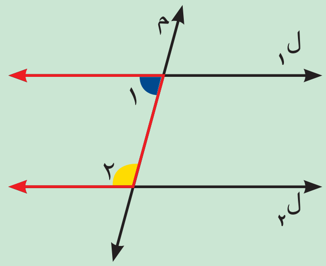
١ زاويتان متبادلتان متطابقتان



٢ زاويتان متناظرتان متطابقتان



٣ زاويتان متحالفتان متكاملتان



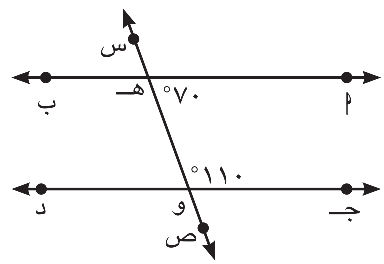
دورك الآن (١)

أيّ من الأشكال التالية يكون $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـد}}$ ؟ وضِّح ذلك .

لاحِظ أنّ :

«لا يوازي» يُرمز إليه بالرمز ∦

١



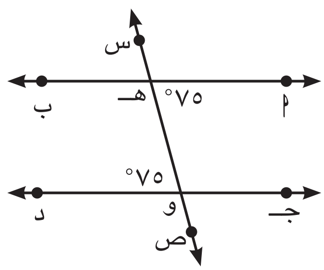
∵ ق (أ هـ و^) + ق (......^......) = (........)

= .... + ... = ...

وهما زاويتان ....

∴ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ .... $\overleftrightarrow{\text{جـد}}$

٢



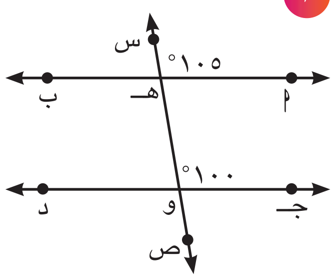
∵ ق (......^......) = ق (......^......)

= ٧٥°

وهما في وضع ....

∴ .... // ....

٣



ق (أ هـ س^) ≠ ق (......^......)

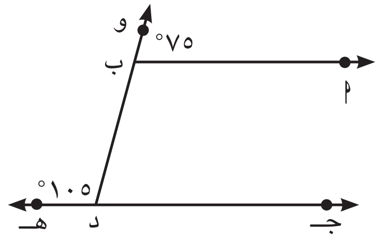
وهما في وضع ....

∴ ....

مثال (١):

في الشكل أدناه : ق (أ بَ̂ و) = ٧٥° ، ق (ب دَ̂ هـ) = ١٠٥°

أثبِت أنّ ب أ // هـ جـ .



الحلّ :

المعطَيات :

ق (ب دَ̂ هـ) = ١٠٥°

ق (أ بَ̂ و) = ٧٥°

المطلوب : إثبات أنّ ب أ // هـ جـ

البرهان : ∵ ق (ب دَ̂ هـ) = ١٠٥° (معطى)

∴ ق (جـ دَ̂ ب) = ١٨٠° - ١٠٥° = ٧٥° (بالتجاور على خطّ مستقيم واحد)

∵ ق (أ بَ̂ و) = ق (جـ دَ̂ ب) = ٧٥° (وهما في وضع تناظر)

∴ ب أ // هـ جـ

لاحِظ أنّ :

لحلّ تمارين هندسية ، اِتّبِع الخطوات التالية :

١ أُكتب المعطَيات

٢ أُكتب المطلوب

٣ أُكتب البرهان (خطوات الوصول إلى المطلوب)

عبِّر عن فهمك (١)

هل يمكنك حلّ مثال (١) بطرق أخرى ؟ فسِّر إجابتك .

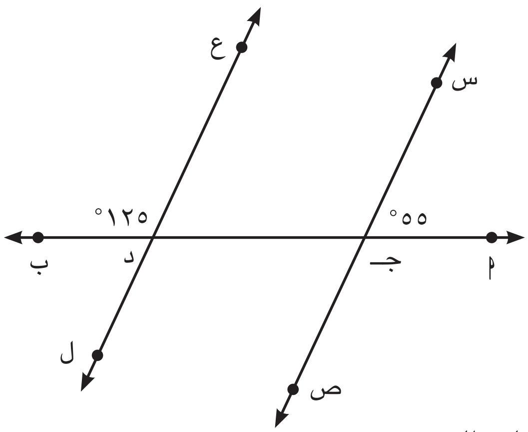
دورك الآن (٢)

في الشكل المقابِل ، أ ب قاطع للمستقيمَين

س ص ، ع ل ، في جـ ، د على الترتيب ،

ق (أ جَـ̂ س) = ٥٥° ، ق (ع دَ̂ ب) = ١٢٥° ،

برهِن أنّ س ص // ع ل



الحلّ :

المعطَيات : أ ب قاطع للمستقيمَين .... ، .... في جـ ، د على الترتيب ،

ق (..........) = ٥٥° ، ق (ع دَ̂ ب) = ...

المطلوب : إثبات أنّ س ص .... ع ل

البرهان : ∵ ق (أ جَـ̂ س) = ... (معطى)

∴ ق (س $\hat{\text{جـ}}$ د) = ١٨٠° - .... = ... (بالتجاور على خطّ مستقيم واحد)

∵ ق ($\hat{\text{..........}}$) = ١٢٥° (معطى)

∴ ق (س $\hat{\text{جـ}}$ د) = ق ($\hat{\text{..........}}$) = ... (وهما في وضع ....)

∴ .... // ....

تذكّر

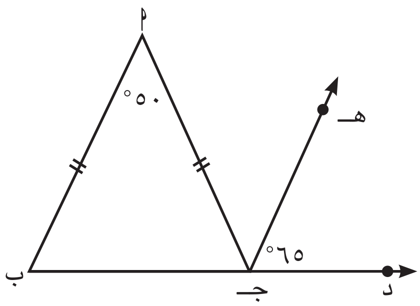
في المثلّث المتطابق الضلعَين زاويتا القاعدة متطابقتان .

مثال (٢):

في الشكل المقابِل وحسب البيانات المحدَّدة عليه ،

أثبِت أنّ $\overleftarrow{\text{جـ هـ}}$ // $\overline{\text{ب أ}}$

الحلّ :



المعطيات : أ ب = أ جـ ، ق ($\hat{\text{أ}}$) = ٥٠° ، ق (د $\hat{\text{جـ}}$ هـ) = ٦٥°

المطلوب : إثبات أنّ $\overleftarrow{\text{جـ هـ}}$ // $\overline{\text{ب أ}}$

البرهان : ∵ أ ب = أ جـ (معطى)

∴ Δ أ ب جـ متطابق الضلعَين

∴ ق (أ $\hat{\text{ب}}$ جـ) = ق (أ $\hat{\text{جـ}}$ ب) = $\frac{١٨٠° - ٥٠°}{٢}$ = $\frac{١٣٠°}{٢}$ = ٦٥° (مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلة = ١٨٠°)

∵ ق (د $\hat{\text{جـ}}$ هـ) = ٦٥° (معطى)

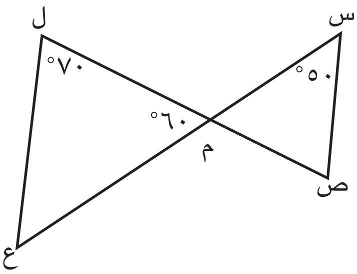
∴ ق (أ $\hat{\text{ب}}$ جـ) = ق (د $\hat{\text{جـ}}$ هـ) = ٦٥° (وهما في وضع تناظر)

∴ $\overleftarrow{\text{جـ هـ}}$ // $\overline{\text{ب أ}}$

دورك الآن (٣)

في الشكل المقابِل ، إذا كان $\overline{\text{س ع}}$ ∩ $\overline{\text{ص ل}}$ = { م } وحسب البيانات المحدَّدة عليه ،

أثبِت أنّ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ع ل}}$



الحلّ :

المعطيات : $\overline{\text{س ع}}$ ∩ $\overline{\text{ص ل}}$ = { م }

ق ($\hat{\text{س}}$) = ... ، ق ($\hat{\text{..........}}$) = ٧٠° ،

ق (ع $\hat{\text{م}}$ ل) = ...

المطلوب : إثبات أنّ $\overline{\text{س ص}}$ ....

تذكّر

مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلة يساوي ١٨٠° .

البرهان : ∆ ع م ل فيه

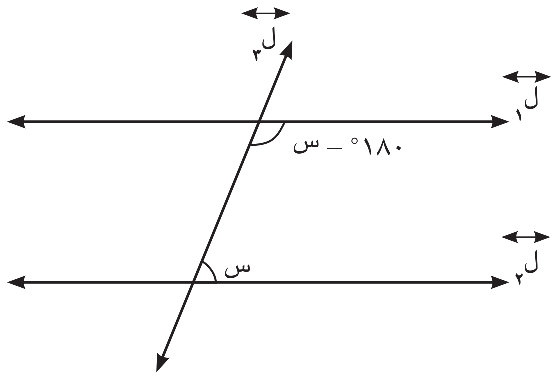
ق (ع^) = ١٨٠° - (.......... + ...) = ... ° (مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلة ....)

∴ ق (س^) = ق (..........^) = ... (وهما في وضع ....)

∴ .... // ....

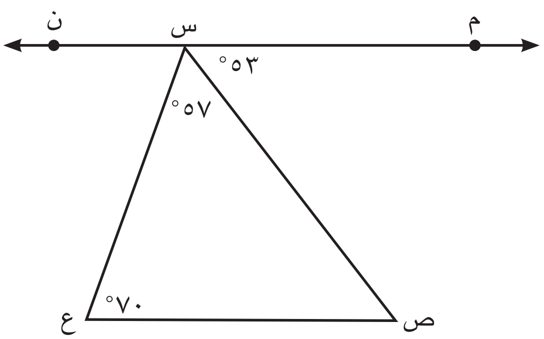
عبِّر عن فهمك (٢)

يقول يوسف : إنّ ل١ // ل٢ ، فهل توافقه الرأي ؟ وضِّح ذلك .



تمارين ذاتية :

١ في الشكل المقابِل وحسب البيانات المحدَّدة عليه ،
أثبِت أنّ م ن // ص ع .



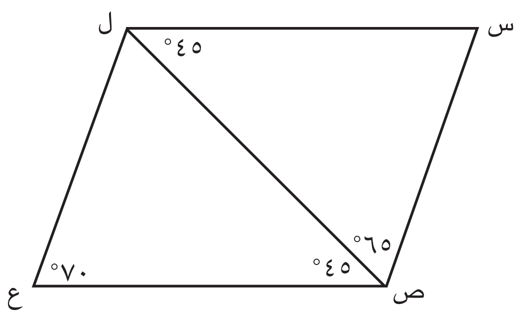
....

....

....

....

٢ في الشكل المقابِل وحسب البيانات المدوَّنة عليه ،
برهِن أنّ :



(أ) س ل // ص ع

....

....

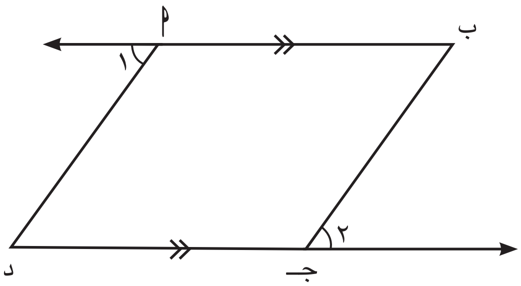
(ب) س ص // ل ع

....

....

٣ في الشكل المقابِل : ب أ // د جـ ،

ق (^١) = ق (^٢) برهِن أنّ ب جـ // أ د

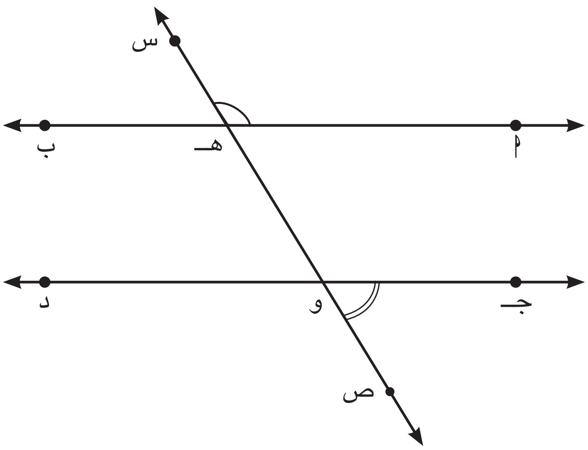


مهارات تفكير عليا :

٤ في الشكل المقابِل :

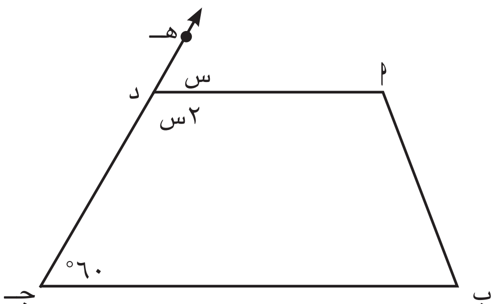
ق (أ ^هـ س) + ق (جـ ^و ص) = ١٨٠°

أثبِت أنّ أ ب // جـ د



٥ في الشكل المقابِل وحسب البيانات المدوَّنة عليه ،

أثبِت أنّ أ ب جـ د شبه منحرِف .



تذكَّر

شبه المنحرِف هو شكل رباعي فيه ضلعان فقط متقابلان متوازيان .

٥ - ٢ متوازي الأضلاع – رسم متوازي الأضلاع
Parallelogram - Drawing a Parallelogram

سوف تتعلّم : متوازي الأضلاع وخواصّه – رسم متوازي الأضلاع .

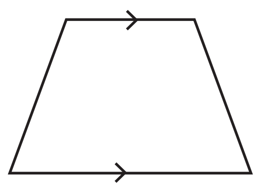
العبارات والمفردات :

متوازي الأضلاع	Parallelogram	زاويتان متتاليتان	Consecutive Angles
زاويتان متقابلتان	Opposite Angles		

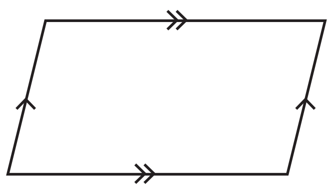
يُستخدم متوازي الأضلاع في العديد من التطبيقات الحياتية والعملية وخاصّة في الهندسة ، البناء ، التصميم ، الميكانيكا وحتّى الفنّ .

حُلّ وناقِش

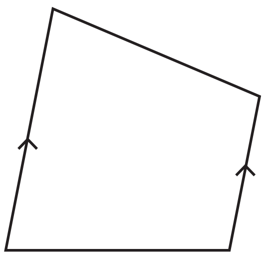
من الأشكال الرباعية التالية (لاحِظ علامات التوازي) ، أيّها يمثّل متوازي أضلاع ؟ ولماذا ؟



(١)



(٢)



(٣)

....

....

ماذا تلاحظ ؟

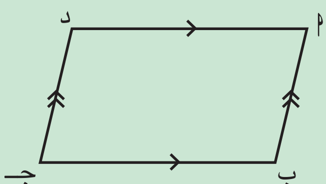
....

....

تعلّمت ممّا سبق أنّ :

متوازي الأضلاع هو شكل رباعي فيه كلّ ضلعَين متقابلَين متوازيان .

أ ب جـ د متوازي أضلاع وعلى ذلك فإنّ :



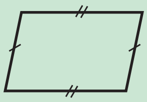
- $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{د جـ}}$
- $\overline{\text{أ د}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

اِنتبِه

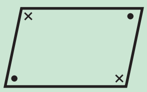
- رمز التوازي على الرسم > أو »
- رمز التوازي في التعبير الرياضي //

كما تعلّمت خواصّ متوازي الأضلاع :

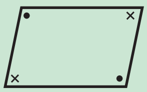
١ في متوازي الأضلاع كلّ ضلعَين متقابلَين متطابقان .



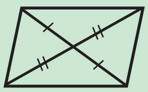
٢ في متوازي الأضلاع كلّ زاويتَين متقابلتَين متطابقتان .



٣ في متوازي الأضلاع مجموع قياس كلّ زاويتَين متتاليتَين يساوي ١٨٠° (متكاملتَين) .



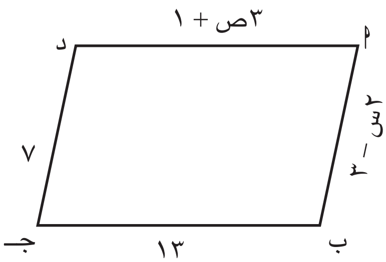
٤ في متوازي الأضلاع القطران ينصّف كلّ منهما الآخر .



عبِّر عن فهمك

كيف يمكن استخدام مفهوم تطابق مثلّثَين في إثبات خاصّية (القطران ينصّف كلّ منهما الآخر) في متوازي الأضلاع ؟ وضِّح إجابتك .

مثال (٢) :



في الشكل المقابِل أ ب جـ د متوازي أضلاع ، وبحسب البيانات المدوَّنة على الرسم ، أوجِد بالبرهان قيمة كلّ من س ، ص .

الحلّ :

المعطَيات : أ ب جـ د متوازي أضلاع

أ ب = (٢ س − ٣) وحدة طول ، ب جـ = ١٣ وحدة طول

د جـ = ٧ وحدات طول ، أ د = (٣ ص + ١) وحدة طول

المطلوب : إيجاد قيمة كلّ من س ، ص

البرهان : ∵ أ ب جـ د متوازي أضلاع (معطى)

∴ كلّ ضلعَين متقابلَين متطابقان (من خواصّ متوازي الأضلاع)

∴ أ ب = د جـ

٢ س − ٣ = ٧

٢ س − ٣ + ٣ = ٧ + ٣

$\frac{\cancel{٢}^{١}\,س}{\cancel{٢}_{١}} = \frac{\cancel{١٠}^{٥}}{\cancel{٢}_{١}}$

س = ٥

، ∴ أ د = ب جـ

٣ ص + ١ = ١٣

٣ ص + ١ − ١ = ١٣ − ١

$\frac{\cancel{٣}^{١}\,ص}{\cancel{٣}_{١}} = \frac{\cancel{١٢}^{٤}}{\cancel{٣}_{١}}$

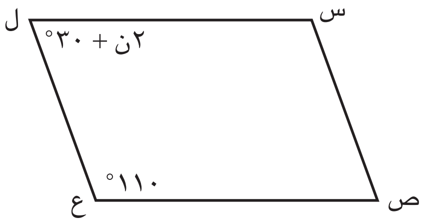
ص = ٤ (تحقَّق من صحّة الحلّ)

اِنتبِه

لإيجاد قيمة س أو ص ، يُفضَّل حلّ المعادلة باستخدام المعكوس الجمعي ثمّ المعكوس الضربي .

دورك الآن (١)

في الشكل المقابِل ، س ص ع ل متوازي أضلاع ، وبحسب البيانات المدوَّنة على الرسم ، أكمِل ما يلي لإيجاد قيمة ن .



المعطَيات : ....

....

المطلوب : ....

البرهان : ∵ س ص ع ل متوازي أضلاع

∴ ق (..........) + ق (..........) = ١٨٠° (من خواصّ متوازي الأضلاع كلّ زاويتَين متتاليتَين متكاملتان)

٢ ن + ٣٠° + ١١٠° = ١٨٠°

٢ ن + ١٤٠° = ١٨٠°

٢ ن = ١٨٠° − ....

ن = $\frac{..........}{٢}$

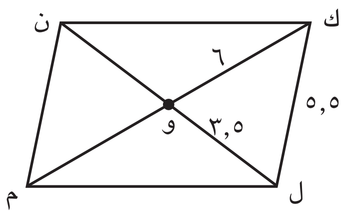
∴ ن = ...

اِنتبِه

الزاويتان المتكاملتان مجموع قياسهما ١٨٠°

مثال (٢) :

ك ل م ن متوازي أضلاع تقاطع قطرَيه في و ، ك ل = ٥,٥ وحدة طول ، ك و = ٦ وحدات طول ، ل و = ٣,٥ وحدة طول ، أوجِد محيط Δ م و ن .



الحلّ :

المعطَيات : ك ل م ن متوازي أضلاع

ك ل = ٥,٥ وحدة طول ، ك و = ٦ وحدات طول ، ل و = ٣,٥ وحدة طول

المطلوب : إيجاد محيط Δ م و ن

البرهان : ∵ ك ل م ن متوازي أضلاع (معطى)

∴ و م = و ك = ٦ وحدات طول (من خواصّ متوازي الأضلاع القطران ينصّف كلّ منهما الآخر)

، ∴ و ن = و ل = ٣,٥ وحدة طول

، ∴ م ن = ك ل = ٥,٥ وحدة طول (من خواصّ متوازي الأضلاع كلّ ضلعَين متقابلَين متطابقان)

∴ محيط Δ م و ن = و م + و ن + م ن

= ٦ + ٣,٥ + ٥,٥

= ١٥ وحدة طول

تذكَّر

محيط المثلّث يساوي مجموع أطوال أضلاعه .

رسم متوازي الأضلاع

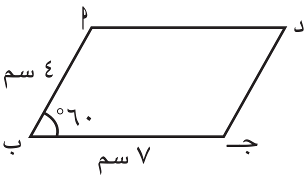
اللوازم :
أدوات هندسية

إحدى طرق رسم متوازي الأضلاع إذا عُلم فيه طولا ضلعَين متجاورَين وقياس إحدى زواياه .

مثال توضيحي :

أُرسم متوازي الأضلاع ﺃ ب جـ د الذي فيه ﺃ ب = ٤ سم ، ب جـ = ٧ سم ، ق (ﺃ بˆ جـ) = ٦٠°

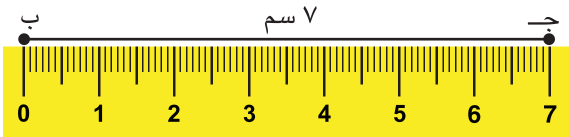
أوّلًا : أُرسم رسمًا تخطيطيًّا لوضع تصوّر لشكل متوازي الأضلاع موضِّحًا عليه المعطَيات .



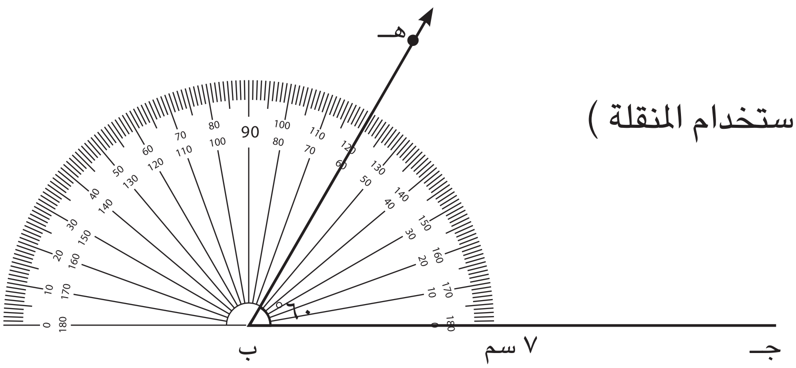
الحلّ :

ثانيًا : اِستخدِم الأدوات الهندسية ، واتّبِع خطوات العمل :

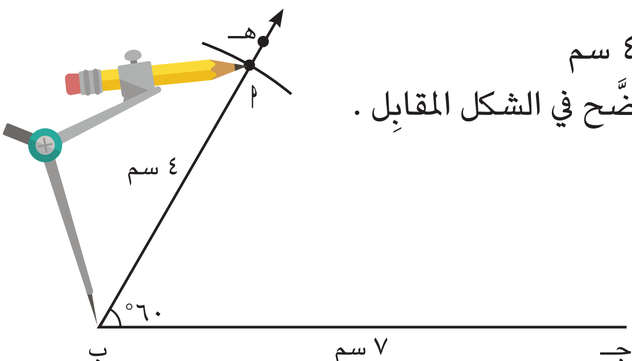
١ أُرسم $\overline{\text{ب جـ}}$ طولها ٧ سم (باستخدام المسطرة) .



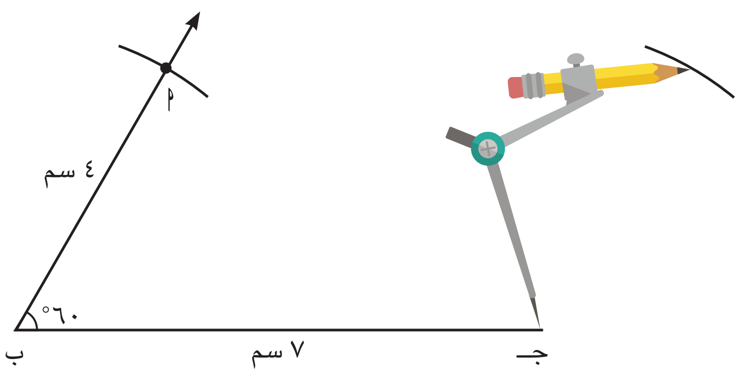
٢ أُرسم (جـ بˆ هـ) قياسها ٦٠° (باستخدام المنقلة) كما في الشكل المقابِل .



٣ ركِّز سنّ الفرجار عند النقطة ب ، وبفتحة طولها ٤ سم أُرسم قوسًا يقطع $\overrightarrow{\text{ب هـ}}$ في النقطة ﺃ ، كما هو موضَّح في الشكل المقابِل .



٤ ركِّز سنّ الفرجار في النقطة جـ ، وبفتحة طولها ٤ سم (لماذا ؟) ، أُرسم قوسًا .

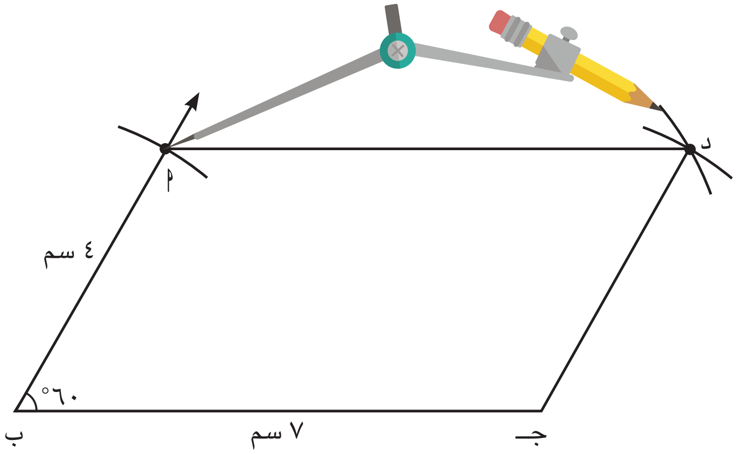


اِنتبِه

- عند استخدام المسطرة ، اِبدأ من العدد صفر .
- عند استخدام المنقلة ، اِنتبِه إلى جهة التدريج .

٥ ركِّز سنّ الفرجار في النقطة ﺃ وبفتحة طولها ٧ سم (لماذا ؟) ، أُرسم قوسًا ليتقاطع مع القوس المرسوم من النقطة جـ في النقطة د .

٦ صِل بالمسطرة $\overline{\text{د جـ}}$ ، $\overline{\text{ﺃ د}}$ لتحصل على متوازي أضلاع ﺃ ب جـ د .



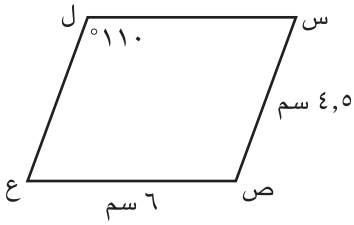
معلومة مفيدة :

يُستخدم رسم متوازي الأضلاع في تصميم الجدران والأعمدة بزاوية معيَّنة للحفاظ على التوازن والاستقرار ، كما يُستخدم في تصميم الأثاث مثل الطاولات والمكاتب بزوايا مائلة .

مثال (٣) :

أُرسم متوازي الأضلاع س ص ع ل الذي فيه

س ص = ٤,٥ سم ، ص ع = ٦ سم ، ق (س $\hat{\text{ل}}$ ع) = ١١٠° .



الحلّ :

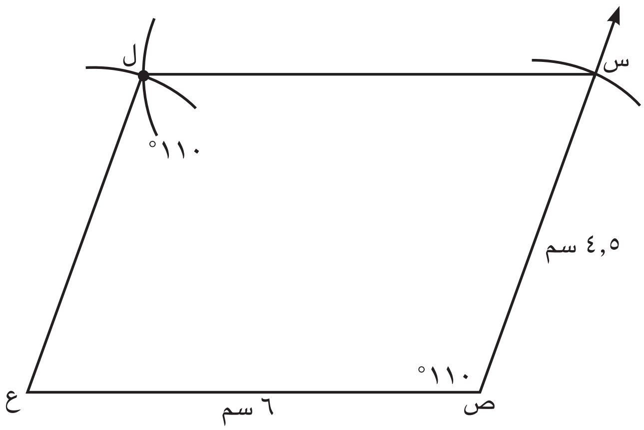
أُرسم رسمًا تخطيطيًّا للشكل موضِّحًا المعطَيات عليه .

∵ س ص ع ل متوازي أضلاع

∴ ق (س $\hat{\text{ص}}$ ع) = ق (س $\hat{\text{ل}}$ ع) = ١١٠°

كلّ زاويتَين متقابلتَين في متوازي الأضلاع متطابقتان

باستخدام الأدوات الهندسية واتّباع الخطوات السابقة ، أُرسم متوازي الأضلاع س ص ع ل .



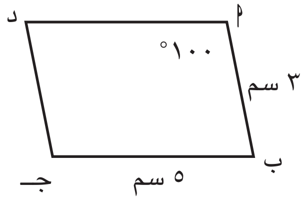
عند رسم متوازي الأضلاع بمعلومية طولَي ضلعَين متجاورَين فيه وقياس إحدى زواياه ، نوظّف خواصّ متوازي الأضلاع لإيجاد قياس الزاوية بين الضلعَين المتجاورَين .

الدرس الثاني

دورك الآن (٢)

أُرسم متوازي الأضلاع أ ب جـ د الذي فيه أ ب = ٣ سم ، ب جـ = ٥ سم ، ق (أ̂) = ١٠٠°

الحلّ :



أُرسم رسمًا تخطيطيًّا للشكل موضِّحًا عليه المعطَيات

∵ أ ب جـ د ....

∴ ق (أ̂) + ... = ... (من خواصّ متوازي الأضلاع كلّ زاويتَين متتاليتَين متكاملتان)

ق (ب̂) = ... − ....

∴ ق (ب̂) = ...

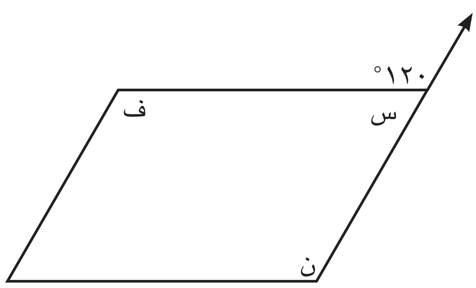
اِستخدِم الأدوات الهندسية

لرسم متوازي الأضلاع أ ب جـ د

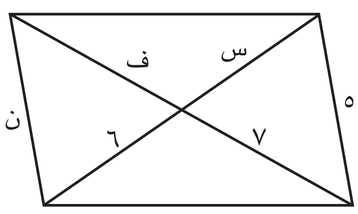
تمارين ذاتية :

١ أوجِد قيمة كلّ من س ، ف ، ن في متوازيات الأضلاع التالية مع ذكر السبب :

س = ...
....
ن = ...
....
ف = ...
....

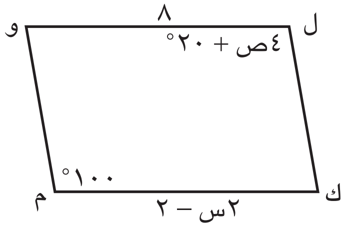


س = ...
....
ف = ...
....
ن = ...
....

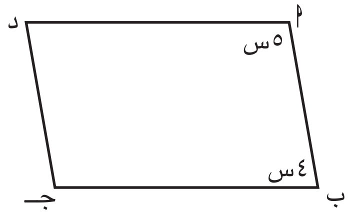


س = ...
....
ف = ...
....
ن = ...
....

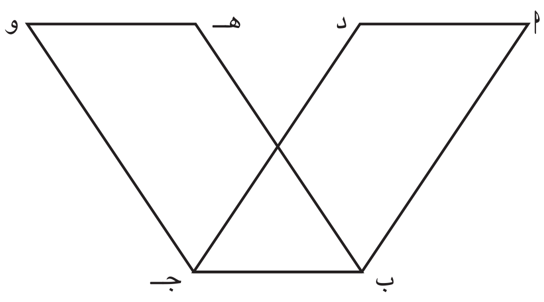
٢ في الشكل المقابِل ل ك م و متوازي أضلاع ، وبحسب البيانات المدوَّنة على الرسم ، أوجِد بالبرهان قيمة كلّ من س ، ص .



٣ في الشكل المقابِل ، أ ب جـ د متوازي أضلاع ق (أ̂) = ٥ س ، ق (ب̂) = ٤ س
أوجِد بالبرهان ق (أ̂) ، ق (ب̂) بالدرجات .



٤ أ ب جـ د ، هـ ب جـ و متوازيا أضلاع ،
أثبِت أنّ : أ د = هـ و .



٥ أُرسم متوازي الأضلاع أ ب جـ د الذي فيه أ ب = ٤ سم ، ب جـ = ٥ سم ، ق (أ ب̂ جـ) = ٧٠° .

الدرس الثاني

٦ أُرسم متوازي الأضلاع س ص ع ل الذي فيه س ص = ٥,٥ سم ، ص ع = ٦,٥ سم ، ق (س $\hat{ل}$ ع) = ٤٥° .

٧ أُرسم متوازي الأضلاع ل م ن و الذي فيه ل م = ٣,٥ سم ، م ن = ٥ سم ، ق (م $\hat{ل}$ و) = ١٢٠° .

مهارات تفكير عليا :

٨ يُحيط بحديقة سور طوله ٦٠٠ م على شكل متوازي أضلاع ، إذا كان طول السور المقابِل للشارع (أ) ضعف طول السور المقابِل للشارع (ب) ، فأوجِد طول السور المقابِل للشارع (د) .

٥ - ٣ الكشف عن متوازي الأضلاع
Detecting a Parallelogram

سوف تتعلّم : الكشف عن متوازي الأضلاع .

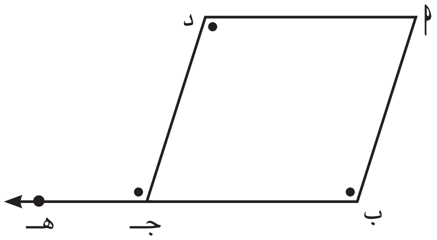
تعلّمت ممّا سبق أنّ : الشكل الرباعي الذي فيه كلّ ضلعَين متقابلَين متوازيان يُسمّى متوازي أضلاع .

ومن هذا التعريف تكون هذه هي الحالة الأولى من حالات الكشف عن متوازي الأضلاع .

الحالة الأولى (من التعريف)

يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كان فيه كلّ ضلعَين متقابلَين متوازيان .

دورك الآن (١)



في الشكل المقابِل ا ب جـ د شكل رباعي فيه

ق ($\hat{ب}$) = ق ($\hat{د}$) = ق (د $\hat{جـ}$ هـ)

أكمِل ما يلي :

∵ ق ($\hat{ب}$) = ... (وهما في وضع تناظر)

∴ .... // $\overline{د جـ}$ (١)

∵ ق ($\hat{د}$) = ... (وهما في وضع تبادل)

∴ $\overline{ا د}$ // .... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أنّ الشكل الرباعي ا ب جـ د هو..................................

لأنّ فيه ....

تذكّر

إذا قطع مستقيم مستقيمَين فإنّه : يتوازى المستقيمان إذا وفقط إذا توافر أحد الشروط التالية :

١ زاويتان متبادلتان متطابقتان

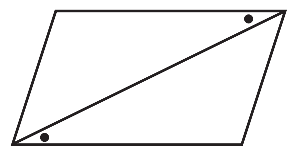
٢ زاويتان متناظرتان متطابقتان

٣ زاويتان متحالفتان متكاملتان

دورك الآن (٢)

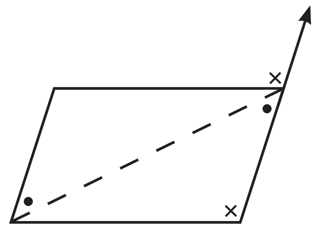
حدّد ما إذا كان الشكل الرباعي بحسب البيانات المدوَّنة عليه متوازي أضلاع أم لا .

(أ)



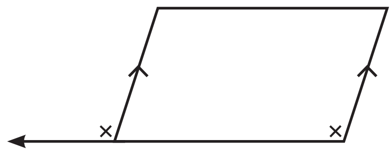
....

(ب)



....

(ج)



....

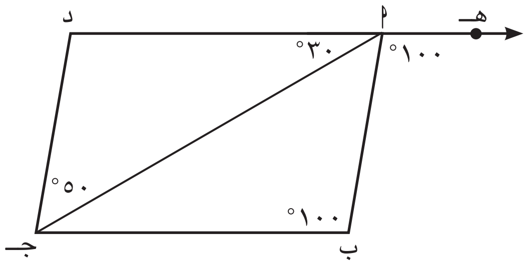
مثال (١) :

أ ب جـ د شكل رباعي فيه ،

ق (هـ $\hat{أ}$ ب) = ق ($\hat{ب}$) = ١٠٠°

ق (د $\hat{أ}$ جـ) = ٣٠° ، ق (أ $\hat{جـ}$ د) = ٥٠°

برهِن أنّ الشكل الرباعي أ ب جـ د متوازي أضلاع



الحلّ :

المعطَيات : ق (هـ $\hat{أ}$ ب) = ق ($\hat{ب}$) = ١٠٠°

ق (د $\hat{أ}$ جـ) = ٣٠° ، ق (أ $\hat{جـ}$ د) = ٥٠°

المطلوب : إثبات أنّ الشكل الرباعي أ ب جـ د متوازي أضلاع

البرهان :

∵ ق (هـ $\hat{أ}$ ب) = ق ($\hat{ب}$) = ١٠٠° وهما في وضع تبادل (معطى)

∴ $\overline{أ د}$ // $\overline{ب جـ}$ (١)

في Δ أ جـ د ، ق ($\hat{د}$) = ١٨٠° − (٣٠° + ٥٠°) (مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلة = ١٨٠°)

= ١٨٠° − ٨٠° = ١٠٠°

∵ ق (هـ $\hat{أ}$ ب) = ق ($\hat{د}$) = ١٠٠° وهما في وضع تناظر

∴ $\overline{أ ب}$ // $\overline{د جـ}$ (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أنّ :

الشكل الرباعي أ ب جـ د هو متوازي أضلاع لأنّ فيه كلّ ضلعَين متقابلَين متوازيان .

اِنتبِه

لإثبات أنّ الشكل متوازي أضلاع ، تحقّق من إثبات ما يلي :

(١) $\overline{أ د}$ // $\overline{ب جـ}$

(٢) $\overline{أ ب}$ // $\overline{د جـ}$

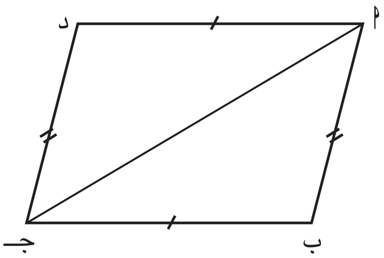
الحالة الأولى (التعريف)

عبِّر عن فهمك (١)

هل يمكن حلّ مثال (١) بطريقة أخرى لإثبات أنّ الشكل الرباعي ٲ ب جـ د هو متوازي أضلاع ؟
وضِّح إجابتك .

سنتحقّق معًا بأنّ الشكل الرباعي الذي فيه كلّ ضلعَين متقابلَين متطابقان كحدّ أدنى من المعطَيات تكفي لنقول إنّ الشكل الرباعي متوازي أضلاع .

اِستكشِف (١)



في الشكل المقابِل ٲ ب جـ د شكل رباعي فيه

ٲ ب = د جـ ، ب جـ = ٲ د

أكمِل ما يلي لتبرهن أنّ الشكل ٲ ب جـ د متوازي أضلاع :

Δ ٲ ب جـ ، Δ ٲ د جـ فيهما :

١ $\overline{\text{ٲ ب}}$ $\cong$ .... (معطى)

٢ $\overline{\text{ب جـ}}$ $\cong$ .... (معطى)

٣ .... (ضلع مشترَك)

$\therefore$ Δ ٲ ب جـ $\cong$ Δ .... وحالة التطابق ....

وينتج من التطابق :

(ب $\hat{\text{ٲ}}$ جـ) $\cong$ .... وهما في وضع تبادل

$\therefore$ $\overline{\text{ٲ ب}}$ // $\overline{\text{د جـ}}$ (١)

(ب $\hat{\text{جـ}}$ ٲ) $\cong$ .... وهما في وضع تبادل

$\therefore$ $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{ٲ د}}$ (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أنّ الشكل الرباعي ٲ ب جـ د هو ....

....

تذكَّر

حالات تطابق مثلّثَين

١ (ض . ض . ض)

٢ (ز . ض . ز)

٣ (ض . ز . ض)

٤ (⊿ . و . ض)

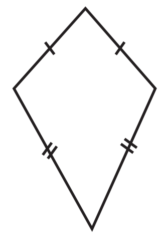
الحالة الثانية

يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كان فيه كلّ ضلعَين متقابلَين متطابقان .

دورك الآن (٣)

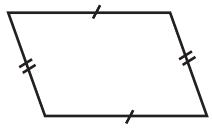
حدِّد ما إذا كان الشكل الرباعي بحسب البيانات المدوَّنة عليه متوازي أضلاع أم لا .

(أ)



....

(ب)

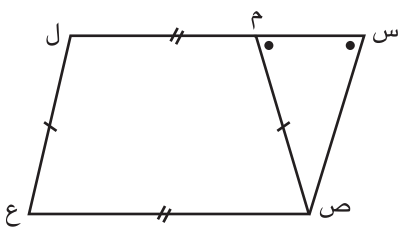


....

(ج)

....

مثال (٢):



إذا كان س ل = ص ع ، م ص = ل ع ، ق ($\hat{\text{س}}$) = ق (س $\hat{\text{م}}$ ص)

برهِن أنّ الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع

الحلّ :

المعطَيات : س ل = ص ع ، م ص = ل ع ، ق ($\hat{\text{س}}$) = ق (س $\hat{\text{م}}$ ص)

المطلوب : إثبات أنّ الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع

البرهان :

س ل = ص ع   معطى   (١)

في Δ س م ص :

∵ ق ($\hat{\text{س}}$) = ق (س $\hat{\text{م}}$ ص)   معطى

∴ س ص = م ص   من خواصّ المثلّث المتطابق الضلعَين

∵ م ص = ل ع   معطى

∴ س ص = ل ع   من خواصّ المساواة   (٢)

∴ من (١) ، (٢) نستنتج أنّ :

الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع

لأنّ فيه كلّ ضلعَين متقابلَين متطابقان .

اِنتبِه

تحقَّق من إثبات ما يلي :

(١) س ل = ص ع

(٢) س ص = ل ع

الحالة الثانية (خاصّية)

تذكَّر

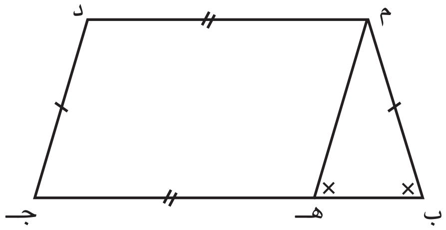
لأيِّ مثلّث إذا كان فيه زاويتان متطابقتَين ، فإنّ المثلّث متطابق الضلعَين .

لاحِظ أنّ :

من خواصّ المساواة إذا كان ا = ب ، ب = جـ ، فإنّ ا = جـ

دورك الآن (٤)

حسب البيانات المدوَّنة ، برهِن أنّ الشكل الرباعي م هـ جـ د متوازي أضلاع .



البرهان :

∵ م د = هـ جـ (١) معطى

في Δ م ب هـ : ق (م بَ هـ) = ق (م هـَ ب) معطى

∴ م ب = ... السبب : ....

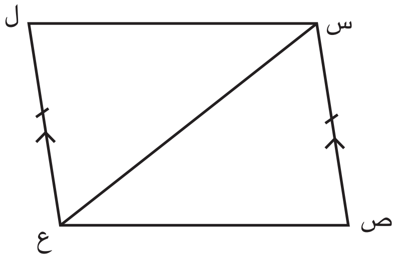
∵ م ب = ... معطى

∴ م هـ = ... (٢) من خواصّ المساواة

من (١) ، (٢) م هـ جـ د هو .... لأنّ ....

اِستكشِف (٢)

في الشكل المقابِل س ص ع ل شكل رباعي فيه :



$\overline{\text{س ص}} \cong \overline{\text{ل ع}}$ ، $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ل ع}}$

هل المعطَيات السابقة تكفي لأن يكون الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع ؟ (نبحث في تطابق المثلّثين س ص ع ، ع ل س)

في Δ س ص ع ، Δ ع ل س فيهما :

$\overline{\text{س ص}}$ ≅ .... معطى

ق (ص سَ ع) ≅ .... (بالتبادل والتوازي) حيث $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ل ع}}$

.... ضلع مشترَك

∴ Δ س ص ع ≅ Δ .... وحالة التطابق ....

وينتج من التطابق أنّ: ق (ص عَ س) ≅ .... (وهما في وضع تبادل)

∴ $\overline{\text{س ل}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$ (١)

$\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ل ع}}$ معطى (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أنّ الشكل الرباعي س ص ع ل هو ....

وعلى ذلك نقول : نعم ، المعطَيات في الشكل تكفي لأنّ يكون الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع .

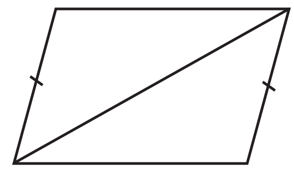
الحالة الثالثة

يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كان فيه ضلعان متقابلان متطابقَين ومتوازيَين .

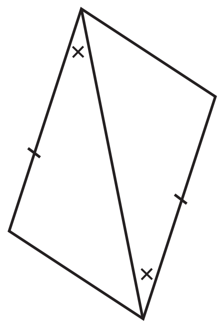
دورك الآن (٥)

حدِّد ما إذا كان الشكل الرباعي بحسب البيانات المدوَّنة عليه متوازي أضلاع أم لا .

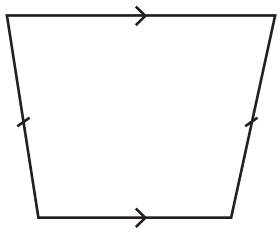
أ



ب



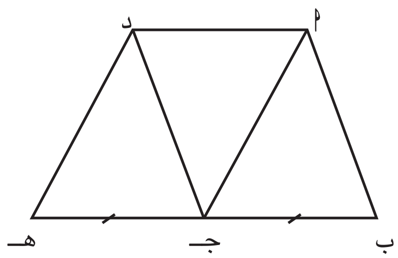
ج



....

مثال (٣) :

إذا كان أ ب جـ د متوازي أضلاع ،
ب جـ = جـ هـ ، ب ، جـ ، هـ على استقامة واحدة ، فبرهِن
أنّ الشكل الرباعي أ جـ هـ د متوازي أضلاع .



الحلّ :

المعطَيات : أ ب جـ د متوازي أضلاع
ب جـ = جـ هـ
ب ، جـ ، هـ على استقامة واحدة .

المطلوب : إثبات أنّ أ جـ هـ د متوازي أضلاع .

البرهان :

∵ أ ب جـ د متوازي أضلاع   معطى
∴ أ د // ب جـ   (من تعريف متوازي الأضلاع)
∵ ب ، جـ ، هـ على استقامة واحدة   معطى
∴ أ د // جـ هـ   (١)
∵ أ د = ب جـ   (من خواصّ متوازي الأضلاع)
∵ ب جـ = جـ هـ   معطى
∴ أ د = جـ هـ   من خواصّ المساواة (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أنّ :
الشكل الرباعي أ جـ هـ د متوازي أضلاع لأنّ فيه ضلعَين متقابلَين متطابقان ومتوازيان .

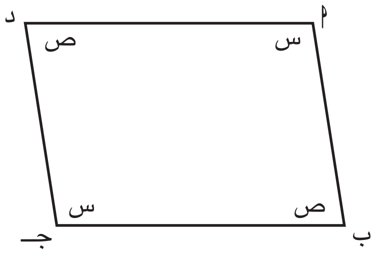
اِنتبِه

تحقَّق من إثبات ما يلي :
(١) أ د // جـ هـ
(٢) أ د = جـ هـ
الحالة الثالثة (خاصّية)

عبِّر عن فهمك (٢)

إذا كان في الشكل الرباعي ضلعان متوازيان وضلعان آخران متطابقان ، فهل يمكننا الجزم أنّ هذا الشكل يمثّل متوازي أضلاع ؟ فسِّر إجابتك .

اِستكشِف (٣)



في الشكل المقابِل أ ب جـ د شكل رباعي فيه :

ق (^أ) = ق (^جـ) = س

ق (^ب) = ق (^د) = ص

هل المعطَيات كافية لأن يكون الشكل الرباعي أ ب جـ د متوازي أضلاع ؟

سوف نبحث في ذلك .

> **تذكَّر**
>
> مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠°

تعلم أنّ :

س + ص + س + ص = ٣٦٠°

∴ ٢ س + ٢ ص = ٣٦٠°   بالقسمة على العدد ٢

∴ س + ص = ١٨٠°

ق (^أ) + ق (..........) = ١٨٠°   وهما زاويتان متحالفتان

∴ .... // ....   (١)

وكذلك ق (^أ) + ق (..........) = ١٨٠°   وهما زاويتان متحالفتان

∴ .... // ....   (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أنّ الشكل الرباعي أ ب جـ د هو ....

وعلى ذلك نقول : نعم ، المعطَيات كافية لإثبات أنّ الشكل الرباعي أ ب جـ د متوازي أضلاع .

الحالة الرابعة

يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كان فيه كلّ زاويتَين متقابلتَين متطابقتان .

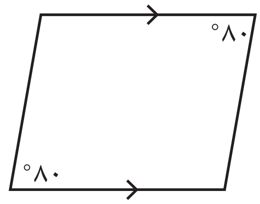
ملاحظة :

يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كان فيه كلّ زاويتَين متتاليتَين متكاملتان .

دورك الآن (٦)

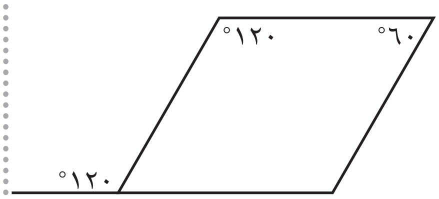
حدِّد ما إذا كان الشكل الرباعي بحسب البيانات المدوَّنة عليه متوازي أضلاع أم لا .

أ



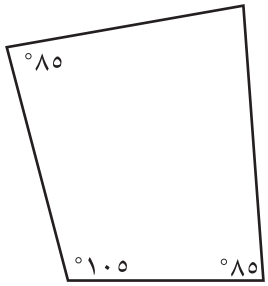
....

ب



....

ج



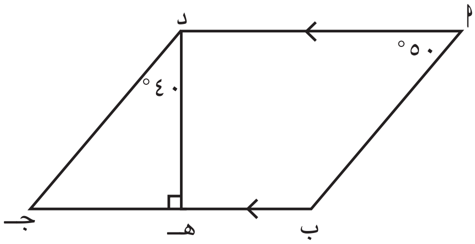
....

مثال (٤):

أ ب جـ د شكل رباعي فيه : أد ∥ ب جـ

ق (أ^) = ٥٠° ، د هـ ⊥ ب جـ ، ق (جـ د^ هـ) = ٤٠°

أثبِت أنّ أ ب جـ د متوازي أضلاع .



المعطيَات : أد ∥ ب جـ

ق (أ^) = ٥٠° ، ق (جـ د^ هـ) = ٤٠°

د هـ ⊥ ب جـ

المطلوب : إثبات أنّ الشكل الرباعي أ ب جـ د متوازي أضلاع .

البرهان :

في Δ د جـ هـ :

ق (جـ^) = ١٨٠° − (٩٠° + ٤٠°)

= ١٨٠° − ١٣٠° = ٥٠° (مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلّث = ١٨٠°)

∴ ق (أ^) = ق (جـ^) = ٥٠° (١)

∵ أد ∥ ب جـ معطى

ق (ب^) = ١٨٠° − ٥٠° = ١٣٠° (أ^ و ب^ زاويتان متحالفتان متكاملتان)

∴ ق (أ د^ جـ) = ٣٦٠° − (٥٠° + ١٣٠° + ٥٠°) (مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠°)

= ٣٦٠° − ٢٣٠° = ١٣٠°

ق (ب^) = ق (أ د^ جـ) = ١٣٠° (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أنّ الشكل الرباعي أ ب جـ د هو متوازي أضلاع لأنّ فيه كلّ زاويتَين متقابلتَين متطابقتان .

اِنتبِه

تحقَّق من إثبات ما يلي :

(١) (أ^) ≅ (جـ^)

(٢) (ب^) ≅ (أ د^ جـ)

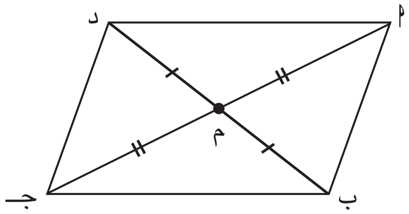
الحالة الرابعة (خاصّية)

عبِّر عن فهمك (٣)

بالرجوع إلى مثال (٤) ، هل يمكنك إيجاد قياس ($\hat{}$ أ د جـ) بطريقة أخرى ؟ وضِّح إجابتك .

سنتحقّق معًا بأنّ الشكل الرباعي الذي فيه القطران ينصّف كلّ منهما الآخر كحدّ أدنى من المعطَيات تكفي لنقول إنّ الشكل الرباعي متوازي أضلاع .

اِستكشِف (٤)



الشكل المقابِل أ ب جـ د شكل رباعي فيه :

$\overline{\text{أجـ}} \cap \overline{\text{ب د}}$ = { م } ، أ م = م جـ

د م = م ب

من خلال معلوماتك عن مفهوم الانعكاس في نقطة

إذا كانت م مركز الانعكاس ، أكمِل ما يلي :

صورة أ بالانعكاس في م هي ....

صورة ب بالانعكاس في م هي ....

صورة $\overline{\text{أ ب}}$ بالانعكاس في م هي ....

تذكَّر

إذا كانت $\overline{\text{أَ بَ}}$ صورة $\overline{\text{أ ب}}$ بالانعكاس في نقطة فإنّ :

١ $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{أَ بَ}}$

٢ أ ب = أَ بَ

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ // .... (١) (من خواصّ الانعكاس في نقطة)

وبالمثل صورة $\overline{\text{ب جـ}}$ بالانعكاس في م هي ....

∴ $\overline{\text{ب جـ}}$ // .... (٢) (من خواصّ الانعكاس في نقطة)

من (١) ، (٢) ∴ نستنتج أنّ الشكل الرباعي أ ب جـ د هو ....

الحالة الخامسة

يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كان فيه القطران ينصّف كلّ منهما الآخر .

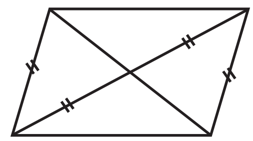
عبِّر عن فهمك (٤)

هل يمكنك إثبات الحالة الخامسة بطريقة أخرى . اِشرح طريقتك .

دورك الآن (٧)

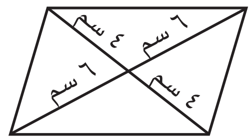
حدِّد ما إذا كان الشكل الرباعي بحسب البيانات المدوّنة عليه متوازي أضلاع أم لا .

(أ)



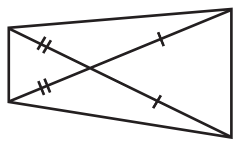
....

(ب)



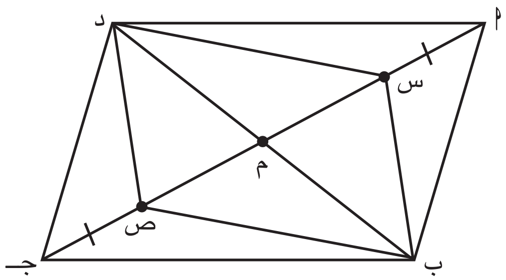
....

(ج)



....

مثال (٥) :



أ ب جـ د متوازي أضلاع

تقاطع قطرَيه في م ، أُخذت النقطتان

س ، ص ∈ $\overline{\text{أ جـ}}$ بحيث أ س = جـ ص

برهِن أنّ س ب ص د متوازي أضلاع .

الحلّ :

المعطَيات : أ ب جـ د متوازي أضلاع

أ س = جـ ص

المطلوب : إثبات أنّ س ب ص د متوازي أضلاع .

البرهان :

∵ أ ب جـ د متوازي أضلاع (معطى)

∴ ب م = م د (١) (قطرا متوازي الأضلاع ينصّف كلّ منهما الآخر)

أ م = م جـ

∵ أ س = جـ ص (معطى)

∴ أ م − أ س = م جـ − جـ ص (من خواصّ المساواة)

∴ م س = م ص (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أنّ س ب ص د متوازي أضلاع لأنّ القطرَين ينصّف كلّ منهما الآخر .

اِنتبِه

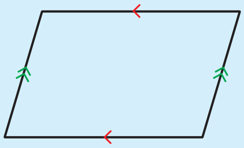
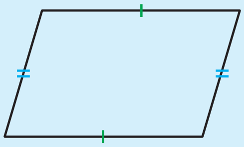
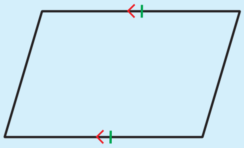
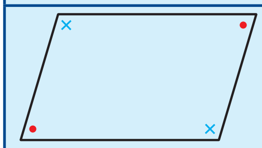
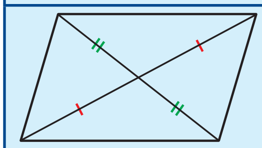
تحقَّق من إثبات ما يلي :

(١) ب م = م د

(٢) م س = م ص

الحالة الخامسة (خاصّية)

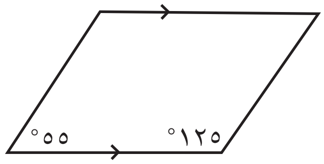
ممّا سبق نجد أنّه : يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا توفّر أحد الشروط التالية :

١ كلّ ضلعَين متقابلَين متوازيان (من التعريف) .	
٢ كلّ ضلعَين متقابلَين متطابقان .	
٣ فيه ضلعان متقابلان متطابقان ومتوازيان .	
٤ كلّ زاويتَين متقابلتَين متطابقتان .	
٥ القطران ينصّف كلّ منهما الآخر .	

دورك الآن (٨)

ضَع علامة (✓) أسفل الشكل الذي يمثّل متوازي أضلاع مع ذكر السبب لكلّ ممّا يلي :

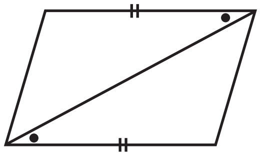
أ



☐

....

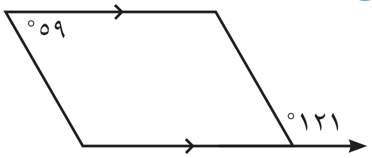
ب



☐

....

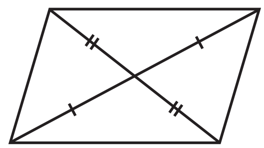
ج



☐

....

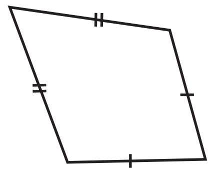
د



☐

....

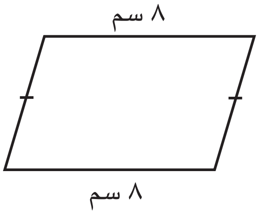
هـ



☐

....

و



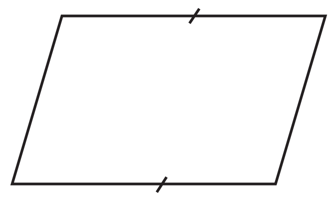
☐

....

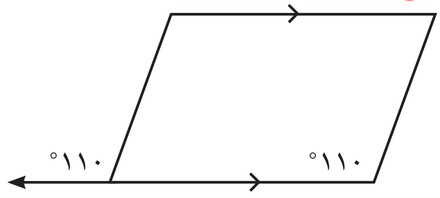
تمارين ذاتية :

١ أمامك أشكال رباعية ، حدِّد أيًّا منها يمثِّل متوازي أضلاع مع ذكر السبب :

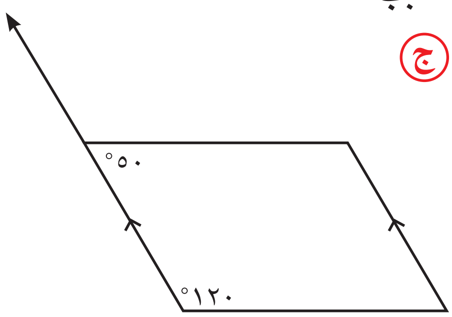
أ



ب



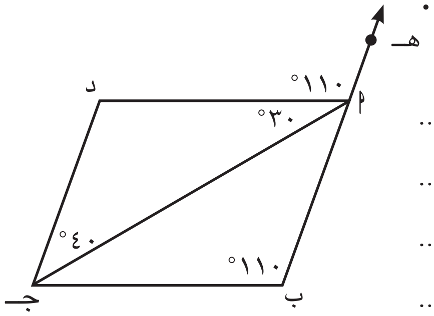
ج



....

....

٢ من البيانات على الشكل المقابِل ، أثبِت أنّ ٵ ب جـ د متوازي أضلاع .

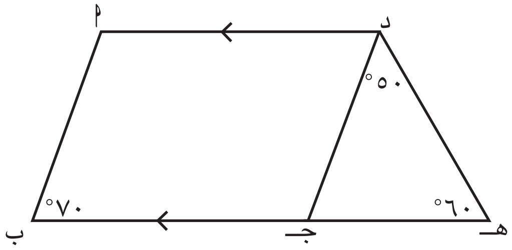


....

....

....

٣ من البيانات على الشكل المقابِل ،
أثبِت أنّ ٵ ب جـ د متوازي أضلاع .

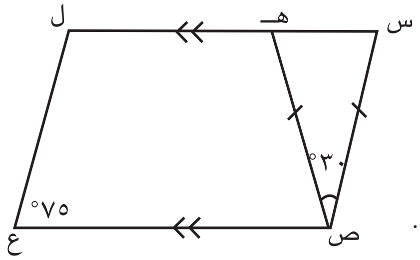


....

....

....

٤ في الشكل المقابِل $\overline{\text{س ل}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$ ، ص س = ص هـ ،
ق ($\hat{\text{ع}}$) = ٧٥° ، ق (س $\hat{\text{ص}}$ هـ) = ٣٠° ،
برهِن أنّ الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع .



....

....

....

....

....

....

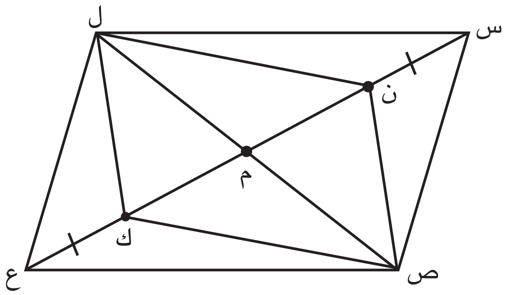
....

....

....

....

٥ إذا كان ن ص ك ل متوازي أضلاع تقاطع قطرَيه في م ،
س ن = ع ك ،
فأثبِت أنّ الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع .



....

....

....

....

....

....

....

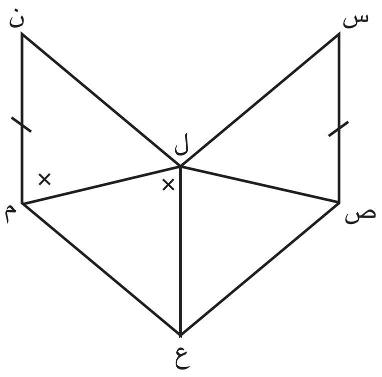
....

....

٦ في الشكل المقابِل س ص ع ل متوازي أضلاع ،

س ص = ن م ، ق (ن م̂ ل) = ق (م ل̂ ع)

أثبِت أنّ ل ع م ن متوازي أضلاع .



مهارات تفكير عليا :

اِختر الإجابة الصحيحة .

٧ في الشكل المقابِل ، قيمة س ، ص على الترتيب التي تجعل الشكل الرباعي متوازي أضلاع هي :

(أ) ٦٠° ، ٨

(ب) ٦٠° ، ٤

(ج) ١٢٠° ، ٤

(د) ١٢٠° ، ٨

٥ - ٤ الكشف عن المستطيل
Detecting a Rectangle

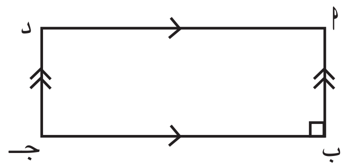
سوف تتعلّم : الكشف عن المستطيل .

العبارات والمفردات :

المستطيل	Rectangle

إستكشِف

أوّلًا : في الشكل المرسوم :



أ ب جـ د متوازي أضلاع ، ق ($\hat{ب}$) = ٩٠°

أكمِل ما يلي :

ق ($\hat{د}$) = ٩٠° (كلّ زاويتَين متقابلتَين متطابقتان)

ق ($\hat{أ}$) = ... (....)

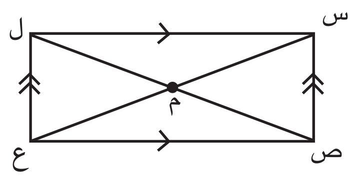
ق ($\hat{جـ}$) = ... (....)

ماذا تلاحظ ؟

الشكل أ ب جـ د هو ....

∴ المستطيل هو متوازي أضلاع إحدى زواياه ....

ثانيًا : في الشكل المرسوم :



س ص ع ل متوازي أضلاع ، س ع = ص ل ،

أكمِل ما يلي :

Δ س ص ع ، Δ ل ع ص فيهما :

(١) س ص = ... (كلّ ضلعَين متقابلَين متطابقان)

(٢) س ع = ... (معطى)

(٣) .... (ضلع مشترَك)

∴ Δ س ص ع ≅ Δ ل ع ص بحالة .... وينتج من التطابق أنّ : ق ($\hat{ص}$) = ق ($\hat{ع}$)

تذكَّر

المستطيل هو شكل رباعي زواياه الأربع قوائم .

تذكَّر

خواصّ متوازي الأضلاع :

١ كلّ ضلعَين متقابلَين متطابقان .
٢ كلّ زاويتَين متقابلتَين متطابقتان .
٣ كلّ زاويتَين متتاليتَين متكاملتان .
٤ القطران ينصّف كلّ منهما الآخر .

∵ ق (ص^) + ق (ع^) = ١٨٠° (كلّ زاويتَين متتاليتَين متكاملتان)

∴ ٢ ق (ص^) = ١٨٠° ⇐ ق (ص^) = ...

∴ الشكل س ص ع ل هو ....

إذًا المستطيل هو متوازي أضلاع قطراه ....

يكون متوازي الأضلاع مستطيلًا إذا توفّر فيه أحد الشروط التالية :

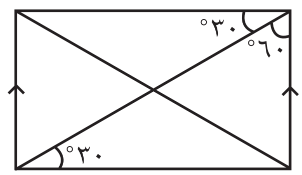
١ إحدى زواياه قائمة

٢ قطراه متطابقان

دورك الآن (١)

اِستخدِم المعطَيات التي على الأشكال التالية لتبيّن أيًّا منها تمثّل مستطيلًا مع ذكر السبب .

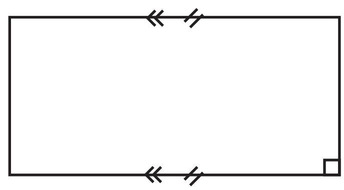
أ



....

....

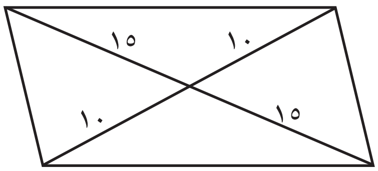
ب



....

....

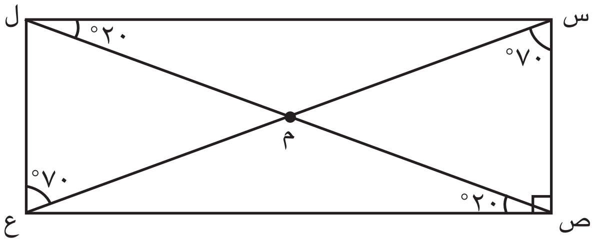
ج



....

....

مثال (١):



في الشكل المقابِل ، ومن البيانات الموضّحة على الرسم ،

أثبِت أنّ س ص ع ل مستطيل .

الحلّ :

المعطَيات :

ق (ص س^ ع) = ق (ل ع^ س) = ٧٠° ، ق (س ل^ ص) = ق (ع ص^ ل) = ٢٠° ، ق (س ص^ ع) = ٩٠°

المطلوب : إثبات أنّ س ص ع ل مستطيل

البرهان :

∵ ق (س ل^ ص) = ق (ع ص^ ل) = ٢٠° معطى (وهما في وضع تبادل)

∴ س ل // ص ع (١)

∵ ق (ص س^ ع) = ق (ل ع^ س) = ٧٠° معطى (وهما في وضع تبادل)

∴ س ص // ل ع (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أن س ص ع ل متوازي أضلاع لأنّ فيه كلّ ضلعَين متقابلَين متوازيان

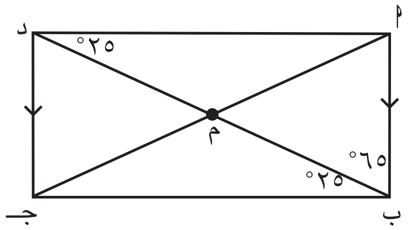
∵ ق (س ص^ ع) = ٩٠° معطى

∴ الشكل س ص ع ل مستطيل لأنّه متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة .

عبِّر عن فهمك

في مثال (١) السابق ، هل يمكن إثبات أنّ الشكل س ص ع ل مستطيل من خلال إثبات تطابق القطرَين ؟ وضِّح ذلك .

دورك الآن (٢)



ا ب جـ د شكل رباعي فيه $\overline{\text{ا ب}}$ // $\overline{\text{د جـ}}$

ق (ا $\hat{\text{د}}$ ب) = ق (د $\hat{\text{ب}}$ جـ) = ٢٥°

ق (ا $\hat{\text{ب}}$ د) = ٦٥°

أثبِت أنّ الشكل الرباعي ا ب جـ د مستطيل .

البرهان :

في الشكل الرباعي ا ب جـ د

∵ $\overline{\text{ا ب}}$ // .... (معطى) (١)

ق (ا $\hat{\text{د}}$ ب) = ق (..............) = ... وهما في وضع ....

∴ $\overline{\text{ا د}}$ // .... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أنّ الشكل ا ب جـ د .... (٣)

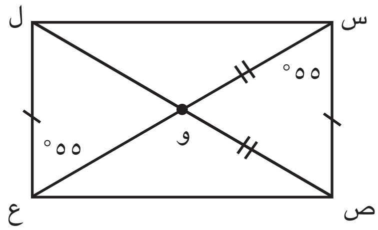
لأنّ فيه كلّ ....

∵ ق (ا $\hat{\text{ب}}$ د) + ق (..............) = ٦٥° + ... = ... (٤)

من (٣) ، (٤) نستنتج أنّ الشكل ا ب جـ د

مستطيل لأنّه .... إحدى زواياه ....

مثال (٢) :



س ص ع ل شكل رباعي تقاطع قطرَيه في النقطة و

س ص = ل ع

س و = ص و

ق (ص $\hat{\text{س}}$ و) = ق (ل $\hat{\text{ع}}$ و) = ٥٥°

أثبِت أنّ س ص ع ل مستطيل .

الحلّ :

المعطَيات : س ص ع ل شكل رباعي حيث و نقطة تقاطع قطرَيه

س ص = ل ع ، س و = ص و

ق (ص س^ و) = ق (ل ع^ و) = ٥٥°

المطلوب : إثبات أنّ الشكل الرباعي س ص ع ل مستطيل

البرهان : ∵ $\overline{\text{س ص}} \cong \overline{\text{ل ع}}$ (معطى) (١)

ق (ص س^ و) = ق (ل ع^ و) = ٥٥° (وهما في وضع تبادل)

∴ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ل ع}}$ (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أنّ :

الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع لأنّ فيه ضلعَين متقابلَين متطابقان ومتوازيان (٣)

∵ ص و = و ل ، س و = و ع (قطرا متوازي الأضلاع ينصّف كلّ منهما الآخر)

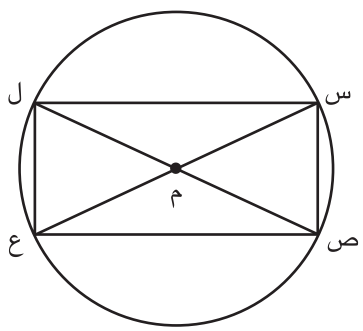
∵ س و = ص و

∴ س ع = ص ل (٤) (من خواصّ المساواة)

من (٣) ، (٤) نستنتج أنّ :

س ص ع ل مستطيل لأنّه متوازي أضلاع قطراه متطابقان

دورك الآن (٣)



في الشكل المقابِل ، دائرة مركزها م

أثبِت أنّ الشكل س ص ع ل مستطيل .

المعطَيات : دائرة مركزها م

المطلوب : إثبات أنّ س ص ع ل مستطيل

البرهان : ∵ م ....

∵ س م = ... (..................................)

ص م = ... (..................................)

∴ القطران ينصّف كلّ منهما الآخر

∴ الشكل س ص ع ل .... **لأنّ فيه** ....

∵ س ع = ... (أقطار الدائرة متطابقة)

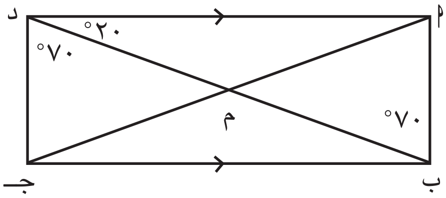
∴ س ص ع ل .... **لأنّه متوازي أضلاع فيه** .... **متطابقان**

الدرس الرابع

تمارين ذاتية :

١ أ ب جـ د شكل رباعي فيه $\overline{\text{أ د}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ق (أ $\hat{\text{ب}}$ د) = ق (ب $\hat{\text{د}}$ جـ) = ٧٠° ، ق (أ $\hat{\text{د}}$ ب) = ٢٠°

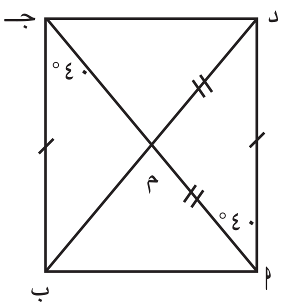
أثبِت أنّ الشكل الرباعي أ ب جـ د مستطيل .



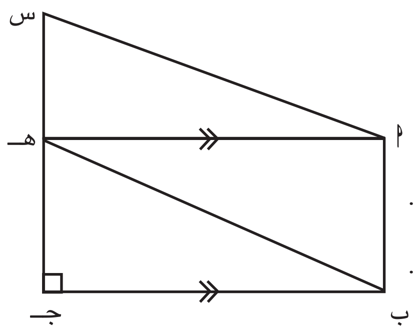
٢ أ ب جـ د شكل رباعي يتقاطع قطراه في م ،

أ د = ب جـ ، م د = م أ ، ق (د $\hat{\text{أ}}$ جـ) = ق (ب $\hat{\text{جـ}}$ أ) = ٤٠°

أثبِت أنّ الشكل أ ب جـ د مستطيل ، ثمّ أوجِد ق (ب $\hat{\text{أ}}$ جـ)



٣ أ ب هـ س متوازي أضلاع ، ق ($\hat{جـ}$) = ٩٠° ،
$\overline{أهـ}$ // $\overline{ب جـ}$ ، س ، هـ ، جـ على استقامة واحدة
أثبِت أنّ أ ب جـ هـ مستطيل .



....

....

....

....

....

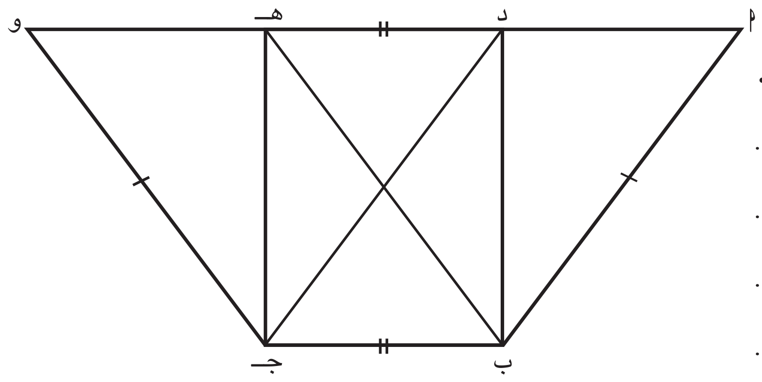
....

....

....

مهارات تفكير عليا :

٤ في الشكل المقابِل ، أ ب جـ د ، هـ ب جـ و متوازيا أضلاع . د ، هـ ينتميان إلى $\overline{أو}$ ، أ ب = و جـ ،
ب جـ = د هـ
أثبِت أنّ الشكل د ب جـ هـ مستطيل .



....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

٥ - ٥ الكشف عن المعيَّن
Detecting a Rhombus

سوف تتعلّم : الكشف عن المعيَّن .

العبارات والمفردات :

المعيَّن Rhombus

إستكشِف

أوّلًا : الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع فيه : $\overline{\text{س ص}} \cong \overline{\text{س ل}}$

تذكَّر

- **المعيَّن** هو شكل رباعي أضلاعه الأربعة متطابقة .

أكمِل ما يلي :

$\overline{\text{س ص}} \cong$ .... (كلّ ضلعَين متقابلَين في متوازي الأضلاع متطابقان)

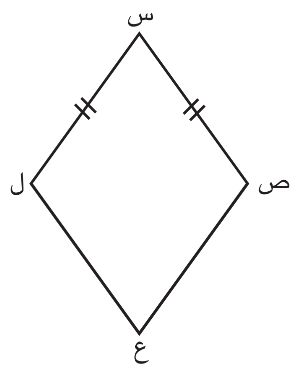
$\overline{\text{س ل}} \cong$ .... (كلّ ضلعَين متقابلَين في متوازي الأضلاع ....)

$\because$ $\overline{\text{س ص}} \cong \overline{\text{س ل}}$ (معطى)

$\therefore$ .... = ... = ... = ... (من خواصّ المساواة)

$\therefore$ الشكل س ص ع ل هو ....

إذًا المعيَّن هو متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان



ثانيًا : الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع فيه : $\overline{\text{س ع}} \perp \overline{\text{ص ل}}$

أكمِل ما يلي :

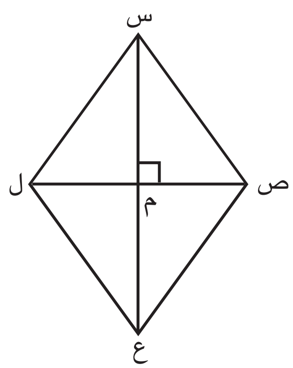
Δ س م ص ، Δ س م ل فيهما :

ق ($\hat{\text{س م ص}}$) = ق (..........) = ٩٠° (بالتجاور على خطّ مستقيم)

ص م = ... (قطرا متوازي الأضلاع ينصّف كلًّا منهما الآخر)

.... (ضلع مشترَك)

$\therefore$ Δ س م ص $\cong$ Δ س م ل (ض . ز . ض)



وينتج من التطابق أنّ :

$\overline{\text{س ص}} \cong$ ....

∵ س ص ع ل متوازي أضلاع

∴ س ص = ص ع = ع ل = س ل (من خواصّ المساواة)

∴ س ص ع ل هو ....

إذًا المعيَّن هو متوازي أضلاع قطراه متعامدان

ممّا سبق نلاحظ أنّ :

يكون متوازي الأضلاع معيَّنًا إذا توفّر فيه أحد الشرطَين التاليَين :

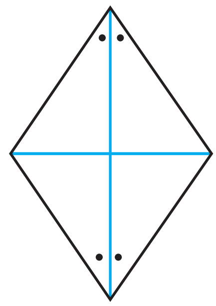
١ إذا تطابق ضلعان متجاوران فيه .

٢ إذا تعامد قطراه .

دورك الآن (٢)

أيّ الأشكال التالية يمثّل معيَّنًا مع ذكر السبب ؟

أ

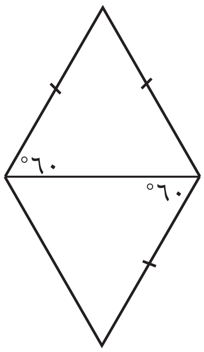


....

....

....

ب

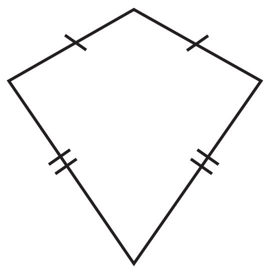


....

....

....

ج

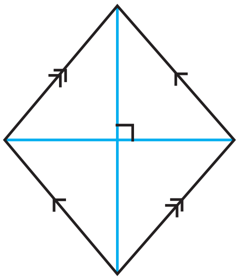


....

....

....

د



....

....

....

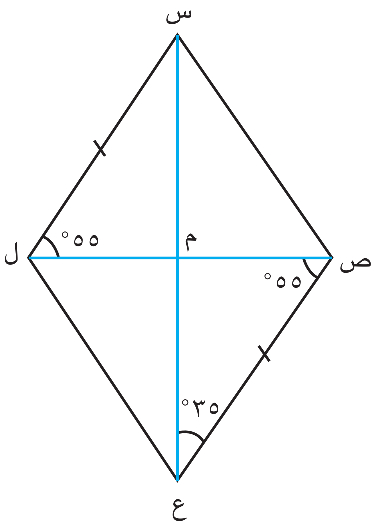
مثال (٢):

في الشكل المقابِل:

ق (س $\hat{ل}$ ص) = ق (ع $\hat{ص}$ ل) = ٥٥°،

ق (ص $\hat{ع}$ س) = ٣٥° ، س ل = ص ع .

أثبِت أنّ الشكل الرباعي س ص ع ل معيَّن .



الحلّ :

المعطَيات :

س ل = ص ع

ق (س $\hat{ل}$ ص) = ق (ع $\hat{ص}$ ل) = ٥٥°

ق (ص $\hat{ع}$ س) = ٣٥°

المطلوب : إثبات أنّ الشكل س ص ع ل معيَّن .

البرهان :

∵ س ل = ص ع (١) (معطى)

∵ ق (س $\hat{ل}$ ص) = ق (ع $\hat{ص}$ ل) = ٥٥° (وهما في وضع تبادل)

∴ $\overline{\text{س ل}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$ (٢)

∴ من (١) ، (٢) الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع لأنّ فيه ضلعَين متقابلَين متوازيان ومتطابقان . (٣)

في Δ ص م ع فيه :

∵ ق (ع $\hat{ص}$ م) = ٥٥° (معطى) ، ∵ ق (ص $\hat{ع}$ م) = ٣٥° (معطى)

∴ ق (ص $\hat{م}$ ع) = ١٨٠° - (٣٥° + ٥٥°) = ٩٠° (مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلة يساوي ١٨٠°)

∴ $\overline{\text{س ع}}$ ⊥ $\overline{\text{ص ل}}$ (٤)

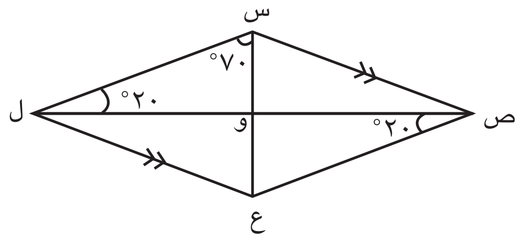
∴ من (٣) ، (٤) ∴ الشكل س ص ع ل معيَّن لأنّه متوازي أضلاع قطراه متعامدان .

تذكَّر

- الرمز ⊥ هو رمز عمودي على .
- الرمز // هو رمز موازٍ لـ .
- مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلة يساوي ١٨٠°

دورك الآن (٢)

في الشكل المقابِل ، ومن البيانات الموضَّحة على الرسم ، أثبِت أنّ س ص ع ل معيَّن .



المعطَيات : .... ، ....

....

المطلوب : ....

البرهان :

$\overline{\text{س ص}}$ // .... (معطى) (١)

∵ ق (س $\hat{\text{ل}}$ ص) = ق (......................) (معطى)

وهما في وضع تبادل

∴ $\overline{\text{س ل}}$ // .... (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أنّ :

س ص ع ل متوازي أضلاع لأنّ.. (٣)

في Δ س و ل :

ق (س $\hat{\text{و}}$ ل) = ١٨٠° - (.......... + ...) = ... (مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلة يساوي ١٨٠°)

∴ $\overline{\text{س ع}}$ ⊥ .... (القطران متعامدان) (٤)

من (٣) ، (٤) ∴ الشكل س ص ع ل .... لأنّه متوازي أضلاع ....

عبِّر عن فهمك

يقول شملان إنّ كلّ متوازي أضلاع هو معيَّن . هل تتّفق معه ؟ فسِّر إجابتك .

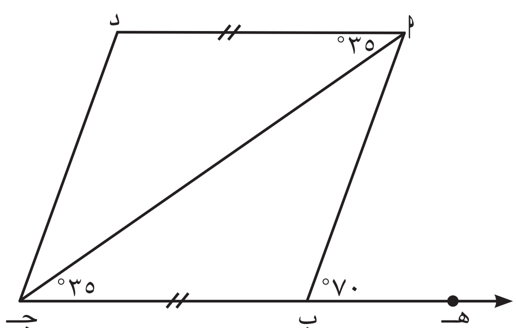
مثال (٢) :

في الشكل المقابِل أ ب جـ د شكل رباعي فيه :

أ د = ب جـ ، ق (جـ $\hat{\text{أ}}$ د) = ق (ب $\hat{\text{جـ}}$ أ) = ٣٥° ،

ق (أ $\hat{\text{ب}}$ هـ) = ٧٠°

أثبِت أنّ الشكل الرباعي أ ب جـ د معيَّن .



الحلّ :

المعطَيات : ؟ ب جـ د شكل رباعي ، ؟ د = ب جـ ، ق (جـ ؟̂ د) = ق (ب جـ̂ ؟) = ٣٥° ،
ق (؟ ب̂ هـ) = ٧٠°

المطلوب : إثبات أنّ الشكل ؟ ب جـ د معيَّن .

البرهان :

∵ ق (جـ ؟̂ د) = ق (ب جـ̂ ؟) = ٣٥° (معطى)(وهما في وضع تبادل)

∴ $\overline{\text{؟ د}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ (١)

∵ ؟ د = ب جـ (معطى) (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أنّ :

الشكل ؟ ب جـ د متوازي أضلاع لأنّ فيه ضلعَين متقابلَين متطابقان ومتوازيان . (٣)

∵ (هـ ب̂ ؟) زاوية خارجة عن المثلّث ؟ ب جـ

∴ ق (هـ ب̂ ؟) = ق (ب ؟̂ جـ) + ق (ب جـ̂ ؟)

∴ ق (ب ؟̂ جـ) = ٧٠° - ٣٥° = ٣٥°

∴ ق (ب ؟̂ جـ) = ق (ب جـ̂ ؟) = ٣٥°

∴ ب ؟ = ب جـ (من خواصّ المثلّث المتطابق الضلعَين) (٤)

من (٣) ، (٤)

∴ الشكل ؟ ب جـ د معيَّن لأنّه متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان .

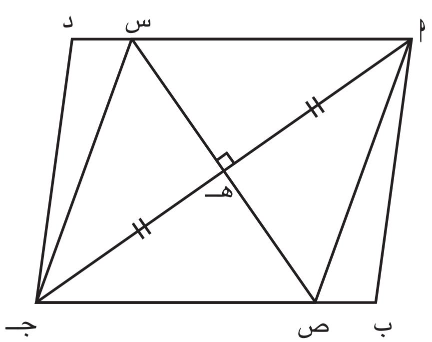
تذكَّر

قياس الزاوية الخارجة للمثلث يساوي مجموع قياسي الزاويتَين الداخلتَين ما عدا المجاورة لها .

مثال (٣) :

؟ ب جـ د متوازي أضلاع ، $\overline{\text{س ص}}$ ⊥ $\overline{\text{؟ جـ}}$ ،
هـ منتصف $\overline{\text{؟ جـ}}$ ، س ∈ $\overline{\text{؟ د}}$ ، ص ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$.

أثبِت أنّ : الشكل ؟ ص جـ س معيَّن .



الحلّ :

المعطَيات :

؟ ب جـ د متوازي أضلاع ، $\overline{\text{س ص}}$ ⊥ $\overline{\text{؟ جـ}}$

هـ منتصف $\overline{\text{؟ جـ}}$ ، س ∈ $\overline{\text{؟ د}}$ ، ص ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$

المطلوب : إثبات أنّ الشكل ؟ ص جـ س معيَّن .

البرهان :

Δ ﻫ س ، Δ جـ ﻫ ص فيهما :

ﻫ = جـ ﻫ (معطى)

ق (∠ ﻫ س) = ق (∠ جـ ﻫ ص) (بالتقابل بالرأس)

ق (∠ س ﻫ) = ق (∠ ص جـ ﻫ) (بالتبادل والتوازي)

∴ Δ ﻫ س ≅ Δ جـ ﻫ ص بحالة (ز . ض . ز)

وينتج من التطابق أنّ س = ص جـ (١)

∵ د // ب جـ (من تعريف متوازي الأضلاع)

∵ س ∈ د ، ص ∈ ب جـ (معطى)

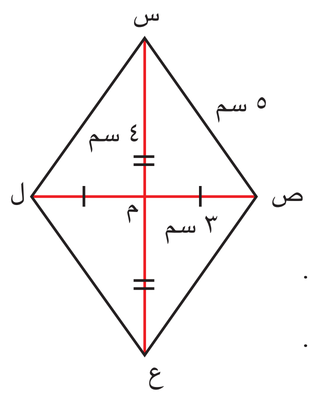
∴ س // ص جـ (٢)

من (١) ، (٢) ∴ ص جـ س متوازي أضلاع لأنّ فيه ضلعَين متقابلَين متوازيان ومتطابقان . (٣)

∵ س ص ⊥ جـ (٤) معطى

من (٣) ، (٤) ∴ ص جـ س معيَّن لأنّه متوازي أضلاع قطراه متعامدان .

تمارين ذاتية :



١ س ص ع ل شكل رباعي فيه م نقطة تقاطع القطرَين ،
م ص = م ل ، م س = م ع ،
س ص = ٥ سم ، ص م = ٣ سم ، س م = ٤ سم
أثبِت أنّ الشكل س ص ع ل معيَّن

....

....

....

....

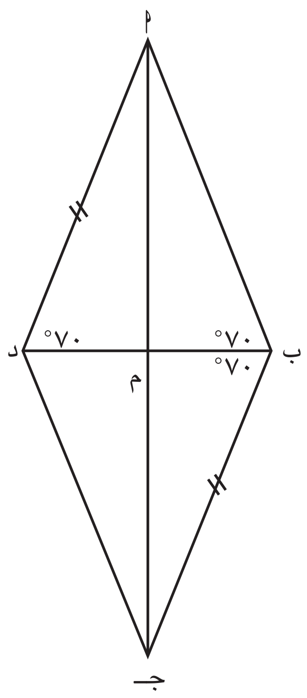
....

....

....

....

٢ في الشكل أمامك ، أثبِت أنّ ﺃ ب جـ د معيَّن .



....

....

....

....

....

....

....

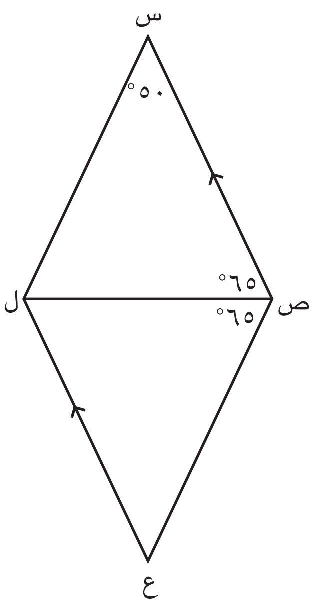
....

....

٣ س ص ع ل شكل رباعي فيه $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ع ل}}$ ، ق ($\hat{\text{س}}$) = ٥٠°

ق (س $\hat{\text{ص}}$ ل) = ق (ع $\hat{\text{ص}}$ ل) = ٦٥°

أثبِت أنّ الشكل س ص ع ل معيَّن .



....

....

....

....

....

....

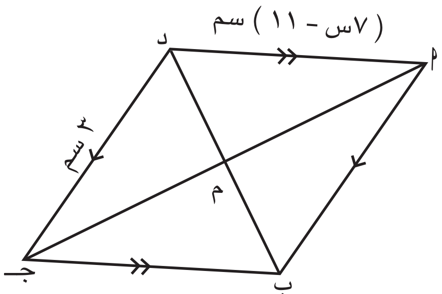
....

....

مهارات تفكير عليا :

اِختر الإجابة الصحيحة .

٤ في الشكل المقابِل . قيمة س التي تجعل متوازي الأضلاع ﺃ ب جـ د ، معيَّنًا هي :



أ ١٤ ب ٢ ج ١١ د ٣

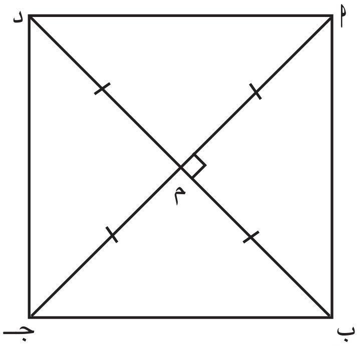
٥ - ٦ الكشف عن المربّع
Detecting a Square

سوف تتعلّم : الكشف عن المربّع .

العبارات والمفردات :

المربّع Square

اِستكشِف



في الشكل المقابِل ﺃ ب جـ د متوازي أضلاع ،

$\overline{\text{ﺃ جـ}} \perp \overline{\text{ب د}}$ ، ﺃ جـ = ب د

أثبِت أنّ ﺃ ب جـ د مربّع .

أوّلًا :

∵ ﺃ ب جـ د متوازي أضلاع ، ﺃ جـ = ب د

أكمِل ما يلي :

ﺃ جـ = ... معطى (قطراه متطابقان)

∴ الشكل ﺃ ب جـ د هو .... (١)

لأنّه متوازي أضلاع قطراه ....

من تطابق Δ ﺃ م ب ، Δ ﺃ م د (ض . ز . ض)

ينتج أنّ :

ﺃ ب = ... (ضلعان متجاوران متطابقان) (٢)

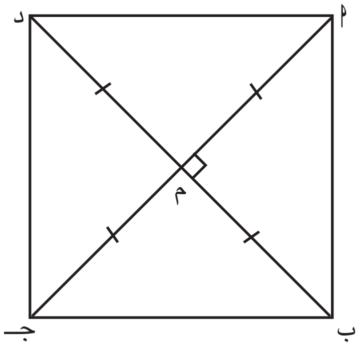
من (١) ، (٢) ﺃ ب جـ د هو مربّع

لأنّه مستطيل فيه ضلعان متجاوران متطابقان .

تذكَّر

- يكون متوازي الأضلاع مستطيلًا إذا توفّر أحد الشرطَين .
  1. تطابق قطراه .
  2. قياس إحدى زواياه يساوي ٩٠° .
- يكون متوازي الأضلاع معيَّنًا إذا توفّر أحد الشرطَين :
  1. قطراه متعامدان .
  2. فيه ضلعان متجاوران متطابقان .

ثانيًا :



∵ ا ب جـ د متوازي أضلاع ، ا جـ ⊥ ب د ،

أكمِل ما يلي :

ا جـ ⊥ .... معطى (قطراه متعامدان)

∴ الشكل ا ب جـ د هو .... (١)

لأنّه متوازي أضلاع قطراه ....

∵ Δ ا م ب مثلّث قائم الزاوية ومتطابق الضلعَين معطى

ق (م ا^ ب) = $\frac{١٨٠° - ٩٠°}{٢}$ = $\frac{.............}{.............}$ = ... من خواصّ المثلّث المتطابق الضلعَين

∴ ق (م ا^ د) =......................... (قطر المعيَّن ينصّف زاويتَي الرأس الواصل بينهما)

∴ ق (ب ا^ د) =......................... (قياس إحدى زواياه قائمة) (٢)

من (١) ، (٢) ا ب جـ د هو مربّع .

لأنّه معيَّن قياس إحدى زواياه ٩٠°

تذكَّر

للمربّع كلّ خواصّ المستطيل وكلّ خواصّ المعيَّن .

ممّا سبق نلاحظ أنّ :

يكون متوازي الأضلاع مربّعًا إذا توفّر فيه أحد الشروط التالية :

- **القطران متطابقان ومتعامدان .**
- **القطران متطابقان وضلعان متجاوران متطابقان .**
- **إحدى زواياه قائمة وضلعان متجاوران متطابقان .**
- **إحدى زواياه قائمة والقطران متعامدان .**

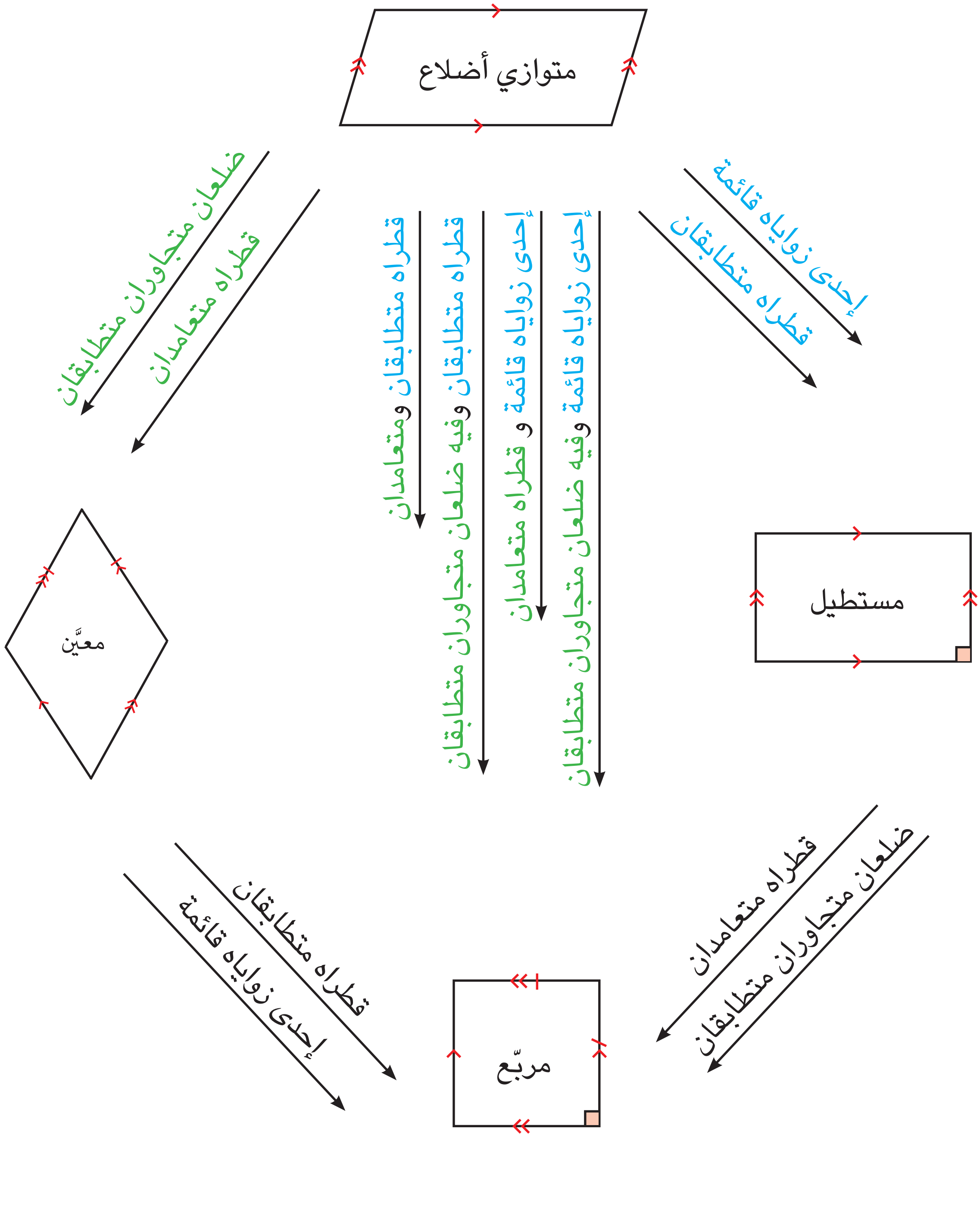
ملاحظة :

لإثبات أنّ الشكل الرباعي مربّع ، يجب أن يكون :

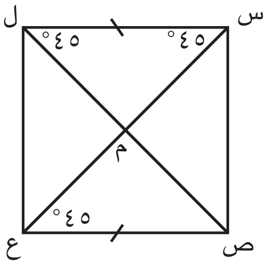
متوازي أضلاع ويحقّق أحد شرطَي المستطيل وأحد شرطَي المعيَّن .

ربط الأفكار

(اِتّبِع أحد الأسهم لتصل إلى المطلوب)



مثال (١):



س ص ع ل شكل رباعي فيه :

س ل = ص ع ، ق (ل س^ ع) = ق (س ل^ ص) = ق (س ع^ ص) = ٤٥°

أثبِت أنّ س ص ع ل مربّع .

الحلّ :

المعطَيات : س ص ع ل شكل رباعي ، س ل = ص ع

ق (ل س^ ع) = ق (س ل^ ص) = ق (س ع^ ص) = ٤٥°

المطلوب : إثبات أنّ الشكل الرباعي س ص ع ل مربّع .

البرهان :

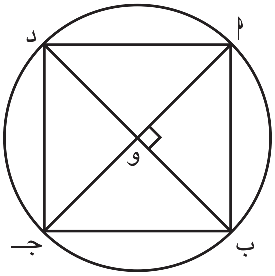
س ل = ص ع	معطى (١)
∵ ق (ل س^ ع) = ق (س ع^ ص)	وهما في وضع تبادل
∴ $\overline{\text{س ل}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$	(٢)
من (١) ، (٢) نستنتج أنّ :	
الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع لأنّ فيه ضلعَين متقابلَين متطابقان ومتوازيان (٣)	

في Δ س م ل :	
ق (س م^ ل) = ١٨٠° − (٤٥° + ٤٥°)	
= ١٨٠° − ٩٠° = ٩٠°	مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلة = ١٨٠°
∴ $\overline{\text{س ع}}$ ⊥ $\overline{\text{ص ل}}$	
∴ القطران متعامدان	(٤)

∵ ق (ل س^ م) = ق (س ل^ م)	معطى
∴ س م = ل م	من خواصّ المثلّث المتطابق الضلعَين
∴ { س م = م ع ، ل م = م ص	من خواصّ متوازي الأضلاع
∴ س ع = ص ل	من خواصّ المساواة
∴ القطران متطابقان	(٥)

من (٣) ، (٤) ، (٥) س ص ع ل مربّع لأنّه متوازي أضلاع تعامد وتطابق قطراه .

دورك الآن (٢)



في الشكل المقابِل ﺃ جـ ، ب د ، قطران في دائرة مركزها و ،
ﺃ جـ ⊥ ب د .

أثبِت أنّ ﺃ ب جـ د مربّع .

المعطَيات : و مركز الدائرة ، ﺃ جـ ⊥ ب د

المطلوب : إثبات أنّ ﺃ ب جـ د مربّع .

البرهان :

∵ و مركز الدائرة

∴ ﺃ و = ... ، ب و = ... أنصاف أقطار الدائرة الواحدة متطابقة

∴ ﺃ ب جـ د متوازي أضلاع لأنّه شكل رباعي فيه القطران ينصّف كلّ منهما الآخر (١)

∵ ﺃ جـ ≅ .... أقطار الدائرة الواحدة متطابقة (٢)

∵ ﺃ جـ ⊥ .... (معطى)

∴ القطران متعامدان (٣)

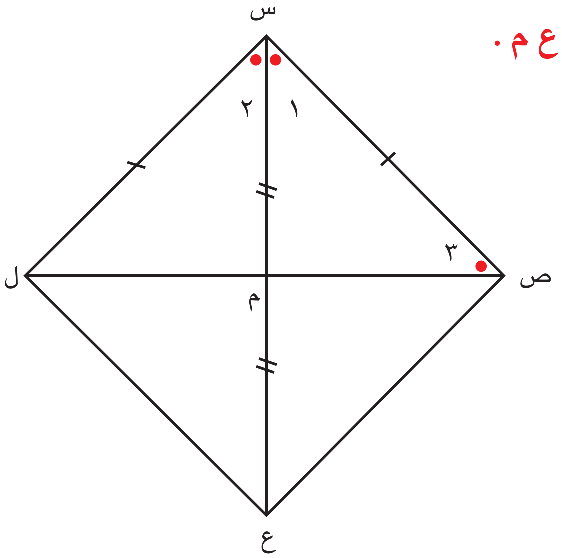
∴ من (١) ، (٢) ، (٣) ∴ ﺃ ب جـ د .... لأنّه متوازي أضلاع تطابق وتعامد قطراه .

عبِّر عن فهمك

سأل معلّم الرياضيات المتعلّمين في الفصل عن تعريف المربّع ، وكانت إجابة كلّ من يوسف وعلي كالآتي :

في رأيك ، هل إجابة كلّ منهما صحيحة ؟ فسِّر ذلك .

مثال (٢) :



س ص ع ل شكل رباعي فيه : س ص = س ل ، س م = ع م .

ق ($\hat{١}$) = ق ($\hat{٢}$) = ق ($\hat{٣}$)

أثبِت أنّ س ص ع ل مربّع .

الحلّ :

المعطَيات : س ص ع ل شكل رباعي

س ص = س ل ، س م = ع م

ق ($\hat{١}$) = ق ($\hat{٢}$) = ق ($\hat{٣}$) .

المطلوب : إثبات أنّ س ص ع ل مربّع .

البرهان : المثلّثان س م ص ، س م ل فيهما :

$\overline{\text{س م}}$ (ضلع مشترَك)

$\overline{\text{س ص}} \cong \overline{\text{س ل}}$ (معطى)

ق ($\hat{١}$) = ق ($\hat{٢}$) (معطى)

∴ Δ س م ص ، Δ س م ل متطابقان (ض . ز . ض) ومن التطابق ينتج أنّ :

م ص = م ل (١)

∵ م س = م ع (٢) (معطى)

من (١) ، (٢) ∴ الشكل س ص ع ل متوازي الأضلاع لأنّ القطرَين ينصّف كلّ منهما الآخر (٣)

∵ ق ($\hat{١}$) = ق ($\hat{٣}$) (معطى)

∴ ص م = س م (من خواصّ المثلّث المتطابق الضلعَين)

∴ ص ل = س ع (من خواصّ المساواة)

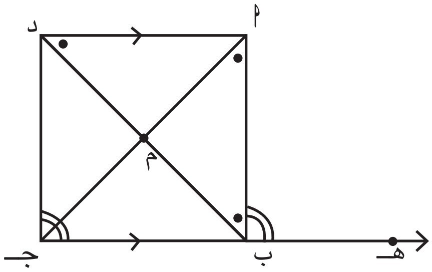
∴ القطران متطابقان (٤)

∵ س ص = س ل (٥) (معطى)

∴ فيه ضلعان متجاوران متطابقان .

من (٣) ، (٤) ، (٥) ∴ الشكل س ص ع ل مربّع لأنّه متوازي أضلاع قطراه متطابقان وفيه ضلعان متجاوران متطابقان .

دورك الآن (٢)



ء ب جـ د شكل رباعي فيه :

ء د // ب جـ ، ق (ب ءَ̂ جـ) = ق (ء ب̂ د) = (ء د̂ ب)

ق (ء ب̂ هـ) = ق (د جـ̂ ب)

أثبِت أنّ ء ب جـ د مربّع

المعطَيات : ....

المطلوب : ....

البرهان :

∵ ء د // ب جـ (معطى) (١)

∵ ق (ء ب̂ هـ) = ... (معطى) وهما في وضع ....

∴ ء ب // .... (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أنّ ء ب جـ د .... لأنّ فيه كلّ ضلعَين متقابلَين متوازيان (٣)

في Δ ء م ب :

∵ ق (ب ءَ̂ م) = ... (معطى)

∴ ء م = م ب (من خواصّ المثلّث المتطابق الضلعَين)

∵ ء م = ...
ب م = ... } (من خواصّ متوازي الأضلاع القطران ينصّف كلّ منهما الآخر)

∴ ء جـ = ... (من خواصّ المساواة)

∴ القطران متطابقان (٤)

في Δ ء ب د :

∵ ق (ء ب̂ د) = ق (ء د̂ ب) (معطى)

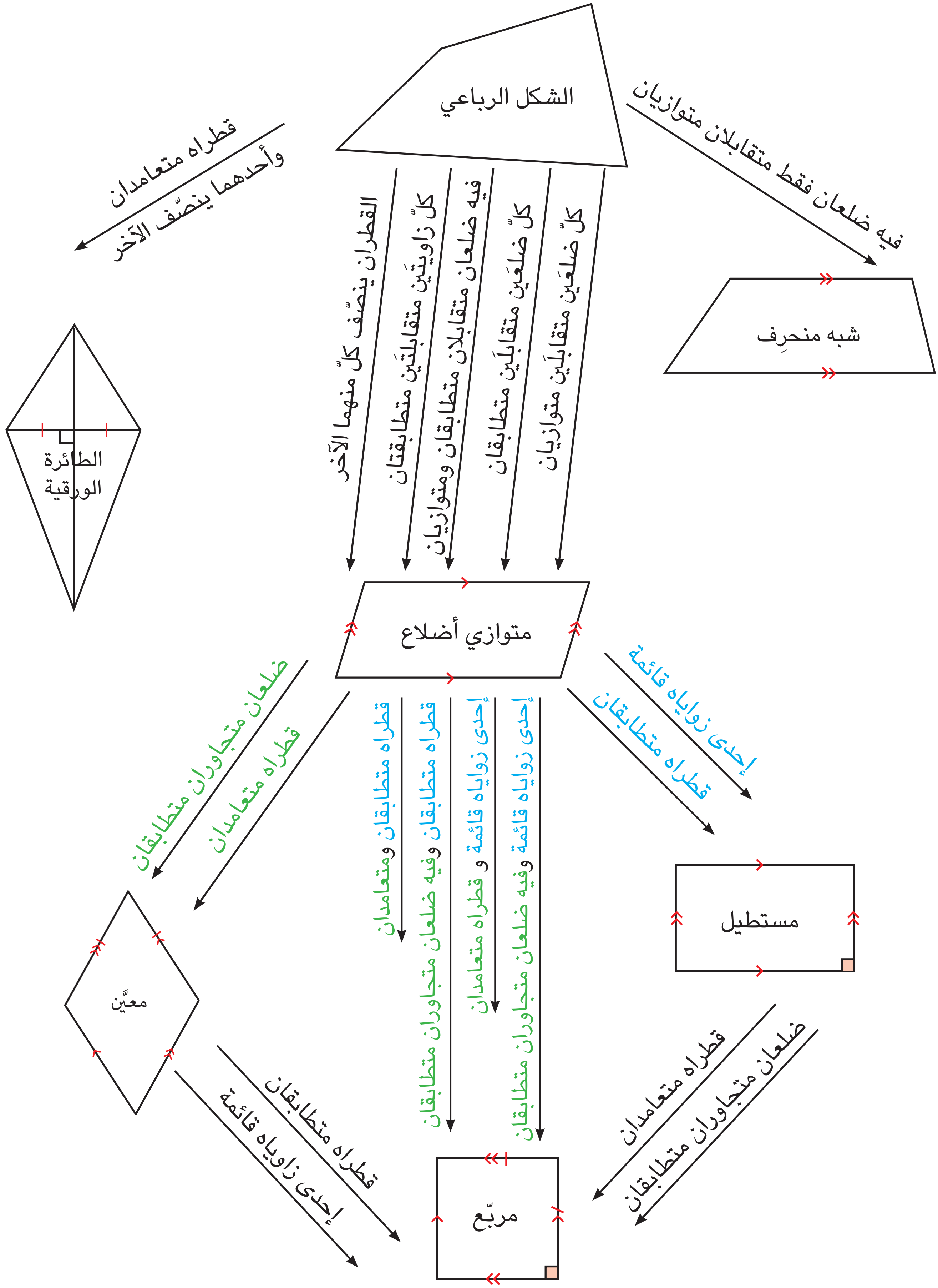
∴ ء ب = ... (من خواصّ المثلّث المتطابق الضلعَين)

∴ فيه ضلعان متجاوران متطابقان (٥)

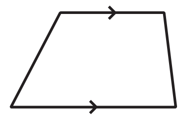
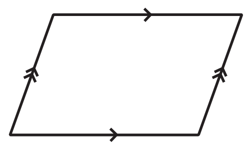
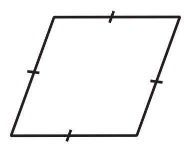
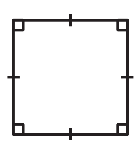
∴ من (٣) ، (٤) ، (٥) نستنتج أنّ : ء ب جـ د .... لأنّ قطرَيه ....

وفيه ضلعان متجاوران ....

ربط الأفكار (اِتّبِع أحد الأسهم للوصول إلى المطلوب)

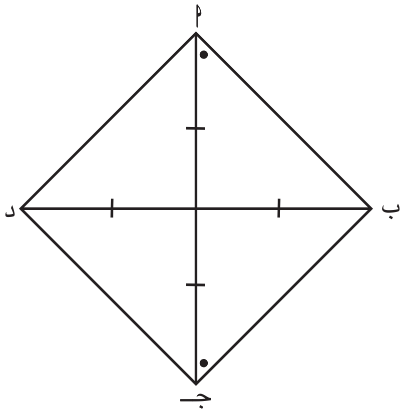


الأشكال الرباعية

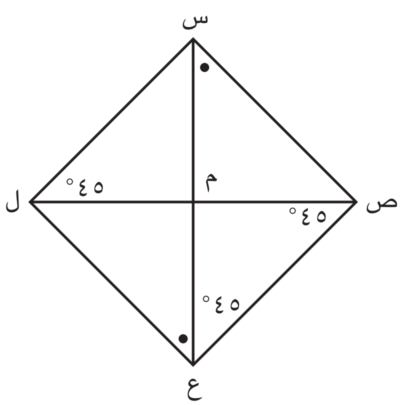
إسم الشكل	رسم الشكل	تعريف الشكل	خواصّ الشكل
شبه المنحرِف		هو شكل رباعي فيه ضلعان فقط متقابلان متوازيان .	– زوج واحد فقط من الأضلاع المتقابلة متوازٍ .
متوازي الأضلاع		هو شكل رباعي فيه كلّ ضلعَين متقابلَين متوازيان .	– الأضلاع المتقابلة متطابقة . – يتقاطع القطران في منتصفهما . – نقطة تقاطع قطرَيه هي مركز تناظر له . – كلّ زاويتَين متقابلتَين متطابقتان . – كلّ زاويتَين متتاليتَين متكاملتان .
المعيَّن		هو متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان .	– أضلاعه الأربعة متطابقة . – القطران متعامدان وينصّف كلّ منهما الآخر . – كلّ قطر ينصّف زاويتَي الرأس الواصل بينهما .
المستطيل		هو متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة .	– زواياه الأربع قائمة . – قطراه متطابقان .
المربّع		– هو متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان وإحدى زواياه قائمة . – هو معيَّن إحدى زواياه قائمة . – هو مستطيل فيه ضلعان متجاوران متطابقان .	– قطراه متطابقان ومتعامدان ويتقاطعان في منتصفهما . – زواياه الأربع قائمة وأضلاعه متطابقة . – قطر المربّع يصنع مع كلّ ضلع من أضلاعه زاوية قياسها ٤٥° .

تمارين ذاتية :

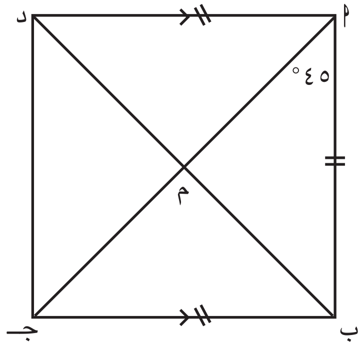
١ ا ب جـ د مستطيل فيه ق (ب اْ^ جـ) = ق (ب جـ^ ا) ،
أثبِت أنّ الشكل ا ب جـ د مربّع .



٢ باستخدام المعطَيات في الرسم ، أثبِت أنّ الشكل س ص ع ل مربّع .



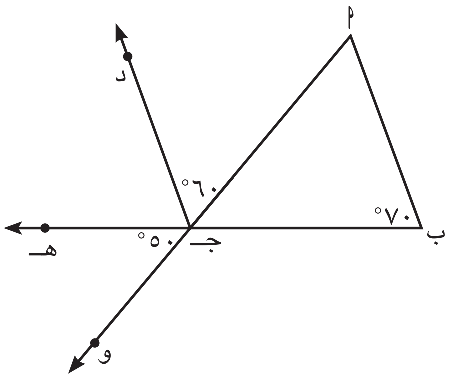
٣ مستعينًا بالمعطَيات على الرسم ، أثبِت أنّ الشكل ﺃ ب جـ د مربّع .



الدرس السادس

أوّلًا : البنود المقالية

١ في الشكل المقابِل ، أثبِت أنّ $\overline{\text{ا ب}}$ // $\overleftarrow{\text{جـ د}}$.



....

....

....

....

....

....

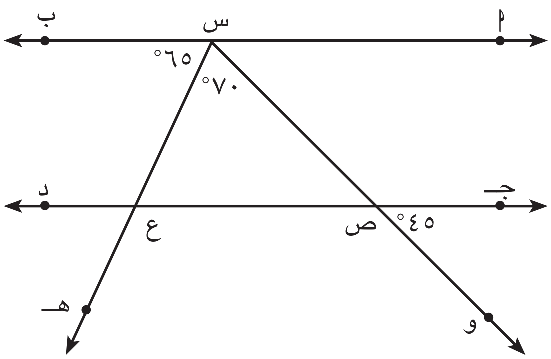
....

....

....

٢ في الشكل المقابِل وحسب البيانات المدوَّنة ،

أثبِت أنّ $\overleftrightarrow{\text{ا ب}}$ // $\overleftarrow{\text{جـ د}}$



....

....

....

....

....

....

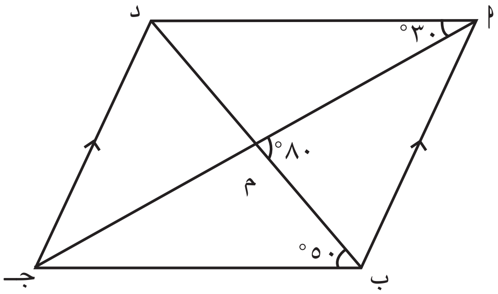
....

....

....

٣ في الشكل المقابِل : $\overline{\text{أ جـ}} \cap \overline{\text{ب د}}$ = { م } ،

أثبِت أنّ أ ب جـ د متوازي أضلاع .



....

....

....

....

....

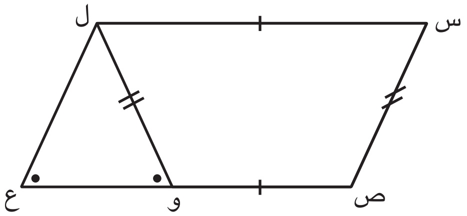
....

....

....

....

٤ أثبِت أنّ الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع .



....

....

....

....

....

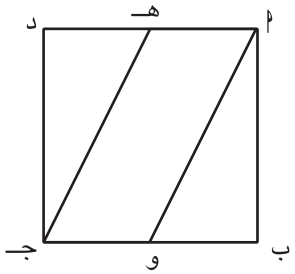
....

....

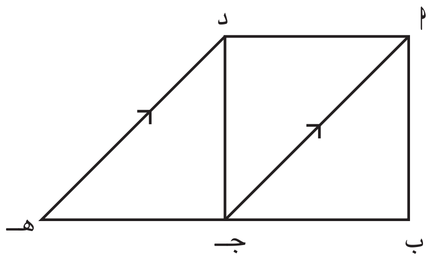
....

....

٥ أ ب جـ د مربع ، هـ منتصف أد ، و منتصف ب جـ
أثبِت أنّ أ و جـ هـ متوازي أضلاع .



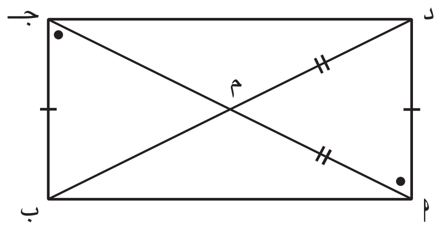
٦ في الشكل المقابِل : أ ب جـ د مربّع ،
هـ ∈ ب جـ ، أ جـ // د هـ



أ) أثبِت أنّ أ جـ هـ د متوازي أضلاع

ب) أوجِد ق (هـ^)

٧ في الشكل المقابِل ، أثبِت أنّ الشكل ؟ ب جـ د مستطيل .



....

....

....

....

....

....

....

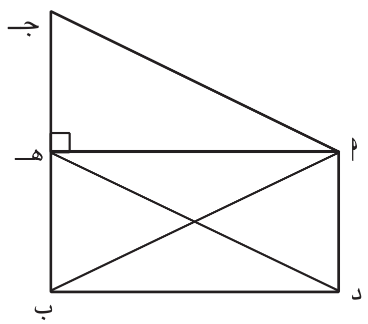
....

....

....

....

٨ في الشكل ؟ ب جـ مثلّث متطابق الضلعَين ، فيه ؟ ب = ؟ جـ ،
؟ د هـ جـ متوازي أضلاع ، ؟ هـ ⊥ ب جـ .
أثبِت أنّ الشكل ؟ د ب هـ مستطيل .



....

....

....

....

....

....

....

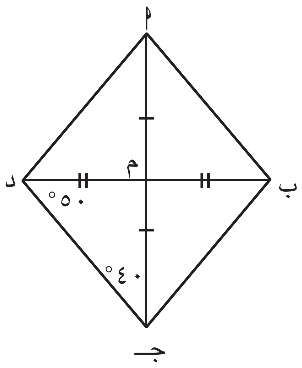
....

....

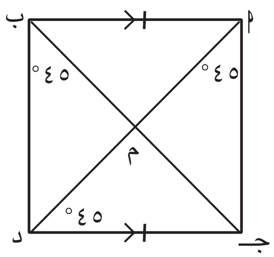
....

....

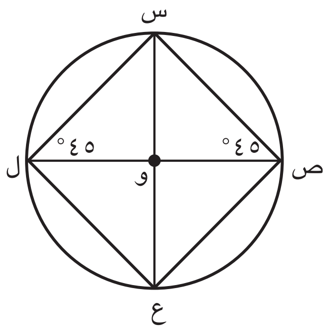
٩ في الشكل المقابِل ، أثبِت أنّ الشكل ﻡ ب جـ د معيَّن .



١٠ في الشكل المقابِل ، أثبِت أنّ الشكل ﻡ ب د جـ مربّع .



١١ **في الشكل المقابِل : و مركز الدائرة ،**
أثبِت أنّ الشكل س ص ع ل مربّع .



....

....

....

....

....

....

....

....

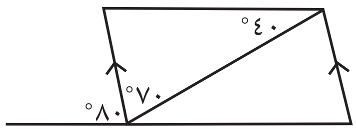
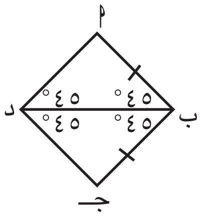
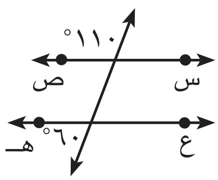
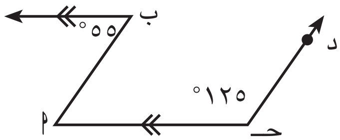
....

....

....

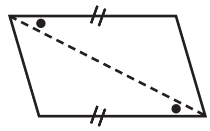
ثانيًا: البنود الموضوعية

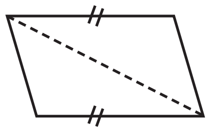
في البنود (١ - ٥) ظلّل [أ] إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلّل [ب] إذا كانت العبارة غير صحيحة .

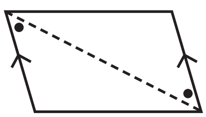
١ الشكل الرباعي المرسوم يمثّل متوازي أضلاع .		أ	ب
٢ المستطيل هو متوازي أضلاع قطراه متطابقان .		أ	ب
٣ الشكل المقابِل يمثّل مربّعًا .		أ	ب
٤ من الشكل المرسوم ↔س ص // ↔ع هـ		أ	ب
٥ من الشكل المقابِل وحسب البيانات المدوَّنة . فإنّ ‾أ ب // ←جـ د		أ	ب

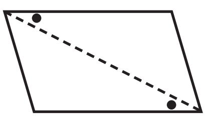
في البنود (٦ - ١٤) لكلّ بند أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلّل الإجابة الصحيحة .

٦ الشكل الذي يمثّل متوازي أضلاع فيما يلي هو :

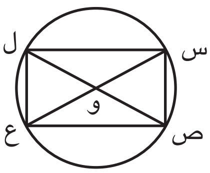
[أ] 

[ب] 

[ج] 

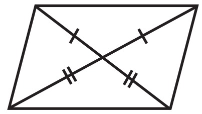
[د] 

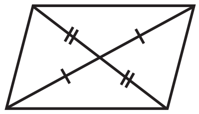
٧ الشكل المقابِل يمثّل دائرة مركزها و ، فإنّ الشكل س ص ع ل هو :

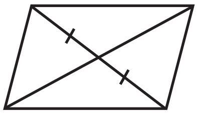


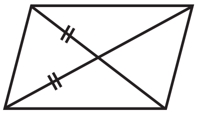
[أ] مربّع   [ب] مستطيل   [ج] معيَّن   [د] شبه منحرِف

٨ الشكل الذي يمثّل متوازي أضلاع فيما يلي هو :

أ 

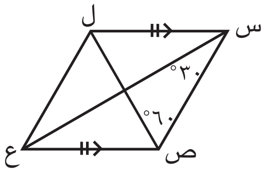
ب 

ج 

د 

---

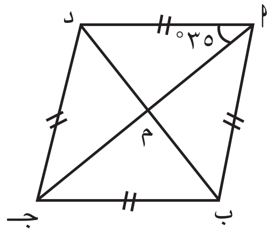
٩ في الشكل المقابِل س ص ع ل يمثّل



أ شبه منحرِف   ب مربّعًا   ج مستطيلًا   د معيَّنًا

---

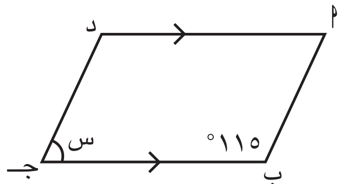
١٠ في الشكل المقابِل ق (جـ $\hat{\text{ب}}$ د) =



أ ٣٥°   ب ٥٥°   ج ٤٥°   د ٦٥°

---

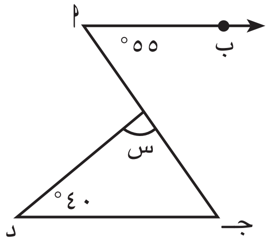
١١ في الشكل المقابِل قيمة س التي تجعل الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع هي :



أ ١١٥°   ب ٥٥°   ج ٧٥°   د ٦٥°

---

١٢ في الشكل المقابِل قيمة س التي تجعل $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{د جـ}}$ تساوي :



أ ٥٥°   ب ٤٠°   ج ٨٥°   د ٩٥°

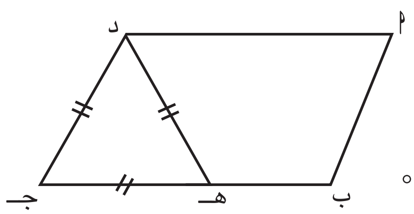
---

١٣ أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه ق ($\hat{\text{أ}}$) = ق ($\hat{\text{ب}}$) فإنّ الشكل أ ب جـ د يكون :

أ مستطيلًا   ب مربّعًا   ج معيَّنًا   د شبه منحرِف

---

١٤ في الشكل المقابِل أ ب جـ د متوازي أضلاع حيث د جـ = جـ هـ = د هـ ، فإنّ ق ($\hat{\text{ب}}$) يساوي :



أ ١٠٠°   ب ٦٠°   ج ١٢٠°   د ١٣٠°

الوحدة التعليمية
السادسة

المقادير الجبرية

الرياضيات تشيّد الأبراج

برج الحمراء هو أطول ناطحة سحاب في دولة الكويت وواحد من أطول الأبراج في العالم .

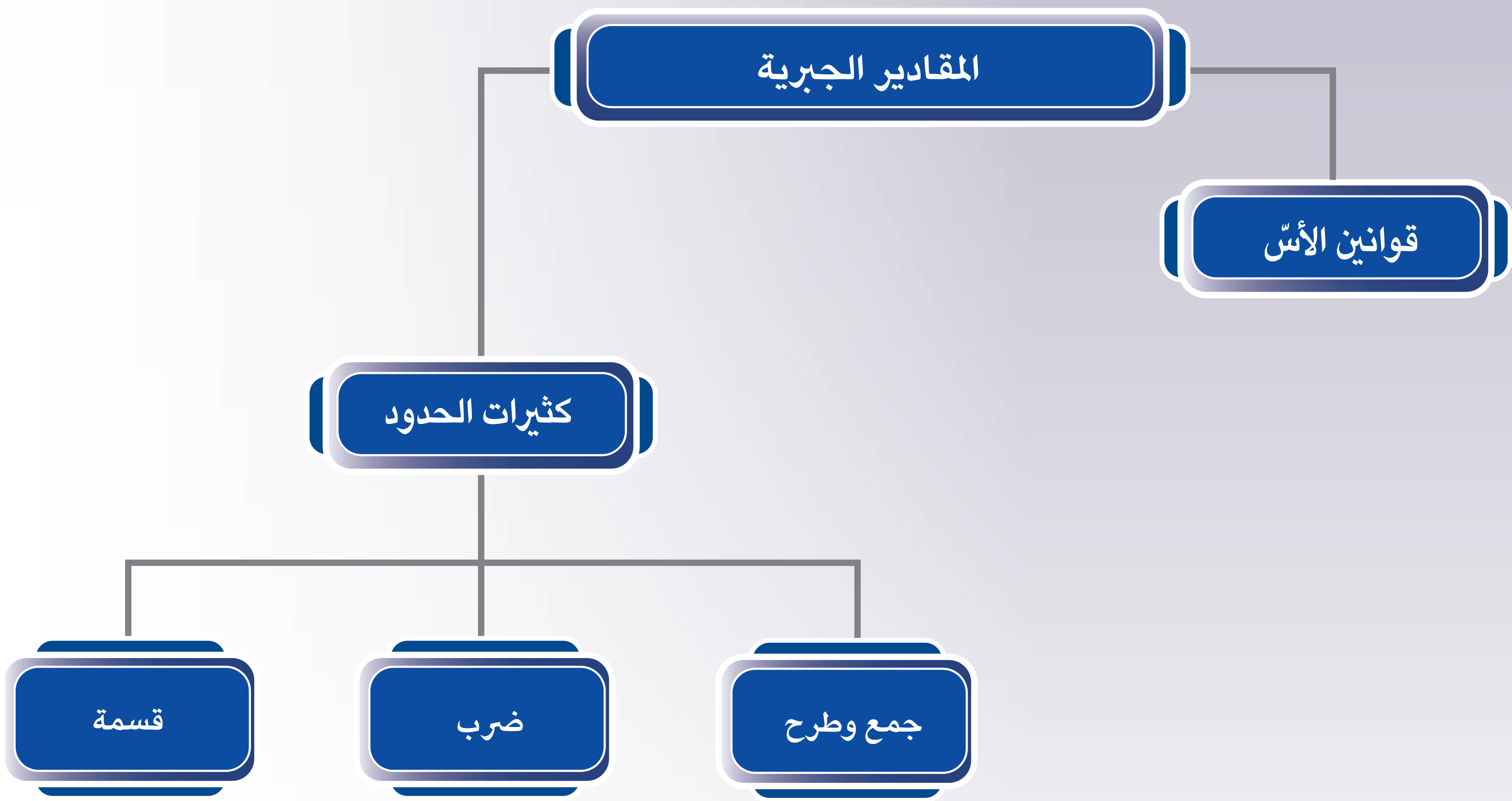
يبلغ ارتفاعه حوالي ٤١٢ مترًا ويضمّ ٨٦ طابقًا، ممّا يجعله أطول برج مبني بالكامل من الخرسانة في العالم (من دون هيكل فولاذي رئيسي) .

وما يميّزه أنّه يدور تدريجيًّا وهو يرتفع إلى الأعلى ، فيبدو وكأنّه وشاح حجري يلتفّ حول المبنى - وهذا الشكل الرائع تمّ تصميمه باستخدام معادلات هندسية دقيقة تعتمد على كثيرات الحدود والمنحنيات الرياضية ، لتوازن بين الجمال الفنّي والاستقرار الإنشائي .

كما أنّ تصميم البرج يساعد على تقليل تأثير حرارة الشمس ، إذ تغطّي الجدران المنحنية الواجهات الأكثر تعرّضًا لأشعّة الشمس ، ممّا يقلّل من استهلاك الطاقة .

المجال	معايير المنهج	مؤشّر الأداء
العدّ والجبر	تمثيل الأعداد واستخدامها ضمن أشكال متكافئة متنوّعة وإدراك أنّ مختلف أشكال الأعداد تتلاءم مع حالات مختلفة .	التعرّف - الفهم - الاستكشاف والتقصّي - التذكّر - الاستنتاج - حلّ المشكلات - القوانين - القراءة - الكتابة - التصنيف - التقويم - العمل الجَماعي - الوسائط - التحويل - النمذجة - التحليل والترتيب - معالجة بيانات - التعدّد - التّمييز
	إختيار العمليات المناسِبة واستخدامها لحلّ المسائل وتعليل الخيارات .	
	فهم الأنماط والعلاقات والدوالّ .	
	إستخدام إستراتيجيات متنوّعة لوصف وتحليل العلاقات والتغيّرات .	
	إستخدام المعادلات والنماذج الرياضية لحلّ المسائل .	
	إستخدام التمثيلات البيانية والجداول والتمثيلات الجبرية للقيام بالتوقّعات ولحلّ المسائل .	
	تمثيل وتحليل المواقف والبنى الرياضية باستخدام الرموز الجبرية .	

مخطّط تنظيمي للوحدة التعليمية السادسة



هل أنت مستعدّ؟

١ أوجِد ناتج ما يلي :

أ) $-٣ + ٧ =$ ....

ب) $٢ + (-١) =$ ....

ج) $٣ - ٥ =$ ....

د) $-٣ \times -٥ =$ ....

هـ) $-٤ + (-٩) =$ ....

و) $٣ - (-٢) =$ ....

ز) $٦ \div ٢ =$ ....

ح) $(-٧) - ٣ =$ ....

٢ أُكتب كلًّا ممّا يلي في الصورة الأسّية .

أ) $٣ \times ٣ \times ٣ \times ٤ \times ٤$ ....

ب) $٢ \times ٢ \times ٥ \times ٥$ ....

٣ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي :

أ) $٢^{٣} =$ ....

ب) $٣^{٤} =$ ....

ج) $(٠,٣)^{٢} =$ ....

د) $١٦^{١} =$ ....

هـ) $١^{١٥} =$ ....

و) $٨^{٢} =$ ....

ز) $٣^{٢} \times ٢^{٣} =$ ....

ح) $٤^{٢} \div ٨ =$ ....

ط) $١٠^{٢} - ١٠ =$ ....

ي) $٣٠^{٢} + ١٠^{٥} =$ ....

٤ أوجِد قيمة كلّ ممّا يلي عندما س = ٢

أ) $س^{٢} + ٣$ ....

ب) ٣ س ....

ج) ٥ − س ....

د) ٨ ÷ س ....

هـ) $س^{٣}$ ....

و) ٢ س − ١ ....

٥ أوجِد المعكوس الجمعي لكلّ ممّا يلي :

أ) ٥ ....

ب) ص ....

ج) −٦ ....

د) −٢ ص ....

٦ أوجِد العامل المشتَرك الأكبر لكلّ ممّا يلي :

أ) ٣ ، ١٥ ....

ب) ٢٥ ، ٤٥ ....

ج) ٤ ، ٨ ، ١٢ ....

٦ - ١ قوانين الأسس

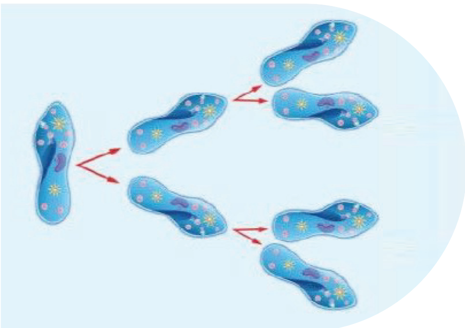
Laws of Exponents

سوف تتعلّم : قوانين الأسس .

العبارات والمفردات :

أسّ	Exponent	قوى	Power
أساس	Base		

اِستكشِف (١) :



إذا كانت خليّة يوجلينا واحدة تنقسم إلى خليّتَين جديدتَين متماثلتَين كلّ ساعة (تتضاعف كلّ ساعة) ، فكم عدد الخلايا بعد ٥ ساعات ؟

بعد ساعة واحدة : ٢ خليّة

بعد ساعتَين : ٢ × ٢ = ٤ خلايا

بعد ٣ ساعات : ٢ × ٢ × ٢ = ٨ خلايا

بعد ٤ ساعات : ٢ × ٢ × ٢ × ٢ = ١٦ خليّة

بعد ٥ ساعات : ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢ = ٣٢ خليّة

هل يمكنك كتابة هذه الأعداد بصورة أخرى ؟

$٢ = ٢^{١}$

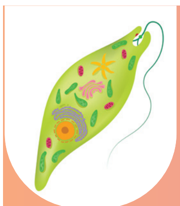
$٢ \times ٢ = ٢^{٢}$

$٢ \times ٢ \times ٢ = ٢^{٣}$

$٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ = ٢^{٤}$

$٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ = ٢^{٥}$

معلومة مفيدة :



اليوجلينا كائن حي مميّز لأنّه يجمع بين صفات النبات والحيوان ، فهي تشبه النبات لأنّها تحتوي على (الكلوروفيل) وتستطيع صنع غذائها بنفسها بعملية البناء الضوئي ، وتشبه الحيوان لأنّها تتحرّك باستخدام سوط واحد وتتغذّى على الموادّ العضوية عند غياب الضوء .

$\overbrace{أ \times أ \times أ \times ... \times أ}^{\text{أ مكرَّرة ن مرة}} = أ^{ن}$ حيث أ عدد نسبي غير صفري ، $ن \in ص_{+}$

ويُقرأ « أ أُسّ ن » أو القوّة النونية للعدد أ .

دورك الآن (١)

أكمِل الجدول التالي :

الصورة الأسّية	الأساس	الأسّ	صورة الضرب المتكرّر	الناتج
$٣^{٢}$	٣			
$٢^{٥}$		٥		
$(-٣)^{٢}$			$(-٣) \times (-٣)$	
$(-٥)^{٣}$				-١٢٥
$\left(\frac{١}{٢}\right)^{٤}$				
$\left(\frac{-٣}{٥}\right)^{٢}$				

تذكَّر

نسمّي الصورة $٢^{٣}$ بالصورة الأسّية حيث ٢ يُسمّى الأساس و٣ الأسّ ، وتُقرأ ٢ أسّ ٣ أو ٢ مرفوعًا إلى القوّة ٣ أو ٢ تكعيب .

ماذا تلاحظ ؟

ملاحظة :

- عندما يكون الأساس عددًا سالبًا والأسّ عددًا زوجيًّا ، يكون الناتج عددًا موجبًا .
- عندما يكون الأساس عددًا سالبًا والأسّ عددًا فرديًّا ، يكون الناتج عددًا سالبًا .

اِستكشِف (٢) :

١ أكمِل .

$$٧^{٢} \times ٧^{٣} = ٧ \times \ldots\ldots \times ٧ \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots = ٧^{\square} = ٧^{(٢+٣)}$$

$$٣^{٢} \times ٣^{٤} = ٣ \times ٣ \times \ldots\ldots \times ٣ \times \ldots\ldots \times ٣ = ٣^{\square} = ٣^{(٢+\ldots\ldots)}$$

ماذا تلاحظ ؟ ....

٢ أكمِل .

$$\frac{٦^{٥}}{٦^{٣}} = \frac{\cancel{٦}^{١} \times \cancel{٦}^{١} \times \cancel{٦}^{١} \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots}{\cancel{٦}_{١} \times \cancel{٦}_{١} \times \cancel{٦}_{١}} = ٦^{\square} = ٦^{(٥-٣)}$$

$$\frac{٥^{٤}}{٥} = \frac{\cancel{٥}^{١} \times ٥ \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots}{\cancel{٥}_{١}} = ٥^{\square} = ٥^{(٤ \ldots\ldots ١)}$$

ماذا تلاحظ ؟ ....

لكلّ أ عدد نسبي غير صفري ، م ، ن عددان صحيحان ، يكون :

١ $أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$

٢ $\frac{أ^{م}}{أ^{ن}} = أ^{م-ن}$

ملاحظة :

لكلّ أ عدد نسبي غير صفري ، م ، ن ، ك ، ... أعداد صحيحة ، يكون : $أ^{م} \times أ^{ن} \times أ^{ك} \times ... = أ^{م+ن+ك+...}$

مثال (٢) :

بسِّط كلًّا ممّا يلي باستخدام قوانين الأسس .
(المقام أينما وجد ≠ صفر)

أ $٤^{٥} \times ٤^{٣}$ ب س × $س^{٣} \times س^{٦}$ ج $\left(\frac{١}{٧}\right)^{٢} \times \left(\frac{١}{٧}\right)^{٣}$

د $\frac{٢^{٤}}{٢^{٢}}$ هـ $\frac{س^{٧}}{س^{٢}}$ و $\frac{س^{٥}}{س^{-٣}}$

الحلّ :

أ $٤^{٥} \times ٤^{٣} = ٤^{٥+٣} = ٤^{٨}$

ب س × $س^{٣} \times س^{٦} = س^{١+٣+٦} = س^{١٠}$

ج $\left(\frac{١}{٧}\right)^{٢} \times \left(\frac{١}{٧}\right)^{٣} = \left(\frac{١}{٧}\right)^{٢+٣} = \left(\frac{١}{٧}\right)^{٥}$

د $\frac{٢^{٤}}{٢^{٢}} = ٢^{٤-٢} = ٢^{٢}$

هـ $\frac{س^{٧}}{س^{٢}} = س^{٧-٢} = س^{٥}$

و $\frac{س^{٥}}{س^{-٣}} = س^{٥-(-٣)} = س^{٥+٣} = س^{٨}$

اِنتبِه

س = $س^{١}$

تذكَّر

س − ص = س + (− ص)

دورك الآن (٢)

بسِّط كلًّا ممّا يلي باستخدام قوانين الأسس . (المقام أينما وُجد ≠ صفرًا)

أ $٥^{٣} \times ٥^{٤}$ = ...

ب $س^{٤} \times س^{٩}$ = ...

ج $ع^{٢} \times ع \times ع^{٥}$ = ...

د $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٤}$ = ...

هـ $\frac{٣^{٦}}{٣^{٢}}$ = ...

و $\frac{ص^{٥}}{ص^{٤}}$ = ...

ز $\frac{ك^{٧}}{ك^{-٢}}$ = ...

عبّر عن فهمك (١)

هل العبارات التالية صحيحة ؟ فسِّر إجابتك .

(١) $٣^{٢} \times ٢^{٣} = ٦^{٥}$ (٢) $\frac{٨^{٥}}{٤^{٢}} = ٢^{٣}$

اِستكشِف (٣) :

أكمِل الجدول :

الصورة الأسّية	$٢^{٣}$	$٢^{٢}$	$٢^{١}$	$٢^{\square}$	$٢^{\square}$	$٢^{\square}$	$٢^{\square}$
الناتج	٨	٤	٢	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٨}$

÷ ٢ ÷ ٢ ÷ ٢ ÷ ٢ ÷ ٢ ÷ ٢

بملاحظة النمط في الجدول ، نجد أنّ :

$٢^{٠} = ١$ ، $٢^{-١} = \frac{١}{٢}$ ، $٢^{-٢} = \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢^{٢}}$ ، $٢^{-٣} = \frac{١}{٨} = \frac{١}{٢^{٣}}$

لكلّ أ عدد نسبي غير صفري ، م عدد صحيح ، يكون :

(١) $\text{أ}^{\text{صفر}} = ١$ (٢) $\text{أ}^{-\text{م}} = \frac{١}{\text{أ}^{\text{م}}}$

مثال (٢) :

بسِّط كلًّا ممّا يلي باستخدام قوانين الأسس . (المقام أينما وُجد ≠ صفر)

(أ) $٢^{-٣}$ (ب) $\frac{\text{ص}^{٤}}{\text{ص}^{٤}}$ (ج) $٧^{-٣} \times ٧$

(د) $\frac{٩^{-٣}}{٩^{-٢}}$ (هـ) $\text{س}^{٥} \times \text{س}^{-٤}$ (و) $\frac{\text{س}^{٤}}{\text{س}^{٧}}$

الحلّ :

(أ) $٢^{-٣} = \frac{١}{٢^{٣}}$

(ب) $\frac{\text{ص}^{٤}}{\text{ص}^{٤}} = \text{ص}^{٤ - ٤}$
$= \text{ص}^{٠} = ١$

(ج) $٧^{-٣} \times ٧ = ٧^{-٣ + ١} = ٧^{-٢}$
$= \frac{١}{٧^{٢}}$

(د) $\frac{٩^{-٣}}{٩^{-٢}} = ٩^{-٣ - (-٢)}$
$= ٩^{-٣ + ٢} = ٩^{-١} = \frac{١}{٩}$

(هـ) $\text{س}^{٥} \times \text{س}^{-٤} = \text{س}^{٥ + (-٤)}$
$= \text{س}^{١} = \text{س}$

(و) $\frac{\text{س}^{٤}}{\text{س}^{٧}} = \text{س}^{٤ - ٧}$
$= \text{س}^{٤ + (-٧)} = \text{س}^{-٣} = \frac{١}{\text{س}^{٣}}$

دورك الآن (٣)

بسِّط كلًّا ممّا يلي باستخدام قوانين الأسس (المقام أينما وُجد ≠ صفرًا) .

(أ) $٤^{-٢}$ = ...

(ب) $٥^{-٣} \times ٥^{٣}$ = ...

(ج) $٣^{-٢} \times ٣$ = ...

(د) $\frac{هـ^{-٩}}{هـ^{-٢}}$ = ...

اِستكشِف (٤) :

أوجِد ناتج ما يلي :

(أ) $(٢ \times ٣)^{٢} = ٦^{\square}$

= ....

(ب) $٢^{٢} \times ٣^{٢} = ٢ \times ٢ \times ٣ \times ٣$

= .... × ....

= ....

قارِن الإجابات في (أ) ، (ب) . ماذا تلاحظ ؟ ....

(ج) $(٥ \times ٤)^{٣} = ٢٠^{\square}$

= ....

= ....

(د) $٥^{٣} \times ٤^{٣} = ٥ \times ٥ \times ٥ \quad \times \quad ٤ \times ٤ \times ٤$

= ....

= ....

قارِن الإجابات في (ج) ، (د) . ماذا تلاحظ ؟ ....

لكلّ أ ، ب عددان نسبيان غير صفريَّين ، م عدد صحيح ،
يكون : $(أ \times ب)^{م} = أ^{م} \times ب^{م}$

اِنتبِه

- $(أ + ب)^{٢} \neq أ^{٢} + ب^{٢}$
- $(أ - ب)^{٢} \neq أ^{٢} - ب^{٢}$

اِستكشِف (٥) :

أوجِد ناتج ما يلي :

(أ) $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢} = \frac{٣}{٥} \times$ .... $= \frac{٣^{٢}}{٥^{٢}} = \frac{......}{٢٥}$

(ب) $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٣} = \frac{٢}{٣} \times$ .... × .... $= \frac{٢^{٣}}{٣^{٣}} = \frac{......}{......}$

ماذا تلاحِظ ؟ ....

لكلّ أ ، ب عددان نسبيان غير صفريَّين ، م عدد صحيح ، يكون : $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{م} = \frac{أ^{م}}{ب^{م}}$

ملاحظة :

$\left(\frac{م}{ب}\right)^{-م} = \left(\frac{ب}{م}\right)^{م}$

مثال (٣) :

بسِّط كلًّا ممّا يلي باستخدام قوانين الأسس . (المقام أينما وُجد ≠ صفرًا)

أ) $(٣ س)^{٤}$	ب) $(٢ س ص)^{٥}$	ج) $\frac{(٤ \times س)^{٦}}{س^{-٢}}$
د) $\left(\frac{س}{ص}\right)^{٧}$	هـ) $\left(\frac{٢}{٥}\right)^{-٢}$	و) $\frac{(٤ س^{٢})^{٣}}{(٢ س)^{٣}}$

الحلّ :

أ) $(٣ س)^{٤} = ٣^{٤} س^{٤}$

ب) $(٢ س ص)^{٥} = ٢^{٥} س^{٥} ص^{٥}$

ج) $\frac{(٤ \times س)^{٦}}{س^{-٢}} = \frac{٤^{٦} \times س^{٦}}{س^{-٢}} = ٤^{٦} \times س^{٦ - (-٢)} = ٤^{٦} س^{٨}$

د) $\left(\frac{س}{ص}\right)^{٧} = \frac{س^{٧}}{ص^{٧}}$

هـ) $\left(\frac{٢}{٥}\right)^{-٢} = \left(\frac{٥}{٢}\right)^{٢} = \frac{٥^{٢}}{٢^{٢}}$

و) $\frac{(٤ س^{٢})^{٣}}{(٢ س)^{٣}} = \left(\frac{٤ س^{٢}}{٢ س}\right)^{٣}$

$= (٢ س)^{٣} = ٢^{٣} س^{٣}$

دورك الآن (٤)

بسِّط كلًّا ممّا يلي باستخدام قوانين الأسس . (المقام أينما وُجد ≠ صفرًا)

أ) $(٣ ب)^{٤} =$	ب) $(٣ ع ص)^{٢} =$ ....
ج) $\frac{(٢ \times ص)^{٥}}{ص^{-٣}} =$	د) $\left(\frac{٥}{ك}\right)^{٣} =$ ....
هـ) $\frac{٣^{٤}}{٩^{٤}} =$	و) $\frac{(٢ ص^{٤})^{٢}}{(٨ ص)^{٢}} =$ ....

اِستكشِف (٦) :

أكمِل ما يلي :

أ) $(٢^٢)^٣ = ٢^٢ \times ٢^٢ \times$ ....

$= ٢^{......}$

$= ٢^{(......\times......)}$

ب) $(ﻣ^٣ ب^٢)^٢ = ﻣ^٣ ب^٢ \times$ ....

$= ﻣ^{......} \times ب^{......}$

$= ﻣ^{(......\times......)} ب^{(......\times......)}$

ماذا تلاحظ ؟ ....

لكلّ ﻣ ، ب عددان نسبيان غير صفريَّين ، م ، ن عددان صحيحان ، يكون : $(ﻣ^م)^ن = ﻣ^{م ن}$

عبّر عن فهمك (٢)

يقول عبداللّه أنّ : $(ﻣ^٣)^٤ = ﻣ^٧$ ، هل توافقه الرأي ؟ وضِّح ذلك .

مثال (٤) :

بسِّط كلًّا ممّا يلي باستخدام قوانين الأسس . (المقام أينما وُجد ≠ صفرًا)

أ) $(س^٣)^٤$ ب) $(٥^{-٣})^{-١}$ ج) $(٤^٢)^{-٣}$

د) $(س^٢ ص^٣)^٤$ هـ) $٧^٦ \times (٧^{-٢})^٣$ و) $\frac{(٥ س^{-٢})^{-٣}}{٦^{-٢} س^{-٣}}$

الحلّ :

أ) $(س^٣)^٤ = س^{٣ \times ٤} = س^{١٢}$

ب) $(٥^{-٣})^{-١} = ٥^{-٣ \times (-١)} = ٥^٣$

ج) $(٤^٢)^{-٣} = ٤^{٢ \times (-٣)} = ٤^{-٦} = \frac{١}{٤^٦}$

د) $(س^٢ ص^٣)^٤ = س^{٢ \times ٤} \times ص^{٣ \times ٤}$

$= س^٨ ص^{١٢}$

هـ) $٧^٦ \times (٧^{-٢})^٣ = ٧^٦ \times ٧^{-٦} = ٧^{٦ + (-٦)} = ٧^٠ = ١$

و) $\frac{(٥ س^{-٢})^{-٣}}{٦^{-٢} س^{-٣}} = \frac{(٥)^{-٣} \times (س^{-٢})^{-٣}}{٦^{-٢} س^{-٣}} = \frac{٥^{-٣} س^٦}{٦^{-٢} س^{-٣}}$

$= \frac{٦^٢ س^{٦-(-٣)}}{٥^٣} = \frac{٦^٢ س^٩}{٥^٣}$

الدرس الأوّل

دورك الآن (٥)

بسِّط كلًّا ممّا يلي باستخدام قوانين الأسس . (المقام أينما وجد ≠ صفر)

أ) $(ل^{٢})^{٥}$ = ...

ب) $(٦^{-٢})^{-١}$ = ...

ج) $(٣^{٢})^{-٥}$ = ...

د) $(ك^{٣} ص^{٢})^{٥}$ = ...

هـ) $٦^{١٢} \times (٦^{-٣})^{٤}$ = ...

و) $\frac{(٣ س^{-٣})^{-٢}}{٦^{-٢} س^{-٢}}$ = ...

= ....

مثال (٥) :

تبلغ سعة ذاكرة هاتف من الجيل الأوّل نحو $٢^{١٠}$ ميجابايت إذا تمّ تطوير سعة ذاكرة هاتف من الجيل الثالث بنحو $٧,٦ \times ٢^{٣}$ مرّة من ذاكرة هاتف الجيل الأوّل .
فما هي سعة ذاكرة هاتف الجيل الثالث ؟

الحلّ :

سعة ذاكرة هاتف الجيل الثالث = $٢^{١٠} \times ٧,٦ \times ٢^{٣}$

= $٧,٦ \times ٢^{٣} \times ٢^{١٠}$

= $٧,٦ \times (٢^{٣} \times ٢^{١٠})$

= $٧,٦ \times ٢^{٣+١٠}$

= $٧,٦ \times ٢^{١٣}$ ميجابايت

معلومة مفيدة :

الجيجابايت هي وحدة لقياس حجم البيانات أو سعة التخزين في الأجهزة الذكية مثل الهواتف ، الحواسيب ، الأجهزة اللوحية وبطاقات الذاكرة .
والجيجابايت = $٢^{١٠}$ ميجابايت

تمارين ذاتية :

١ أوجِد ناتج ما يلي :

أ) $\frac{٨^{٣}}{٢^{٣}} =$ ....

ب) $٣^{-٣} =$ ....

ج) $\left(\frac{٤}{٧}\right)^{٥} \times \left(\frac{٤}{١٤}\right)^{-٥} =$ ....

د) $\left(\frac{١٢}{٢٣}\right)^{٠} =$ ....

هـ) $٦ - (١,٢ - ٠,٢)^{٥} =$ ....

٢ بسِّط كلًّا ممّا يلي باستخدام قوانين الأسس . (المقام أينما وُجد ≠ صفرًا)

أ) $\text{ص} \times \text{ص}^{٥} =$ ....

ب) $(٤^{٢})^{٣} \times ٤ =$ ....

ج) $(-٣)^{٣} \times (-٣)^{٥} =$ ....

د) $\text{س}^{١١} \times \text{س}^{٩} =$ ....

هـ) $\text{ص}^{٢} \times \text{ص} \times \text{ص}^{٣} =$ ....

و) $(\text{ك}^{٢}\,\text{هـ}^{-٣}) \times (\text{ك}^{-٧}\,\text{هـ}^{-٤}) =$ ....

ز) $(\text{أ}^{-٢}\,\text{ب}) \times (\text{أ}^{٣}\,\text{ب}^{٣}) \times (\text{أ}^{٢}\,\text{ب}) =$ ....

ح) $(\text{س}^{٣}\,\text{ص})^{-٢} \times (\text{س}^{٢})^{٥} =$ ....

ط) $(\text{ك}^{٥})^{٢} \times \text{ك و} =$ ....

ي) $(-٣\,\text{س})^{٢} =$ ....

ك) $\frac{\text{ب}^{٢}\,\text{جـ}}{\text{ب}\,\text{جـ}^{٣}} =$ ....

ل) $\frac{-٨\text{س}^{٢}\,\text{ص}^{٢}}{٤\text{س}^{٣}\,\text{ص}} =$ ....

الدرس الأوّل

٣ يُنتج مصنع للحلوى ما يقارب ٦×١٠^{٤} قطعة من الحلوى يوميًّا . يريد صاحب المصنع أن يوزّعها بالتساوي على $١,٥ \times ١٠^{٣}$ صندوقًا صغيرًا . أوجِد عدد قطع الحلوى في كلّ صندوق .

....

....

....

مهارات تفكير عليا :

٤ أُكتب الأعداد ٢ ، ٠ ، ٢ ، ٣ في المربّعات الآتية لتحصل على أكبر قيمة ممكنة للتعبير العددي :

$\square^{\square} \times \square^{\square} =$ ....

٥ يوضّح الجدول التالي نمطًا للمبلغ الذي تتصدّق به غلا كلّ يوم من أيّام الأسبوع حيث مبلغ كلّ يوم هو ضعف مبلغ اليوم السابق له ، فإنّ مقدار ما تتصدّق به غلا يوم الجمعة هو :

اليوم	الأحد	الإثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس	الجمعة	السبت
المبلغ فئة مئة فلس							

أ) $٢^{٤} \times ١٠٠$ فلس

ب) $٢^{٦} \times ١٠٠$ فلس

ج) $٢^{٥} \times ١٠٠$ فلس

د) $٢^{٧} \times ١٠٠$ فلس

٦ - ٢ كثيرات الحدود (الحدوديات)
Polynomials

سوف تتعلّم : كثيرات الحدود – إيجاد قيمة كثيرات الحدود وكتابتها بالصورة العامّة .

العبارات والمفردات :

كثيرة الحدود	Polynomial	درجة	Degree
حدّ	Term	حدود متشابهة	Like Terms
وحيدة الحدّ	Monomial	حدود غير متشابهة	Non Like Terms
ثنائية الحدّ (حدّانية)	Binomial	حدود متساوية	Equivalent Terms
ثلاثية الحدّ (حدودية ثلاثية)	Trinomial	الصورة العامّة	General Form

حُلّ وناقِش

١ أُكتب كلًّا ممّا يلي في صورة تعبير رياضي :

- ضعف عدد ما : ....
- عدد ما مرفوعًا إلى الأسّ ٣ : ....

مثل هذه التعابير الرياضية تُسمّى حدًّا جبريًّا حيث العدد الثابت يُسمّى « معامل » والقسم الرمزي يُسمّى « متغيّر » .

مثلًا :

٣ س ، $\frac{١}{٢}$ س^{٥} ، – ٤ س^{٢} ص ، □س

٣ س	$\frac{١}{٢}$ س^{٥}	– ٤ س^{٢} ص	□س
معامل ، متغيّر	معامل ، متغيّر	معامل ، متغيّر	معامل يساوي ١ ، متغيّر

تذكَّر

المقدار الجبري هو تعبير رياضي يحتوي على أعداد ومتغيّرات مرتبطة بعمليات حسابية مثل الجمع أو الطرح .

٢ أُكتب كلًّا ممّا يلي في صورة مقدار جبري :

- ضعف عدد ما مضافًا إليه العدد ٥ : ....
- عدد ما مرفوعًا إلى الأسّ ٤ ومطروحًا منه العدد ٧ : ....
- مربّع عدد ما مضافًا إليه ٣ أمثاله ثمّ طرح منهم العدد ٥ : ....

٣ ممّ يتكوّن المقدار الجبري ؟ ....

٤ ماذا تلاحظ على أسس المتغيّرات في المقدار الجبري ؟ ....

كثيرة الحدود (الحدودية) هي مقدار جبري يتكوّن من حدّ جبري أو أكثر يربط بينها عمليات الجمع أو الطرح وتكون أسس المتغيّرات أعدادًا **صحيحة** **غير سالبة** .

مثال (١) :

حدِّد أيّ المقادير الجبرية التالية يمثّل حدودية وأيّها لا يمثّل ذلك مع ذكر السبب في حالة النفي :

١. $٣ س^{٤} - ٧ س^{٣} + س - ١$ حدودية
٢. $س^{٢} - ١$ حدودية
٣. $س^{-٣}$ ليست حدودية (الأسّ عدد صحيح سالب)
٤. $٣ س^{٢} - س + ٥$ حدودية
٥. $\sqrt{س} - ٥ س$ ليست حدودية (المتغيّر س تحت الجذر التربيعي)
٦. $٦^{س} + س^{٢}$ ليست حدودية (المتغيّر في الأسّ)
٧. $س^{٢} + \frac{٢}{س}$ ليست حدودية (الأسّ عدد صحيح سالب (المتغيّر في المقام))

دورك الآن (١)

حدِّد أيّ المقادير الجبرية التالية يمثّل حدودية وأيّها لا يمثّل ذلك مع ذكر السبب في حالة النفي :

١. $٥ س^{٣} + ٢ س^{٢} - ٨ س$ ....
٢. $٦ س^{٤} - \sqrt{س}$ ....
٣. $س^{٣} - ٣ س^{٢} + س$ ....
٤. $\frac{٧}{س}$ ....
٥. $٤ س^{٢} - س ص + ص^{٢} + ص - ٩$ ....
٦. $٢^{س} + ٥$ ....
٧. $٦ ع^{-٢} - ٩ ن$ ....

عبّر عن فهمك (١)

هل ٤ تُعتبر كثيرة حدود ؟ فسِّر إجابتك .

أنواع كثيرات الحدود

كثيرة الحدود (الحدوديات)	تصنيف الحدودية (طبقًا لعدد الحدود)
− س ، ٣ س^{٤} ، ٧ ص ، ٥	وحيدة الحدّ
م + ٢ ، ٨ س^{٢} − س ، ل^{٢} − ٣ ل	ثنائية الحدّ (حدّانية)
٣ + س + ٧ س^{٢} ، س^{٥} − ٦س^{٢} + ٢س^{٣}	ثلاثية الحدّ (حدودية ثلاثية)

جميع الحدوديات في الجدول السابق تُسمّى حدوديات في متغيّر واحد ،
بينما الحدوديات −س − ٢ ص ، ٥ س^{٢} − س ص + ص^{٢} − ٩ تُسمّى حدوديات في متغيّرَين .

درجة الحدودية وترتيبها

- درجة كثيرة الحدود ذات متغيّر واحد هي قيمة أكبر قوّة للمتغيّر (أكبر أسّ) يظهر في أيّ حدّ .

مثلًا : س^{٣} − ٢ س^{٢} + ٩ حدودية من الدرجة الثالثة

ص + ص^{٥} − ٣ ص^{٢} حدودية من الدرجة الخامسة

- درجة كثيرة الحدود ذات أكثر من متغيّر هي قيمة أكبر مجموع لقوى المتغيّرات (مجموع أكبر أسس للمتغيّرات) التي تظهر في أيّ حدّ .

مثلًا : ٢ س^{٢} ص^{٣} + ٧ س + ٣ ص حدودية من الدرجة الخامسة

ل م ن^{٣} − ٤ ل^{٢} م^{٢} ن^{٥} + ل حدودية من الدرجة التاسعة

إنتبِه

٦ = ٦ س^{٠}

دورك الآن (٢)

أكمِل الجدول الآتي :

كثيرة الحدود	تصنيف الحدودية (طبقًا لعدد الحدود)	درجة الحدودية
١ ٦	....	الدرجة صفر
٢ ٢ س^{٢} + ٣	....	الدرجة الثانية
٣ ص^{٣} + ٥ ص − ٧	حدودية ثلاثية	....
٤ م ن^{٣} + م^{٣} + ١	....	الدرجة الرابعة
٥ س ص ع − ٢ س ص^{٣} ع^{٤} + س − ٩	....	....

عبّر عن فهمك (٢)

تقول حنان إنّ الحدودية ٩ س^{٤} + ٤ ص^{٢} هي من الدرجة السادسة .
هل توافقها الرأي ؟ فسِّر إجابتك .

ملاحظة :

- يمكن كتابة كثيرة الحدود بمتغيّر واحد بأيّ ترتيب (تصاعدي - تنازلي) حسب قوى المتغيّر .
- عند ترتيب كثيرة الحدود بمتغيّر واحد تنازليًّا حسب قوى المتغيّر يُسمّى هذا **بالصورة العامّة** .
- معامل الحدّ الذي له أكبر أسّ يُسمّى (المعامل الرئيسي) .
- (الحدّ الثابت) في كثيرة الحدود هو الحدّ الذي لا يحتوي على أيّ متغيّر ، وهو الحدّ الذي درجته صفرًا .

دورك الآن (٣)

أُكتب كثيرات الحدود التالية بالصورة العامّة وحدِّد درجتها :

الحدودية	الصورة العامّة	درجة الحدودية	المعامل الرئيسي	الحدّ الثابت
١ ٣ س − ٤ + ٥ س^{٢}	٥ س^{٢} + ٣ س − ٤	الدرجة الثانية	٥	− ٤
٢ ع^{٣} − ٠,٢ ع + ع^{٤}	ع^{٤} + ع^{٣} − ٠,٢ ع	الدرجة الرابعة	....	....
٣ س^{٤} + ٧ س − ١ − س^{٣}	س^{٤} − .... + ... −	....	....	....
٤ ٣ م^{٢} − ٨ م + م^{٥} + ١٠	....	....	....	....
٥ − ٠,٣ + ٥,٢ ص + ٦ ص^{٢}	....	....	....	....
٦ ٢ س^{٢} − ٥ س^{٣} + $\frac{١}{٤}$ س	....	....	....	....

عبّر عن فهمك (٣)

ما هو معامل س^{٢} في كثيرة الحدود ٢ س^{٣} ـ ٧ س + ٥ ؟ فسِّر إجابتك .

الحدود المتشابهة والحدود المتساوية

	الحدود المتشابهة	الحدود المتساوية
التعريف	هي الحدود التي لها المتغيّر نفسه مرفوع إلى الأسّ نفسه	هي حدود متشابهة بمعاملات متساوية
أمثلة	١ ٣ ص^{٦} ، − $\frac{٢}{٥}$ ص^{٦} ، ٠,$\overline{٣}$ ص^{٦}	١ ٤ هـ^{٣} ، ٤ هـ^{٣}
	٢ ٢ م ، −٧ م	٢ $\frac{١}{٣}$ س ، $\frac{١}{٣}$ س
	٣ ل ع^{٢} ، − ٣ ل ع^{٢}	٣ ل ع^{٢} ، ع^{٢} ل

عبّر عن فهمك (٤)

تقول فوزيه إنّ : $\frac{١}{٢}$ س ، $\frac{١}{٢}$ ص هي حدود جبرية متشابهة . هلّ تتّفق معها ؟ فسِّر إجابتك .

دورك الآن (٤)

١ أوجِد قيمة كثيرة الحدود التالية عندما س = ٥ ، ص = - ٣

$\frac{١}{٥}$ س^{٢} - ٢ ص^{٢} + ١٨

= $\frac{١}{٥}$ × (..........)^{٢} - ٢ × (..........)^{٢} + ١٨

= $\frac{١}{٥}$ × ٢٥ - ٢ × .... + ...

= .... - .... + ... = ...

٢ إختر الإجابة الصحيحة .

أيّ المقادير الآتية يكون الناتج ١٤

عندما س = ٧ ، ص = ٧ ، ن = ٣ ؟

أ س × (ص + ن)

ب س × ص × ن

ج ن × ص - س

د (ص + ن) ÷ س

تذكّر

ترتيب العمليات الحسابية :

١ ما داخل الأقواس

٢ الأسس والجذور

٣ الضرب والقسمة

٤ الجمع والطرح

تمارين ذاتية :

١ ظلِّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلِّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

س^{٥} - $\frac{٣}{س}$ + ٧	كثيرة الحدود	أ	ب
$\sqrt{س}$ - ص^{س} + $\frac{٢}{٥}$ س	ليست كثيرة حدود	أ	ب
- $\frac{٢}{٥}$ س ص^{٣} ، - ٠,٤ ص^{٣} س	حدّان جبريان متساويان	أ	ب
- س^{٢} - $\frac{٢}{٥}$ ص^{٣} س + س ص^{٢}	حدودية من الدرجة الرابعة	أ	ب

الدرس الثاني

٢ ضَع علامة (✓) أسفل الوصف المناسِب للحدود الموضَّحة في الجدول التالي :

حدود جبرية	حدود جبرية متشابهة	حدود جبرية غير متشابهة
٣ س ، − ٥ س ، ١٢ س	☐	☐
٤ ص^{٢} ، ص^{٢}	☐	☐
٧ س^{٢} ص ، ٧ س ص^{٢}	☐	☐
٢ ل م ، ٥ م ل	☐	☐
٠,٣ أ^{٤} ب^{٢} ، $\frac{١}{٢}$ أ^{٣} ب^{٣}	☐	☐

٣ ضَع الحدوديات التالية في الصورة العامّة ، ثمّ حدِّد درجة الحدودية :

أ) ٩ س^{٢} − ٧ س^{٣} + ٢ س − ٣

....

....

ب) ٤ + ٧ ع^{٤} − ٧ ع^{٥} + ع^{٣}

....

....

ج) −٣ ل^{٣} + ٢ ل^{٦} + ٨

....

....

د) ٥ ك − ٣ ك^{٣} + $\frac{٣}{٢}$ ك^{٢} + $\frac{١}{٢}$

....

....

٤ إذا كانت أ + ٣ ب = ٥ ، جـ = ٤ ، فما قيمة أ + ٣ (ب + جـ) ؟

....

....

تذكَّر

خاصيّة توزيع الضرب على الجمع

أ (س + ص) = أ س + أ ص

٥ أوجِد قيمة كلّ من كثيرات الحدود التالية :

أ) − ٤ س^{٣} + $\frac{١}{٢}$ س + ٥ + ٢ س^{٢} ، عندما س = ٢

....

....

ب) − س ص^{٢} + $\frac{٣}{٤}$ ص^{٢} س^{٢} − ٩ ، عندما س = ٤ ، ص = ١

....

....

مهارات تفكير عليا :

٦ يتشكّل فريق التخضير في المدرسة من المتعلّمين عيسى وشملان وعبدالله . إذا زرع شملان عدد س من الشتلات وزرع عبدالله ضعف عدد الشتلات التي زرعها شملان أمّا عيسى فزرع ٨ شتلات فقط.
فأيّ الحدوديات تعبّر عن جميع الشتلات التي زرعها المتعلّمون الثلاثة ؟

أ) س^{٢} + س + ٨   ب) ٢ س − ٨

ج) ٣ س + ٨   د) ١١ س

٧ في أحد المطارات ، يتمّ الاستعانة بروبوت يُنجز عددًا من المهامّ في اليوم الواحد وفق الحدودية ٦ س + ٥ ص + ١٢
حيث س تمثّل عدد مستشعرات الوزن (sensor) ،
ص تمثّل عدد وحدات المسح الإلكتروني (QR) .
كم مهمّة يُنجز الروبوت في اليوم الواحد إذا تمّ تركيب ٢ مستشعر وزن ، و٣ وحدات مسح إلكتروني ؟

....

....

....

٦ - ٣ جمع كثيرات الحدود وطرحها
Adding and Subtracting Polynomials

سوف تتعلّم : جمع كثيرات الحدود وطرحها .

العبارات والمفردات :

حدود متشابهة Like Terms تبسيط Simplifying

جمع كثيرات الحدود

حُلّ وناقِش

أكمِل ما يلي :

يقوم ربّ أسرة بجمع بعض التبرّعات من أفراد أسرته ليقدّمها كصدقة على العمّال في فصل الشتاء مثل : قبعات ، جوارب ، شالات ومبلغًا من المال فئة دينار . إذا تمّ حصر التبرّعات من أفراد الأسرة كما في الجدول التالي :

أفراد الأسرة	التبرّعات
الأب	١٠ دنانير ، ٣ قبّعات ، ٥ جوارب ، ٢ شال
الأمّ	٧ شالات ، ٦ جوارب ، ١ قبّعة ، ٨ دنانير
الإبن	٥ قبّعات ، ٦ دنانير ، ٣ جوارب ، ٣ شالات
الابنة	٣ جوارب ، ٥ دنانير ، ٦ شالات ، ٤ قبّعات

معلومة مفيدة :

الصدقة
ليست دائمًا مالًا
فالابتسامة صدقة ، وحسن الحديث صدقة ، وصنع المعروف صدقة ، ودعوة للمسلمين بظهر الغيب صدقة .

فساعِد ربّ الأسرة في جمع التبرّعات المتشابهة حتّى يسهل عليه توزيعها على العمّال ، اِستعِن بالجدول التالي ليسهل عليك جمع هذه التبرّعات .

النوع / أفراد الأسرة	المبلغ المالي		قبّعات	
الأب	١٠ دنانير			
الأمّ		٧ شالات		
الإبن				
الابنة				٣ جوارب
المجموع			١٣ قبّعة	

كذلك ، عند جمع كثيرات الحدود نقوم بجمع الحدود الجبرية المتشابهة (نجمع المعاملات العددية لهذه الحدود) .

لجمع كثيرات الحدود نقوم بجمع الحدود الجبرية المتشابهة معًا .

مثال (١) :

أوجِد ناتج جمع كثيرات الحدود الآتية :

٣ س^{٢} + ٤ س − ٦ مع − ٤ س^{٢} + ٢ س − ١

الحلّ :

الطريقة الرأسية :

	٣	س^{٢}	+	٤	س	−	٦	
+ −	٤	س^{٢}	+	٢	س	−	١	
−		س^{٢}	+	٦	س	−	٧	

الطريقة الأفقية :

(٣ س^{٢} + ٤ س − ٦) + (−٤ س^{٢} + ٢ س − ١)

= [٣ س^{٢} + (−٤) س^{٢})] + [٤ س + ٢ س] + (− ٦ + (−١))

= − س^{٢} + ٦ س − ٧

لاحِظ أنّ :

خطوات الحلّ :

١ أُكتب الحدودية بالصورة العامّة .

٢ حدِّد ورتِّب الحدود المتشابهة .

٣ إِجمع معاملات الحدود المتشابهة .

تذكّر

من خواصّ عملية الجمع :

- الخاصّية الإبدالية
- الخاصّية التجميعية

دورك الآن (١)

إِجمع الحدوديات الآتية :

٢ س^{٣} + ٥ س − ٢ ، − ٣ س^{٣} + ١٠ − ٢ س

الحلّ :

	٢	س^{٣}	+	٥	س	−	٢	
+ −	٣	س^{٣}	−	٢	س	+	١٠	

....

اِنتبِه

أُنقل الحدّ بإشارته عند كتابة الحدودية في الصورة العامّة .

عبّر عن فهمك (١)

طلبت المعلّمة من متعلّمات الفصل استخدام البطاقات الخاطفة لإيجاد ناتج س + س ، وكان من ضمن الإجابات التي رأتها المعلّمة س^{٢} ، ٢ س . في رأيك ، أيّ الإجابات صحيحة ؟ فسِّر إجابتك .

مثال (٢) :

اِجمع الحدوديات الآتية :

س^{٣} + ٣ س^{٤} − ٧ س ، − س^{٢} − ٩ س^{٤} ، ٥ س + ٢ س^{٢} − ٨ س^{٣}

الحلّ :

أُكتب الحدودية بالصورة العامّة ، ثمّ اجمعها بالطريقة الرأسية .

	٣ س^{٤}	+ س^{٣}		− ٧ س
+	− ٩ س^{٤}		− س^{٢}	
		− ٨ س^{٣}	+ ٢ س^{٢}	+ ٥ س
	− ٦ س^{٤}	− ٧ س^{٣}	+ س^{٢}	− ٢ س

تذكَّر

إذا لم يُكتب الحدّ في الحدودية ، فهذا يعني أنّ معامله يساوي صفرًا .

اِنتبِه

أُترك فراغًا مكان الحدّ الذي معامله صفر في الحدودية .

دورك الآن (٢)

اِجمع الحدوديات الآتية :

٨ س^{٥} − ٥ س^{٣} + ٢ س^{٢} + ١ ، − ٢ س^{٤} + ٣ س^{٢} + س ، − س^{٣} + ٣

الحلّ :

	٨ س^{٥}		− ٥ س^{٣}	+ ٢ س^{٢}		+ ١
+		− ٢ س^{٤}		+ ٣ س^{٢}	+ س	
			− س^{٣}			+ ٣

....

اِنتبِه

عند جمع الحدود المتشابهة ، نجمع المعاملات فقط وليس الأسس .

طرح كثيرات الحدود

دورك الآن (٣)

أُكتب المعكوس الجمعي لكلّ من كثيرات الحدود الآتية :

	كثيرة الحدود	المعكوس الجمعي
١	٣ س	
٢	٢ س^{٥} − ٤	
٣	٤ س^{٢} − ٧ س − ٣	− (٤ س^{٢} − ٧ س − ٣) = − ٤ س^{٢} + ٧ س + ٣
٤	− ٩ + ١١ س^{٥} − ٨ س^{٣}	

الدرس الثالث

مثال (٣) :

أوجِد ناتج ما يلي :

٧ س^{٣} – ٢ س^{٢} + ٥ – (س^{٣} – ٤ س^{٢} – ٧)

الحلّ :

الطريقة الأفقية :

٧ س^{٣} – ٢ س^{٢} + ٥ – (س^{٣} – ٤ س^{٢} – ٧)

= ٧ س^{٣} – ٢ س^{٢} + ٥ + (– س^{٣} + ٤ س^{٢} + ٧) (إضافة المعكوس الجمعي للمطروح)

= (٧ س^{٣} + (– س^{٣})) + (– ٢ س^{٢} + ٤ س^{٢}) + (٥ + ٧) اِجمع الحدود المتشابهة

= ٦ س^{٣} + ٢ س^{٢} + ١٢

تذكَّر

أ – ب = أ + (– ب)

عبّر عن فهمك (٢)

أوْجَدَ طارق ناتج (– ٥ س^{٢} + ٢ س – ٣) – (٣ س^{٢} – ٢ س – ٦) كما يلي :

= – ٥ س^{٢} + ٢ س – ٣ – ٣ س^{٢} – ٢ س – ٦

= – ٨ س^{٢} – ٩

وضِّح ما الخطأ الذي وقع فيه طارق ؟

مثال (٤) :

اِطرح ١٠ ص^{٣} + ٧ ص^{٢} – ١ من (٤ ص^{٢} – ص^{٣} + ص)

الحلّ :

٤ ص^{٢} – ص^{٣} + ص – (١٠ ص^{٣} + ٧ ص^{٢} – ١)

– ص^{٣} + ٤ ص^{٢} + ص – (١٠ ص^{٣} + ٧ ص^{٢} – ١) ضَع الحدوديات بالصورة العامّة

إضافة المعكوس الجمعي للمطروح

الطريقة الرأسية :

	– ص^{٣}	+ ٤ ص^{٢}	+ ص	
+	– ١٠ ص^{٣}	– ٧ ص^{٢}		+ ١
	– ١١ ص^{٣}	– ٣ ص^{٢}	+ ص	+ ١

اِنتبِه

المطروح منه يأتي بعد كلمة «من» دائمًا .

اِنتبِه

لإيجاد المعكوس الجمعي لحدودية ، اُكتب المعكوس الجمعي لكلّ حدّ من حدودها .

دورك الآن (٤)

من (٤ س − ٨ + س^{٤} − ٤ س^{٢}) اِطرح (٦ س + ٧ س^{٤} + ٤ س^{٢} + ٥)

الحلّ :

س^{٤} − ٤ س^{٢} + ٤ س − ٨ − (....)

....

....

....

....

تمارين ذاتية :

١ اِجمع كلًّا من كثيرات الحدود الآتية :

أ ٥ س^{٣} + ٣ س^{٤} + ٤ س^{٢} ، − س^{٤} + ٤ س^{٣} + ٤

....

....

....

....

....

ب − س^{٣} + ٢ س^{٢} − ٤ ، ٥ س^{٢} − ٨ س^{٣} − ٣ ، س^{٢} + ٩

....

....

....

....

....

ج ٣ س − ٢ س^{٤} + $\frac{١}{٢}$ س^{٥} ، ٢ س^{٤} + ٧ س^{٣} − س^{٢} ، ٤ س^{٢} − $\frac{١}{٦}$

....

....

....

....

....

٢ **أُكتب المعكوس الجمعي لكلّ من كثيرات الحدود الآتية :**

كثيرة الحدود	المعكوس الجمعي
$\frac{١}{٤}$ س^{٥} – ٢ س^{٣} – ٣	– (.....................................) = ...
– ٠,٢ س^{٤} – س^{٢} + $\frac{٢}{٣}$	– (.....................................) = ...
– س^{٢} – ٥ س + ٢	– (.....................................) = ...
٨ + ٣ س^{٢} – ٦ س + س^{٣}	– (.....................................) = ...

٣ **أوجِد ناتج ما يلي :**

أ) ٢ س^{٢} – ٢ س + ٧ – (٢ س – س^{٢} + ١)

....

....

....

....

....

ب) ٦ س^{٣} – ٢ س^{٢} + ٤ – (٨ س^{٣} – ٤ س^{٢} – ٢٠)

....

....

....

....

....

٤ **إطرح (٥ س^{٢} + ٦ س^{٤} – ١) من (٤ س^{٤} – ١٤ س^{٢} + س)**

....

....

....

....

٥ **من (٢ س – ٩ + س^{٣} – ٤ س^{٢}) إطرح (٥ س + ٨ س^{٣} + ٤ س^{٢} + ١)**

....

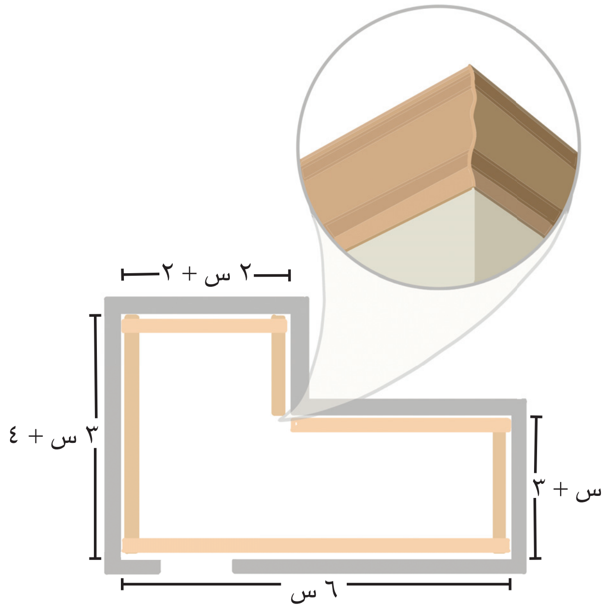
....

....

....

مهارات تفكير عليا :

٦ تمّ تركيب قوالب خشبية حول حوافّ الغرفة ، إذا كانت أبعاد الغرفة من الداخل موضَّحة في الشكل المقابِل ، فأوجِد محيط هذه الغرفة بدلالة س .



....

....

....

....

....

....

٦ - ٤ ضرب كثيرات الحدود
Multiplying Polynomials

سوف تتعلّم : ضرب كثيرات الحدود .

نستخدم كثيرات الحدود في الحياة اليومية في مجالات متعدّدة كالعلوم والهندسة والاقتصاد ، وذلك من خلال استخدامها مثلًا في حساب المساحات والأحجام ، وتصميم الهياكل مثل الجسور وإنشاء رسومات الحاسوب ، ونمذجة سلوك الأسواق المالية .

اِستكشِف (١)

من خلال معلوماتك من درس قوانين الأسس ، أوجِد ناتج ما يلي :

١ ٣ س × ٤ س^{٢} = (٣ × ٤) × (س × ....) = ١٢ ....

٢ − ٥ ص^{٤} × (− ٢ ص^{٣}) = ... = ...

تذكَّر

أ^{م} × أ^{ن} = أ$^{م + ن}$

حيث أ ≠ ٠ ،

م ، ن ∈ ص

نلاحظ أن :

عند ضرب حدّ جبري في حدّ جبري آخر ، نضرب المعاملات ببعضها ونجمع أسس المتغيّرات المتشابهة إن وُجدت .

دورك الآن (١)

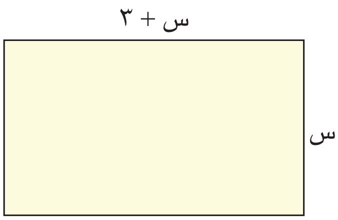
أوجِد ناتج ما يلي :

١ ٦ س^{٢} × ٤ س^{٣} = ...

٢ − ٣ س^{٥} × ٢ س = ...

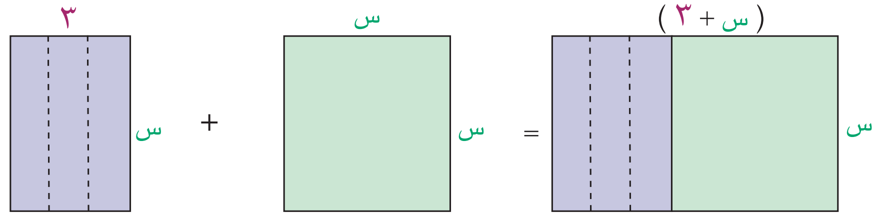
اِستكشِف (٢)

في الشكل المقابِل مستطيل بعداه س وحدة طول ، (س + ٣) وحدة طول أوجِد مساحة المنطقة المستطيلة .



نقسّم المستطيل إلى جزءَين ، ثمّ نكتب النمذجة التي حصلنا عليها كالآتي :

مساحة المنطقة المستطيلة = مجموع مساحات المناطق التالية



س × (س + ٣) = س^{٢} + ٣ س

وكذلك تساعدنا خاصّية التوزيع في إيجاد ناتج ضرب حدّ في كثيرة حدود كالتالي :

س × (س + ٣) = (س × س) + (س × ٣)

= س^{٢} + ٣ س

إذًا مساحة المنطقة المستطيلة = (س^{٢} + ٣ س) وحدة مربّعة

تذكّر

الخاصّية التوزيعية للضرب على الجمع

ﺃ × (س + ص) = (ﺃ × س) + (ﺃ × ص)

مثال (١) :

أوجِد ناتج ما يلي :

(أ) ٢ س^{٢} × (٨ س^{٣} + ٥ س^{٤})

(ب) ٣ س × (٢ س^{٢} − س + ٤)

الحلّ :

(أ) ٢ س^{٢} × (٨ س^{٣} + ٥ س^{٤})

= (٢ س^{٢} × ٨ س^{٣}) + (٢ س^{٢} × ٥ س^{٤})

= ١٦ س^{٥} + ١٠ س^{٦}

(ب) ٣ س × (٢ س^{٢} − س + ٤)

= (٣ س × ٢ س^{٢}) − (٣ س × س) + (٣ س × ٤)

= ٦ س^{٣} − ٣ س^{٢} + ١٢ س

اِنتبِه

عند استخدام خاصّية توزيع الضرب على الجمع ، يجب مراعاة إشارات الحدود .

دورك الآن (٢)

أوجِد ناتج ما يلي :

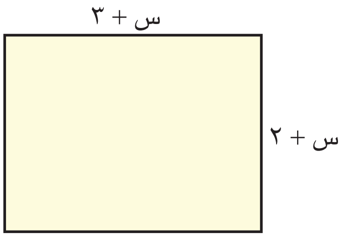
١ ٤ س × (٢ $س^{٢}$ + ٣ $س^{٤}$) = ...

= ....

٢ $س^{٢}$ × (٥ $س^{٣}$ − ٧ س − ١) = ...

= ....

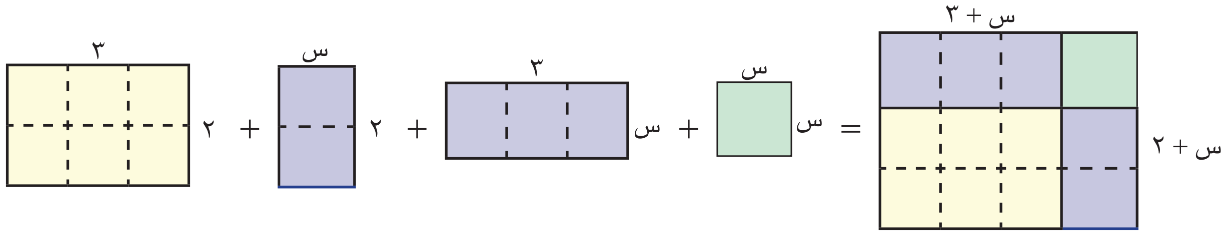
اِستكشِف (٣)



في الشكل المقابِل مستطيل بعداه (س + ٣) وحدة طول ، (س + ٢) وحدة طول ، أوجِد مساحة المنطقة المستطيلة .

نقسّم المستطيل إلى أربعة أجزاء كما في الشكل المقابِل ، ثمّ نكتب النمذجة التي حصلنا عليها كالآتي :

مساحة المنطقة المستطيلة = مجموع مساحات المناطق التالية



(س + ٣) × (س + ٢) = $س^{٢}$ + ٣ س + ٢ س + ٦

= $س^{٢}$ + ٥ س + ٦

كذلك ، يمكننا استخدام الخاصّية التوزيعية لإيجاد ناتج الضرب كما يلي :

(س + ٣) (س + ٢)

= س (س + ٢) + ٣ (س + ٢) خاصية توزيع الضرب على الجمع

= (س × س) + (س × ٢) + (٣ × س) + (٣ × ٢)

= $س^{٢}$ + ٢ س + ٣ س + ٦ نجمع الحدود المتشابهة

= $س^{٢}$ + ٥ س + ٦

إذًا مساحة المنطقة المستطيلة = ($س^{٢}$ + ٥ س + ٦) وحدة مربّعة

دورك الآن (٣)

أوجِد ناتج ما يلي :

(س + ٦) (س + ٢) = س (.............. + ...) + ٦ (.............. + ...)

= $س^{٢}$ + ... + ... + ١٢

= $س^{٢}$ + ... + ١٢

مثال (٢) :

أوجِد ناتج ما يلي :

(أ) (س + ٣) (س − ٣)

(ب) (س − ٤) (٢ س^{٢} − ٥ س + ٣)

الحلّ :

(أ) (س + ٣) (س − ٣)

= س (س − ٣) + ٣ (س − ٣)

= س^{٢} − ٣ س + ٣ س − ٩ — نجمع الحدود المتشابهة

= س^{٢} − ٩

(ب) (س − ٤) (٢ س^{٢} − ٥ س + ٣)

الطريقة الأفقية :

(س − ٤) (٢ س^{٢} − ٥ س + ٣)

= س (٢ س^{٢} − ٥ س + ٣) − ٤ (٢ س^{٢} − ٥ س + ٣)

= ٢ س^{٣} − ٥ س^{٢} + ٣ س − ٨ س^{٢} + ٢٠ س − ١٢ — نجمع الحدود المتشابهة

= ٢ س^{٣} − ١٣ س^{٢} + ٢٣ س − ١٢

الطريقة الرأسية :

٢ س^{٢} − ٥ س + ٣

× س − ٤

٢ س^{٣} − ٥ س^{٢} + ٣ س — نضرب الحدّ (س) في الحدودية (٢ س^{٢} − ٥ س + ٣)

\+ − ٨ س^{٢} + ٢٠ س − ١٢ — نضرب الحدّ (−٤) في الحدودية (٢ س^{٢} − ٥ س + ٣)

٢ س^{٣} − ١٣ س^{٢} + ٢٣ س − ١٢ — نجمع الحدود المتشابهة

اِنتبِه

ناتج جمع كلّ حدّ ومعكوسه الجمعي يساوي صفرًا

− ٣ س + ٣ س = صفرًا

اِنتبِه

- ناتج ضرب حدَّين متّفقَين في الإشارة هو حدّ موجَب .
- ناتج ضرب حدَّين مختلفَين في الإشارة هو حدّ سالب .

مثال (٣) :

أوجِد مربّع (س + ٥)

الحلّ :

مربّع (س + ٥) هو (س + ٥)^{٢}

(س + ٥)^{٢} = (س + ٥) (س + ٥)

= س^{٢} + ٥ س + ٥ س + ٢٥ — اِجمع الحدود المتشابهة

= س^{٢} + ١٠ س + ٢٥

اِنتبِه

- مربّع س هو س^{٢}
- ضعف س هو ٢ س

لاحِظ أنّ :

$(س + ٥)^٢$ هي مربّع الحدّانية (س + ٥) حيث :

س هي الحدّ الأوّل ، ٥ الحدّ الثاني

ناتجها $س^٢$ + ١٠ س + ٢٥ حدودية ثلاثية على صورة مربّع كامل

مربّع الحدّ الأوّل — ٢ × الحدّ الأوّل × الحدّ الثاني — مربّع الحدّ الثاني

عمومًا

$(س \pm ص)^٢ = س^٢ \pm ٢\ س\ ص + ص^٢$

= **مربّع الحدّ الأوّل ± ٢ × الحدّ الأوّل × الحدّ الثاني + مربّع الحدّ الثاني**

عبّر عن فهمك

ما التشابه والاختلاف بين ناتج $(س - ٨)^٢$ ، $(س + ٨)^٢$ ؟

مثال (٤):

أوجِد ناتج ما يلي :

أ) $(س - ٦)^٢$

الحلّ :

$(س - ٦)^٢ = (س)^٢ - ٢ × س × ٦ + (٦)^٢$

$= س^٢ - ١٢\ س + ٣٦$

ب) $(م^٢ + ٤\ ل)^٢$

الحلّ :

$(م^٢ + ٤\ ل)^٢ = (م^٢)^٢ + ٢ × م^٢ × ٤\ ل + (٤\ ل)^٢$

$= م^٤ + ٨\ م^٢\ ل + ١٦\ ل^٢$

دورك الآن (٤)

أوجِد ناتج $(ص - ٤)^٢$

$(ص - ٤)^٢ = ص^٢$ - .... + ...

= ....

تمارين ذاتية :

١ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي :

أ) $٣\,س \times ٤\,س^{٣}$

ب) $\frac{١}{٣}\,ص \times \left(\frac{٢}{٣}\,ص^{٢} - ٩\,ص + \frac{٣}{٢}\right)$

ج) $(٣\,س^{٣} + س - ٤) \times (-٢\,س)$

د) $(س - ص)(س + ص)$

هـ) $(س + ٢)(س - ٧)$

و) $(٣\,س + ٢\,ص)^{٢}$

ز) $(ع^{٢} - ١)(٢\,ع^{٣} - ٣\,ع^{٢} + ١)$

ح) $(ص^{٢} - ٢\,ص - ٥)(٢\,ص - ١)$

٢ أوجِد مربّع كلّ حدّانية في ما يلي :

أ) $س - ٣$

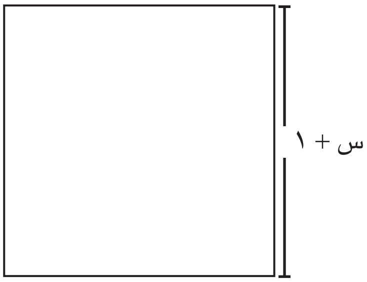
ب) $٢\,ص + ٣\,س^{٢}$

٣ أوجِد ناتج ما يلي :

أ) $(٣\,هـ - ٢\,م)^{٢}$

ب) $(٩ - ك)^{٢}$

في البنود (٤ - ٦) ، اِختر الإجابة الصحيحة .

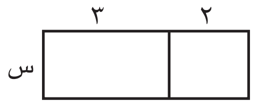


٤ مساحة المربّع المقابِل بالوحدات المربّعة هي :

أ) ٢ س + ٢ ب) س^{٢} + ٢ س + ١

ج) س^{٢} + س + ١ د) س^{٢} + ١

٥ المقدار الجبري الذي يمثّل مساحة الشكل أدناه بالوحدات المربّعة هو :



أ) ٢ + ٣ س

ب) ٢س + ٣

ج) ٥ + س

د) ٥ س

٦ المقدار ٥ (س - ص) - (٥ س - ٥ ص) يساوي :

أ) ١٠ س - ١٠ ص

ب) صفر

ج) ١٠ س

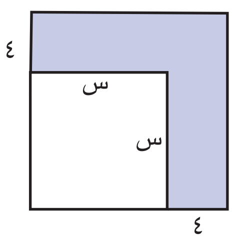
د) - ١٠ ص

مهارات تفكير عليا :

في البنود (٧ ، ٨) ، اِختر الإجابة الصحيحة .

٧ إذا كانت ﺃ^{٢} = ١٦ ، ب^{٢} = ٩ ، فإنّ أكبر قيمة للمقدار (ﺃ - ب)^{٢} =

أ) ١ ب) ٢٥ ج) ٤٩ د) ٧



٨ في الشكل المقابِل ، مربّع طول ضلعه س وحدة طول ،
تمّت زيادة طول كلّ ضلع من أضلاعه
بمقدار ٤ وحدات كما هو موضّح في الشكل .
أوجِد مساحة المنطقة المظلَّلة بدلالة س .

....

....

....

٦ - ٥ قسمة كثيرة حدود على حدّ جبري
Dividing Plynomials by Algebraic Terms

سوف تتعلّم : قسمة حدّ جبري على حدّ جبري آخر ، وقسمة كثيرة حدود على حدّ جبري .

إستكشِف

شاركت إدارة المدرسة متعلّميها فرحة الاحتفال باليوم الوطني ويوم التحرير ، بوضع شاشة عرض مستطيلة الشكل أمام مدخل الإدارة .

إذا كانت مساحة الشاشة هي (١٠ س^{٢} + ٤ س) وحدة مربّعة وعرضها هو ٢س وحدة طول ، فأوجِد طول الشاشة .

باستخدام قسمة الأعداد النسبية وما تعلّمته من قوانين الأسس ، أكمل ما يلي :

$$\text{طول الشاشة} = \frac{\text{مساحة الشاشة}}{\text{عرض الشاشة}}$$

$$= \frac{\text{١٠ س}^{٢} + \text{٤ س}}{\text{٢ س}} = \frac{\dots\dots\dots\dots}{\text{٢ س}} + \frac{\dots\dots\dots\dots}{\text{٢ س}}$$

= .... + ... وحدة طول

مساحة المنطقة المستطيلة = الطول × العرض

تذكّر

$$\frac{\text{أ}^{\text{م}}}{\text{أ}^{\text{ن}}} = \text{أ}^{\text{م} - \text{ن}}$$

حيث أ ≠ ٠ ، م ، ن ∈ ص

ماذا تلاحظ ؟

عند قسمة كثيرة حدود على حدّ جبري ، نقسم كلّ حدّ من حدود كثيرة الحدود على هذا الحدّ الجبري .

ملاحظة : المقام أينما وُجد لا يساوي صفرًا .

مثال (١) :

أوجِد ناتج ما يلي :

١) $\frac{\text{٤ س}^{٥}\text{ص}^{٣}}{\text{٢ ص}^{٣}\text{س}^{٢}} = \text{٢ س}^{٣}$

٢) $\frac{\text{١٢ س}^{٢}\text{ص}^{٣} + \text{٦ س ص}}{\text{٣ س ص}}$

$= \frac{\text{١٢ س}^{٢}\text{ص}^{٣}}{\text{٣ س ص}} + \frac{\text{٦ س ص}}{\text{٣ س ص}}$ اِقسم كلّ حدّ على المقسوم عليه

$= \text{٤ س ص}^{٢} + \text{٢}$ بسِّط

دورك الآن (١)

أوجِد ناتج ما يلي :

① $\frac{\text{٣ م}^{٢}\text{ ل}^{٦}}{\text{٢٧ م}^{٨}\text{ ل}}$ = ...

② $\frac{\text{٢٠ م ن}^{٣} - \text{٤ م ن}}{\text{٤ م ن}}$

= .... - ....

= .... - ....

مثال (٢):

اِقسم (٨ س^{٣} + ٢ س^{٢} - ١٢ س) على ٢ س

الحلّ :

$\frac{\text{٨ س}^{٣} + \text{٢ س}^{٢} - \text{١٢ س}}{\text{٢ س}} = \frac{\text{٨ س}^{٣}}{\text{٢ س}} + \frac{\text{٢ س}^{٢}}{\text{٢ س}} - \frac{\text{١٢ س}}{\text{٢ س}}$ اِقسم كلّ حدّ على المقسوم عليه

$= \text{٤ س}^{٢} + \text{س} - \text{٦}$ بسِّط

دورك الآن (٢)

اِقسم (٧ س^{٥} - ٩ س^{٣} + ٢ س^{٢}) على س^{٢}

$= \frac{\text{٧ س}^{٥}}{.........} - \frac{.........}{.........} + \frac{.........}{\text{س}^{٢}}$

= .... - .... + ...

عبّر عن فهمك

هل ناتج $\frac{\text{١٥ س}^{٢} + \text{١٠ س} - \text{٥}}{\text{٥ س}}$ يمثّل حدودية ؟ فسِّر إجابتك .

تمارين ذاتية :

① بسِّط كلًّا ممّا يلي : (حيث المقام لا يساوي صفرًا أينما وُجد .)

أ) $\frac{\text{س}^{٦}}{\text{س}^{٤}}$ = ...

ب) $\frac{\text{١٠ س}^{٤}}{\text{٥ س}^{٢}}$ = ...

ج) $\frac{-\text{٣ ص}^{٣}}{\text{٣ ص}^{٣}}$ = ...

د) $\frac{\text{٢٨ ص}^{٥}}{\text{٧ ص}^{٢}}$ = ...

٢ اِقسم ٨ س^{٢} ص^{٤} + ١٦ س^{٤} ص^{٥} - ٣٦ ص^{٤} على ٢ س^{٢} ص^{٣}

....

....

....

....

٣ اِقسم ٩ هـ^{٣} و^{٥} - ٢٧ هـ^{٢} و^{٤} + ٥٤ هـ^{٤} و^{٢} على ٣ هـ^{٣} و^{٥}

....

....

....

....

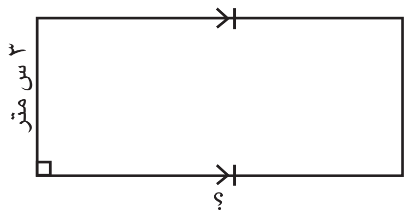
٤ أوجِد ناتج ما يلي في أبسط صورة : (حيث س $\neq$ صفرًا)

$$\frac{\text{٥ س}^{٣}\text{ ص}^{٤} + \text{٣ س}^{٦}\text{ ص}^{٧} - \text{١٥ س}}{\text{١٥ س}} = ...$$

....

....

٥ مساحة المنطقة المستطيلة في الشكل المرسوم هي (٩ س^{٢} + ٣ س) مترًا مربّعًا ،
إذا كان عرض هذا المستطيل هو ٣ س مترًا ، فأوجِد طول هذا المستطيل .



....

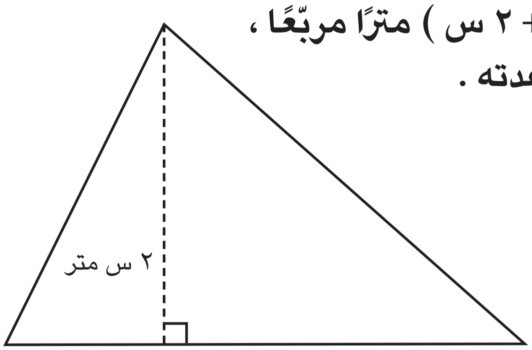
....

....

....

مهارات تفكير عليا :

٦ في الشكل المقابِل مساحة المنطقة المثلّثة هي (٤ س^{٢} + ٢ س) مترًا مربّعًا ،
إذا كان ارتفاع هذا المثلّث ٢ س مترًا ، فأوجِد طول قاعدته .



....

....

....

أوّلًا: البنود المقالية

١ بسِّط كلًّا ممّا يلي : (المقام أينما وُجد ≠ صفرًا)

أ $(-٣\ س\ ص)(س^{٢}\ ص^{٣})^{٤} =$ ....

ب $\frac{ع^{٩}}{ع^{٢}} =$ ....

ج $\frac{-٣٦\ س^{٢}\ ص^{٢}}{٩\ س^{٣}\ ع} =$ ....

د $\left(\frac{-٢\ م^{٢}}{٣\ ب}\right)^{٥} =$ ....

٢ أُحسب قيمة كلّ من كثيرات الحدود التالية عندما س = − ٢

أ $٣\ س^{٣} - ٢\ س + ٤$ ....

ب $٢\ س^{٢} - س + ٧$ ....

ج $\frac{١}{٨}\ س^{٤} + \frac{٣}{٢}\ س$ ....

٣ اِجمع كثيرات الحدود الآتية :

أ $س^{٢} + ٦س - ٤$ ، $٥\ س - س^{٢} - ٤$

ب $٢\ ع^{٣} - ٤\ ع^{٢} + ٩$ ، $ع^{٣} + ٣\ ع^{٢} - ٩$ ، $٥\ ع^{٣} - ع^{٢}$

٤ اِطرح $(٢\ ص^{٥} - ٣\ ص^{٤} + ٢\ ص^{٢} - ٢)$ من $(-٣\ ص^{٤} + ٣\ ص^{٥} - ٣)$

٥ اِطرح (س^{٣} ص + س ص^{٢} + ٧) من (٤ س ص^{٢} + ٣ س^{٣} ص + ٧)

....

....

....

....

٦ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي :

أ (س + ٣) (س – ٩) = ...

ب مربّع (ص^{٢} + ١) = ...

ج (٢ س + ٣) (٥ س^{٢} – ٤ س – ٧) = ...

= ....

٧ اِقسم ٤ س^{٢} ص^{٣} + ١٢ س^{٥} ص^{٤} + ٥٤ س^{٣} ص^{٤} على ٣ س^{٢} ص^{٣} .

....

....

....

....

٨ اِقسم ١٥ هـ^{٢} ل^{٣} – ١٢ هـ^{٣} ل + ٩ هـ^{٤} ل^{٤} على ٦ هـ^{٢} ل .

....

....

....

....

٩ منطقة مستطيلة مساحتها (٤ س^{٤} + ٦ س^{٢} – ٤ س) وحدة مربّعة ، وعرضها ٢ س وحدة طول .
أوجِد طولها .

....

....

....

....

ثانيًا : البنود الموضوعية

في البنود (١ – ٨) ظلّل أ إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلّل ب إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ ناتج $\left(\frac{٣ س^{٤}}{٦ س^{٤}}\right)^{٠}$ = ١ ، حيث س $\neq$ ٠	أ	ب
٢ ٤ س – $\frac{١}{س}$ + ٥ س^{٣} هي كثيرة حدود	أ	ب
٣ ناتج جمع ٦ ص^{٣} ، ٢ ص^{٤} هو ٨ ص^{٧}	أ	ب
٤ – ١٢ ل^{٢} ع^{٩} ، $\frac{١}{٥}$ ل$^{-٢}$ ع^{٩} ، ل^{٢} ع$^{-٩}$ هي حدود متشابهة	أ	ب
٥ ٠,٢٥ س^{٣} ، $\frac{١}{٤}$ س^{٣} هما حدّان متساويان	أ	ب
٦ ناتج طرح ٥ س^{٢} من س^{٢} هو ٤ س^{٢}	أ	ب
٧ س × س = ٢ س	أ	ب
٨ ٥$^{-٢}$ × ٥ = $\frac{١}{٥}$	أ	ب

في البنود (٩ – ٢١) لكلّ بند أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلّل الإجابة الصحيحة :

٩ المعكوس الجمعي لكثيرة الحدود ٤ ص^{٤} – ٢ ص^{٢} + ٥ هو :

أ ٤ ص^{٤} + ٢ ص^{٢} + ٥   ب – ٤ ص^{٤} – ٢ ص^{٢} – ٥

ج –٤ ص^{٤} + ٢ ص^{٢} – ٥   د ٤ ص^{٤} – ٢ ص^{٢} + ٥

١٠ ٢ س (٣ س + ٤) =

أ ٦ س^{٢} + ٤   ب ٦ س + ٨   ج ٦ س^{٢} + ٨ س   د ٦ س + ٨ س

١١ $\frac{٨ س^{٣} + ٤ س}{٤ س}$ = ، (حيث س $\neq$ صفر)

أ ٢ س^{٢} + ١   ب ٢ س^{٢}

ج ٢ س^{٢} + س   د $\frac{١}{٢ س^{٢}}$

١٢ ناتج جمع ٣ س^{٤} + ٤ س^{٣} − ٣ س + ٢ ، ٢ س^{٢} + س^{٣} − ٤ س − ١ يساوي :

أ ٥ س^{٣} + ٤ س^{٢} − س + ٢
ب ٣ س^{٤} + ٥ س^{٣} − ٧ س + ١
ج ٣ س^{٤} + ٣ س^{٣} − ٧ س + ١
د ٣ س^{٤} + ٥ س^{٣} + ٢ س^{٢} − ٧ س + ١

---

١٣ ناتج طرح (٣ س − ٤ ص) من (٣ س + ٤ ص) :

أ ٦ س − ٨ ص
ب ٦ س + ٨ ص
ج ٨ ص
د ٦ س

---

١٤ إذا كان $\left(\frac{\text{س}^{٦}}{٢\,\text{س}^{٢}}\right)^{\text{م}}$ = ١ ، فإنّ م = ، (حيث س ≠ صفر)

أ صفر
ب ١
ج $\frac{\text{س}^{٤}}{٢}$
د −١

---

١٥ مربّع الحدّانية س + ٢ هو :

أ س^{٢} + ٤
ب س^{٢} + ٤ س + ٤
ج س^{٢} + ٢ س + ٤
د س^{٢} − ٤ س + ٤

---

١٦ ناتج جمع ٣ س^{٢} − ٥ س + ١ ، ٥ س^{٢} − ٣ س يساوي :

أ ٨ س^{٢} − ٨ س + ١
ب ٦ س^{٢} − ١٠ س + ١
ج ٨ س^{٢} − ٨ س
د ١

---

١٧ $\frac{٥\,\text{س}^{٣}\,\text{ص}^{٢}}{١٥\,\text{س}}$ = ، (حيث س ≠ صفر)

أ ٣ س^{٢} ص^{٢}
ب ٣ س^{٢} ص
ج ٥ س^{٢} ص
د $\frac{١}{٣}$ س^{٢} ص^{٢}

١٨ عدد الحدود في كثيرة الحدود الناتجة من ضرب (س + ٣) (س + ٤) هو :

أ ١   ب ٢   ج ٣   د ٤

---

١٩ ناتج $(١٠^{٣})^{٢} \times ١٠^{-٤}$ هو :

أ $١٠^{-١}$ ب $١٠^{٢}$ ج ١٠   د $١٠^{١٠}$

---

٢٠ ناتج $٨,٢ \times ١٠^{٩} \div ٤,١ \times ١٠^{٦}$ هو :

أ ٢×١٠^{٩} ب ٢×١٠^{٣} ج ٢×١٠^{٢} د ٢×١٠^{١٥}

---

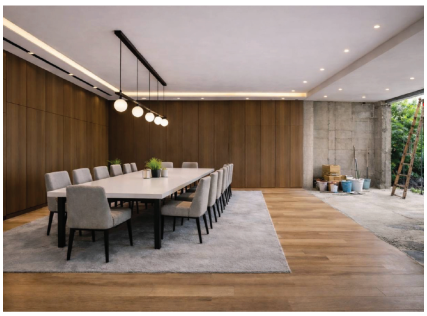
٢١ غرفة طعام مستطيلة الشكل قرّر ربّ الأسرة زيادة عرضها ، اِفترِض أنّ عرض الغرفة زاد بمقدار ٨ أمتار ، إذا كانت الأبعاد كما هي موضَّحة في المخطط ، فإنّ المساحة الكلّية لغرفة الطعام الجديدة بالمتر المربّع تساوي :

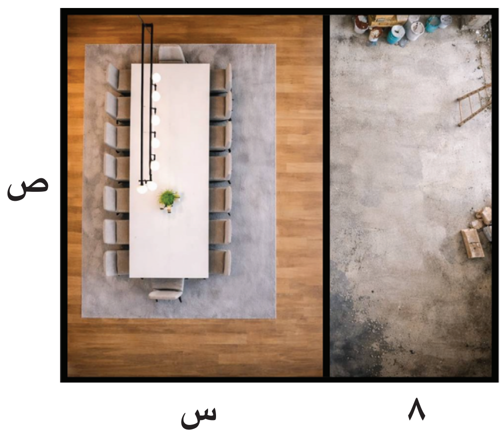
أ ٨ + س

ب ٨ ص + س ص

ج ٨ س ص

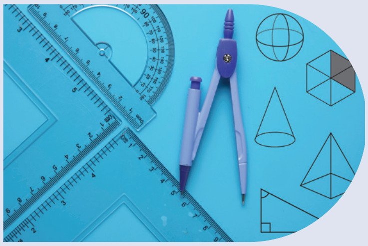
د ٨ ص + س





المشروع الثالث :
الرياضيات والحياة

لدينا في الحياة أمثلة كثيرة عن الأشكال الرباعية ،
يمكننا معرفة وتمييز كلّ شكل من خلال خواصّ كلّ
منها .



خطّة العمل :

اِصنع خريطة ذهنية لتصنيف الأشكال الرباعية توضّح العلاقة بين الأشكال الرباعية ، وتدريب المتعلّمين على المقارنة والتعليل البصري والهندسي من خلال خصائص كلّ منها .

خطوات تنفيذ المشروع :

- يمكن تصنيف الأشكال الرباعية من خلال عمل خريطة ذهنية (مخطّط شجرة) لتوضيح العلاقة بين الأشكال الرباعية من خلال ذكر خواصّ كلّ منها .
- دعِّم الخريطة بصور من الحياة اليومية تمثّل كلّ شكل من الأشكال الرباعية .

علاقات وتواصل :

يمكن للمجموعات تبادل الأوراق للتأكّد من صحّة ودقّة البيانات وتطبيق المشروع .

عرض العمل :

تعرض كلّ مجموعة عملها وتناقش خطوات تنفيذ العمل .

المراجع

- الرياضيات ، الصف الثامن ، الطبعة الثالثة ٢٠١٧ - ٢٠١٨ م ،
  وزارة التربية ، قطاع البحوث التربوية والمناهج .
- الرياضيات ، الصف الثامن ، الطبعة الخامسة ٢٠٢٤ - ٢٠٢٥ م ،
  وزارة التربية ، قطاع البحوث التربوية والمناهج .
- الرياضيات ، الصف الثامن ، الطبعة التجريبية ٢٠٢٣ - ٢٠٢٤ م ،
  وزارة التربية ، قطاع البحوث التربوية والمناهج .

مصادر بعض الصور

- الغلاف : صورة الرجل الآلي ، مزوَّدة من لجنة الرياضيات .
- ص ٢٦ : الصورة مزوَّدة من لجنة الرياضيات .
- ص ٣٣ : الصورة مزوَّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ٩٠ : الصورة مزوَّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ٩٩ : الصورة مزوَّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ١٠٠ : الصورة مزوَّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ١٠٧ : الصورة مزوَّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ١١٦ : الصورة مزوَّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ١٢١ : الصورة مزوَّدة من لجنة الرياضيات .

8

الكتاب كاملًا

قيِّم مناهجنا