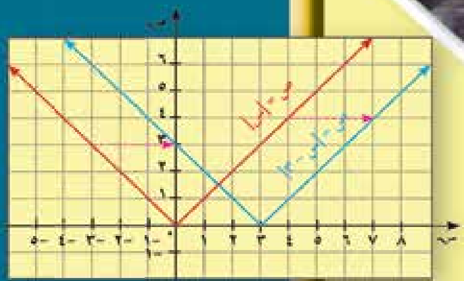
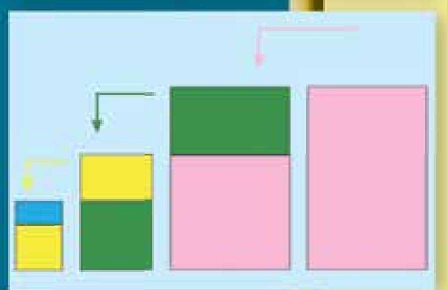
١/١

وزارة التربية
Ministry of Education
State of Kuwait | دولة الكويت

الرياضيات

كتاب الطالب





الصـــفّ الـعـاشـــر ١٠
الفصل الدراسي الأوّل

الطبعة الثانية

١ / ١

وزارة التربية
Ministry of Education
State of Kuwait | دولـــة الكويت

كويت جديدة
NEWKUWAIT

الرياضيات

الصف العاشر
الفصل الدراسي الأول

كتاب الطالب

اللجنة الإشرافية لدراسة ومواءمة سلسلة كتب الرياضيات

أ. إبراهيم حسين القطان (رئيسًا)

أ. حصة يونس محمد علي   أ. فتحية محمود أبو زور

الطبعة الثانية
١٤٤٧ هـ
٢٠٢٥ - ٢٠٢٦م

الطبعة الأولى ٢٠١٢ – ٢٠١٣ م
الطبعة الثانية ٢٠١٤ – ٢٠١٥ م
٢٠١٩ – ٢٠٢٠ م
٢٠٢٠ – ٢٠٢١ م
٢٠٢١ – ٢٠٢٢ م
٢٠٢٢ – ٢٠٢٣ م
٢٠٢٤ – ٢٠٢٥ م
٢٠٢٥ – ٢٠٢٦ م

فريق عمل دراسة ومواءمة كتب الرياضيات للصف العاشر

أ. رضيّة ناصر القطان (رئيسًا)

أ. السعيد فوزي إبراهيم   أ. نجوى محمد وسيم
أ. مجدي محمد الكواوي   أ. منيرة علي العدواني

الكتاب كاملًا

شاركنا بتقييم مناهجنا

مدادباك MIDADPACK

أودع بمكتبة الوزارة تحت رقم (٤٩) بتاريخ ٢٠١٤/٧/٤م

بسم الله الرحمن الرحيم

حضرة صاحب السمو الشيخ مشعل الأحمد الجابر الصباح

أمير دولة الكويت

H.H. Sheikh Meshal AL-Ahmad Al-Jaber Al-Sabah

Amir Of The State Of Kuwait

سمو الشيخ صباح خالد الحمد الصباح
ولي عهد دولة الكويت

H. H. Sheikh Sabah Khaled Al-Hamad Al-Sabah
Crown Prince Of The State Of Kuwait

مقدمة

الحمدلله رب العالمين، والصلاة والسلام على سيد المرسلين، محمد بن عبدالله وصحبه أجمعين.

عندما شرعت وزارة التربية في عملية تطوير المناهج، استندت في ذلك إلى جملة من الأسس والمرتكزات العلمية والفنية والمهنية، حيث راعت متطلبات الدولة وارتباط ذلك بسوق العمل، وحاجات المتعلمين والتطور المعرفي والعلمي، بالإضافة إلى جملة من التحديات التي تمثلت بالتحدي القيمي والاجتماعي والاقتصادي والتكنولوجي وغيرها، وإن كنا ندرك أن هذه الجوانب لها صلة وثيقة بالنظام التعليمي بشكل عام وليس المناهج بشكل خاص.

ومما يجب التأكيد عليه، أن المنهج عبارة عن كم الخبرات التربوية والتعليمية التي تُقدم للمتعلم، وهذا يرتبط أيضًا بعمليات التخطط والتنفيذ، والتي في محصلتها النهائية تأتي لتحقيق الأهداف التربوية، وعليه أصبحت عملية بناء المناهج الدراسية من أهم مكونات النظام التعليمي، لأنها تأتي في جانبين مهمين لقياس كفاءة النظام التعليمي، فهي من جهة تمثل أحد المدخلات الأساسية ومقياسًا أو معيارًا من معايير كفاءته من جهة أخرى، عدا أن المناهج تدخل في عملية إنماء شخصية المتعلم في جميع جوانبها الجسمية والعقلية والوجدانية والروحية والاجتماعية.

من جانب آخر، فنحن في قطاع البحوث التربوية والمناهج، عندما نبدأ في عملية تطوير المناهج الدراسية، ننطلق من كل الأسس والمرتكزات التي سبق ذكرها، بل إننا نراها محفزات واقعية تدفعنا لبذل قصارى جهدنا والمضي قدمًا في البحث في المستجدات التربوية سواء في شكل المناهج أم في مضامينها، وهذا ما قام به القطاع خلال السنوات الماضية، حيث البحث عن أفضل ما توصلت إليه عملية صناعة المناهج الدراسية، ومن ثم إعدادها وتأليفها وفق معايير عالمية استعدادًا لتطبيقها في البيئة التعليمية.

ولقد كانت مناهج العلوم والرياضيات من أول المناهج التي بدأنا بها عملية التطوير، إيمانًا بأهميتها وانطلاقًا من أنها ذات صفة عالمية، مع الأخذ بالحسبان خصوصية المجتمع الكويتي وبيئته المحلية، وعندما أدركنا أنها تتضمن جوانب عملية التعلم ونعني بذلك المعرفة والقيم والمهارات، قمنا بدراستها وجعلها تتوافق مع نظام التعليم في دولة الكويت، مركزين ليس فقط على الكتاب المقرر ولكن شمل ذلك طرائق وأساليب التدريس والبيئة التعليمية ودور المتعلم، مؤكدين على أهمية التكامل بين الجوانب العلمية والتطبيقية حتى تكون ذات طبيعة وظيفية مرتبطة بحياة المتعلم.

وفي ضوء ما سبق من معطيات وغيرها من الجوانب ذات الصفة التعليمية والتربوية تم اختيار سلسلة مناهج العلوم والرياضيات التي أكملناها بشكل ووقت مناسبين، ولنحقق نقلة نوعية في مناهج تلك المواد، وهذا كله تزامن مع عملية التقويم والقياس للأثر الذي تركته تلك المناهج، ومن ثم عمليات التعديل التي طرأت أثناء وبعد تنفيذها، مع التأكيد على الاستمرار في القياس المستمر والمتابعة الدائمة حتى تكون مناهجنا أكثر تفاعلية.

د. سعود هلال الحربي

الوكيل المساعد لقطاع البحوث التربوية والمناهج

المحتوَياتُ

الوحدة الأولى

الجبر – الأعداد والعمليات عليها
Algebra - Numbers and Operations

مشروع الوحدة: شراء الأسهم

١ مقدمة المشروع: أثناء العمل على هذا المشروع سوف تجمع بيانات عن إحدى الشركات. وتستخدم الصيغ لتحليل البيانات. ثم عليك أن تقرر كيفية تنظيم النتائج وعرضها باستخدام الرسوم البيانية وجداول البرمجة.

٢ الهدف: فهم كيف يدرس المحللون الاقتصاديون حركة الأسهم المالية لتحديد أي أسهم يشترون.

٣ اللوازم: آلة حاسبة – صحيفة محلية – أوراق رسم بياني.

٤ أسئلة حول التطبيق:

أ اختر شركة للبحث. اجمع المعلومات حول المنتجات التي تبيعها الشركة أو الاستشارات التي تقدمها، وتاريخ الشركة والممارسات الإدارية.

ب اطلع على صفحة الأوراق المالية في الصحيفة. اختر أحد الأسهم المتداولة في الأسواق المالية.

ما كان سعر الإغلاق لهذا السهم؟

ما كان أعلى سعر لهذا السهم خلال العام الماضي؟

أنشئ جدولًا يعرض أعلى سعر وأدنى سعر للسهم الواحد لعدة أيام.

جـ افترض أن لديك ٥٠٠٠ دينار استثمرتها في الأسهم المالية التي اخترتها. يشمل سعر الشراء ثمن السهم زائد ٩,٩٥ دنانير كرسوم في ختام هذا المشروع، بعت الأسهم الخاصة بك. هل حققت ربحًا أم تكبدت خسارة؟ اشرح.

٥ التقرير: ضعْ تقريرًا مفصلًا تبين فيه كيف استفدت من خواص نظام الأعداد الحقيقية لتنفيذ المشروع وللإجابة عن الأسئلة.

دروس الوحدة

خواص نظام الأعداد الحقيقية	تقدير الجذر التربيعي	حل المتباينات	القيمة المطلقة
١–١	١–٢	١–٣	١–٤
دالة القيمة المطلقة	حل نظام معادلتين خطيتين	حل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد	
١–٥	١–٦	١–٧	

الوحدة الأولى

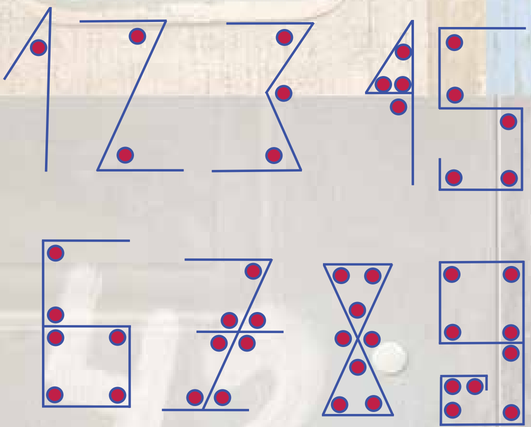
أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعرفت الأعداد النسبية والأعداد غير النسبية.
- قارنت الأعداد الحقيقية ورتبتها.
- تعرفت القيمة المطلقة.
- استخدمت الأسس للتعبير عن الأعداد الكبيرة والصغيرة.
- تعرفت الجذور التربيعية.
- مثلت الفترات على خط الأعداد.

أضف إلى معلوماتك

يعتمد الغرب الأرقام 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، في كتابة الأعداد وهي تدعى «الأرقام العربية».

يرتبط كل رقم منها بعدد من الزوايا. يبيّن الرسم أدناه هذه العلاقة.



ماذا سوف تتعلم؟

- سوف تتعرف خاصية الكثافة والترتيب والفترات.
- سوف تحل متباينات مستخدمًا الجمع والطرح والضرب والقسمة.
- سوف تحل معادلات ومتباينات تتضمن قيمًا مطلقة.
- سوف ترسم بيانيًّا دوال القيمة المطلقة.
- سوف تحل أنظمة معادلات خطية.
- سوف تحل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد.
- سوف تتعرف حل متباينات تربيعيّة بيانيًّا.

المصطلحات الأساسية

الأعداد النسبية – الأعداد غير النسبية – الخاصية الإبدالية – الخاصية التجميعية – الخاصية التوزيعية – المحايد – المعكوس – الفترات – المتباينات – القيمة المطلقة – الانسحاب – الحذف – التعويض – المميز.

١ – ١

خواص نظام الأعداد الحقيقية
Real Numbers System Properties

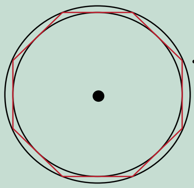
دعنا نفكر ونتناقش

شغل العدد π (النسبة بين طول الدائرة وطول قطرها) الباحثين في الرياضيات لآلاف السنين.

اعتمد أرخميدس على الدائرة المحوطة (الداخلية) والدائرة المحيطة (الخارجية) بمضلع منتظم من ٩٦ ضلعًا للوصول إلى $\frac{٢٢}{٧} > \pi > \frac{٢٢٣}{٧١}$

وتسمى متباينة أرخميدس.

واستخدم الصينيون الكسر $\frac{٣٥٥}{١١٣}$ كقيمة تقريبية لِـ π.



في بداية القرن الثامن عشر اعتمد الرمز اليوناني π.

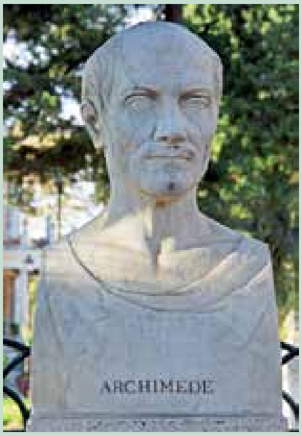
استخدم آلتك الحاسبة:

١ أوجد ٣ قيم تقريبية لِـ π مستخدمًا متباينة أرخميدس.

٢ π هو عدد غير نسبي. تنحصر قيمته بين ٣,١٤ ، ٣,١٥.

إعطاء مثال لإحدى القيم: مثلًا: $\pi \simeq$ ٣,١٤١٥٩٢٦.

هل يمكن تحديد عدد القيم التقريبية لِـ π ؟



يعد أرخميدس (القرن السادس قبل الميلاد) من أعظم علماء الرياضيات وأبو الهندسة، ومن أشهر اكتشافاته طرق حساب المساحات والأحجام.
حدّد قيمة π بدقة عالية $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$

سوف تتعلم

- خاصية الكثافة
- الترتيب
- الفترات

١ – الأعداد الحقيقية Real Numbers

تعلم أن الأعداد النسبية (ن) يمكن كتابتها في صورة أعداد عشرية أو (كسور عشرية منتهية مثل ٣,٢٥ ، ٠,٤٨٧ أو بصورة أعداد عشرية دورية (أو كسور عشرية دورية مثل ٢,١٦ ، ٣,٣ ، ٠، ...) وهناك مجموعة أخرى من الأعداد تسمى أعدادًا غير نسبية لا يمكن كتابتها على الصورة $\frac{أ}{ب}$ حيث أ، ب $\in$ ص، ب $\neq$ ٠ مثل $\sqrt{٥}$، $\sqrt{٢}$، $\frac{١}{\sqrt{٧}}$ ، ...

وكما الأعداد العشرية التي أرقامها العشرية لا تنتهي ولا تتكرر دوريًّا مثل

$\pi \simeq$ ٣,١٤١٥٩٢٦٥٣٥٩... فالأرقام العشرية في π لا تنتهي ولا تتكرر دوريًّا.

والأعداد غير النسبية ($\overline{ن}$) من الممكن أن تتضمن كسورًا عشرية ذات نمط في كتابة أرقامها مثل ... ٠,٣٠٣٣٠٣٣٣

اتحاد مجموعتي الأعداد النسبية وغير النسبية يشكل مجموعة تسمى مجموعة الأعداد الحقيقية

أي أن ن $\cup$ $\overline{ن}$ = ح.

القراءة في الرياضيات:

$\sqrt{٢}$ هو الجذر التربيعي الموجب للعدد ٢.

$-\sqrt{٢}$ هو الجذر التربيعي السالب للعدد ٢.

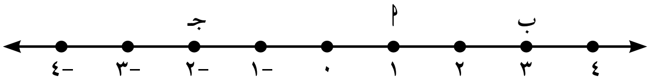
يوضّح المخطط التالي العلاقات بين مجموعات الأعداد.

الأعداد الحقيقية

الأعداد النسبية	**الأعداد غير النسبية**
أمثلة: $\frac{١}{٣}$ ، ١٤ , ٠ ، $-٢\frac{١}{٣}$	أمثلة: $\sqrt{٣}$ ، π ، $\sqrt[٣]{٥}$ ، ١,٣٤٣٣٤...
الأعداد الصحيحة ....، -٢، -١، ٠، ١، ٢، ...	
الأعداد الطبيعية (الكلية): ٠، ١، ٢، ٣، ...	

تمثّل مجموعة الأعداد الحقيقية بخط الأعداد.

كل عدد حقيقي يمثل بنقطة على هذا الخط وكل نقطة على هذا الخط تمثل عددًا حقيقيًّا.



مثال (١)

حدد أيًّا من الأعداد التالية عددًا نسبيًّا وأيها عددًا غير نسبي.

أ) $-\frac{١٨}{٥}$ ب) $\sqrt{٤١}$

ج) ٠,٣٣٣... د) ١,٠١٠٠١٠٠٠١ ...

الحل:

أ) $-\frac{١٨}{٥}$ هو عدد نسبي.

ب) $\sqrt{٤١}$ هو عدد غير نسبي.

ج) ٠,٣٣٣... = $٠,\overline{٣}$ = $\frac{١}{٣}$ هو عدد نسبي.

د) ١,٠١٠٠١٠٠٠١ ... هو عدد غير نسبي.

حاول أن تحل

١) حدد أيًّا من الأعداد التالية عددًا نسبيًّا وأيها عددًا غير نسبي: $\frac{\sqrt{٤}}{٣}$ ، $١,\overline{٤}$ ، ١ ، ٥π.

٢ – خواص عمليتي الجمع والضرب على الأعداد الحقيقية

Properties of Addition and Multiplication of Real Numbers

لكل أ، ب، جـ ∈ ح فإن:

الخاصية	الجمع	الضرب
الإبدالية	أ + ب = ب + أ	أ × ب = ب × أ
التجميعية	(أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ)	(أ × ب) × جـ = أ × (ب × جـ)
المحايد	أ + ٠ = ٠ + أ = أ	أ × ١ = ١ × أ = أ
المعكوس (النظير)	أ + (–أ) = (–أ) + أ = ٠	أ × ١/أ = ١/أ × أ = ١ (أ ≠ ٠)
التوزيعية	أ × (ب + جـ) = أ × ب + أ × جـ (ب + جـ) × أ = ب × أ + جـ × أ	

٣ – ترتيب الأعداد الحقيقية

Order of Real Numbers

مجموعة الأعداد الحقيقية هي مجموعة مرتبة، هذا يعني أننا نستطيع مقارنة أي عددين حقيقيين باستخدام رموز علاقات الترتيب (> أو < أو =). والقول إن عددًا ما هو «أكبر من» أو «أصغر من» أو «يساوي» العدد الآخر.

الترتيب وخواصه

Properties of Order

ترتيب الأعداد الحقيقية

ليكن أ، ب عددين حقيقيين

الكتابة بالرموز	التعريف	القراءة
أ > ب	أ – ب عدد موجب	أ أكبر من ب
أ < ب	أ – ب عدد سالب	أ أصغر من ب
أ ≥ ب	أ – ب عدد موجب أو صفر	أ أكبر من أو يساوي ب
أ ≤ ب	أ – ب عدد سالب أو صفر	أ أصغر من أو يساوي ب

حقيقة هامة:

لأي عددين حقيقيين أ، ب. تعبير واحد فقط مما يلي هو صحيح:

أ > ب

أ = ب

أ < ب

لتكن أ، ب، جـ أعداد حقيقية.

الخاصية	القاعدة	ملاحظة
التعدي	إذا كان أ ≥ ب، ب ≥ جـ فإن أ ≥ جـ	
الجمع	إذا كان أ ≥ ب، فإن أ + جـ ≥ ب + جـ	
الطرح	إذا كان أ ≥ ب، فإن أ − جـ ≥ ب − جـ	
الضرب	إذا كان أ ≥ ب، جـ > ٠، فإن أجـ ≥ ب جـ	
	إذا كان أ ≥ ب، جـ < ٠، فإن أجـ ≤ ب جـ	لاحظ أن علاقة الترتيب تنعكس عندما يكون العدد جـ سالبًا.
القسمة	إذا كان أ ≥ ب، جـ > ٠، فإن $\frac{أ}{جـ} \geq \frac{ب}{جـ}$	
	إذا كان أ ≥ ب، جـ < ٠، فإن $\frac{أ}{جـ} \leq \frac{ب}{جـ}$	لاحظ أن علاقة الترتيب تنعكس عندما يكون العدد جـ سالبًا.

٤ - خاصية الكثافة Density Property

يتسع وعاء لعدد محدد من الحجارة (تبقى فراغات كبيرة). كما أنّه يتسع لعدد أكبر من الحصى الصغيرة (تقل الفراغات) ويمكن ملؤه كذلك بعدد أكبر بكثير من الرمل (تصبح الفراغات نادرة).

وماذا إذا مُلئ الوعاء بأجسام أصغر حجمًا من الرمل؟

كلما صغر حجم الأجسام المستخدمة لملء الوعاء زادت الكثافة.

يمكن تشبيه سعة الوعاء بطول فترة على خط الأعداد.

معلومة مفيدة:

تعتمد كثافة الجسم على شدة تراص جزيئات المادة فيه.

يوجد بين أي نقطتين مختلفتين على خط الأعداد عدد لا نهائي من النقاط، وبالتالي بين أي عددين حقيقيين مختلفين يوجد عدد لانهائي من الأعداد الحقيقية.

مثال (٢)

أعط خمسة أعداد حقيقية بين ٣,١٤ ، ٣,١٥.

الحل: تعلم أن ٣,١٤ = ٣,١٤٠ ، ٣,١٥ = ٣,١٥٠

∴ الأعداد الحقيقية مثل: ٣,١٤١ ، ٣,١٤٢ ، ٣,١٤٥٦ ، ٣,١٤٤٤٨ ، π.

حاول أن تحل

٢ أعط ستة أعداد حقيقية بين ١,٤١٤ ، ١,٤١٥.

٥ – الفترات Intervals

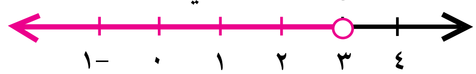
الفترة مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

لاحظ أن ليس كل مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية تمثل فترة. لماذا؟

يمكن استخدام المتباينات للتعبير عن الفترات في مجموعة الأعداد الحقيقية، وكذلك يمكن تمثيل الفترات على خط الأعداد.

مثلًا: يعبّر عن الفترة: (−∞، ٣) بالمتباينة، س < ٣.

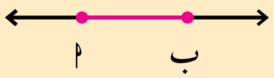
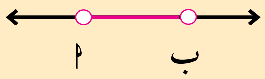
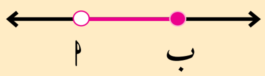
وهي مجموعة الأعداد الحقيقية الأصغر من ٣، وتمثّل بيانيًّا كما يلي:



سوف نميز بين نوعين من الفترات: **الفترات المحدودة والفترات غير المحدودة.**

أولًا: الفترات المحدودة

الجدول التالي يوضح أنواع الفترات المحدودة: لتكن أ، ب أعدادًا حقيقية.

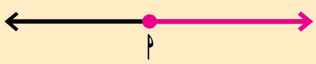
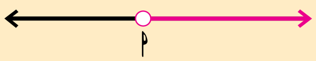
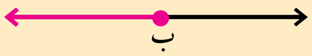
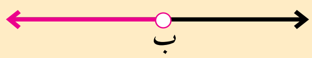
رمز الفترة	نوع الفترة	رمز المتباينة	التمثيل البياني
[أ، ب]	مغلقة	أ ≤ س ≤ ب	
(أ، ب)	مفتوحة	أ < س < ب	
[أ، ب)	نصف مفتوحة أو نصف مغلقة	أ ≤ س < ب	
(أ، ب]	نصف مفتوحة أو نصف مغلقة	أ < س ≤ ب	
الأعداد أ، ب هما نقطتا الحدود لكل فترة حيث أ الحد الأدنى للفترة، ب الحد الأعلى للفترة.			

تذكر:

المتباينة أ ≤ س ≤ ب
تكافئ س ≥ أ و س ≤ ب

ثانيا: الفترات غير المحدودة

الجدول التالي يوضح بعض الفترات غير المحدودة: ليكن أ، ب ∈ ح.

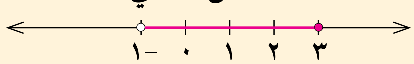
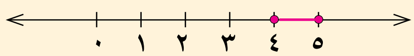
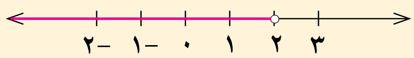
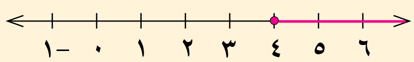
رمز الفترة	نوع الفترة	رمز المتباينة	التمثيل البياني
[أ، ∞)	نصف مغلقة وغير محدودة من الأعلى	س ⩾ أ	
(أ، ∞)	مفتوحة وغير محدودة من الأعلى	س > أ	
(-∞، ب]	نصف مفتوحة وغير محدودة من الأسفل	س ⩽ ب	
(-∞، ب)	مفتوحة وغير محدودة من الأسفل	س < ب	

مثال (٣)

اكتب نوع الفترة ورمز المتباينة والتمثيل البياني لكل من الفترات التالية:

أ (-١، ٣]   ب [٤، ٥]   جـ (-∞، ٢)   د [٤، ∞)

الحل:

	نوع الفترة	رمز المتباينة	التمثيل البياني
أ	فترة نصف مفتوحة (أو نصف مغلقة)	-١ < س ≤ ٣	
ب	فترة مغلقة	٤ ≤ س ≤ ٥	
جـ	فترة مفتوحة وغير محدودة من أسفل	س < ٢	
د	فترة نصف مغلقة وغير محدودة من أعلى	س ≥ ٤	

حاول أن تحل

٣ اكتب نوع الفترة ورمز المتباينة والتمثيل البياني لكل من الفترات التالية:

أ (-٢، ١)   ب (-∞، ٣]

٤ مثل كلًّا مما يلي على خط الأعداد:

أ [٢، ∞) ∪ (-∞، -٣)   ب [-١، ∞) ∪ (-∞، -٥]

١ – ٢

تقدير الجذر التربيعي
Estimating Square Root

سوف تتعلم

- تقدير الجذر التربيعي
- استخدام الجذر التربيعي في حل المسائل

دعنا نفكر ونتناقش

لكل عدد حقيقي موجب جذران تربيعيان أحدهما موجب والآخر سالب.

$٣ \times ٣ = ٩$	الجذران التربيعيان للعدد ٩ ← ٣ الجذر الموجب
$(-٣) \times (-٣) = ٩$	← -٣ الجذر السالب

٣ هو **الجذر الأساسي**.

العدد ٢٩ , ٧ هو موجب إذًا له جذران تربيعيان. لكن نجد صعوبة في إيجاد هذين الجذرين.

يعتمد الرمز $\sqrt{\ }$ للإشارة إلى الجذر التربيعي الموجب فنكتب $\sqrt{٧,٢٩}$.

باستخدام الآلة الحاسبة نحصل على: $\sqrt{٧,٢٩} = ٢,٧$. كذلك $-\sqrt{٧,٢٩} = -٢,٧$.

الجذر التربيعي Square Root

العدد أ هو جذر تربيعي للعدد ب عندما $أ^٢ = ب$

خصائص الجذور التربيعية Properties of Square Roots

خاصية الضرب: لأي عددين حقيقيّين غير سالبين أ، ب: $\sqrt{أب} = \sqrt{أ} \times \sqrt{ب}$

خاصية القسمة: لأي عددين حقيقيّين موجبين أ، ب: $\sqrt{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}}$

مثال (١)

بسِّط كل تعبير.

أ) $\sqrt{٤٩} = ٧$ جذر تربيعي موجب.

ب) $-\sqrt{١٤٤} = -١٢$ جذر تربيعي سالب.

جـ) $\pm\sqrt{\frac{٩}{٢٥}} = \frac{\pm\sqrt{٩}}{\sqrt{٢٥}} = \pm\frac{٣}{٥}$ الجذران التربيعيان هما $\frac{٣}{٥}$، $\frac{-٣}{٥}$.

د) $\sqrt{٠} = ٠$ للصفر جذر تربيعي واحد هو صفر.

هـ) $\sqrt{-٣٦}$ غير معرّف في ح.

(في مجموعة الأعداد الحقيقية الجذر التربيعي لعدد سالب غير معرّف).

حاول أن تحل

١ بسِّط كل تعبير.

أ) $\sqrt{٨١}$ ب) $-\sqrt{١٦٩}$ جـ) $\pm\sqrt{٢٥}$ د) $\sqrt{\frac{٩}{٢٥}}$

بعض الجذور التربيعية هي أعداد نسبية، وبعضها الآخر أعداد غير نسبية.

فمثلًا من الجذور النسبية: $\sqrt{١٢١} = ١١$، $-\sqrt{١,٢١} = -١,١$، $\pm\sqrt{\frac{٨١}{١٠٠}} = \pm\frac{٩}{١٠}$

من الجذور غير النسبية: $\sqrt{٥} \simeq ٢,٢٣٦$، $\sqrt{\frac{٣}{٧}} \simeq ٠,٦٥٤٧$

مثال (٢)

حدّد ما إذا كان كل عدد مما يلي عددًا نسبيًّا أو غير نسبي.

أ $\sqrt{٦٤} = ٨$ عدد نسبي

ب باستخدام الآلة الحاسبة $-\sqrt{٤,٩} \simeq -٢,٢١٣٥٩٤٣...$ عدد غير نسبي

جـ باستخدام الآلة الحاسبة $\sqrt{\frac{١}{٧}} \simeq ٠,٣٧٧٩٦٤٤٧٣$ عدد غير نسبي

حاول أن تحل

٢ حدّد ما إن كان كل عدد مما يلي عددًا نسبيًّا أو غير نسبي.

أ $\sqrt{١٣}$

ب $-\sqrt{٦٢٥}$

جـ $-\sqrt{١٠٠٠}$

د $\sqrt{\frac{٢}{١٥}}$

مصطلح رياضي:

في الصيغة العشرية:

العدد النسبي هو عدد منته أو متكرر (دوري).

العدد غير النسبي هو عدد غير منته دون تكرار.

١ - تقدير الجذور التربيعية Estimating Square Roots

مربعات الأعداد الطبيعية تسمى مربعات كاملة Perfect Squares.

العدد الطبيعي	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
المربع الكامل	١	٤	٩	١٦	٢٥	٣٦	٤٩	٦٤	٨١	١٠٠	١٢١	١٤٤

يمكن استخدام المربعات الكاملة لتقدير قيمة بعض الجذور التربيعية دون استخدام الآلة الحاسبة.

مثال (٣)

حدّد بين أي عددين طبيعيين (كليين) متتاليين يوجد $\sqrt{١٥,٤١}$، ثم قدّر قيمته.

معلومة رياضية:

لأي أعداد موجبة وجذورها التربيعية الموجبة الترتيب نفسه.

الحل:

$٩ < ١٥,٤١ < ١٦$ ١٥,٤١ هو بين المربعين الكاملين المتتاليين ٩، ١٦.

$\sqrt{٩} < \sqrt{١٥,٤١} < \sqrt{١٦}$ باستخراج الجذر التربيعي لكل عدد

$٣ < \sqrt{١٥,٤١} < ٤$ تبسيط

إذًا $\sqrt{١٥,٤١}$ هو بين ٣، ٤. وحيث إن العدد ١٥,٤١ أقرب إلى ١٦ فإن $\sqrt{١٥,٤١}$ يكون قريبًا من ٤ وهو يساوي تقريبًا ٣,٨ أو ٣,٩.

حاول أن تحل

٣ حدّد بين أي عددين صحيحين متتاليين يوجد العدد $-\sqrt{٣٠,٨}$، ثم قدّر قيمته.

يمكن إيجاد قيمة تقريبية للجذور التربيعية باستخدام الآلة الحاسبة.

مثال (٤)

حدّد بين أي عددين كليين متتاليين يقع $\sqrt{٢٨,٦٣}$، ثم أوجد قيمته لأقرب جزء من عشرة مستخدمًا الآلة الحاسبة.

الحل:

$٢٥ < ٢٨,٦٣ < ٣٦$ ٢٨,٦٣ هو بين المربعين الكاملين المتتاليين ٢٥، ٣٦.

$\sqrt{٢٥} < \sqrt{٢٨,٦٣} < \sqrt{٣٦}$ باستخراج الجذر التربيعي لكل عدد

$٥ < \sqrt{٢٨,٦٣} < ٦$ تبسيط

إذًا $\sqrt{٢٨,٦٣}$ هو بين ٥، ٦.

باستخدام الآلة الحاسبة: 5.350 700 889 = 28.63 √

أي أن $\sqrt{٢٨,٦٣}$ يساوي تقريبًا ٥,٤.

حاول أن تحل

٤ حدّد بين أي عددين كليين متتاليين يقع $\sqrt{١٣,٧}$، ثم أوجد قيمته لأقرب جزء من عشرة مستخدمًا الآلة الحاسبة.

مثال (٥)

أوجد طول وتر مثلث طولا ضلعي زاويته القائمة هما ٥ سم، ٧ سم.

الحل:

$٥^٢ + ٧^٢ = ٢٥ + ٤٩ = ٧٤$ نظرية فيثاغورث

٧٤ يقع بين المربعين الكاملين المتتاليين ٦٤، ٨١.

∴ طول وتر المثلث هو بين ٨، ٩ سم.

باستخدام الآلة الحاسبة $\sqrt{٥^٢ + ٧^٢} \simeq ٨,٦٠٢٣$

طول وتر المثلث $\simeq ٨,٦$ سم.

تذكر:
في المثلث قائم الزاوية، مربع طول الوتر = مجموع مربعي طولي ضلعي الزاوية القائمة.

حاول أن تحل

٥ أوجد طول وتر مثلث قائم الزاوية، طولا ضلعي زاويته القائمة هما ٩ سم، ١٣ سم.

مثال (٦) **تطبيقات حياتية**

يسقط جسم من ارتفاع ٩ أمتار. تبين المعادلة ع = ٩,٤ن^٢ العلاقة بين الارتفاع ع بالأمتار والزمن ن بالثواني المستغرق للوصول إلى سطح الأرض. ما الزمن اللازم ليصل إلى الأرض؟

الحل:

$ع = ٤,٩ن^٢$

$ن^٢ = \frac{٩}{٤,٩}$

$ن = \sqrt{\frac{٩}{٤,٩}}$ أو $ن = -\sqrt{\frac{٩}{٤,٩}}$ مرفوضة

$ن \simeq ١,٣٥٥$ ثانية باستخدام الآلة الحاسبة

أي يلزم حوالى ثانية ونصف ليصل الجسم إلى الأرض.

حاول أن تحل

٦ من مثال (٦)، ما الزمن اللازم لوصول جسم إلى الأرض إذا سقط عن ارتفاع ١٤ مترًا؟

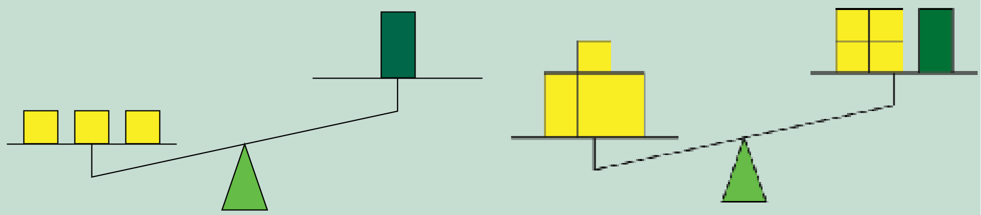
حل المتباينات
Solving Inequalities

سوف تتعلم
- حل المتباينات باستخدام الخواص
- نمذجة متباينات من الدرجة الأولى
- حل متباينات ذات متغير واحد في أحد الطرفين أو كليهما

دعنا نفكر ونتناقش

المتباينات المتكافئة هي متباينات لها مجموعة الحل نفسها.

استخدم الميزان لتبين أن المتباينتين س + ٤ < ٧ ، س < ٣ متباينتان متكافئتان.



مصطلحات مساعدة:

تعني كلمة "لانهائي" أن عدد الحلول غير محدد ولا يمكن حصره.

حل المتباينات Solving Inequalities

أنت تحلّ متباينة تتضمّن جمعًا أو طرحًا باستخدام العمليّات العكسيّة، لكي تضع المتغيّر في طرف واحد. أحيانًا يكون لمتباينة عدد لانهائيّ من الحلول ممّا يستحيل معه التحقّق منها جميعًا. بدلًا من ذلك، تحقّق من صحّة حساباتك واتّجاه علاقة الترتيب.

استخدام خاصية المعكوس الجمعي في حل المتباينات

مثال (١)

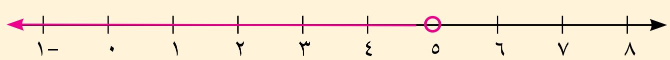
أوجد مجموعة حل المتباينة س − ٧ < −٢ ومثل الحلول بيانيًّا على خط الأعداد، ثم تحقق من صحة الحل.

الحل: س − ٧ < −٢

س − ٧ + ٧ < − ٢ + ٧ ضع المتغير في طرف واحد، وذلك بإضافة المعكوس الجمعي للعدد (−٧) إلى الطرفين

س < ٥ بسِّط

مجموعة الحل: (−∞، ٥)



تحقق:

الخطوة ١ : تحقق مما إذا كانت س = ٥ حلًّا للمعادلة المرتبطة.

س − ٧ = −٢ اكتب المعادلة المرتبطة

٥ − ٧ ≟ −٢ عوض بـ ٥ عن س

−٢ = −٢ ✓

الخطوة ٢: تحقق من صحة علاقة الترتيب بالتعويض في المتباينة.

س – ٧ > –٢

٤ – ٧ > –٢ عوض بعدد أصغر من ٥ عن س

–٣ > –٢ ✓

كل من الخطوتين ١، ٢ تتحقق، لذلك س > ٥ هو حل المتباينةِ س – ٧ > –٢

تذكر:

الدائرة المفتوحة على تمثيل بياني، تعني أن العدد ليس متضمَّنًا في الحل.

الدائرة المغلقة على تمثيل بياني، تعني أن العدد متضمَّن في الحل.

حاول أن تحل

١ أوجد مجموعة حل المتباينة ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد لكل مما يلي:

أ ص – ٤ ≤ ١ ب ١٢ ≥ س – ٥

مثال (٢)

الأمتعة (الحقائب): تشترط إحدى شركات الطيران ألّا يزيد وزن الأمتعة عن ٤٥ كيلوجرامًا للراكب. إذا كان وزن إحدى حقيبتيك ١٧ كيلوجرامًا، فما الوزن الممكن للحقيبة الثانية؟

الحل:

الألفاظ وزن الحقيبة الأولى زائد وزن الحقيبة الثانية لا يزيد عن ٤٥ كجم

ليكن ز = وزن الحقيبة الثانية

المتباينة ١٧ + ز ≤ ٤٥

–١٧ + ١٧ + ز ≤ –١٧ + ٤٥ ← ضع المتغير في طرف واحد وذلك بإضافة المعكوس الجمعي (–١٧)

ز ≤ ٢٨ ← بسط

يمكن أن يصل وزن حقيبتك الثانية إلى ٢٨ كجم.

حاول أن تحل

٢ تتسع القاعة الرئيسة في إحدى المدارس لـ ٣٠٠ مقعد. في عرض لإحدى المسرحيات كان عدد الحضور من الفصل العاشر ٨٩ طالبًا، فكم عدد الطلاب الذين يمكن حضورهم من بقية فصول المدرسة؟

استخدام خاصية المعكوس الضربي في حل المتباينات.

عندما تضرب طرفي متباينة في عدد سالب أو تقسم طرفي متباينة على عدد سالب، اعكس علاقة الترتيب.

مثال (٣)

أوجد مجموعة حل المتباينة $\frac{س}{-٢} > ١$، ومثل الحلول بيانيًّا على خط الأعداد.

الحل: $\frac{س}{-٢} > ١$

$-٢ \times \left(\frac{س}{-٢}\right) < ١ \times (-٢)$ اضرب كلًّا من الطرفين في المعكوس الضربي (-٢) واعكس علاقة الترتيب

$س < -٢$ بسط

مثل بيانيًّا

مجموعة الحل = (-٢، ∞)

معلومة مفيدة:

إذا كان أ > ب، جـ > ٠، فإن

أجـ > ب جـ، $\frac{أ}{جـ} > \frac{ب}{جـ}$.

إذا كان أ > ب، جـ < ٠، فإن

أجـ < ب جـ، $\frac{أ}{جـ} < \frac{ب}{جـ}$.

حاول أن تحل

٣ أوجد مجموعة حل المتباينة $\frac{ب}{٤} \leq ١$، ومثل الحلول بيانيًّا على خط الأعداد.

مثال (٤)

عمل تجاري: تعلن شركة لتوصيل خدمات الإنترنت عن الفرصة التالية الموضحة. هدف الشركة هو تحقيق مبلغ إضافي على الأقل ٤٥٠٠ دينار شهريًّا. كم مشتركًا جديدًا يلزم أن تجتذبهم الشركة؟

الحل:

الألفاظ: عدد المشتركين الجدد مضروبًا بـ ٥ دنانير يكون على الأقل ٤٥٠٠ دينار.

ليكن ن = عدد المشتركين الجدد

المتباينة $ن \times ٥ \geq ٤٥٠٠$

$٥ن \geq ٤٥٠٠$

$\frac{٥ن}{٥} \geq \frac{٤٥٠٠}{٥}$ اقسم طرفي المتباينة على ٥

$ن \geq ٩٠٠$ بسط

يلزم أن تجتذب ٩٠٠ مشترك جديد على الأقل.

التحقق من معقولية الإجابة: الإجابة معقولة لأن ٥ × ٩٠٠ هو ٤٥٠٠، وأي عدد أكبر من ٩٠٠ مضروبًا بـ ٥ ينتج عددًا أكبر من ٤٥٠٠.

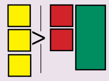
حاول أن تحل

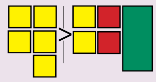
٤ الحد الأقصى لحمولة مصعد في فندق ١٠٠٠ كجم. افرض أن متوسط وزن النزيل ٨٠ كجم، فكم نزيلًا يمكن للمصعد أن يحملهم بأمان؟

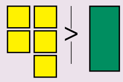
حل متباينات متعددة الخطوات:

يتطلب حل المتباينات أحيانًا استخدام أكثر من خطوة. وسنستخدم بلاطات الجبر في نمذجة متباينات من الدرجة الأولى حتى نفهم حلها. اعتبر أن تمثل المجهول س، البلاطة الحمراء تمثل –١، البلاطة الصفراء تمثل +١

أ حل المتباينة س – ٢ < ٣.

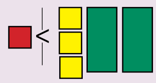
س – ٢ < ٣

نمذجة المتباينة باستخدام البلاطات

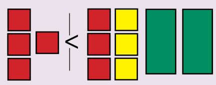
س – ٢ + ٢ < ٣ + ٢

إضافة +٢ إلى طرفي المتباينة

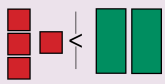
س < ٥

التبسيط بحذف أزواج البلاطات الصفرية

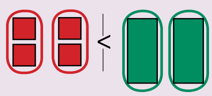
كل بلاطة خضراء أصغر من ٥ بلاطات صفراء، إذًا س < ٥.

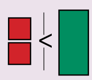
ب حل المتباينة ٢س + ٣ > –١.

٢س + ٣ > – ١

نمذجة المتباينة باستخدام البلاطات

٢س + ٣ – ٣ > –١ – ٣

إضافة –٣ إلى طرفي المتباينة

٢س > –٤

التبسيط بحذف أزواج البلاطات الصفرية

$\frac{٢س}{٢} > \frac{-٤}{٢}$

قسم كل طرف إلى مجموعتين متساويتين

س > – ٢


كل بلاطة خضراء أكبر من بلاطتين حمراوين. إذًا س > –٢

مثال (٥)

أوجد مجموعة حل المتباينة: ٢(م + ٢) − ٣م ≤ ١ ومثّل مجموعة الحل على خط الأعداد.

الحل:

٢(م + ٢) − ٣م ≤ ١

٢م + ٤ − ٣م ≤ ١ خاصيّة التوزيع

٢م − ٣م + ٤ ≤ ١ خاصيّة الإبدال

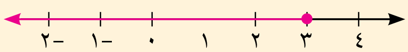
−م + ٤ ≤ ١ تبسيط

−م + ٤ − ٤ ≤ ١ − ٤ طرح ٤ من طرفي المتباينة

−م ≤ −٣

م ≥ ٣ تنعكس علاقة الترتيب

مجموعة الحل = (−∞، ٣].



حاول أن تحل

٥ أوجد مجموعة حل المتباينة ثم مثّل الحل على خط الأعداد: (أ) ٣ (س + ٤) + ٥ س ≥ ٢.

(ب) −٣ ≤ ١ − ٢س < ٣

مثال (٦) تطبيقات حياتية

يشتري أحد المخازن أكثر من ٣٠ عبوة شامبو في الشهر. يدفع ٣ دنانير ثمن العبوة الواحدة، ٢٥ دينارًا كلفة تسليم البضاعة. عرضت شركة منافسة على صاحب المخزن عبوات بسعر ٤ دنانير للواحدة، ٥ دنانير فقط كلفة تسليم البضاعة، مدعية أن أسعارها هي الأرخص. هل هذا صحيح؟

الحل:

ليكن س عدد العبوات التي يشتريها المخزن في الشهر.

تبلغ كلفة الشراء: ٣س + ٢٥

تبلغ كلفة الشراء من الشركة المنافسة: ٤س + ٥

للتحقق، نحل المتباينة ٤س + ٥ < ٣س + ٢٥.

٤س + ٥ − ٣س < ٣س + ٢٥ − ٣س طرح ٣س من طرفي المتباينة

س + ٥ < ٢٥ تبسيط

س + ٥ − ٥ < ٢٥ − ٥ طرح ٥ من طرفي المتباينة

س < ٢٠

أي أن الشركة المنافسة تكون أفضل عندما يكون عدد العبوات أقل من ٢٠ عبوة بينما يشتري المخزن أكثر من ٣٠ عبوة في الشهر.

∴ ما تعرضه الشركة المنافسة ليس أفضل عرض، لذا على صاحب المخزن أن يُبقي تعامله مع الشركة الأولى.

حاول أن تحل

٦ في مثال (٦)، هل يصبح عرض الشركة المنافسة أفضل إذا لم تقبض أموالًا كلفة تسليم البضاعة؟

مثال (٧)

أوجد مجموعة حل المتباينة ٦س − ١٥ > ٤س + ١ ومثّل الحلّ على خط الأعداد.

الحل:

٦س − ١٥ > ٤س + ١	
٦س − ١٥ − ٤س > ٤س + ١ − ٤س	طرح ٤س من طرفي المتباينة
٢س − ١٥ > ١	تبسيط
٢س − ١٥ + ١٥ > ١ + ١٥	إضافة ١٥ إلى طرفي المتباينة
٢س > ١٦	تبسيط
س > ٨	

مجموعة الحل = (٨، ∞).

انتبه:

في حالة حل المتباينات مثل:

٢س > ٢س − ١

٢س −٢س > −١

٠ × س > −١

مجموعة حلها ح.

حاول أن تحل

٧ أوجد مجموعة حل المتباينات التالية، ومثلها على خط الأعداد إن أمكن.

أ ٢(٢س − ٨) > ٤س + ٢

ب ٣س + ٧ > ٣(س − ٣)

٨ هل المتباينتان ٢س > ٢س − ١ ، ٢س ≥ ٢س − ١ لهما مجموعة الحل نفسها؟ فسّر إجابتك.

القيمة المطلقة
Absolute Value

سوف تتعلم
- حل معادلات تتضمن قيمة مطلقة
- حل متباينات تتضمن قيمة مطلقة

دعنا نفكر ونتناقش

عرفت سابقًا أن القيمة المطلقة لعدد حقيقي هي **بُعد هذا العدد عن الصفر على خط الأعداد.**
ولمّا كان البعد عددًا غير سالب، فالقيمة المطلقة لعدد حقيقي سالب هي معكوسه الجمعي.
الرمز المستخدم للقيمة المطلقة للعدد س هو |س|.

تعريف:
لكل عدد حقيقي س يكون:

$$|س| = \begin{cases} س & \text{إذا كان } س > ٠ \\ ٠ & \text{إذا كان } س = ٠ \\ -س & \text{إذا كان } س < ٠ \end{cases}$$

معلومة:
(−س) ليس بالضرورة عددًا سالبًا. (−س) هو المعكوس الجمعي للعدد س.

نلاحظ أن العدد إذا كان موجبًا أو صفرًا فإن قيمته المطلقة تساويه، أما إذا كان العدد سالبًا فإن قيمته المطلقة تساوي معكوسه الجمعي.

بعض خواص القيمة المطلقة للأعداد الحقيقية

ليكن أ، ب ∈ ح

١ $|أ| \geq ٠$
٢ $|-أ| = |أ|$
٣ $|أ \times ب| = |أ| \times |ب|$
٤ $\left|\frac{أ}{ب}\right| = \frac{|أ|}{|ب|}$، حيث ب ≠ ٠
٥ $|أ| \geq أ$
٦ $|أ - ب| = |ب - أ|$

مثال (١)

أعد تعريف |س − ٤| دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

الحل:

$$|س - ٤| = \begin{cases} س - ٤ & \text{حيث } س - ٤ > ٠ \\ ٠ & \text{حيث } س - ٤ = ٠ \\ -(س - ٤) & \text{حيث } س - ٤ < ٠ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} س - ٤ : & س \geq ٤ \\ ٤ - س : & س < ٤ \end{cases}$$

حاول أن تحل

١ أعد تعريف كلّ مما يلي دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

أ $|س + ٣|$

ب $|٤ - ٢س|$

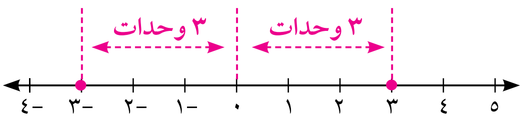
حل معادلات تتضمن قيمة مطلقة

يمكن استخدام خط أعداد لحل معادلات تتضمن قيمة مطلقة.

يبيّن التمثيل البياني المقابل حلول المعادلة |س| = ٣.

حيث المسافة بين س، صفر تساوي ٣ وحدات

إذًا الحل: س = ٣ أو س = −٣



نتيجة

١ إذا كان ﻡ عددًا حقيقيًّا موجبًا فإن حل المعادلة |س| = ﻡ هو: س = ﻡ أو س = −ﻡ وتكون مجموعة الحل {− ﻡ، ﻡ}.

٢ إذا كان ﻡ عددًا حقيقيًّا سالبًا فإن المعادلة |س| = ﻡ مجموعة حلها ∅

٣ إذا كان ﻡ = ٠ فإن |س| = ﻡ مجموعة حلها {٠}.

معلومة مفيدة:

المجموعة الخالية نعبر عنها بأحد الرمزين { } أو ∅

مثال (٢)

أوجد مجموعة حل المعادلة: |٢ص − ٣| = ٧، ثم تحقق من صحة الحل.

الحل: |٢ص − ٣| = ٧

٢ص − ٣ = ٧	أو	٢ص − ٣ = −٧	قيمة ٢ص − ٣ يمكن أن تكون ٧ أو −٧.
٢ص = ١٠		٢ص = −٤	إضافة +٣ إلى طرفي المعادلة.
ص = ٥		ص = −٢	قسمة كل طرف على ٢.

مجموعة الحل = {−٢، ٥}

تحقق: عندما ص = ٥ | وعندما ص = −٢

|٢ص − ٣| = ٧	|٢ص − ٣| = ٧
|٢(٥) − ٣| ≟ ٧	|٢(−٢) − ٣| ≟ ٧
|٧| = ٧ ✓	|−٧| = ٧ ✓

حاول أن تحل

٢ أوجد مجموعة حل كلّ من المعادلتين، ثم تحقق من صحة الحل.

أ |٥س + ٣| = ٨

ب |٢س − ١| = ٠

عند حل مسائل متعددة الخطوات، ابدأ بوضع التعبير الذي يتضمن القيمة المطلقة في طرف واحد.

مثال (٣)

أوجد مجموعة حل المعادلة: |٢س + ١| + ٣ = ٠

الحل: |٢س + ١| + ٣ = ٠

|٢س + ١| = −٣

وحيث إن −٣ < ٠ (عدد سالب)

∴ مجموعة الحل = ∅

حاول أن تحل

٣ أوجد مجموعة حل المعادلة: ٥ + |−٢س + ٤| = ٠

مثال (٤)

أوجد مجموعة حل المعادلة ٤|٢س + ٣| − ٥ = ١١

الحل: ٤|٢س + ٣| − ٥ = ١١

٤|٢س + ٣| = ١٦ — إضافة ٥ إلى طرفي المعادلة

|٢س + ٣| = ٤ — قسمة كل طرف على ٤

٢س + ٣ = ٤ أو ٢س + ٣ = −٤

٢س = ١ | ٢س = −٧ — إضافة −٣ إلى طرفي المعادلة

س = $\frac{١}{٢}$ | س = $\frac{-٧}{٢}$ — قسمة كل طرف على ٢

مجموعة الحل = $\left\{\frac{١}{٢}، \frac{-٧}{٢}\right\}$

حاول أن تحل

٤ أوجد مجموعة حل كلّ من المعادلتين:

أ ٣|٢س + ٤| −٦ = ٠

ب |٥س − ٤| + ٣ = ٠

عند حل المعادلة $|س| = |ص|$ نستخدم طريقة المساواة، نضع س = ص أو س = −ص. ونحل المعادلات أو نستخدم طريقة تربيع الطرفين ثم نحل المعادلة الناتجة ونتحقق من القيم بالتعويض عن المجهول لتحديد مجموعة الحل.

مثال (٥)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $|٢م - ٣| = |م + ١|$

الحل:

أولًا: طريقة المساواة

لاحظ أن للمقدارين القيمة المطلقة نفسها إذًا هما متساويان، أو كل منهما هو المعكوس الجمعي للآخر.

$٢م - ٣ = م + ١$

$٢م - م = ١ + ٣$

$م = ٤$

أو

$٢م - ٣ = -م - ١$

$٢م + م = -١ + ٣$

$٣م = ٢$

$م = \frac{٢}{٣}$

مجموع الحل = $\left\{٤ ، \frac{٢}{٣}\right\}$

ثانيًا: طريقة تربيع الطرفين

$\left(|٢م - ٣|\right)^٢ = \left(|م + ١|\right)^٢$

$(٢م - ٣)^٢ = (م + ١)^٢$ $\qquad |م|^٢ = م^٢$

$٤م^٢ - ١٢م + ٩ = م^٢ + ٢م + ١$

$٣م^٢ - ١٤م + ٨ = ٠$

$(م - ٤)(٣م - ٢) = ٠$

$م = ٤$ أو $م = \frac{٢}{٣}$

تحقق: $|٢م - ٣| = |م + ١|$

عندما $م = ٤$

$|٢ \times ٤ - ٣| \stackrel{?}{=} |٤ + ١|$

$|٥| = |٥|$ ✓

عندما $م = \frac{٢}{٣}$

$\left|٢ \times \frac{٢}{٣} - ٣\right| \stackrel{?}{=} \left|\frac{٢}{٣} + ١\right|$

$\left|-\frac{٥}{٣}\right| = \left|\frac{٥}{٣}\right|$ ✓ الحلّان مقبولان

مجموعة الحل = $\left\{\frac{٢}{٣} ، ٤\right\}$

أضف إلى معلوماتك:

$|س^٢| = |س|^٢ = س^٢$

معلومة رياضية:

إذا كان $|س| = |ص|$ فإن

- س = ص أو س = −ص.
- $\left(|س|\right)^٢ = \left(|ص|\right)^٢$

حاول أن تحل

٥ أوجد مجموعة حل كل من المعادلتين التاليتين:

أ $|ص - ٥| = |٢ص + ٣|$ ب $|س - ٥| = |س - ٧|$

استخدم طريقة المساواة ثم طريقة التربيع.

يمكننا كذلك حل معادلات تتضمن قيمة مطلقة في أحد طرفيها على النحو التالي:

مثال (٦)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $|٢س + ٣| = ٣س - ٢$

الحل: $|٢س + ٣| = ٣س - ٢$

نعلم أن الطرف الأيمن للمعادلة غير سالب نتيجة وجود القيمة المطلقة، إذًا يجب أن يكون الطرف الأيسر للمعادلة غير سالب. لذلك نضيف الشرط:

$٣س - ٢ \geq ٠$ أي $س \geq \frac{٢}{٣}$ (تقبل كل قيم س أكبر من أو تساوي $\frac{٢}{٣}$)

أي أن مجموعة التعويض هي $\left[\frac{٢}{٣}، \infty\right)$

$٢س + ٣ = ٣س - ٢$

$٢س - ٣س = -٢ - ٣$

$-س = -٥$

$س = ٥$

$\because ٥ \in \left[\frac{٢}{٣}، \infty\right)$

$\therefore$ الحل $س = ٥$ مقبول

أو

$٢س + ٣ = -٣س + ٢$

$٢س + ٣س = ٢ - ٣$

$٥س = -١$

$س = \frac{-١}{٥}$

$\because -\frac{١}{٥} \notin \left[\frac{٢}{٣}، \infty\right)$

$\therefore$ الحل $س = -\frac{١}{٥}$ مرفوض

مجموعة الحل = $\{٥\}$

أضف إلى معلوماتك:

$\sqrt{س^٢} = |س|$

$(\sqrt{س})^٢ = س$ (حيث $س \geq ٠$)

معلومة مفيدة:

مجموعة الحل هي مجموعة جزئية من مجموعة التعويض

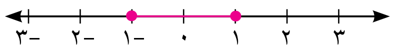
حاول أن تحل

٦ أوجد مجموعة حل المعادلة: $|٤س - ١| = س + ٢$.

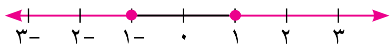
حل متباينات تتضمن قيمة مطلقة

يمكن أيضًا حل متباينات تتضمن قيمًا مطلقة باستخدام خط الأعداد.

يبيّن التمثيل البياني الأول حلول المتباينة |س| ≥ ١ .



يبيّن التمثيل البياني الثاني حلول المتباينة |س| ≤ ١ .



تعميم

ليكن ﺃ عددًا حقيقيًا موجبًا.

١ |س| ≥ ﺃ تكافئ -ﺃ ≥ س ≥ ﺃ

٢ |س| ≤ ﺃ تكافئ س ≤ ﺃ أو س ≥ - ﺃ

تذكر:

- |س| ≥ ١ تعني أن بعد س عن الصفر هو أصغر من أو يساوي ١ على خط الأعداد.
- |س| ≤ ١ تعني أن بعد س عن الصفر هو أكبر من أو يساوي ١ على خط الأعداد.

مثال (٧)

أوجد مجموعة حل المتباينة ٤|٢س + ١| + ٤ ≥ ١٢، ومثّل مجموعة الحل على خط الأعداد.

الحل: ٤|٢س + ١| + ٤ ≥ ١٢

٤|٢س + ١| ≥ ٨ إضافة (-٤) إلى طرفي المتباينة

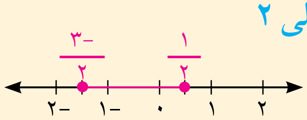
|٢س + ١| ≥ ٢ قسمة كل طرف على ٤

-٢ ≥ ٢س + ١ ≥ ٢ كتابة المتباينة المكافئة

-٣ ≥ ٢س ≥ ١ إضافة (-١)

$\frac{-٣}{٢}$ ≥ س ≥ $\frac{١}{٢}$ القسمة على ٢

مجموعة الحل = [-$\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$]



حاول أن تحل

٧ أوجد مجموعة حل المتباينة |$\frac{١}{٢}$ س - $\frac{٤}{٥}$| > ٦ , ٠ ومثّل مجموعة الحل على خط أعداد.

مثال (٨)

أوجد مجموعة حل المتباينة: ٢|٣م − ٤| − ١ > ٥، ومثّل الحل على خط الأعداد.

الحل: ٢|٣م − ٤| − ١ > ٥

٢|٣م − ٤| > ٦ إضافة ١ إلى طرفي المتباينة

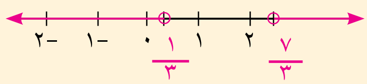
|٣م − ٤| > ٣ قسمة كل طرف على ٢

٣م − ٤ > ٣ أو ٣م − ٤ < −٣ كتابة المتباينة المكافئة

٣م > ٧ | ٣م < ١ بسِّط

م > $\frac{٧}{٣}$ | م < $\frac{١}{٣}$ قسمة كل طرف على ٣

مجموعة الحل = ($\frac{٧}{٣}$ ، ∞) ∪ (−∞، $\frac{١}{٣}$)



حاول أن تحل

٨ أوجد مجموعة حل المتباينة: |$\frac{٣}{٤}$ − س| ≥ $\frac{٧}{٨}$ ومثّل الحل على خط الأعداد.

مثال (٩) تطبيقات حياتية (إثرائي)

رياضة: يبلغ طول قطر دائرة مرمى كرة السلة ٤٥ سم مع هامش خطأ لا يزيد على ١ سم.

أ اكتب متباينة تتضمن قيمة مطلقة تعبر عن قطر دائرة مرمى تحقق هذا الشرط.

ب أوجد قيم طول القطر المقبولة ومثّلها على خط أعداد.

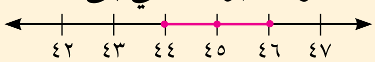
الحل:

ليكن س طول قطر دائرة مرمى كرة سلة، وحيث إن س لا يزيد أو ينقص عن ٤٥ سم بأكثر من ١ سم، فإن قيم س تحقق |س − ٤٥| ≤ ١.

−١ ≤ س − ٤٥ ≤ ١

٤٤ ≤ س ≤ ٤٦

مجموعة الحل = [٤٤، ٤٦] أي أن قيم طول القطر المقبولة تنتمي إلى [٤٤، ٤٦]



حاول أن تحل

٩ درجة حموضة عصير الطماطم هي ٤ مع هامش سماح ٠,٢. اكتب متباينة تتضمن قيمة مطلقة تعبر عن درجات الحموضة المقبولة. وحلها ثم بيّن الحل على خط أعداد.

مثال (١٠) **تطبيقات حياتية**

يبلغ وزن عبوة رقائق الذرة ٤٥٠ جرامًا. يختار مراقب الجودة بعض العبوات للتحقق من زنتها.
تلغى كل علبة يزيد الفرق بين وزنها ووزن عبوة الذرة عن ٥ جم.
اكتب متباينة تبيّن أوزان العبوات غير المقبولة ومثّل الحل على خط الأعداد.

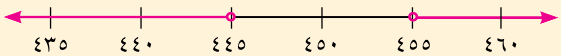
الحل:

لتكن س وزن العبوة. العبوات غير المقبولة هي التي يزيد وزنها أو يقل عن الوزن المبين بأكثر من ٥ جم.

أي |س − ٤٥٠| > ٥

س − ٤٥٠ > ٥ أو س − ٤٥٠ < −٥

س > ٤٥٥ أو س < ٤٤٥



حاول أن تحل

١٠ يعرض أحد المحلات المثلجات في عبوات تزن ٧٥٠ جرامًا. عند التحقق من الوزن تقبل العبوات التي يقل الفرق بين وزنها ووزن العبوة المعتمد عن ٤٠ جرامًا.
اكتب متباينة تتضمن قيمة مطلقة تبيّن أوزان العبوات المقبولة ومثّل الحل على خط الأعداد.

دالة القيمة المطلقة
Absolute Value Function

سوف تتعلم

- الرسم البياني لدالة القيمة المطلقة
- استخدام هندسة التحويلات في رسم بعض دوال القيمة المطلقة

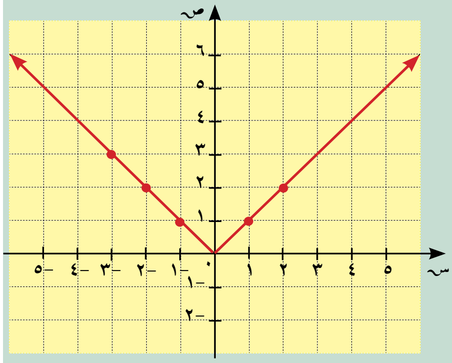
دعنا نفكر ونتناقش

المعادلات على الشكل ص = |أس + ب| + جـ تمثل دوال قيمة مطلقة بمتغيرين.

يمثل الرأس أكبر قيمة أو أصغر قيمة للدالة والتمثيل البياني لهذه الدوال يكون على شكل زاوية.

لرسم الدالة ص = |س| بيانيًا يمكن استخدام جدول قيم.

س	٢	١	٠	–١	–٢	–٣
ص = |س|	٢	١	٠	١	٢	٣



يمكن أيضًا كتابة ص = |س| دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

ص = { س : س > ٠
٠ : س = ٠
–س : س < ٠ }

تعميم

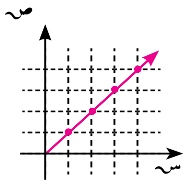
رأس منحنى الدالة ص = |أس + ب| + جـ هو النقطة $\left(-\frac{ب}{أ}\text{ ، }جـ\right)$

ملاحظة: رأس منحنى الدالة ص = |أس + ب| هو النقطة $\left(-\frac{ب}{أ}\text{ ، }٠\right)$

معلومة رياضية:

الرسم البياني للدالة

ص = س : س ≥ ٠ هو:



مثال (١)

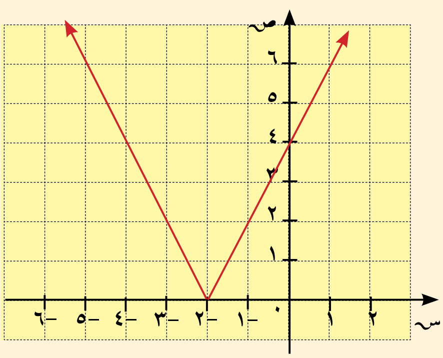
ارسم بيانيًّا الدالة: ص = |٢س + ٤|.

الحل: رأس منحنى الدالة هو $\left(-\frac{ب}{أ}\text{ ، }٠\right)$

$\frac{-ب}{أ} = \frac{-٤}{٢} = -٢$ أي أن رأس المنحنى (–٢، ٠).

نضع جدول قيم للأزواج المرتبة (س، ص) يتضمن رأس المنحنى.

س	٠	–١	–٢	–٣	–٤
ص	٤	٢	٠	٢	٤



حاول أن تحل

١ ارسم بيانيًّا الدالة: ص = –|٢س + ٣|.

مثال (٢)

ارسم بيانيًّا الدالة ص = |س − ٣| + ٢ بعد كتابتها دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

الحل:

نعيد الكتابة دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

ص = |س − ٣| + ٢

ص = { س − ٣ + ٢ : س − ٣ ≥ ٠
 −(س − ٣) + ٢ : س − ٣ < ٠

ص = { س − ١ : س ≥ ٣
 −س + ٥ : س < ٣

رأس منحنى الدالة $\left(\frac{-ب}{أ}\right.$، ج) = (٣، ٢)

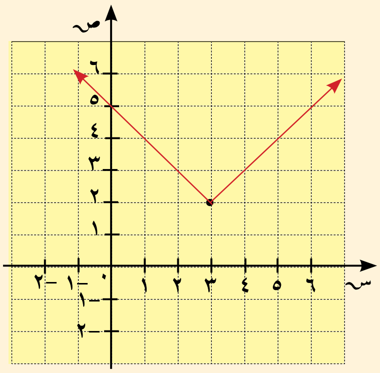
نرسم بيانيًّا كلًّا من:

ص = س − ١ حيث س ≥ ٣،

س	٣	٤	٥
ص	٢	٣	٤

ص = −س + ٥ حيث س < ٣.

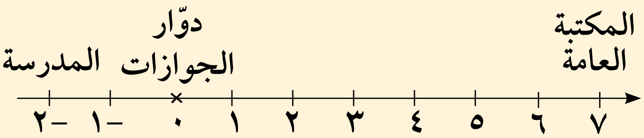
س	٣	٢	١
ص	٢	٣	٤



حاول أن تحل

٢ ارسم بيانيًّا الدالة: ص = $\left|\frac{١}{٢}\right.$ س + ١| − ٣ بعد كتابتها دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

مثال (٣)



يقع منزل إبراهيم بين مدرسته والمكتبة العامة كما في الشكل، وتوجد هذه المواقع الثلاثة على خط مستقيم يمر بدوّار الجوازات.
تبعد المدرسة عن الدوّار ٢ كم وتبعد المكتبة العامة عنه ٧ كم في الاتجاه المعاكس. كم يبعد منزل إبراهيم عن الدوّار إذا كان البعد بين المنزل والمكتبة العامة مثلي البعد بين المنزل والمدرسة؟

الحل:

ليكن س موقع المنزل على الخط المستقيم.

∴ |س − (−٢)| البعد بين المنزل والمدرسة، |٧ − س| البعد بين المنزل والمكتبة.

∴ |٧ − س| = ٢|س + ٢|

|س − ٧| = |٢س + ٤| خواص القيمة المطلقة

س − ٧ = ٢س + ٤ أو س − ٧ = −٢س − ٤

٢س − س = −٧ − ٤ | س + ٢س = ٧ − ٤

س = −١١ مرفوضة، لماذا؟ | ٣س = ٣

س = ١

يبعد منزل إبراهيم ١ كم عن الدوّار لجهة المكتبة العامة.

حاول أن تحل

٣ في مثال (٣)، ناقش حل المسألة إذا كانت المكتبة العامة تبعد ٤ كم عن الدوّار.

رسم بيان دوال المطلق باستخدام بعض التحويلات الهندسية

Graph of Absolute Value Functions Using some Geometric Transformations

سوف نستخدم الإزاحة (الانسحاب) أفقيًّا أو رأسيًّا أو الاثنين معًا في رسم بعض دوال القيمة المطلقة.

مثال (٤)

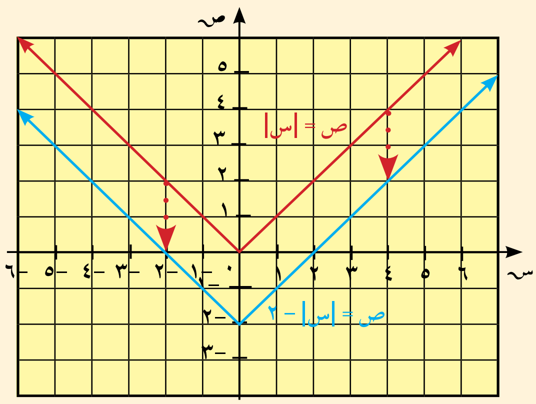
ارسم بيان كل من الدالتين: ص = |س|، ص = |س| − ٢.

صف كيف يرتبط الرسم البياني للدالة ص = |س| − ٢ بالرسم البياني للدالة ص = |س|.

الحل:

اصنع جدول قيم، ثم ارسم بيانيًّا.

س	ص = |س|	ص = |س| − ٢
−٤	٤	٢
−٢	٢	٠
٠	٠	−٢
٢	٢	٠
٤	٤	٢



لكل قيمة للمتغير س، تكون قيمة ص = |س| −٢ أصغر بـ ٢ من قيمة ص = |س|.

الرسم البياني لِـ ص = |س| −٢ هو صورة للرسم البياني لِـ ص = |س| بعد إزاحته وحدتين إلى أسفل.

حاول أن تحل

٤ لكل زوج من الدوال، قارن بين الرسمين البيانيين. صف كيف يتم الانتقال من الرسم البياني الأول إلى الثاني.

أ ص = |س|، ص = |س| − ٤

ب ص = −|س|، ص = −|س| + ٣

دالة المرجع هي دالة نستخدم بيانها للحصول على بيان دوال أخرى بإجراء بعض التحويلات الهندسية.

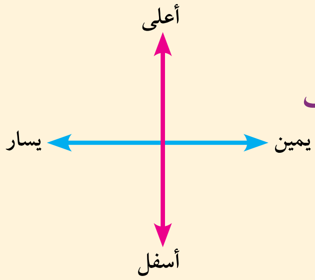
بعض دوال المرجع هي: ص = ٲس حيث ٲ ≠ ٠ ، ص = س^{٢} ، ص = |س|، ص = − |س|، ...

الرسم البياني للدالة ص = س + ك (ك عدد حقيقي موجب) ينتج من انسحاب الرسم البياني للدالة ص = س إلى الأعلى ك وحدة.
كذلك ينتج الرسم البياني للدالة ص = س − ك من انسحاب الرسم البياني للدالة ص = س إلى الأسفل ك وحدة.

التمثيل البياني للدالة ص = |س| ± ك ينتج من انسحاب التمثيل البياني للدالة ص = |س| إلى الأعلى (أو إلى الأسفل) ك وحدة.

وبالمثل التمثيل البياني للدالة ص = − |س| ± ك ينتج من انسحاب التمثيل البياني للدالة ص = − |س| (إلى الأعلى أو إلى الأسفل ك وحدة).

مثال (٥)

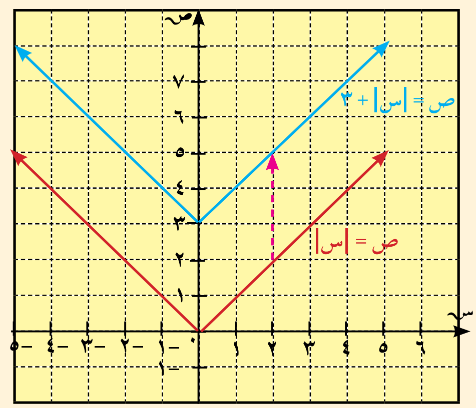


لكل من الدالتين، حدّد دالة المرجع وارسم بيانها، ثم ارسم كل من الدالتين بيانيًّا مستخدمًا الانسحاب بعد تحديد مسافة الانسحاب واتجاهه.

أ ص = |س| + ٣

الحل:

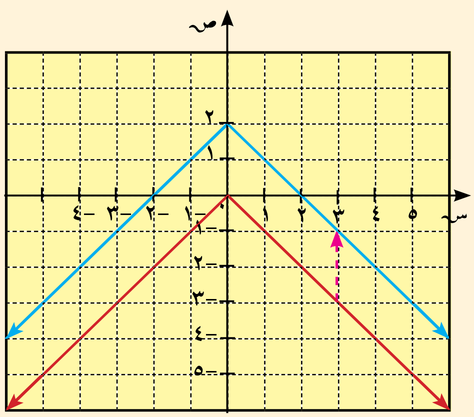
أ دالة المرجع هي ص = |س|، ك = ٣
أزح الرسم البياني للدالة ص = |س|
٣ وحدات إلى الأعلى.



ب ص = −|س| + ٢

الحل:

ب دالة المرجع هي ص = −|س|، ك = ٢
أزح الرسم البياني للدالة ص = −|س|
وحدتين إلى الأعلى.



حاول أن تحل

٥ استخدم دالة المرجع والانسحاب لرسم الدالة ص = |س| + ٥.

ملاحظة: يمكنك عمل جدول للقيم وتحديد بعض النقاط للتحقق من صحة الرسم.

يتشارك الانسحاب الأفقي مع الانسحاب الرأسي ببعض الخصائص.

الرسم البياني للدالة ص = |س + ل| (حيث ل عدد حقيقي موجب) هو انسحاب للرسم البياني للدالة ص = |س|، ل وحدة إلى جهة اليسار. كذلك الرسم البياني للدالة ص = |س − ل| هو انسحاب لدالة المرجع ص = |س|، ل وحدة إلى جهة اليمين.

مثال (٦)

لكل من الدالتين، حدّد قيمة مسافة الانسحاب ل ثم ارسم بيانيًّا كل دالة مستخدمًا الإزاحة، معتبرًا دالة المرجع ص = |س|

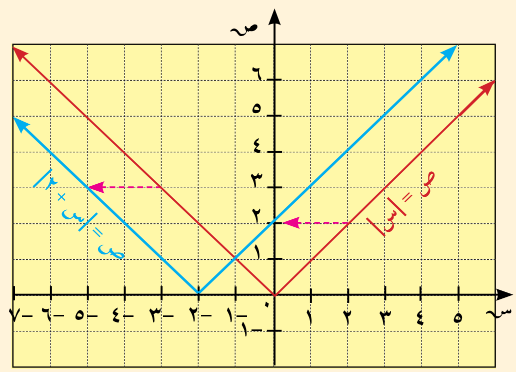
أ ص = |س + ٢|

الحل:

دالة المرجع هي ص = |س|، ل = ٢

الإشارة (+) تعني الإزاحة إلى اليسار.

أزح رسم ص = |س| وحدتين إلى اليسار.



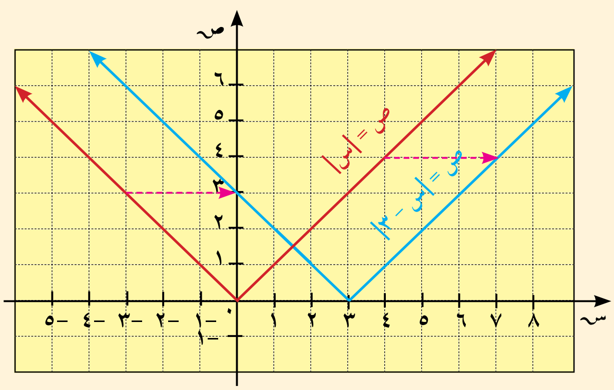
ب ص = |س − ٣|

الحل:

دالة المرجع هي ص = |س|، ل = ٣

الإشارة (−) تعني الإزاحة إلى اليمين.

أزح رسم ص = |س| ثلاث وحدات إلى اليمين.



حاول أن تحل

٦ استخدم دالة المرجع والانسحاب لرسم الدالة ص = $\left|س + \frac{٥}{٢}\right|$.

الرسم البيانيّ للدالة: ص = − |س + ل| حيث ل ∈ ح₊ هو انسحاب للرسم البياني للدالة ص = −|س|، ل وحدة إلى جهة اليسار.
كذلك الرسم البياني للدالة ص = − |س − ل| هو انسحاب لدالة المرجع ص = − |س|، ل وحدة إلى جهة اليمين.

مثال (٧)

لكلّ من الدالتين، حدد قيمة مسافة الانسحاب ل، ثم ارسم بيانيًّا كل دالة مستخدمًا الإزاحة، معتبرًا دالة المرجع ص = − |س|

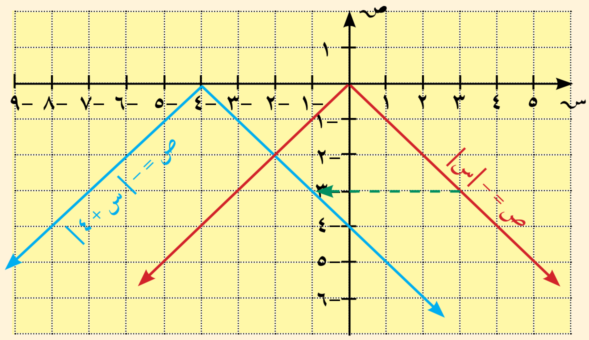
أ ص = − |س + ٤|

الحل:

دالة المرجع ص = − |س|، ل = ٤

(+٤) تعني الانسحاب أربعة وحدات إلى جهة اليسار.

ضع الرأس (−٤، ٠) ثم ارسم بيانيًّا الدالة.



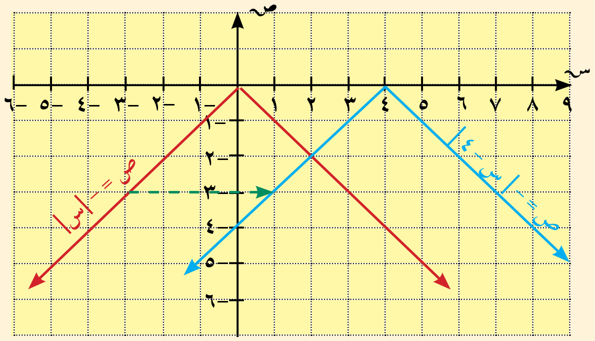
ب ص = −|س − ٤|.

الحل:

دالة المرجع: ص = −|س|، ل = ٤

(−٤) تعني الانسحاب أربعة وحدات إلى جهة اليمين.

ضع الرأس (٤، ٠) ثم ارسم بيانيًّا الدالة.



حاول أن تحل

٧ لكلّ من الدالتين، حدد دالة المرجع وقيمة مسافة الانسحاب ل، ثم ارسم بيانيًّا كل دالة مستخدمًا الانسحاب.

أ ص = − |س − ٢|.

ب ص = −|س + ٣|.

تعرفت كيفية استخدام الانسحاب الأفقي أو الرأسي لدوال المرجع للحصول على رسم بياني لبعض دوال القيمة المطلقة. يمكن أيضًا استخدام الانسحابين الأفقي والرأسي معًا للحصول على بعض الرسوم البيانيّة للدوال: ص = |س + ل| + ك

مثال (٨)

ارسم بيانيًّا كلًّا من الدالتين:

أ ص = |س − ٢| + ١

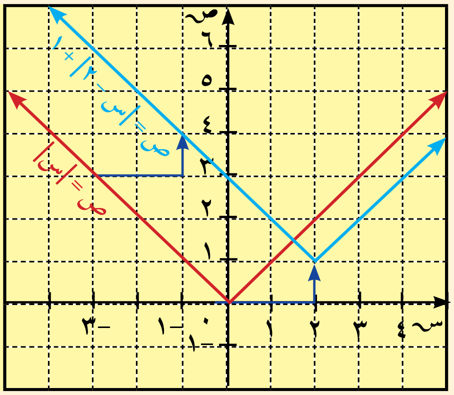
الحل:

دالة المرجع ص = |س|، ل = ٢، ك = ١

(−٢) تعني الانسحاب وحدتين إلى جهة اليمين.

(+١) تعني الانسحاب وحدة واحدة إلى الأعلى.

ضع الرأس (٢، ١) ثم ارسم بيانيًّا الدالة.



ب ص = −|س + ٣| − ٢

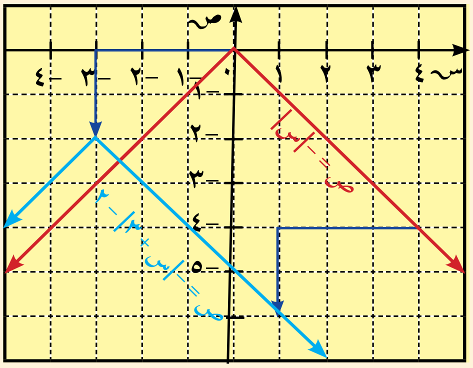
الحل:

دالة المرجع هي ص = −|س|، ل = ٣، ك = ٢

(+٣) تعني الانسحاب ٣ وحدات إلى جهة اليسار.

(−٢) تعني الانسحاب وحدتين إلى أسفل.

ضع الرأس (−٣، −٢) ثم ارسم بيانيًّا الدالة.



حاول أن تحل

٨ استخدم دالة المرجع والانسحاب لرسم الدالة:

أ ص = |س + ٤| + ٣

ب ص = −|س − ٥| − ٣

يمكنك رسم بيان الدالتين في مثال (٨) بتحديد رأس منحنى الدالة، وتحديد بعض النقاط.

حل نظام معادلتين خطيتين
Solving a System of Two Linear Equations

سوف تتعلم

- حل نظام معادلتين خطيتين بيانيًّا
- حل نظام معادلتين خطيتين جبريًّا باستخدام طريقة الحذف
- حل نظام معادلتين خطيتين جبريًّا باستخدام طريقة التعويض

معلومة رياضية:

نستخدم الأقواس الكبيرة } قبل كتابة نظام المعادلات.

معلومة مفيدة (تكنولوجيا)

لإدخال البيانات في الآلة الحاسبة، نعتمد الصيغة:

١ MODE EQN $a_n x + b_n y = c_n$

أو

٢ MODE MODE EQN 2 Unknowns

يظهر على الشاشة

$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline ١ & . & . & . \\ ٢ & . & . & . \end{array}$$

ملاحظة: ١ معظم الآلات الحاسبة تعتمد الصيغة

أس + ب ص = جـ ، $ax + by = c$

٢ تختلف صيغة إدخال البيانات من آلة حاسبة إلى أخرى لذلك ينصح بمراجعة الدليل المرفق بكل آلة حاسبة.

استكشاف: تحليل الرسوم البيانية

١ أ { ص = ٢س + ٣ ، ص = –س + ١ 　 ب { ص = ٢س + ١ ، ص = ٢س 　 جـ { ص = ٢س + ٢ ، ٤س – ٢ص + ٤ = ٠

٢ لكل زوج من المعادلات أجب عن السؤال التالي:

هل للرسوم البيانية نقاط مشتركة؟ ما عددها؟

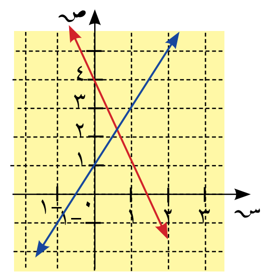
نظام معادلات هو مجموعة من معادلتين أو أكثر تستخدم المتغيرات نفسها. إذا كان الرسم البياني لكل معادلة في نظام من معادلتين هو خط مستقيم، فإن النظام يدعى نظامًا خطيًّا.

فمثلًا { ٢س + ٣ص = ٤ ، –س + ٢ص = ٣ هو نظام خطي

حل نظام معادلات هو إيجاد قيم المتغيرات التي تحقق كل معادلات النظام.

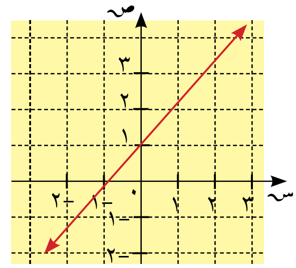
يمكن حل نظام معادلتين خطيتين هندسيًّا بتمثيل معادلاتهما بيانيًّا.

يمكن لنظام معادلتين خطيتين أن يكون له حل واحد أو لا حل، أو عدد لانهائي من الحلول.



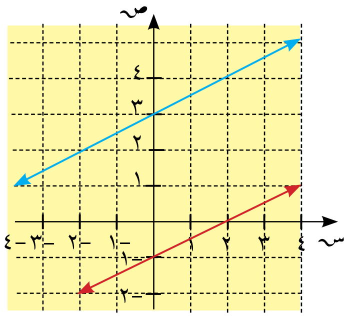
المستقيمان متقاطعان

للنظام حل واحد



المستقيمان منطبقان

للنظام عدد لانهائي من الحلول



المستقيمان متوازيان غير منطبقين

لا حل للنظام

مثال (١)

أوجد مجموعة حل النظام { ٢س − ٣ص = ١ ، ٣س + ٤ص = ١٠ } بيانيًّا وتحقق من الحل.

الحل:

ارسم بيانيًّا المستقيم الذي يمثل كل معادلة.

٢س − ٣ص = ١			
س	٠	١	٢
ص	$\frac{-١}{٣}$	$\frac{١}{٣}$	١

٣س + ٤ص = ١٠			
س	٠	١	٢
ص	٢ $\frac{١}{٢}$	١ $\frac{٣}{٤}$	١

نقطة تقاطع المستقيمين (٢، ١)

تحقق: تحقق ما إن كان الزوج المرتب (٢، ١) يحقق كلتا المعادلتين.

٢س − ٣ص = ١

٢(٢) − ٣(١) ≟ ١

٤ − ٣ ≟ ١

١ = ١ ✓

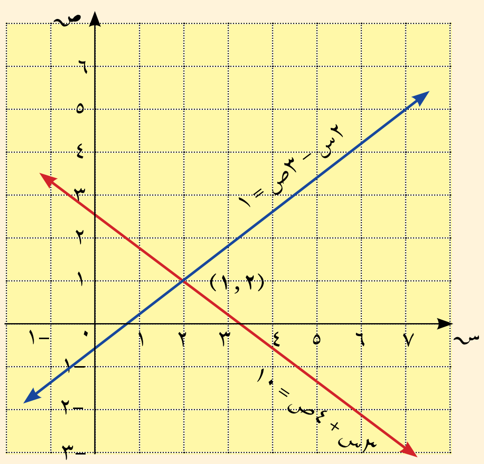
٣س + ٤ص = ١٠

٣(٢) + ٤(١) ≟ ١٠

٦ + ٤ ≟ ١٠

١٠ = ١٠ ✓

∴ مجموعة حل النظام = {(٢، ١)}



حاول أن تحل

١ أوجد مجموعة حل النظام { ٢س + ص = ٥ ، −س + ص = −١ } بيانيًّا وتحقق من الحل.

يمكن حل نظام معادلتين خطيتين جبريًّا **بطريقة الحذف**. نستخدم خاصية الجمع والضرب في المعادلات.

مثال (٢)

استخدم طريقة الحذف لإيجاد مجموعة حل النظام $\left\{\begin{array}{l} ٢س - ص = ١٣ \\ ٣س + ص = ٧ \end{array}\right.$

الحل:

$\left\{\begin{array}{l} ٢س - ص = ١٣ \\ \underline{٣س + ص = ٧} \end{array}\right.$ ١ معامل ص في المعادلة الثانية هو المعكوس الجمعي ٢ لمعامل ص في المعادلة الأولى لذلك نجمع المعادلتين

٥س = ٢٠

س = ٤

٣س + ص = ٧ اختر إحدى المعادلتين

٣(٤) + ص = ٧ عوّض عن س بـ ٤ في المعادلة ٢

١٢ + ص = ٧ بسِّط

ص = −٥

مجموعة الحل = {(٤، −٥)}.

حاول أن تحل

٢ استخدم طريقة الحذف لإيجاد مجموعة حل النظام $\left\{\begin{array}{l} ٢س + ٣ص = ١١ \\ -٢س + ٤ص = ١٠ \end{array}\right.$

يمكن أن تحوّل صيغ معادلتي النظام بحيث يصبح معاملا ص (أو س) كل منهما المعكوس الجمعي للآخر باستخدام خاصيّة الضرب في المعادلات.

مثال (٣)

استخدم طريقة الحذف لإيجاد مجموعة حل النظام $\left\{\begin{array}{l} ٢س + ٣ص = ٣ \\ ٣س - ٥ص = ١٤ \end{array}\right.$

الحل: ٢س + ٣ص = ٣ ١

٣س − ٥ص = ١٤ ٢

٢س + ٣ص = ٣... اضرب المعادلة ١ في ٥ ⟵ ١٠س + ١٥ص = ١٥

٣س − ٥ص = ١٤... اضرب المعادلة ٢ في ٣ ⟵ ٩س − ١٥ص = ٤٢ اجمع

١٩س = ٥٧

س = ٣

$$\begin{aligned} ٢س + ٣ص &= ٣ && \text{اختر إحدى المعادلتين} \\ ٢(٣) + ٣ص &= ٣ && \text{عوّض عن س بـ ٣ في المعادلة ١} \\ ٦ + ٣ص &= ٣ \\ ٣ص &= -٣ \\ ص &= -١ \end{aligned}$$

مجموعة الحل = {(٣، -١)}

حاول أن تحل

٣ استخدم طريقة الحذف لإيجاد مجموعة حل النظام $\left\{\begin{aligned} ٢س + ٣ص &= ١٢ \\ ٥س - ص &= ١٣ \end{aligned}\right.$

يمكن أيضًا حل نظام معادلتين جبريًا بطريقة التعويض.

حدّد قيمة أحد المتغيرين بدلالة الآخر في إحدى المعادلتين، وعوّض عنه بقيمته في المعادلة الثانية.

مثال (٤)

استخدم طريقة التعويض لحل النظام $\left\{\begin{aligned} ٣م - ل &= ١ \\ ٣م - ٢ل &= ٥ \end{aligned}\right.$

الحل: في المعادلة الأولى (تم اختيارها لأنها أسهل)، حدّد قيمة ل بدلالة م.

$$٣م - ل = ١$$

$$ل = ٣م - ١$$

في المعادلة الثانية عوّض عن ل بقيمتها:

$$\begin{aligned} ٣م - ٢(٣م - ١) &= ٥ \\ ٣م - ٦م + ٢ &= ٥ && \text{بسِّط} \\ -٣م &= ٣ \\ م &= -١ \end{aligned}$$

عوّض عن م بـ (-١) في ل = ٣م - ١

$$ل = ٣(-١) - ١$$

$$ل = -٤$$

حل النظام هو: م = -١، ل = -٤

حاول أن تحل

٤ حل النظام $\left\{\begin{aligned} ت &= ٢ر + ٣ \\ ٥ر - ٤ت &= ٦ \end{aligned}\right.$ مستخدمًا طريقة التعويض.

مثال (٥) **تطبيقات حياتية**

دفع محمد ٢,٨٠٠ دينار ثمن ٦ أكواب شاي وقطعتي حلوى، ودفع سالم في المكان نفسه ٥,٢٠٠ دنانير ثمن كوبين من الشاي و٦ قطع حلوى. ما سعر كوب الشاي وما سعر قطعة الحلوى؟

الحل:

ليكن ش سعر كوب الشاي، حـ سعر قطعة الحلوى

محمد	٦ أكواب شاي ٦ × ش	و +	قطعتا حلوى ٢ × حـ	دفع =	٢,٨٠٠ دينار = ٢,٨٠٠
سالم	كوبان من الشاي ٢ × ش	و +	٦ قطع حلوى ٦ × حـ	دفع =	٥,٢٠٠ دنانير = ٥,٢٠٠

لمعرفة الأسعار نحل النظام: $\begin{cases} ٦ش + ٢حـ = ٢,٨٠٠ \\ ٢ش + ٦حـ = ٥,٢٠٠ \end{cases}$

باستخدام أي من الطرائق التي سبق عرضها نحصل على: ش = ٠,٢٠٠، حـ = ٠,٨٠٠.

أي أن سعر كوب الشاي = ٠,٢٠٠ دينار، وسعر قطعة الحلوى = ٠,٨٠٠ دينار.

حاول أن تحل

٥ وزعت ٦ كجم من المربى في ١٤ عبوة، بعض العبوات يحتوي على ٥٠٠ جم وبعضها الآخر على ٣٧٥ جم.
ما عدد العبوات من كل نوع؟

١ – ٧

حل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد
Solving Quadratic Equations in One Variable

سوف تتعلم

- قانون حل المعادلات من الدرجة الثانية
- استخدام المميز Δ
- المقارنة بين المعادلة والشكل البياني للدالة من الدرجة الثانية باستخدام Δ
- مجموع وناتج ضرب جذري المعادلة
- إيجاد معادلة من الدرجة الثانية إذا علم جذراها

دعنا نفكر ونتناقش

سبق أن قمت بحلّ بعض معادلات الدرجة الثانية بالتحليل، كما في المثال التالي:

حلّ المعادلة: س^٢ – ٧س + ١٠ = ٠

الحل:

س^٢ – ٧س + ١٠ = ٠

(س – ٢)(س – ٥) = ٠

∴ س – ٢ = ٠ أو س – ٥ = ٠

أي س = ٢ أو س = ٥

إذًا حلّ المعادلة هو س = ٢ أو س = ٥

لكن بعض المعادلات يصعب (أو لا يمكن) حلها بالتحليل.

لذلك نبحث عن طريقة أخرى هي بإكمال المربع، كما في المثال التالي:

حلّ المعادلة: س^٢ + ٦س – ٥ = ٠

الحل: نأخذ المربع الكامل: (س + ص)^٢ = س^٢ + ٢س ص + ص^٢

وبالمقارنة مع المعادلة ٢س ص = ٦س

نحصل على ص = ٣، ص^٢ = ٩

وعليه، لحل المعادلة نضيف للطرفين ص^٢ = ٩ لنحصل على مربع كامل.

س^٢ + ٦س = ٥

س^٢ + ٦س + ٩ = ٥ + ٩ بإكمال المربع للمقدار س^٢ + ٦س

(س + ٣)^٢ = ١٤

س + ٣ = ±$\sqrt{١٤}$

س = –٣ + $\sqrt{١٤}$ أو س = –٣ – $\sqrt{١٤}$

إن طريقة إكمال المربع تصلح لحل أي معادلة من الدرجة الثانية.

١ – حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد بإكمال المربع:
Solving Quadratic Equation by Completing the Square

مثال (١)

أوجد مجموعة حلّ المعادلة: س^٢ + ١٠س = –١٦ بإكمال المربع.

الحل:

نكمل س^٢ + ١٠س لتصبح مربعًا كاملًا،

إرشاد:

لإكمال المربع نضيف إلى الطرفين ($\frac{١}{٢}$ معامل س)^٢

بإضافة ٢٥ إلى طرفي المعادلة نجد أن:

$س^٢ + ١٠س + ٢٥ = -١٦ + ٢٥$

$(س + ٥)^٢ = ٢٥ - ١٦$

$(س + ٥)^٢ = ٩$

$س + ٥ = \pm ٣$

$س = -٥ \pm ٣$ أي $س = -٢$ أو $س = -٨$ مجموعة الحل: {-٢، -٨}.

حاول أن تحل

١ حلّ المعادلة: $س^٢ - ٨س = -١٥$ بإكمال المربع.

٢- استخدام القانون لحل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد

Solving Quadratic Equations by Using the Quadratic Formula

تستخدم طريقة إكمال المربع لاستنتاج قانون عام لحل أي معادلة من الدرجة الثانية على الصورة: $أس^٢ + ب س + جـ = ٠$،

وذلك بأخذ مثال عددي: حلّ المعادلة: $٢س^٢ + ٦س + ١ = ٠$

المثال العددي:

$٢س^٢ + ٦س + ١ = ٠$

$س^٢ + \frac{٦}{٢}س + \frac{١}{٢} = ٠$ بالقسمة على ٢. لماذا؟

$س^٢ + ٣س = -\frac{١}{٢}$

$س^٢ + ٢\left(\frac{٣}{٢}\right)س + \left(\frac{٣}{٢}\right)^٢ = \left(\frac{٣}{٢}\right)^٢ - \frac{١}{٢}$

$\left(س + \frac{٣}{٢}\right)^٢ = \frac{٩}{٤} - \frac{١}{٢}$

$\left(س + \frac{٣}{٢}\right)^٢ = \frac{٧}{٤}$

$س + \frac{٣}{٢} = \pm\sqrt{\frac{٧}{٤}}$

$س = \frac{-٣ \pm \sqrt{٧}}{٢}$

الصورة العامة:

$أس^٢ + ب س + جـ = ٠$

$س^٢ + \frac{ب}{أ}س + \frac{جـ}{أ} = ٠$ بالقسمة على أ حيث أ ≠ ٠

$س^٢ + \frac{ب}{أ}س = -\frac{جـ}{أ}$

$س^٢ + ٢\left(\frac{ب}{٢أ}\right)س + \left(\frac{ب}{٢أ}\right)^٢ = \left(\frac{ب}{٢أ}\right)^٢ - \frac{جـ}{أ}$

$\left(س + \frac{ب}{٢أ}\right)^٢ = \frac{ب^٢}{(٢أ)^٢} - \frac{جـ}{أ}$

$\left(س + \frac{ب}{٢أ}\right)^٢ = \frac{ب^٢ - ٤أجـ}{٤أ^٢}$

$س + \frac{ب}{٢أ} = \pm\sqrt{\frac{ب^٢ - ٤أجـ}{٤أ^٢}}$

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$

من ذلك نستنتج أن:

القانون العام لحل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد:

حلّ المعادلة: $أس^٢ + ب س + جـ = ٠$، حيث أ ≠ ٠ هو: $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$

٣- حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد باستخدام القانون:

Solving Quadratic Equation in one Variable Using Formula

مثال (٢)

حلّ المعادلة: س^{٢} + ١٠ س = −١٦ باستخدام القانون.

ثم تحقق من صحة الناتج باستخدام التحليل.

الحل:

س^{٢} + ١٠ س + ١٦ = ٠ بوضع المعادلة على الصورة العامة

بمقارنة ذلك بالصورة العامة

أس^{٢} + ب س + جـ = ٠

أ = ١، ب = ١٠، جـ = ١٦

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ}}}{٢\text{أ}} \quad (١)$$

ب^{٢} − ٤أجـ = (١٠)^{٢} − ٤ × ١ × ١٦ = ٣٦

$\sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ}}$ = ٦

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ}}}{٢\text{أ}} = \frac{-١٠ \pm ٦}{٢ \times ١}$$ بالتعويض في القانون

$\text{س} = \frac{-١٠ + ٦}{٢}$ أو $\text{س} = \frac{-١٠ - ٦}{٢}$

$\text{س} = \frac{-٤}{٢}$ أو $\text{س} = \frac{-١٦}{٢}$

س = −٢ أو س = −٨

وهو ما حصلنا عليه في المثال (١) باستخدام إكمال المربع.

وإذا استخدمنا التحليل نصل إلى النتيجة نفسها (حاول ذلك بنفسك).

حاول أن تحل

٢ باستخدام القانون، أوجد مجموعة حل المعادلة:

أ س^{٢} − ٦س + ٥ = ٠

ب س(س − ٢) = ٧

مثال (٣)

حلّ المعادلة: ٢س^{٢} + ٤س − ٧ = ٠

الحل: أ = ٢ ، ب = ٤ ، جـ = −٧

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$ حيث $ب^{٢} - ٤أجـ = ٤^{٢} - ٤(٢)(-٧) = ١٦ + ٥٦ = ٧٢$

$س = \frac{-٤ \pm \sqrt{٧٢}}{٤} = \frac{-٤ \pm ٦\sqrt{٢}}{٤} = \frac{-٢ \pm ٣\sqrt{٢}}{٢}$

$س = \frac{-٢ + ٣\sqrt{٢}}{٢} \simeq ١,١٢١٣$ أو $س = \frac{-٢ - ٣\sqrt{٢}}{٢} \simeq -٣,١٢١٣$

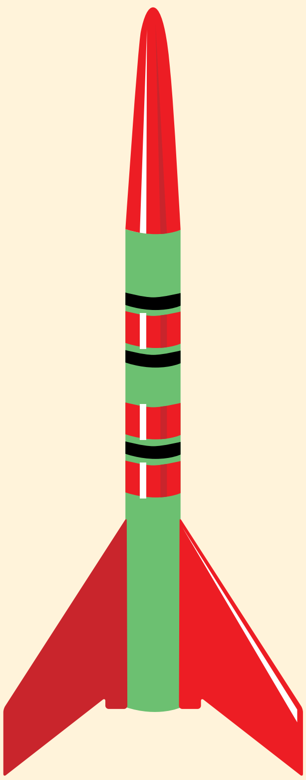
حاول أن تحل

٣ أوجد مجموعة حلّ المعادلة: $٤س^{٢} = ١٣س - ٩$

مثال (٤) **تطبيقات حياتية**

حركة الصواريخ: قامت جمعية للعلوم بصنع نموذج صاروخ، وتم إطلاقه رأسيًّا من سطح الأرض بسرعة ٣٠ مترًا/ ثانية. بعد كم ثانية يصل الصاروخ إلى ارتفاع ٤٠ مترًا؟ علمًا بأن العلاقة بين الارتفاع (ف) بالمتر، والزمن (ن) بالثانية، وسرعة الإطلاق (س) بالمتر/ ثانية، والارتفاع (ف٠) الذي أطلق منه بالمتر تعطى بالعلاقة:

$ف = -٥ن^{٢} + س\,ن + ف_{٠}$ (١)



الحل: بالتعويض في (١) عن $ف$، $س$،

حيث $ف_{٠} = ٠$ (لأنه أطلق من سطح الأرض) نجد أن:

$-٥ن^{٢} + ٣٠ن = ٤٠$ (٢)

$-٥ن^{٢} + ٣٠ن - ٤٠ = ٠$

$أ = -٥$، $ب = ٣٠$، $جـ = -٤٠$

$ن = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$ حيث $ب^{٢} - ٤أجـ = (٣٠)^{٢} - ٤(-٥)(-٤٠)$

$= ٩٠٠ - ٨٠٠ = ١٠٠$

$\sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ} = ١٠$

$ن = \frac{-٣٠ \pm ١٠}{٢(-٥)}$

$ن = \frac{-٣٠ + ١٠}{-١٠} = ٢$ أو $ن = \frac{-٣٠ - ١٠}{-١٠} = ٤$

يكون الصاروخ على ارتفاع ٤٠ مترًا من نقطة إطلاقه بعد ثانيتين (٢ ثانية) عند صعوده وبعد ٤ ثوانٍ من الانطلاق عند نزوله.

حاول أن تحل

٤ قذفت رصاصة عموديًّا إلى أعلى بسرعة ٤٠ مترًا/ ثانية. أوجد الزمن (ن ثانية) الذي تستغرقه الرصاصة كي تصل إلى ارتفاع ٨٠ مترًا علمًا أن العلاقة بين الزمن (ن) والارتفاع (ف) والسرعة (ع) هي:

ف = −٥ن^{٢} + ع ن، ع = السرعة بالمتر/ ث.

٤- استخدام المميز Δ: Using the Discriminant

من القانون العام لحل المعادلة: أس^{٢} + ب س + جـ = ٠ حيث أ ≠ ٠

تكون الصورة العامة لجذري المعادلة كالتالي:

$$س = \frac{-ب + \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ} \quad أو \quad س = \frac{-ب - \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

يسمى Δ = ب^{٢} − ٤أجـ **المميز**، وقد يكون الناتج عددًا موجبًا أو صفرًا أو عددًا سالبًا لأنه يميّز لنا **نوع جذري** المعادلة من حيث كونهما: **عددين حقيقيين مختلفين، إذا كان المميز موجبًا**

أو عددين حقيقيين متساويين، إذا كان المميز يساوي صفرًا

أو عددين غير حقيقيين، إذا كان المميز سالبًا.

ويتضح ذلك من الأمثلة التالية:

مثال (٥)

حدد نوع جذري المعادلة: س^{٢} + ٢س − ٣ = ٠ وتحقق من نوع الجذرين جبريًّا باستخدام القانون وبيانيًّا.

الحل:

أ = ١ ، ب = ٢ ، جـ = −٣

المميز: Δ = ب^{٢} − ٤أجـ = (٢)^{٢} − ٤(١)(−٣) = ٤ + ١٢ = ١٦

وحيث إنه عدد موجب، إذًا الجذران هما عددان حقيقيان مختلفان.

- يمكن التحقق من ذلك بحل المعادلة جبريًّا:

س^{٢} + ٢س − ٣ = ٠

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢أ}$$

$$س = \frac{-٢ \pm \sqrt{١٦}}{٢} = \frac{-٢ \pm ٤}{٢}$$

س = +١ أو س = −٣

ومن الواضح أن الجذرين عددان حقيقيان مختلفان.

معلومة مفيدة:

عند رسم بيان

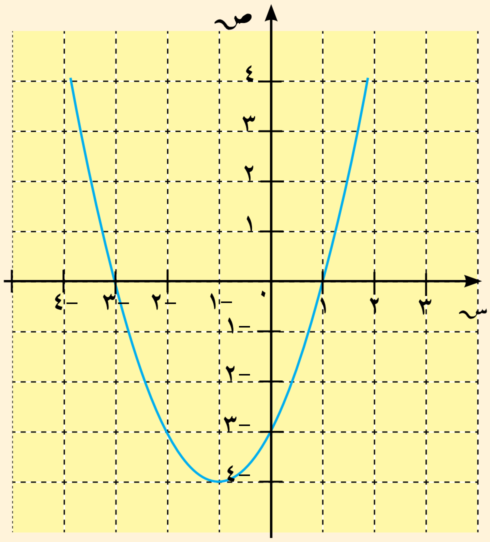
ص = أس^{٢} + ب س + جـ

حيث أ ≠ ٠، يكون رأس المنحنى

عند س = $\frac{-ب}{٢أ}$

التحقق بيانيًّا:

س	‎-٣	‎-٢	‎-١	٠	١	٢
ص	٠	‎-٣	‎-٤	‎-٣	٠	٥



يبيّن الرسم البياني نقطتي تقاطع مع محور السينات.

تكتب المعادلة س^{٢} + ٢س − ٣ = ٠ على الصورة (س + ١)^{٢} − ٤ = ٠

∴ بيان الدالة ص = س^{٢} + ٢س − ٣ هو انسحاب لدالة المرجع ص = س^{٢} وحدة واحدة جهة اليسار، ٤ وحدات إلى الأسفل.

حاول أن تحل

٥ حدد نوع جذري المعادلة: ٢س^{٢} − ٥س + ٢ = ٠، تحقق من الحل جبريًّا وبيانيًّا.

مثال (٦)

أوجد نوع جذري المعادلة: ٤س^{٢} + ٤س + ١ = ٠. وتحقق من نوع الجذرين جبريًّا باستخدام القانون وبيانيًّا.

الحل: أ = ٤، ب = ٤، جـ = ١

المميز: Δ = ب^{٢} − ٤أجـ = (٤)^{٢} − ٤ × ٤ × ١ = ١٦ − ١٦ = ٠

وحيث إن المميز يساوي صفرًا، فالجذران حقيقيان ومتساويان

وللتحقق من ذلك جبريًّا:

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

$$س = \frac{-٤ \pm ٠}{٢ \times ٤}$$

$$س = \frac{-٤ + ٠}{٨} = -\frac{١}{٢}$$

أو $$س = \frac{-٤ - ٠}{٨} = -\frac{١}{٢}$$

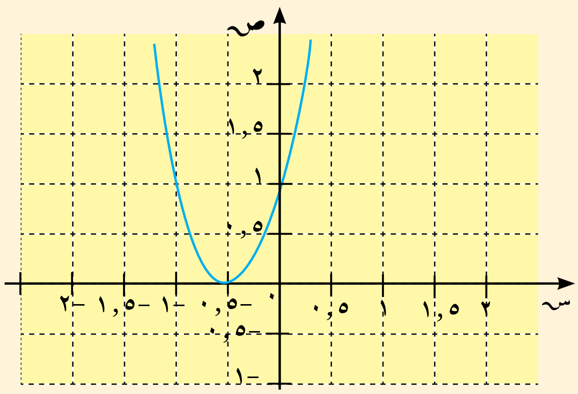
أي أن الجذرين متساويان وكل منهما يساوي $-\frac{١}{٢}$

معلومة مفيدة:

لحل معادلة تربيعية باستخدام الحاسبة نضغط على MODE ، EQN ثم QUAD أو $ax^2 + bx + c = 0$. يظهر على الشاشة [a □ b □ c □] نعوّض بقيم أ، ب، جـ متبوعة كل مرة بالضغط على = فيظهر الجذران تباعًا.

التحقق بيانيًّا:

س	١	٠	‎-٠,٥	‎-١	‎-٢
ص	٩	١	٠	١	٩



يبيّن الرسم البياني نقطة تقاطع واحدة مع محور السينات.

حاول أن تحل

٦ حدد نوع جذري المعادلة: س^{٢} + ١٠س + ٢٥ = ٠، تحقق من الحل بيانيًّا.

مثال (٧)

حدد نوع جذري المعادلة: س^{٢} + ٢س + ٥ = ٠، وتحقق من الحل بيانيًّا.

الحل:

أ = ١، ب = ٢، جـ = ٥

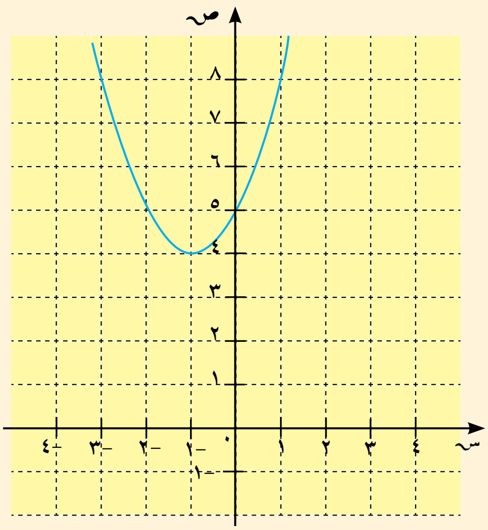
المميز: Δ = ب^{٢} − ٤أجـ = (٢)^{٢} − ٤(١)(٥)

= ٤ − ٢٠ = −١٦ وهذا عدد سالب

إذًا الجذران تخيليان (أي غير حقيقيين) لأن $\sqrt{-١٦}$ ليس عددًا حقيقيًّا.

التحقق بيانيًّا:

س	١	٠	−١	−٢	−٣
ص	٨	٥	٤	٥	٨

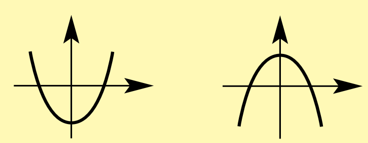
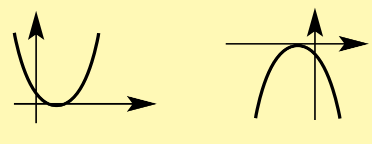
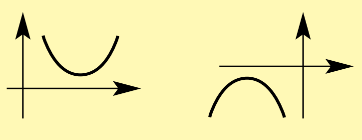


يبيّن الرسم البياني أنه لا يوجد نقاط تقاطع مع محور السينات.

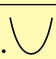
حاول أن تحل

٧ حدد نوع جذري المعادلة: س^{٢} − ٥س + ٧ = ٠، وتحقق من الحل بيانيًّا.

تعميم

المميز	نوع جذري المعادلة أس^{٢} + ب س + جـ = ٠، أ ≠ ٠	التمثيل البياني للدالة ص = أس^{٢} + ب س + جـ حيث أ ≠ ٠
ب^{٢} − ٤أجـ > ٠ (عدد موجب)	الجذران حقيقيان (مختلفان)	
ب^{٢} − ٤أجـ = ٠	الجذران حقيقيان متساويان	
ب^{٢} − ٤أجـ < ٠ (عدد سالب)	جذران غير حقيقيين	

اكتب أمثلة من عندك عن معادلات من الدرجة الثانية توضح الأنواع الثلاثة للمعادلات (من حيث جذرا المعادلة) المبيّنة في الجدول المجاور.

١ إذا كانت إشارة معامل س^{٢} موجبة يكون المنحنى بالشكل .

٢ إذا كانت إشارة معامل س^{٢} سالبة يكون المنحنى بالشكل .

٥- مجموع وناتج ضرب جذري المعادلة التربيعية:

Sum and Product of Roots of a Quadratic Equation

اعتبر المعادلة: $أس^٢ + ب س + جـ = ٠، أ \neq ٠$

جذرا المعادلة هما: $س = \frac{-ب + \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$ أو $س = \frac{-ب - \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$

مجموع جذري المعادلة: $\frac{-ب + \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ} + \frac{-ب - \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$

$$= \frac{-ب + \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ} + (-ب - \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ})}{٢أ} = \frac{-٢ب}{٢أ} = \frac{-ب}{أ}$$

ناتج ضرب الجذرين: $\left(\frac{-ب - \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}\right) \times \left(\frac{-ب + \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}\right) = \frac{ب^٢ - (ب^٢ - ٤أجـ)}{٤أ^٢} = \frac{٤أجـ}{٤أ^٢} = \frac{جـ}{أ}$

تنبيه: المعادلة التربيعية هي معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد.

أي أن:

إذا كان جذرا المعادلة: $أس^٢ + ب س + جـ = ٠$ هما م، ن

فإن: $م + ن = -\frac{ب}{أ}$ ، $م \times ن = \frac{جـ}{أ}$

٦- إيجاد مجموع وناتج ضرب جذري المعادلة:

Finding Sum and Product of Roots of a Quadratic Equation

مثال (٨)

بدون حل المعادلة، أوجد مجموع وناتج ضرب جذري المعادلة: $٣س^٢ + ٢س - ٣ = ٠$ إذا وجدا.

الحل: $أ = ٣، ب = ٢، جـ = -٣$

$\Delta = ب^٢ - ٤أجـ = ٤٠ > ٠$

لمّا كان المميز موجبًا إذًا يوجد جذران حقيقيان مختلفان.

مجموع الجذرين: $م + ن = -\frac{ب}{أ} = -\frac{٢}{٣}$

ناتج ضرب الجذرين: $م ن = \frac{جـ}{أ} = \frac{-٣}{٣} = -١$

ويمكن التحقق من صحة النتائج بحل المعادلة.

حاول أن تحل

٨ بدون حلّ المعادلة، أوجد مجموع وناتج ضرب جذري المعادلة: $٤س^٢ - ٩س + ٣ = ٠$ إذا وجدا.

مثال (٩)

إذا كان مجموع جذري المعادلة: $٢س^٢ + ب س - ٥ = ٠$ يساوي ١ . فأوجد قيمة ب، ثم حلّ المعادلة.

الحل:

مجموع جذري المعادلة: $م + ن = -\frac{ب}{ أ } = -\frac{ب}{٢} = ١$، ب = -٢

المعادلة: $٢س^٢ + ب س - ٥ = ٠$ تصبح: $٢س^٢ - ٢س - ٥ = ٠$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢ أ }$$

$$\Delta = ب^٢ - ٤ أ جـ = ٤ - ٤(٢)(-٥) = ٤٤$$

$$س = \frac{-(-٢) \pm ٢\sqrt{١١}}{٢ \times ٢}$$

$$س = \frac{١ \pm \sqrt{١١}}{٢}$$

إذًا الجذران هما: $\frac{١ - \sqrt{١١}}{٢}$ أو $\frac{١ + \sqrt{١١}}{٢}$

فكر معي:

إذا كان أ، جـ مختلفي الإشارة في المعادلة: $أ س^٢ + ب س + جـ = ٠$ فإن للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان.

حاول أن تحل

٩ إذا كان ناتج ضرب جذري المعادلة: $أ س^٢ - ٥س + ٢ = ٠$ يساوي $\frac{٢}{٣}$. فأوجد قيمة أ، ثم حلّ المعادلة.

٧- إيجاد المعادلة التربيعية إذا علم جذراها:

Finding the Quadratic Equation Knowing its Roots

لتكن المعادلة: $أ س^٢ + ب س + جـ = ٠$، $أ \neq ٠$ وليكن جذراها م ، ن

$$س^٢ + \frac{ب}{ أ }س + \frac{جـ}{ أ } = ٠$$

وحيث إن $م + ن = -\frac{ب}{ أ }$، $م ن = \frac{جـ}{ أ }$

إذًا **المعادلة على الصورة:** $س^٢ - (م + ن)س + م ن = ٠$

هي معادلة بمعلومية مجموع الجذرين وناتج ضربهما.

طريقة أخرى:

ليكن م، ن جذري المعادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد

∴ المعادلة تكون على الصورة: $(س - م)(س - ن) = ٠$

∴ $س^٢ - (م + ن) س + م ن = ٠$

مثال (١٠)

أوجد معادلة تربيعية جذراها ٣، ٥.

الحل:

بما أن الجذرين هما: ٣، ٥.

∴ المعادلة التربيعية على الصورة: س^{٢} – (مجموع الجذرين) س + (ناتج ضرب الجذرين) = ٠

أي س^{٢} – ٨س + ١٥ = ٠

أو حلّ آخر: المعادلة على الصورة: (س – ٣)(س – ٥) = ٠

أي س^{٢} – ٨س + ١٥ = ٠

حاول أن تحل

١٠ إذا كان جذرا المعادلة س^{٢} – ٥س + ٦ = ٠ هما ل، م فكوّن معادلة تربيعية جذراها ٢ل، ٢م.

حالة عامة: General Case

يوجد عدد لا نهائي من المعادلات يكون جذرا كلّ منها م، ن

وكلّ منها على الصورة: ك[س^{٢} – (م + ن)س + م ن] = ٠

حيث (ك) أي عدد حقيقي ≠ صفرًا.

مثال (١١)

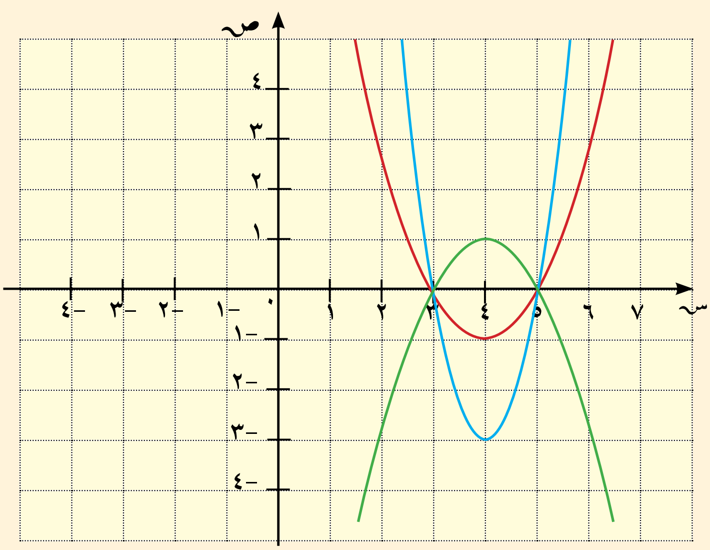
أوجد ثلاث معادلات تربيعية جذرا كل منها ٣، ٥.

الحل:

س^{٢} – ٨س + ١٥ = ٠ لماذا؟

٣(س^{٢} – ٨س + ١٥) = ٠

–(س^{٢} – ٨س + ١٥) = ٠ وهكذا (انظر الشكل المقابل).



حاول أن تحل

١١ أوجد معادلتين تربيعيتين جذرا كل منهما: –٤، –٣.

المرشد لحل المسائل

عرض مدير أحد المنتجعات الأسعار التالية خلال الموسم.

العرض أ: يدفع الشخص ٦,٥٠٠ دنانير كل مرة يدخل المنتجع.

العرض ب: يدفع الشخص ٢٨ دينارًا ثم ٣ دنانير كل مرة يدخل المنتجع.

يحاول يوسف معرفة أي من العرضين أفضل.

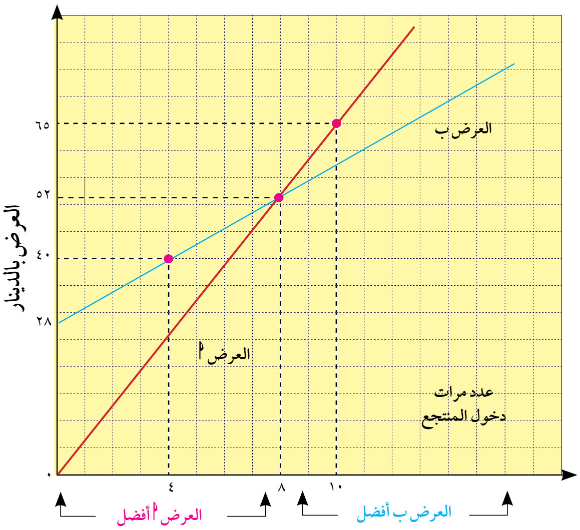
بدأ يوسف بنمذجة العرضين.

العرض أ: ص = ٦,٥٠٠ س حيث س عدد مرات دخول المنتجع، ص مجموع ما سيدفعه.

العرض ب: ص = ٢٨ + ٣س.

فكّر يوسف: إذا حللت نظام المعادلتين { ص = ٦,٥٠٠ س ، ص = ٢٨ + ٣س } أحصل على س = ٨، ص = ٥٢ أي أن العرضين يتساويان إذا دخلت ٨ مرات إلى المنتجع.

لكن يوسف لم يكتف بهذه النتيجة لأنه يريد أن يعرف بشكل عام ودون تحديد عدد مرات الدخول أي العرضين أفضل. لذلك استخدم حاسوبه ومثل بيانيًّا المعادلتين.



ما استنتجه يوسف:

١ لمن يريد الدخول أقل من ٨ مرات إلى المنتجع العرض أ هو أفضل.

٢ لمن يريد الدخول أكثر من ٨ مرات إلى المنتجع العرض ب هو أفضل.

٣ يتساوى العرضان بالدخول ٨ مرّات.

مسألة إضافية

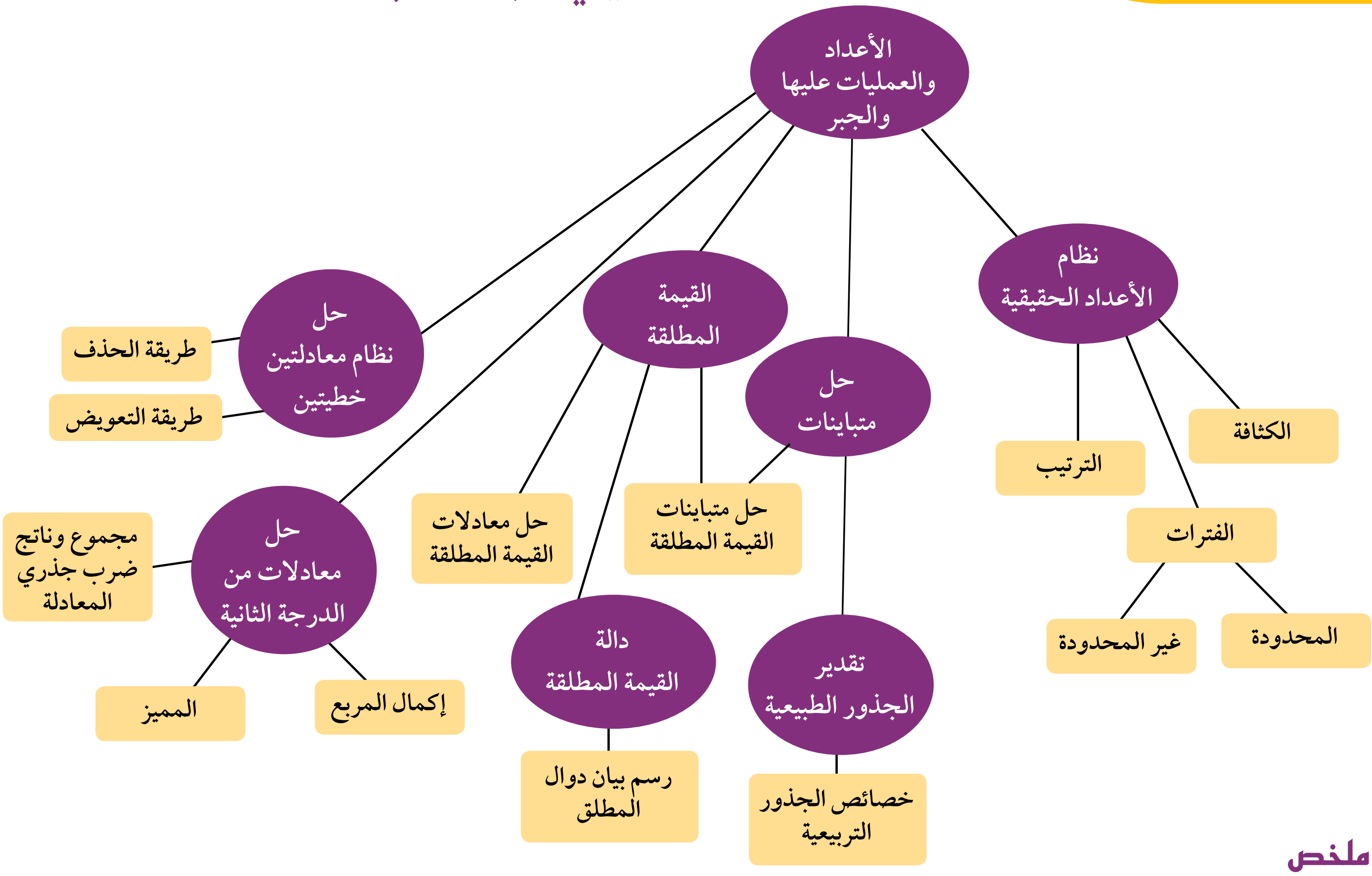
يعرض على أحد المسارح للجمهور ١٢ عملًا فنيًّا. يختار الجمهور أحد العرضين:

أ ١٠ دنانير لحضور كل عمل فني.

ب ٢٠ دينارًا ثم ٦ دنانير كل مرة يحضر عملًا فنيًّا.

وضّح أي العرضين أفضل لمن يريد حضور ٤، ٦ أعمال فنية.

مخطط تنظيمي للوحدة الأولى



ملخص

– يوجد بين أي عددين حقيقيين مختلفين عدد لانهائي من الأعداد الحقيقية. مجموعة الأعداد الحقيقية هي مجموعة مرتبة.

– لأي عددين حقيقيين أ، ب تعبير واحد فقط مما يلي هو صحيح: أ > ب أو أ = ب أو أ < ب.

– العدد أ هو جذر تربيعي العدد ب عندما $أ^{٢} = ب$

– لأي عددين حقيقيين غير سالبين أ، ب: $\sqrt{أب} = \sqrt{أ} \times \sqrt{ب}$ ، $\sqrt{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}}$ حيث ب $\neq$ ٠ .

– القيمة المطلقة لأي عدد حقيقي س هي:

$$|س| = \begin{cases} س & \text{إذا كان } س > ٠ \\ -س & \text{إذا كان } س < ٠ \\ ٠ & \text{إذا كان } س = ٠ \end{cases}$$

– $|أ| \geq ٠$ ، $|-أ| = |أ|$ لأي عدد حقيقي أ.

– $|أ \times ب| = |أ| \times |ب|$ ، $\left|\frac{أ}{ب}\right| = \frac{|أ|}{|ب|}$ حيث ب $\neq$ ٠ (أ، ب عددان حقيقيان).

– الرسم البياني للدالة ص = |س + ل| حيث ل $\in$ ح$^{+}$ هو انسحاب للرسم البياني للدالة ص = |س|، ل وحدة إلى جهة اليسار .

– الرسم البياني للدالة ص = |س − ل| حيث ل $\in$ ح$^{+}$ هو انسحاب للرسم البياني للدالة ص = |س|، ل وحدة إلى جهة اليمين .

– الرسم البياني للدالة ص = |س + ل| − ك هو انسحاب أفقي ورأسي معًا لرسم الدالة ص = |س|.

– المميز: $\Delta = ب^{٢} - ٤أجـ$

– حل المعادلة $أس^{٢} + ب س + جـ = ٠$ هو $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$

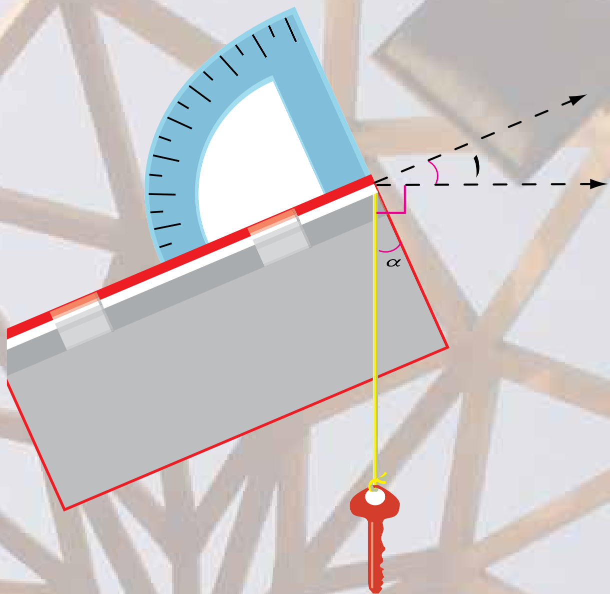
– إذا كان م، ن جذري المعادلة التربيعية، فإن م + ن = $-\frac{ب}{أ}$ ، م × ن = $\frac{جـ}{أ}$ وتكتب المعادلة على الصورة:

$س^{٢} - (م + ن) س + م \times ن = ٠$

الوحدة الثانية

وحدة حساب المثلثات
Trigonometry

مشروع الوحدة: صنع الميال (Clinometer) واستخدامه.



١ **مقدمة المشروع:** كيف لنا أن نعرف كم تبعد الشمس عنا من دون أن نمد أشرطة القياس لملايين الكيلومترات؟
كيف نعرف كتلة إلكترون عندما لا نستطيع أن نراه؟
أوجد الإنسان منذ القدم طرقًا للقياس غير المباشر عندما عجز عن القياس المباشر.

٢ **الهدف:** صنع آلة مشابهة للآلات التي استخدمها علماء الفلك الأقدمون والرحّالة لقياس ارتفاعات لا يمكن بلوغها.

٣ **اللوازم:** منقلة، سلك، شريط لاصق، قطعة من الورق المقوّى، مصّاصة شرب.

٤ **أسئلة حول التطبيق:**

أ انظر من خلال مصّاصة الشرب إلى الهدف الذي تريد قياسه (رأس برج مثلًا).
واطلب إلى أحد طلاب مجموعتك قراءة الزاوية بين المنقلة والخيط المتدلي عموديًّا مع المفتاح.
لماذا تساوي هذه الزاوية زاوية المصّاصة مع خطّ الأفق؟
(الزاوية ١ في الرسم).

ب استخدم آلة المميال لقياس حساب زاوية ارتفاع بناء مدرستك مثلًا؛ وأوجد المسافة الأفقية بينك وبين البناء ثم احسب ارتفاع البناء.

جـ تختار المجموعة بعض المباني أو الأشياء الأخرى الموجودة في المدرسة أو في جوارها ثم يصار إلى قياس ارتفاعات هذه الأشياء من مسافات مختلفة.

٥ **التقرير:** تضع كل مجموعة تقريرًا مفصلًا حول كيفية صنع المميال وكيفية استخدامه للإجابة عن الأسئلة (أ)، (ب)، (جـ).

دروس الوحدة

الزوايا وقياساتها	النسب المثلثية: الجيب وجيب التمام ومقلوباتهما	ظل الزاوية ومقلوبه	النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة	حل المثلث القائم الزاوية
٢-١	٢-٢	٢-٣	٢-٤	٢-٥
زوايا الارتفاع والانخفاض	القطاع الدائري والقطعة الدائرية			
٢-٦	٢-٧			

الوحدة الثانية

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت كيفية استخدام نظرية فيثاغورث لإيجاد طول أحد أضلاع مثلث قائم الزاوية وإيجاد علاقة بين أطوال أضلاع مثلثات قائمة الزاوية في حالات خاصة، وتطبيق نظرية فيثاغورث على مسائل حياتية.
- تعلمت كيفية إثبات تشابه مثلثات واستنتاج أطوال الأضلاع المتناسبة والزوايا المتساوية القياس.
- استخدمت تشابه المثلثات في حل مسائل حياتية.
- تعلمت تطابق المثلثات واستنتجت تطابق الأضلاع المتناظرة والزوايا المتساوية القياس.

ماذا سوف تتعلم؟

- سوف تتعرف الزاوية الموجهة لتستنتج الزاوية الموجهة الموجبة والزاوية الموجهة السالبة والزاوية الموجهة في الوضع القياسي.
- سوف تتعرف القياس الستيني والقياس الدائري والعلاقة بينهما.
- سوف تستخدم تشابه المثلثات القائمة لتعريف النسب المثلثية.
- سوف تستخدم النسب المثلثية لتحل مسائل حياتية تتضمن إيجاد ارتفاعات ومسافات وزوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض.
- سوف تستخدم النسب المثلثية لإيجاد مساحة المثلث بدلالة ضلعين والزاوية المحصورة بينهما وإيجاد مساحة القطاع الدائري ومساحة القطعة الدائرية.

المصطلحات الأساسية

زاوية موجهة - زاوية موجهة موجبة - زاوية موجهة سالبة - زاوية موجهة في الوضع القياسي - قياس ستيني - قياس دائري - جيب الزاوية - جيب تمام الزاوية - قاطع الزاوية - قاطع تمام الزاوية - ظل الزاوية - ظل تمام الزاوية - زاوية الارتفاع - زاوية الانخفاض - القطاع الدائري - القطعة الدائرية.

أضف إلى معلوماتك

يذكر بعض المؤرخين أن الرياضي العربي نصير الدين الطوسي هو أول من فصل حساب المثلثات عن الفلك، كما يذكر المؤرخون أن طاليس (٦٠٠ قبل الميلاد) تطرق إلى حساب المثلثات، عندما تمكن من قياس ارتفاع الهرم عن طريق المقارنة بين طول عصًا عمودية وطول ظلها وبين ارتفاع الهرم وطول ظله في الوقت نفسه.

ولقد كان لحساب المثلثات نصيبه من اهتمامات العرب. ويذكر أن اصطلاح «الظل» قد وصفه العالم العربي أبو الوفا البوزجاني في القرن العاشر الميلادي. وهذا الاصطلاح مأخوذ من ظلال الأجسام، التي تتكون نتيجة سير الضوء المنبعث من الشمس في خطوط مستقيمة.

كما أن للعرب إضافات عديدة في حساب المثلثات المستوي والكري أو الكروي (نسبة إلى سطح الكرة)، وعنهم أخذ الغربيون المعلومات المهمة وأضافوا أيضًا الكثير، حتى أصبح حساب المثلثات متضمنًا في الكثير من الأبحاث الرياضية، وأصبحت تطبيقاته في شتى المناحي العلمية والعملية.

نصير الدين الطوسي

١ – ٢

الزوايا وقياساتها
Angles and their Measurement

سوف تتعلم

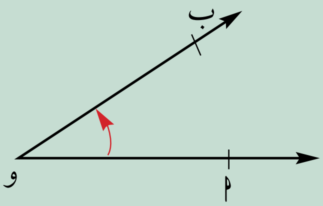
- الزاوية الموجهة
- الزاوية الموجهة الموجبة
- الزاوية الموجهة السالبة
- الزاوية في الوضع القياسي
- أنظمة قياس الزاوية
- القياس الستيني
  - أجزاء الدرجة
- القياس الدائري
  - طول القوس
  - الزاوية النصف قطرية
- العلاقة بين القياسين الدائري والستيني

دعنا نفكر ونتناقش

١ – الزاوية: Angle

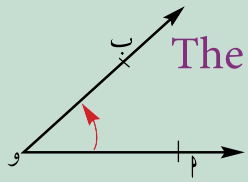
تعلمنا سابقًا أن الزاوية هي **اتحاد شعاعين لهما نقطة بداية واحدة تسمى «رأس الزاوية»، والشعاعان هما ضلعا الزاوية.**

الزاوية الموجهة Oriented Angle



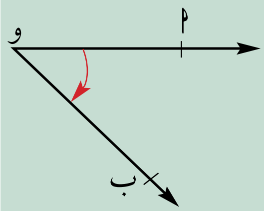
في الشكل المقابل، رأس الزاوية هو نقطة و، وضلعا الزاوية هما وأ، وب ونرمز للزاوية بالرمز: أ̂وب وتسمى الزاوية في هذه الحالة بالزاوية الموجهة ويرمز لها أيضًا (وأ، وب) ويسمى وأ الضلع الأساسي أو الضلع الابتدائي، وب الضلع النهائي لها.

الزاوية الموجهة الموجبة: The Positive Oriented Angle



إذا كان الضلع الابتدائي هو وأ والضلع النهائي لها هو وب كما في الشكل المقابل، فإن قياس الزاوية في هذه الحالة يكون موجبًا.

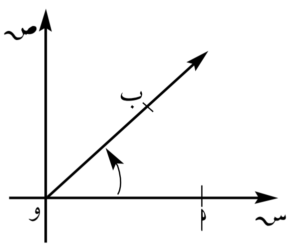
الزاوية الموجهة السالبة: The Negative Oriented Angle



إذا كان الضلع الابتدائي هو وأ والضلع النهائي هو وب كما في الشكل المقابل، فإن قياس الزاوية في هذه الحالة يكون سالبًا.

تكون الزاوية الموجهة موجبة إذا كان الانتقال من الضلع الابتدائي وأ إلى الضلع النهائي وب عكس اتجاه دوران عقارب الساعة، وتكون سالبة إذا كان الانتقال من وأ إلى وب مع اتجاه دوران عقارب الساعة.

الزاوية الموجهة في الوضع القياسي: The Angle in the Standard Position

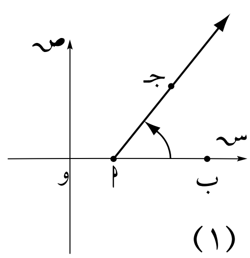


تكون الزاوية الموجهة في الوضع القياسي إذا كان الضلع الابتدائي لها ينطبق على الجزء الموجب من محور السينات ورأسها نقطة الأصل كما في الشكل المقابل.

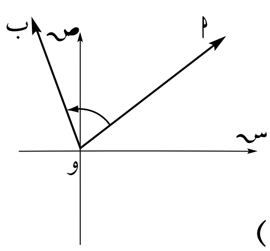
في الأشكال التالية:

أ سمّ الضلع الابتدائي والضلع النهائي، واذكر إذا كان قياس الزاوية سالبًا أو موجبًا.

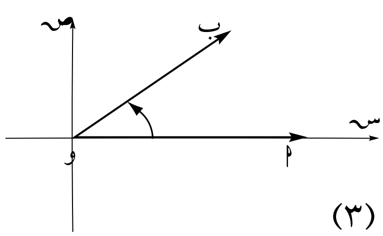
ب حدّد الزوايا الموجهة التي في وضع قياسي.



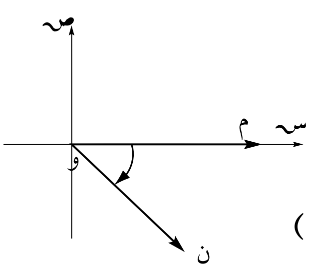
(١)



(٢)



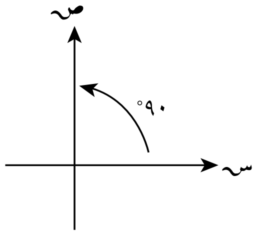
(٣)



(٤)

الزاوية الربعية Quarter Angle

هي زاوية موجهة في الوضع القياسي ينطبق ضلعها النهائي على أحد محوري الإحداثيات مثل الزوايا ٠°، ٩٠°، ١٨٠°، ٢٧٠°، ٣٦٠° أو –٩٠°، –١٨٠°، –٢٧٠°، –٣٦٠°.



٢– أنظمة قياس الزاوية: Angle Measurement Systems

توجد أنظمة مختلفة لقياس الزاوية، أهمها القياس الستيني والقياس الدائري.

ملاحظة:

الدرجة = ٦٠ دقيقة

١° = ٦٠′

الدقيقة = ٦٠ ثانية

١′ = ٦٠″

أولا: القياس الستيني: The Degree Measure

في هذا القياس تقسم الزاوية التي تمثل دورة كاملة إلى ٣٦٠ قسمًا متساويًا، قياس كل منها يسمى درجة. وقد اتخذت هذه الدرجة وحدة لقياس الزوايا في هذا القياس ويرمز إليها بالرمز (°).

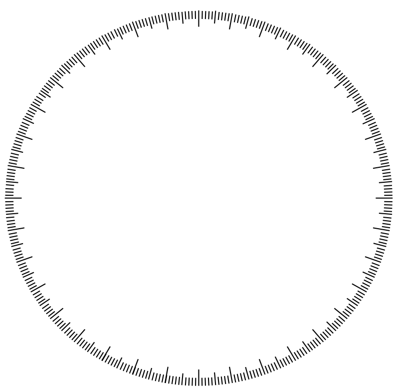
قياس الزاوية القائمة يساوي ٩٠°. وقياس الزاوية المستقيمة يساوي ١٨٠°.

أجزاء الدرجة: الدقيقة minute وتساوي $\frac{١}{٦٠}$ من الدرجة ويرمز إليها بالرمز (′).

والثانية second وتساوي $\frac{١}{٦٠}$ من الدقيقة ويرمز إليها بالرمز (″).

فمثلًا سنكتب الزاوية التي قياسها ٧٥ درجة و٤٥ دقيقة و١٥ ثانية على الصورة التالية:

١٥″ ٤٥′ ٧٥°.



مثال (١)

أوجد $\frac{٧}{٨}$ الزاوية القائمة بالقياس الستيني. (بالدرجات والدقائق)

الحل:

$\frac{٧}{٨}$ الزاوية القائمة = $\frac{٧}{٨}$ × ٩٠° = $\left(٧٨ \frac{٣}{٤}\right)^\circ$

لإيجاد $\frac{٣}{٤}$ الدرجة بالدقائق.

$\frac{٣}{٤}$ × درجة = $\frac{٣}{٤}$ × ٦٠′ = ٤٥′

أي أن $\frac{٧}{٨}$ الزاوية القائمة = ٤٥′ ٧٨°

حاول أن تحل

١ اكتب كلًّا مما يلي بالقياس الستيني.

أ $\frac{٧}{٣٢}$ الزاوية القائمة

ب ٠,٦٢٥ الزاوية القائمة

مثال (٢)

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد $\frac{٥}{١١}$ الزاوية المستقيمة بالقياس الستيني (بالدرجات والدقائق والثواني والأجزاء من مئة من الثانية).

الحل:

$\frac{٥}{١١}$ الزاوية المستقيمة = $\frac{٥}{١١}$ × ١٨٠°

باستخدام الآلة الحاسبة:

$\boxed{5}\ \boxed{\div}\ \boxed{11}\ \boxed{\times}\ \boxed{180}\ \boxed{^{\circ}\,'\,''}\ \boxed{=}$

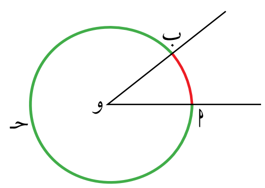
فيظهر على الشاشة $\boxed{81^{\circ}\ 49'\ 5.45''}$

أي ٨١ درجة و٤٩ دقيقة و٥ ثوانٍ و٤٥ جزءًا من مئة من الثانية.

حاول أن تحل

٢ استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد $\frac{٣}{٧}$ الزاوية المستقيمة بالقياس الستيني.

ثانيا: القياس الدائري (الراديان): The Radian Measure



الزاوية المركزية زاوية رأسها مركز الدائرة.

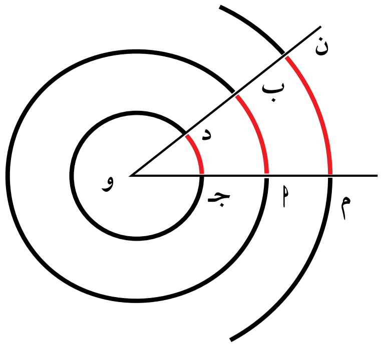
ضلعا هذه الزاوية المركزية يقطعان الدائرة في نقطتين م، ب.

طول القوس $\overset{\frown}{\text{م ب}}$ هو المسافة على الدائرة بين النقطتين م، ب.

ملاحظة: يتشكل من تقاطع ضلعي الزاوية المركزية مع الدائرة قوسان: القوس الأصغر $\overset{\frown}{\text{م ب}}$ (باللون الأحمر)، القوس الأكبر ($\overset{\frown}{\text{م ب}}$) (باللون الأخضر) ويمكن التعبير عنه بـ ($\overset{\frown}{\text{م جـ ب}}$). يعتمد القياس الدائري على طول القوس في الدائرة الذي تحصره الزاوية المركزية وعلى طول نصف قطر الدائرة.

حقيقة هندسية: في الدوائر المتحدة المركز، النسبة بين طول قوس أي زاوية مركزية وطول نصف قطر دائرتها المناظرة تساوي مقدارًا ثابتًا يتوقف على قياس الزاوية التي تحصر هذا القوس.

في الشكل المجاور: $\frac{\text{طول } \overset{\frown}{\text{م ن}}}{\text{و م}} = \frac{\text{طول } \overset{\frown}{\text{م ب}}}{\text{و م}} = \frac{\text{طول } \overset{\frown}{\text{جـ د}}}{\text{و جـ}}$



أي أن $\dfrac{\text{طول القوس من الدائرة الذي تحصره زاوية مركزية}}{\text{طول نصف قطر هذه الدائرة}}$ = مقدارًا ثابتًا

وهذا يعد نظامًا آخر لقياس الزاوية يسمى بالقياس الدائري للزاوية.

تعريف:

القياس الدائري لزاوية مركزية في دائرة = $\dfrac{\textbf{طول القوس الذي تحصره هذه الزاوية}}{\textbf{طول نصف قطر هذه الدائرة}}$

ويرمز إليه بالرمز هـ^{د}.

معلومة:

- **في بعض الأنظمة، تقسم الزاوية القائمة إلى ١٠٠ جزء متساوٍ، كل منها يسمى "جراد" Grad.**
- **كل ١ جراد يعادل $\frac{٩}{١٠}$ من الدرجة.**

فإذا رمزنا إلى طول القوس بالرمز (ل) وإلى طول نصف القطر بالرمز نق

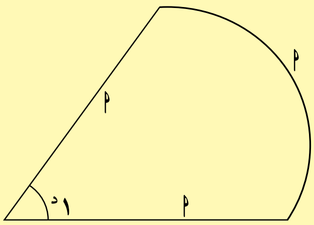
فإن $\boxed{هـ^{د} = \dfrac{ل}{نق}}$ ومنها $\boxed{ل = هـ^{د}\, نق}$

وحدة قياس الزوايا لهذا النوع من القياس تسمى **الراديان** ويرمز لها بالرمز (١^{د})

تعريف الزاوية النصف قطرية: Radial Angle

هي زاوية مركزية في دائرة تحصر قوسًا طوله يساوي طول نصف قطر هذه الدائرة.

وقياس الزاوية نصف القطرية يساوي ١ راديان (١^{د}).



وعلى هذا فإن الزاوية التي قياسها ٥^{د} هي زاوية مركزية في دائرة تحصر قوسًا من هذه الدائرة طوله يساوي خمسة أمثال طول نصف قطر هذه الدائرة.

مثال (٣)

ع و د زاوية مركزية في دائرة طول نصف قطرها ٤ سم. أوجد طول القوس $\overset\frown{عد}$ الذي تحصره هذه الزاوية إذا كان:

أ ق($\angle$ع و د) = $\left(\frac{٣}{٤}\right)^{د}$ **ب** ق($\angle$ع و د) = (٣,١٤)^{د}

الحل:

أ نفرض طول القوس = ل فيكون ل = هـ^{د} نق

$\therefore$ ل = طول $\overset\frown{عد}$ = $\left(\frac{٣}{٤}\right)$ × ٤ = ٣ سم

ب ل = طول $\overset\frown{عد}$ = ٣,١٤ × ٤ = ١٢,٥٦ سم.

حاول أن تحل

٣ دائرة طول نصف قطرها ٦ سم. أوجد طول القوس الذي تحصره زاوية مركزية قياسها

أ (١,٢)^{د} ب (١,٥٧)^{د}

٣- العلاقة بين القياسين الدائري والستيني: Degree-Radian Relation

إذا كان طول نصف قطر الدائرة يساوي الوحدة فإن:

١ قياس الزاوية المركزية (بالقياس الدائري) يساوي طول قوسها.

٢ الزاوية المركزية التي قياسها الستيني يساوي ٣٦٠°، يكون طول قوسها ٢πنق أي قياسها الدائري يساوي ٢π.

٣٦٠° يعادل ٢π د ومنها ١٨٠° يعادل π د.

$$١^{د} = \frac{١٨٠^\circ}{\pi} \simeq ٥٧,٢٩٥٧^\circ \simeq ٥٧^\circ\ ١٧'\ ٤٥''$$

$$١^\circ = \frac{\pi}{١٨٠^\circ} \simeq ٠,٠١٧٥^{د}$$

ملاحظة:
عند عدم ذكر وحدة القياس، يعتبر الراديان هو الوحدة.

قانون: إذا كان لدينا زاوية قياسها الدائري هـ^{د} وقياسها الستيني س$^\circ$ فإن:

$$\frac{هـ^{د}}{\pi} = \frac{س^\circ}{١٨٠^\circ} \quad \text{ومنها } س^\circ = هـ^{د} \times \frac{١٨٠^\circ}{\pi} \quad هـ^{د} = س^\circ \times \frac{\pi}{١٨٠^\circ}$$

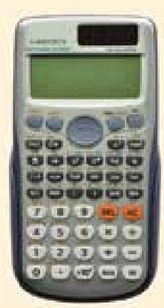
أمثلة

٤ زاوية قياسها ٥^{د}، أوجد القياس الستيني لهذه الزاوية لأقرب دقيقة.

الحل:

$$س^\circ = هـ^{د} \times \frac{١٨٠^\circ}{\pi}$$

$$\therefore س^\circ = ٥^{د} \times \frac{١٨٠^\circ}{\pi} \simeq ٢٨٦,٤٨^\circ \simeq ٢٨٦^\circ\ ٢٩'$$



٥ زاوية قياسها ٧٥°، أوجد القياس الدائري لها.

الحل:

$$هـ^{د} = \frac{\pi}{١٨٠^\circ} \times س^\circ \qquad هـ^{د} = \frac{\pi}{١٨٠^\circ} \times ٧٥^\circ \simeq ١,٣٠٩^{د}$$

٦ أوجد القياس الستيني للزاوية $\frac{٣\pi}{٤}$.

الحل:

$$س^\circ = هـ^{د} \times \frac{١٨٠^\circ}{\pi} \qquad \therefore س^\circ = \frac{٣\pi}{٤} \times \frac{١٨٠^\circ}{\pi} = ١٣٥^\circ.$$

حاول أن تحل

٤ أوجد بدلالة π القياس الدائري للزوايا التي قياساتها:

أ ٤٥°　　ب ٣٠٠°　　ج ٢٢٥°　　د ١٥٠°

٥ أوجد القياس الستيني للزوايا التالية:

أ $\frac{٥}{٨} \times \pi$　　ب ٠,٧٥ د　　ج ٣,٣٥ د　　د $\frac{\pi}{٥}$

٦ أوجد القياس الستيني للزوايا التالية:

أ $\frac{\pi}{٢}$　　ب $\frac{\pi}{٣}$　　ج $\frac{\pi}{٦}$　　د $\frac{\pi}{٤}$

مثال (٧)

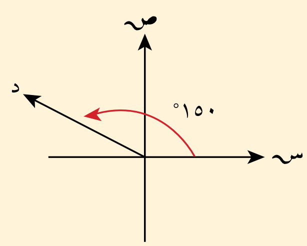
ارسم كلًّا من الزوايا الموجهة التالية في الوضع القياسي، ثم حدّد الزوايا الربعية منها.

أ ١٥٠°　　ب −٢٧٠°

ج $\frac{٣\pi}{٤}$　　د $\frac{٣\pi}{٢}$

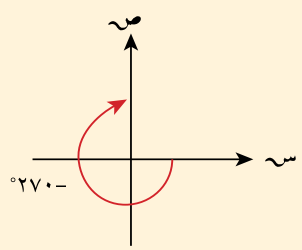
الحل:

أ



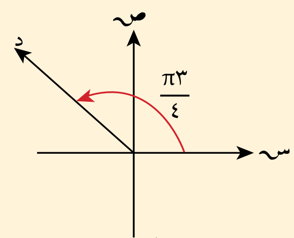
زاوية ليست ربعية

ب



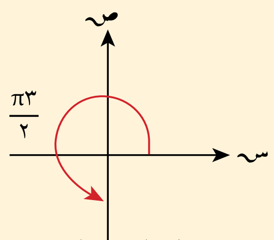
زاوية ربعية

ج



زاوية ليست ربعية

د

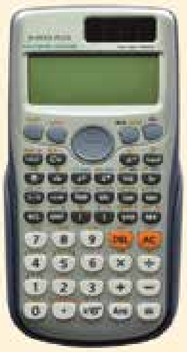


زاوية ربعية

حاول أن تحل

٧ حدّد الزوايا الربعية من بين الزوايا التالية: π، ٢٥٠°، $\frac{٥\pi}{٧}$، $-\frac{\pi}{٢}$، ٣٣٠°.

مثال (٨)



زاوية قياسها ٢٣″ ١٨′ ٨٥°، أوجد القياس الدائري لهذه الزاوية مقربًا الناتج إلى رقمين عشريين.

الحل:

إذا كان هـ^د^ هو القياس الدائري فإن: هـ^د^ = $\frac{\pi}{180^\circ}$ × س°

تضغط على المفاتيح بالترتيب التالي من جهة اليسار

=	°′″	23	°′″	18	°′″	85	×	°′″	180	÷	π

يظهر على الشاشة 1.488877359 ∴ القياس الدائري ≃ ١,٤٩

٢ – ٢

النسب المثلثية: الجيب وجيب التمام ومقلوباتهما
Trigonometric Ratios and their Reciprocals
Sine, Cosine, Secant and Cosecant

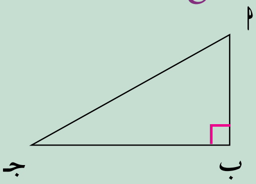
سوف تتعلم

- جيب الزاوية
- جيب تمام الزاوية
- قاطع الزاوية
- قاطع تمام الزاوية
- إيجاد قياس زاوية علم جيبها أوجيب تمامها

دعنا نفكر ونتناقش

١ – المقابل والمجاور لزاوية حادة في مثلث قائم الزاوية:
The Opposite and Adjacent of an Acute Angle in a Right Triangle

في المثلث ؅ب جـ الموضح بالشكل:



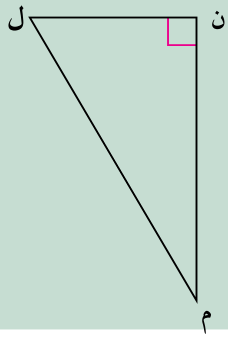
؅ب يسمى **الضلع المقابل** للزاوية جـ، ب جـ يسمى **الضلع المجاور** للزاوية جـ، ؅جـ يسمى **الوتر**.

وعلى هذا الأساس أكمل ما يلي:

.... هو مقابل ؅̂

.... هو مجاور ؅̂

في المثلث ل ن م الموضح بالشكل المقابل:



الضلع المقابل لـ مˆ هو ...

الضلع المجاور لـ لˆ هو ...

ن ل هو مجاور الزاوية ...

م ن هو مجاور الزاوية ...

ملاحظة:

للاختصار سنستخدم المقابل للدلالة على طول الضلع المقابل لزاوية. والمجاور للدلالة على طول الضلع المجاور لزاوية. والوتر للدلالة على طول الوتر.

٢– جيب الزاوية: Sine of the Angle

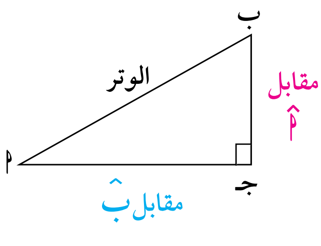
في المثلث قائم الزاوية: نسبة طول الضلع المقابل للزاوية الحادة إلى طول الوتر تسمى جيب الزاوية، ويرمز لها بالرمز (جا) بالإنكليزية (sin).

أي أن

$$\text{جيب الزاوية} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

في الشكل المقابل:

جيب الزاوية ؅:

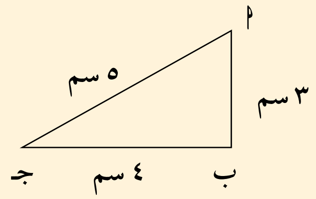


$$\text{جا؅} = \frac{\text{مقابل ؅̂}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{؅ب}}$$

بالمثل جيب الزاوية ب:

$$\text{جاب} = \frac{\text{مقابل بˆ}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{؅جـ}}{\text{؅ب}}$$

مثال (١)



في الشكل المقابل:

أثبت أن المثلث أب جـ قائم الزاوية في ب، ثم أوجد جاأ، جاجـ.

الحل:

$(\text{أب})^٢ + (\text{ب جـ})^٢ = ٣^٢ + ٤^٢ = ٢٥$ عكس نظرية فيثاغورث

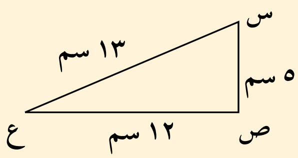
$(\text{أجـ})^٢ = ٥^٢ = ٢٥$

∴ المثلث أب جـ قائم الزاوية في ب.

$\text{جاأ} = \frac{\text{مقابل } \hat{\text{أ}}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أجـ}} = \frac{٤}{٥}$

$\text{جاجـ} = \frac{\text{مقابل } \hat{\text{جـ}}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{أب}}{\text{أجـ}} = \frac{٣}{٥}$

حاول أن تحل



١ أ أثبت أن المثلث س ص ع قائم في صَ.

ب أوجد جاس، جاع.

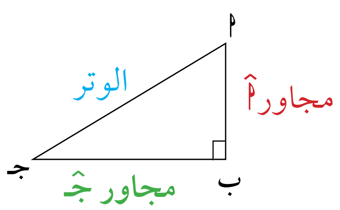
٣- جيب تمام الزاوية: Cosine of the Angle

في المثلث قائم الزاوية: نسبة طول الضلع المجاور للزاوية الحادة، إلى طول الوتر تسمى جيب تمام الزاوية، ويرمز لها بالرمز (جتا) وبالإنكليزية (cos).

$$\text{جيب تمام الزاوية} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

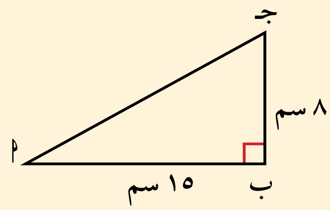
جيب تمام الزاوية جـ: $\text{جتاجـ} = \frac{\text{مجاور } \hat{\text{جـ}}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أجـ}}$

جيب تمام الزاوية أ: $\text{جتاأ} = \frac{\text{مجاور } \hat{\text{أ}}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{أب}}{\text{أجـ}}$



مثال (٢)

Δ ٍأب جـ قائم في بَ، أوجد كلًّا من: أجـ، جاأ، جتاأ، جاجـ، جتاجـ. ماذا تستنتج؟



الحل: بتطبيق نظرية فيثاغورث

$(أجـ)^٢ = (ب جـ)^٢ + (أب)^٢$

$(أجـ)^٢ = (٨)^٢ + (١٥)^٢$

أجـ = ١٧ سم

$جاأ = \frac{مقابل\ أ}{الوتر} = \frac{٨}{١٧}$

$جتاأ = \frac{مجاور\ أ}{الوتر} = \frac{١٥}{١٧}$

$جاجـ = \frac{مقابل\ جـ}{الوتر} = \frac{١٥}{١٧}$

$جتاجـ = \frac{مجاور\ جـ}{الوتر} = \frac{٨}{١٧}$

ماذا تستنتج؟

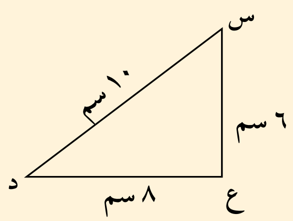
جاأ = جتاجـ = $\frac{٨}{١٧}$، جتاأ = جاجـ = $\frac{١٥}{١٧}$، لأن مقابل أ مجاور جـ.

هل تعلم؟

في الإنكليزية كلمة **cosine** مشتقة من كلمتي **complement´s** متمم و**sine** جيب ومنه جيب تمام الزاوية يساوي جيب الزاوية المتممة لها.

أي أن جتا س = جا (٩٠° − س)

حاول أن تحل



٢ أ أثبت أن المثلث س ع د قائم الزاوية في ع.

ب أوجد كلًّا من: جا(سَ)، جتا(سَ)، جا(دَ)، جتا(دَ).

جـ ماذا تلاحظ بالنسبة إلى النسب المثلثية للزاويتين سَ، دَ.

٤- مقلوبات الجيب وجيب التمام: Cosec and Sec

مقلوب جاأ هو $\frac{١}{جاأ}$ ويسمى **قاطع تمام الزاوية** أ ويرمز إليه بالرمز **قتاأ** وبالإنكليزية Cosecant (cosec).

$قتاأ = \frac{١}{جاأ}$: جاأ $\neq$ ٠

$قتاأ = \frac{١}{جاأ} \Leftarrow$ **قتاأ × جاأ = ١**

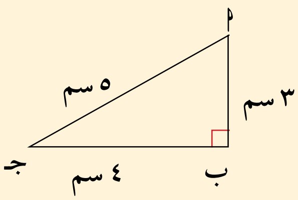
ومقلوب جتاأ هو $\frac{١}{جتاأ}$ ويسمى قاطع زاوية أ ويرمز إليه بالرمز **قاأ** وبالإنكليزية Secant (sec).

$$\text{قاأ} = \frac{1}{\text{جتاأ}} : \text{جتاأ} \neq 0$$

$$\text{قاأ} = \frac{1}{\text{جتاأ}} \Leftarrow \qquad \text{قاأ} \times \text{جتاأ} = 1$$

مثال (٣)

في الشكل المقابل أوجد جاجـ، جتاجـ، قاجـ، قتاجـ.



الحل:

$$\text{جاجـ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{3}{5}$$

$$\text{جتاجـ} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{4}{5}$$

$$\text{قاجـ} = \frac{1}{\text{جتاجـ}} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}$$

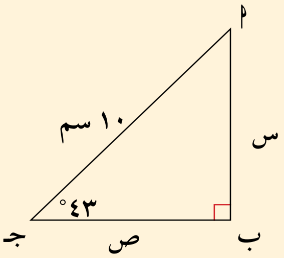
$$\text{قتاجـ} = \frac{1}{\text{جاجـ}} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$$

حاول أن تحل

٣ أب جـ مثلث فيه: أب = ٧ سم، ب جـ = ٢٤ سم، أجـ = ٢٥ سم.
أثبت أن Δأب جـ قائم الزاوية، ثم أوجد جاأ، جتاأ، قاأ، قتاأ، جاجـ، جتاجـ، قاجـ، قتاجـ.

مثال (٤) استخدام الآلة الحاسبة

في الشكل المجاور، أوجد س، ص



الحل:

$$\text{جا}(43^\circ) = \frac{\text{س}}{10}$$

$$\text{س} = 10 \times \text{جا}(43^\circ)$$

تستخدم الآلة الحاسبة بالضغط على المفاتيح على الشكل التالي:

`10` `×` `sin` `43` `=`

يظهر `6.819983` ويساوي تقريبًا ٦,٨ سم.

$$\text{جتا}(43^\circ) = \frac{\text{ص}}{10}$$

$$\text{ص} = 10 \times \text{جتا}(43^\circ)$$

تستخدم الآلة الحاسبة بالضغط على المفاتيح على الشكل التالي:

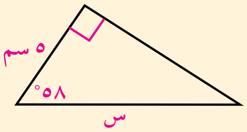
`10` `×` `cos` `43` `=`

يظهر `7.313537` ويساوي تقريبًا ٧,٣ سم.

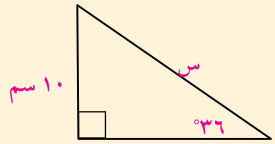
حاول أن تحل

٤ أوجد قيمة س لأقرب جزء من عشرة.

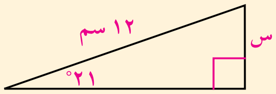
أ



ب



جـ



كان نيكولاي كوبرنيك Nicolaus Copernicus (١٤٧٣م - ١٥٤٣م) عالمًا رياضيًّا وفلكيًّا، درس الطب وألمّ بمعظم العلوم في عصره. يعتبر أول من صاغ نظرية مركزية الشمس وأن الأرض جرم يدور في فلكها.

يعتبر كوبرنيك مؤسس الفلك الحديث.

وحدة الفلك (و.ف أو AU) تمثل متوسط المسافة بين الأرض والشمس وهي تساوي تقريبًا ٠٠٠ ٦٠٠ ١٤٩ كم.

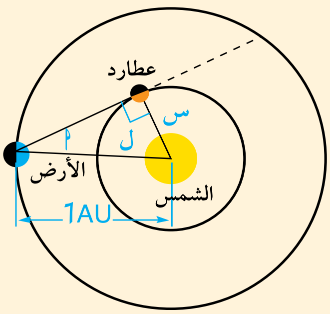
مثال (٥) تطبيقات حياتية (إثرائي)

هل تعلم؟

١ ميل ≃ ١,٦٠٩ كم

في الشكل المقابل، إذا كان ق(∠أ) = ٢٢,٣°،

أوجد بعد كوكب عطارد عن الشمس علمًا بأن بعد الأرض عن الشمس يساوي ١ وحدة الفلك AU١.



الحل:

بفرض أن : س = بعد كوكب عطارد عن الشمس.

ل = بعد الأرض عن الشمس

فيكون:

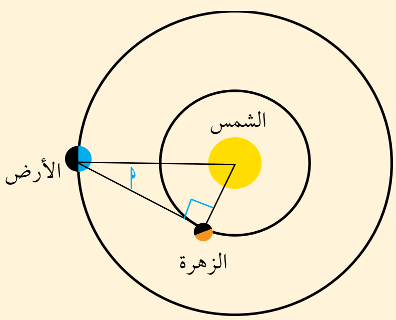
جا (٢٢,٣°) = $\frac{س}{ل}$.

∴ بعد عطارد عن الشمس = س = ل × جا (٢٢,٣°) .

≃ ١ × ٠,٣٨ ≃ ٠,٣٨ AU

حاول أن تحل

٥ كما في التطبيق السابق، أوجد بعد كوكب الزهرة عن الشمس علمًا بأن ق(∠أ) = ٤٦,١°

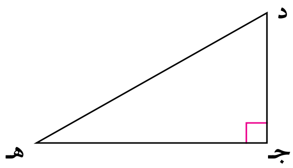


٥ إيجاد قياس زاوية علم جيبها او جيب تمامها

تريد معرفة قياس زاوية، تبين العلاقة التالية الترابط بين قياس الزاوية ونسبها المثلثية.

إذا كان جاد = ص فإننا نستخدم الآلة الحاسبة في إيجاد قياس الزاوية د

نقر على : ص Sin shift لإيجاد د



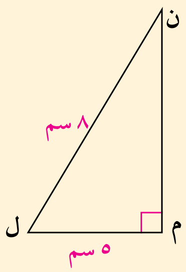
وإذا كان جتاد = س فإننا نستخدم الآلة الحاسبة في إيجاد قياس الزاوية د

غالبًا ما تستخدم الآلة الحاسبة في إيجاد قياسات هذه الزوايا.

نقر على: س Cos shift لإيجاد د

مثال (٦)

في الشكل المقابل، احسب ٯ($\hat{ل}$) لأقرب درجة.



الحل:

جتا ل = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$.

جتا ل = $\frac{٥}{٨}$ باستخدام النسب المثلثية لجيب التمام

shift Cos (5 ÷ 8) =

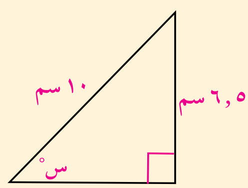
يظهر 51.317813

وبالتالي ٯ($\hat{ل}$) ≃ ٥١°

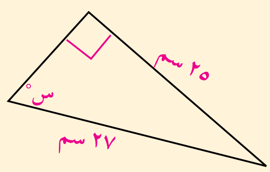
حاول أن تحل

٦ أوجد قيمة س° لأقرب درجة.

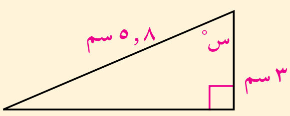
أ



ب



جـ



٢ – ٣

ظل الزاوية ومقلوبه
Tangent and Cotangent of an Angle

سوف تتعلم

- ما هو ظل الزاوية
- إيجاد قياس الزاوية إذا علم ظلها
- مقلوب ظل الزاوية
- حل المثلث قائم الزاوية

عمل تعاوني

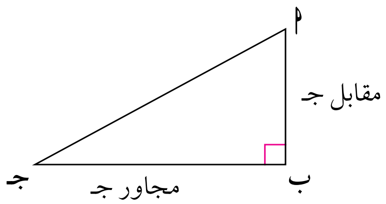
سنعمل في مجموعات صغيرة، نختار قياسات الزوايا
١٠°، ٢٠°، ٣٠°، ...، ٨٠°

كل طالب في مجموعته يرسم مثلث ٲب جـ قائم الزاوية في ب، ويختار إحدى الزوايا من المثلث بحيث تنتمي إلى مجموعة قياسات الزوايا. يحسب كل طالب أطوال أضلاع المثلث باستخدام المسطرة لأقرب ملليمتر، ويستخدم الآلة الحاسبة في حساب النسب:

$\frac{\text{مقابل الزاوية جـ}}{\text{المجاور للزاوية جـ}}$ لأقرب رقمين عشريين

في المثلث قائم الزاوية نسبة طول الضلع المقابل لزاوية حادة إلى طول الضلع المجاور للزاوية نفسها تسمى ظل الزاوية ونرمز إليها بالرمز ظاجـ وبالإنكليزية (tan) Tangent.

أي أن $\text{ظل الزاوية} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$



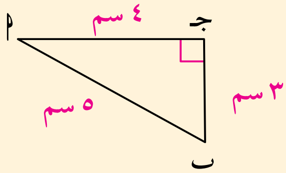
مثلًا في الشكل المقابل ظاجـ = $\frac{\text{ٲب}}{\text{ب جـ}}$

قارن بين ظا ١٠°، ظا ٢٠°، ظا ٣٠°، ظا ٤٠°، ... ماذا تستنتج؟

من العمل التعاوني السابق، يتبيّن أن قيمة ظاجـ تزداد كلما زاد قياس الزاوية جـ بين ٠°، ٩٠°.

مثال (١)

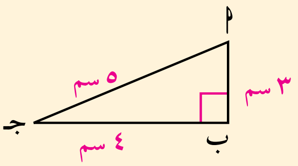
في الشكل المقابل أوجد ظل الزاوية ٲ، ظل الزاوية ب.

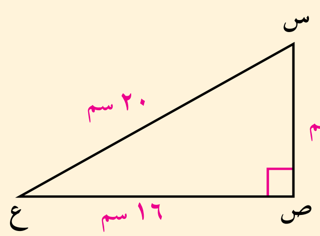


الحل: ظاٲ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ٲجـ}} = \frac{٣}{٤}$

ظاب = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{ٲجـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{٤}{٣}$

حاول أن تحل





١ ٲ استعن بالمثلثين المجاورين في إيجاد:

$\frac{\text{ٲب}}{\text{س ص}}$، $\frac{\text{ٲجـ}}{\text{س ع}}$، $\frac{\text{جـ ب}}{\text{ع ص}}$. ماذا تستنتج؟

ب هل ظاس = ظاٲ، ظاع = ظاجـ؟ ماذا تستنتج؟

جـ هل هذا صحيح بالنسبة إلى النسب: جاس، جاٲ وكذلك جتاس، جتاٲ؟ ماذا تستنتج؟

مثال (٢) تطبيقات حياتية

أراد أحد أعضاء فريق الكشافة قياس المسافة بين قمتي جبلين، فوقف على قمة أحد الجبلين عند النقطة أ وحدّد علامة مميزة أمامه على قمة الجبل الآخر ولتكن ب، ثم اتبع التالي:

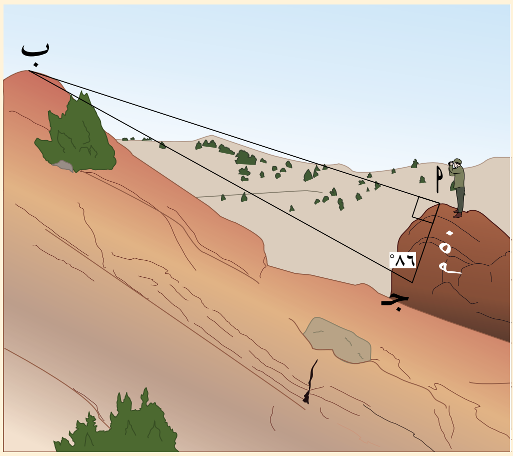
١ وضع مؤشر البوصلة باتجاه العلامة المميزة ب وحدّد قراءة المؤشر.

٢ سار مسافة ٥٠ مترًا على خط مستقيم عمودي على الخط المستقيم الواصل بين القمتين.

٣ وضع مؤشر البوصلة مرة ثانية في اتجاه العلامة المميزة وحدّد قراءة المؤشر.

٤ باستخدام قراءتي المؤشر وجد أن: ق(جـ^) = ٨٦°.

استخدم ظل الزاوية في حساب المسافة بين قمتي الجبلين عند النقطة التي بدأ منها القياس.



الحل: باستخدام ظل الزاوية

ظا(٨٦°) = $\frac{\text{أب}}{٥٠}$

أب = ٥٠ × ظا (٨٦°)

تستخدم الآلة الحاسبة

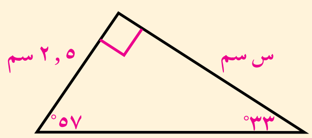
50 × TAN 86 =

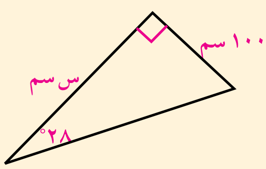
يظهر 715.03331

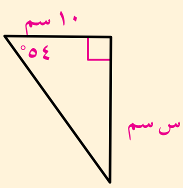
إذًا، المسافة بين قمتي الجبلين هي ٧١٥ مترًا تقريبًا.

حاول أن تحل

٢ أوجد قيمة س لأقرب جزء من عشرة.

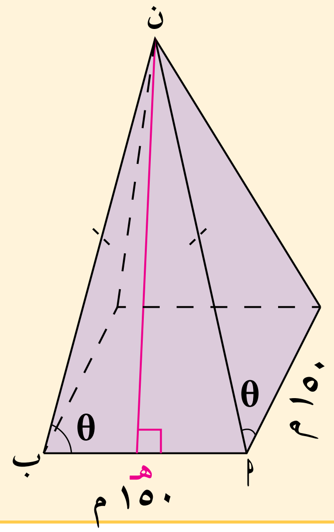
أ


ب


جـ


مثال (٣)

الهرم القائم المقابل قاعدته مربعة الشكل. أوجد طول ارتفاعه المائل ل إذا كان قياس الزاوية θ يساوي ٦٠°.



تذكر:
الارتفاع المائل:
هو العمود المرسوم من رأس الهرم إلى أحد أضلاع قاعدته.

الحل:

في Δن أب المتطابق الضلعين

$\overline{\text{ن هـ}} \perp \overline{\text{أب}}$

∴ هـ أ = هـ ب = ٧٥ م

في Δن هـ ب القائم الزاوية هـ

ظا θ = $\frac{\text{ل}}{٧٥}$

ظا ٦٠° = $\frac{\text{ل}}{٧٥}$

ل = ٧٥ × ظا ٦٠° ≃ ١٣٠ مترًا.

طول الارتفاع المائل ≃ ١٣٠ مترًا.

١ - إيجاد قياس زاوية إذا علم ظلها: Finding the Measure of an Angle Knowing its Tangent

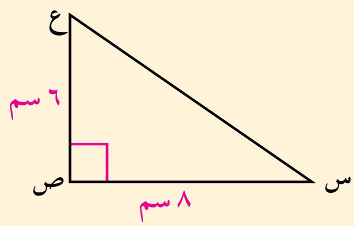
قد تعلم ظل زاوية وتريد معرفة قياس هذه الزاوية. تبين العلاقة التالية الترابط بين قياس الزاوية ونسبتها المثلثية:

إذا كان ظا θ = س فإننا نستخدم الآلة الحاسبة في إيجاد قياس الزاوية θ

نقر على: [س] [tan] [shift] لإيجاد θ

مثال (٤)

في الشكل المقابل أوجد ٯ(سˆ) في Δس ص ع.



الحل:

ظاس = $\frac{٦}{٨}$ = ٠,٧٥

لإيجاد ٯ(سˆ) تستخدم الآلة الحاسبة.

[=] [0.75] [TAN] [Shift]

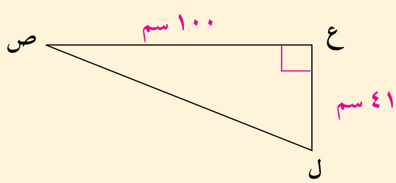
يظهر [36.86989765] [°′″] يظهر [36° 52′ 11.63″]

إذًا ٯ(سˆ) ≃ ٣٦° ٥٢′ ١٢″.

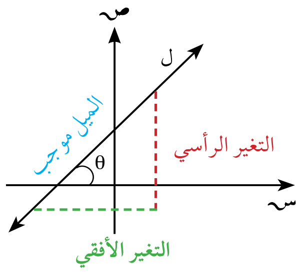
حاول أن تحل

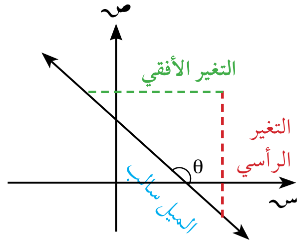
٣ أوجد ٯ(سˆ) حيث ظاس = ٠,٥

٤ في الشكل المقابل، أوجد ٯ(لˆ) لأقرب درجة.



إذا كان المستقيم ل يصنع زاوية θ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن θ تسمى زاوية ميل المستقيم ويكون ظاθ = ميل المستقيم = $\frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$

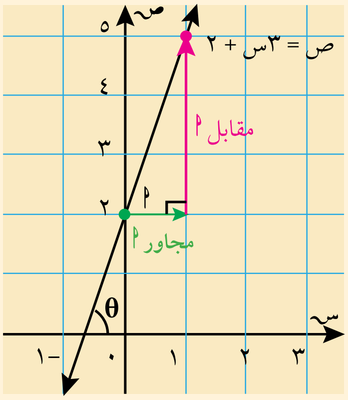




إذا كانت معادلة المستقيم: ص = م س + ب فإن ميل المستقيم = م.

مثال (٥)

في الشكل المقابل: احسب قياس الزاوية الحادة الموجبة θ التي يصنعها المستقيم ص = ٣س + ٢ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.



الحل:

من الشكل ق($\hat{\theta}$) = ق($\hat{؏}$) . زاويتان متناظرتان.

ظا؏ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{٣}{١}$ = ٣

Shift TAN 3 =

يظهر 71.565051 °''' يظهر 71° 33′ 54.18″

ق($\hat{؏}$) ≃ ٥٤″ ٣٣′ ٧١°

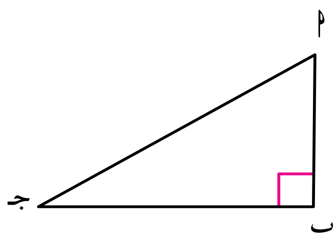
حاول أن تحل

٥ احسب قياس الزاوية الحادة الموجبة التي يصنعها المستقيم ص = $\frac{١}{٤}$ س + ٦ مع الاتجاه الموجب للمحور السيني.

٢- مقلوب ظل الزاوية (ظتا): (Cotangent (cot

مقلوب ظل الزاوية ؏ = $\frac{١}{\text{ظا؏}}$ ويسمى ظل تمام الزاوية ؏ ويرمز إليه بالرمز **ظتا؏** وبالإنكليزية Cotangent (cot).

ظتا؏ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$ = $\frac{\text{؏ب}}{\text{ب جـ}}$

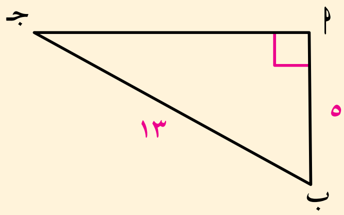


ويكون ظتا؏ = $\frac{١}{\text{ظا؏}}$: ظا؏ ≠ ٠

ظا؏ × ظتا؏ = ١

مثال (٦)

في الشكل المقابل أوجد ظاجـ، ظتاجـ.



الحل:

من نظرية فيثاغورث $(ﻫ جـ)^٢ = (١٣)^٢ - (٥)^٢ = ١٤٤$،

ﻫ جـ = ١٢

$ظاجـ = \frac{المقابل}{المجاور} = \frac{٥}{١٢}$ ، $ظتاجـ = \frac{المجاور}{المقابل} = \frac{١٢}{٥}$

ملاحظة:

عند عدم ذكر وحدة الطول في رسم الأشكال يمكنك اعتبار أي وحدة طول.

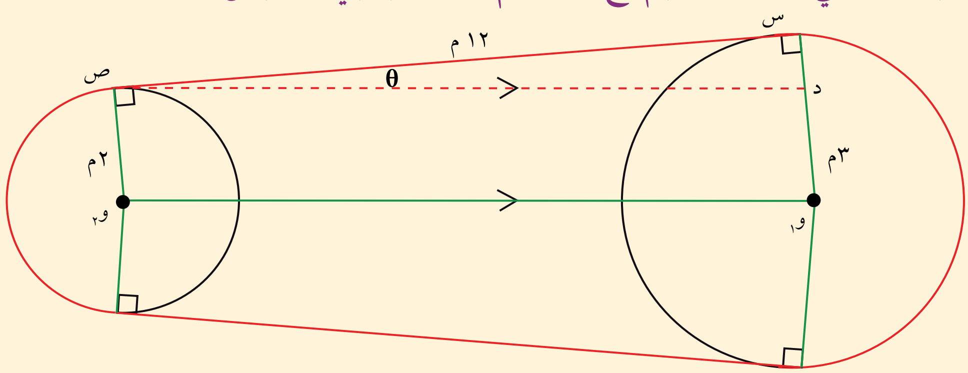
حاول أن تحل

٦ ﻫ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب فيه ﻫ ب = ٧ سم، ﻫ جـ = ٢٥ سم. أوجد: ظاجـ، ظتاجـ.

مثال (٧)

يلتف حزام حول بكرتين أسطوانتي الشكل. طول نصف قطر البكرة الكبرى ٣ م وطول نصف قطر الصغرى ٢ م.

نريد معرفة قياس الزاوية θ التي يصنعها الحزام مع المستقيم المار بمركزي الدائرتين.



الحل:

نرسم $\overline{د ص} \parallel \overline{و_١ و_٢}$

الشكل $د و_١ و_٢ ص$ متوازي أضلاع

$س د = س و_١ - د و_١ = ٣ - ٢ = ١$ م

في المثلث د س ص قائم الزاوية:

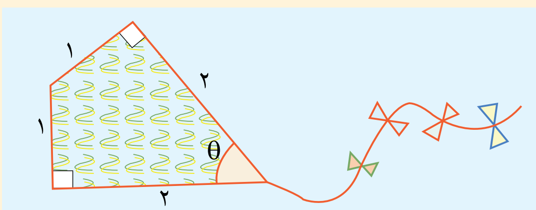
$ظا\theta = \frac{المقابل}{المجاور} = \frac{١}{١٢}$

$ق(\hat{\theta}) = \boxed{4°45'49.11''}$

قياس الزاوية θ يساوي ٤٩″ ٤٥′ ٤° تقريبًا.

حاول أن تحل

٧ يبيّن الشكل المقابل طائرة ورقية. أوجد قياس الزاوية θ.



٢ – ٤

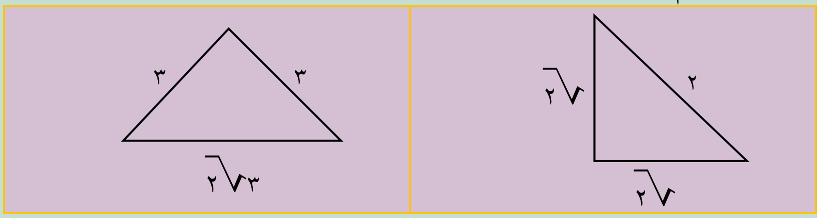
النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة
Trigonometric Ratios for Some Particular Angles

سوف تتعلم

- النسب المثلثية للزوايا ٣٠°، ٤٥°، ٦٠°.
- متطابقات مثلثية
- الزاوية الربعية

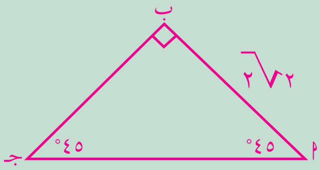
دعنا نفكر ونتناقش

١ استخدم المنقلة لإيجاد قياسات زوايا كل مثلث.



٢ قارن بين أطوال الأضلاع.

٣ استخدم نظرية فيثاغورث لإثبات ما حصلت عليه في ٢.



المثلث ٤٥°، ٤٥°، ٩٠°.

في المثلث أ ب جـ، قياس كل من الزاويتين الحادتين يساوي ٤٥°.

المثلث أ ب جـ قائم الزاوية بَ متطابق الضلعين، ويسمى أحيانًا **المثلث ٤٥°، ٤٥°، ٩٠°.**

إذا كان طول كل من ضلعي الزاوية القائمة يساوي س، فإن طول الوتر = س √٢

في هذا المثلث جا ٤٥° = $\frac{\text{المقابل}}{\text{طول الوتر}} = \frac{\text{س}}{\text{س}\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

كذلك جتا ٤٥° = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{س}}{\text{س}\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

ظا ٤٥° = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{س}}{\text{س}} = ١$

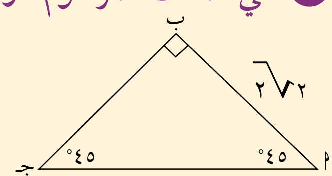
جا ٤٥° = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

جتا ٤٥° = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

ظا ٤٥° = ١

مثال (١)

أ في المثلث المرسوم، أوجد طول الوتر $\overline{\text{أجـ}}$.



الحل:

جتا أ = $\frac{\text{أب}}{\text{أجـ}}$

جتا ٤٥° = $\frac{٢\sqrt{٢}}{\text{أجـ}}$

أجـ = $\frac{٢\sqrt{٢}}{\text{جتا ٤٥°}} = \frac{٢\sqrt{٢}}{\frac{\sqrt{٢}}{٢}} = ٤$

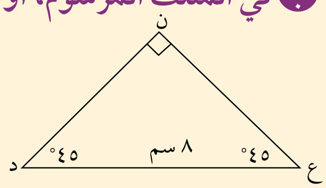
طول الوتر $\overline{\text{أجـ}}$ = ٤ سم.

طريقة أخرى:

أجـ = ٢√٢ × √٢ = ٤

∴ أجـ = ٤ سم

ب في المثلث المرسوم، أوجد طول الضلع $\overline{\text{ع ن}}$.



الحل:

جتاع = $\frac{\text{ع ن}}{\text{ع د}}$

جتا ٤٥° = $\frac{\text{ع ن}}{٨}$

ع ن = ٨ × جتا ٤٥° = ٨ × $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ = ٤√٢

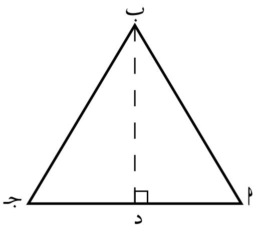
طول الضلع $\overline{\text{ع ن}}$ ≃ ٥,٦٥٦ سم.

حاول أن تحل

١ أ ٱب جـ مثلث ٤٥°، ٤٥°، ٩٠°. أوجد طول الوتر إذا كان طول أحد ضلعي الزاوية القائمة = ٥ سم.

ب الحساب الذهني: إذا كان ظا جـ = ١ فكيف توجد ق (جـ^) دون استخدام الآلة الحاسبة؟

المثلث ثلاثيني ستيني 30° – 60° triangle



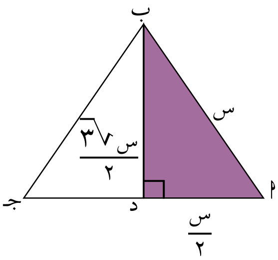
∵ Δ ٱب جـ مثلث متطابق الأضلاع.

∵ ب د ⊥ ٱجـ.

∴ ب د هي منصف الزاوية ٱب^جـ.

ومنه ق(ٱب^د) = $\frac{٦٠°}{٢}$ = ٣٠°، ق(ٱ^) = ٦٠°

∴ ٱب د مثلث ثلاثيني ستيني (٣٠°، ٦٠°، ٩٠°).



إذا كان طول الضلع ٱجـ يساوي س فإن ٱد = $\frac{س}{٢}$

وباستخدام نظرية فيثاغورث في المثلث ٱب د نحصل على ب د = $\frac{س\sqrt{٣}}{٢}$.

كذلك ب د هي المنصف العمودي للقطعة ٱجـ.

$$\text{جا}\,ٱ^ = \text{جا}\,٦٠° = \frac{ب\,د}{ٱب} = \frac{\frac{س\sqrt{٣}}{٢}}{س} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

$$\text{جتا}\,ٱ^ = \text{جتا}\,٦٠° = \frac{ٱد}{ٱب} = \frac{\frac{س}{٢}}{س} = \frac{١}{٢}$$

$$\text{ظا}\,ٱ^ = \text{ظا}\,٦٠° = \frac{ب\,د}{ٱد} = \frac{\frac{س\sqrt{٣}}{٢}}{\frac{س}{٢}} = \sqrt{٣}$$

جا٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جتا٦٠° = $\frac{١}{٢}$

ظا٦٠° = $\sqrt{٣}$

كذلك $\text{جا}\,ب^ = \text{جا}\,٣٠° = \frac{ٱد}{ٱب} = \frac{\frac{س}{٢}}{س} = \frac{١}{٢}$

$$\text{جتا}\,ب^ = \text{جتا}\,٣٠° = \frac{ب\,د}{ٱب} = \frac{\frac{س\sqrt{٣}}{٢}}{س} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

$$\text{ظا}\,ب^ = \text{ظا}\,٣٠° = \frac{\frac{س}{٢}}{\frac{س\sqrt{٣}}{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$$

جا٣٠° = $\frac{١}{٢}$

جتا٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ظا٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

لاحظ أن جا٦٠° = جتا٣٠°

جتا٦٠° = جا٣٠°

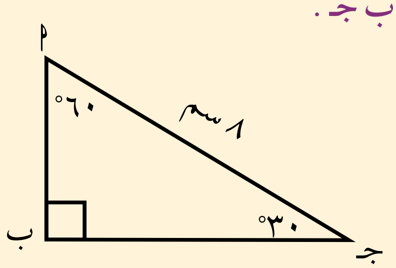
باستخدام الحاسبة يمكنك إيجاد كل من الجيب، جيب التمام والظل لكل زاوية ربعية. والجدول التالي يبيّن النسب المثلثية للزوايا الخاصة والربعية.

الزاوية هـ		جاهـ	جتاهـ	ظاهـ
القياس الستيني	القياس الدائري			
٠°	٠ د	٠	١	٠
٣٠°	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٣}$
٤٥°	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	١
٦٠°	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\sqrt{٣}$
٩٠°	$\frac{\pi}{٢}$	١	٠	غير معرّف
١٨٠°	π	٠	١−	٠
٢٧٠°	$\frac{٣\pi}{٢}$	١−	٠	غير معرّف
٣٦٠°	٢π	٠	١	٠

هل تعلم؟
وضعت جداول النسب المثلثية منذ أكثر من ٢٠٠٠ عام لتستخدم في علم الفلك.

مثال (٢)

أب جـ مثلث ثلاثيني ستيني. طول الوتر = ٨ سم. أوجد طول كل من الضلعين $\overline{أب}$، $\overline{ب جـ}$.



الحل:

في Δ أب جـ، جاجـ = جا٣٠° = $\frac{أب}{أجـ}$

$\frac{١}{٢} = \frac{أب}{٨}$

أب = ٤

جتاجـ = جتا(٣٠°) = $\frac{ب جـ}{أجـ}$

$\frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{ب جـ}{٨}$

ب جـ = ٤$\sqrt{٣}$

طول الضلع $\overline{أب}$ = ٤ سم وطول الضلع $\overline{ب جـ}$ = ٤$\sqrt{٣}$ ≃ ٦,٩ سم.

حاول أن تحل

٢ في مثلث ثلاثيني ستيني إذا كان طول الضلع الأصغر = $\sqrt{٦}$ سم، فأوجد طول الضلعين الآخرين.

مثال (٣) تطبيق لوحة إرشادية لمدرسة

تشير إحدى لوحات السير على وجود مدرسة. اللوحة على شكل مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه ٦٠ سم. أوجد مساحة هذه اللوحة.

الحل:

طول العمود النازل من رأس مثلث متطابق الأضلاع إلى القاعدة = ارتفاع المثلث = طول الضلع × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

= ٦٠ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ≃ ٥٢ سم.

مساحة اللوحة = $\frac{\text{طول القاعدة × الارتفاع}}{٢}$ = $\frac{٦٠ \times ٥٢}{٢}$ = ١ ٥٦٠ سم^{٢}.

مساحة اللوحة تساوي حوالى ١ ٥٦٠ سم^{٢}.

حاول أن تحل

٣ معيّن يتكوّن من مثلثين متطابقي الأضلاع. أوجد مساحة المعين إذا كان طول ضلع المثلث = ٨ سم.

مثال (٤) تطبيقات حياتية

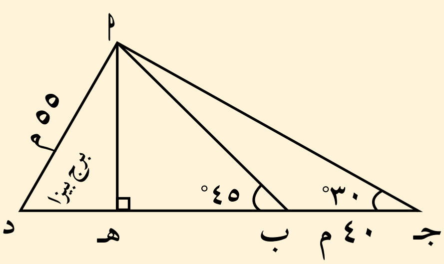
برج بيزا معلم أثري مشهور في إيطاليا. كان ارتفاع البرج ٥٥ مترًا قبل ميله نحو الجنوب. ($\overline{أد}$ في الرسم).

شاهد مراقبان موجودان في النقطتين ب، جـ قمة البرج بزاويتين قياساهما ٤٥°، ٣٠° على الترتيب.

أ عبّر عن طول كل من $\overline{هـ ب}$، $\overline{هـ جـ}$ بدلالة طول $\overline{أهـ}$.

ب أوجد أهـ علمًا أن المسافة بين النقطتين ب، جـ تساوي ٤٠ مترًا.

جـ نتيجة للأشغال المهمة على البرج بين العامين ١٩٩٣ - ٢٠٠١ تقلص البعد بين النقطتين هـ، د من ٤,٥ مترًا إلى ٤ أمتار. ما قياس ($\widehat{أدهـ}$) التي يصنعها البرج مع الأرض قبل الأشغال؟ وبعد الأشغال؟



الحل: أ في المثلث أهـ ب: ظا ٤٥° = $\frac{\text{هـ أ}}{\text{هـ ب}}$ = ١ ومنه هـ ب = هـ أ

في المثلث أهـ جـ: ظا ٣٠° = $\frac{\text{هـ أ}}{\text{هـ جـ}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ومنه هـ جـ = $\sqrt{٣}$ هـ أ

ب هـ جـ = هـ ب + ب جـ

$\sqrt{٣}$ أهـ = هـ أ + ٤٠ أي ($\sqrt{٣}$ - ١) أهـ = ٤٠

أهـ = $\frac{٤٠}{\sqrt{٣} - ١}$ ≃ ٥٤,٦٤

جـ قبل الأشغال: جتا($\widehat{أدهـ}$) = $\frac{٤,٥}{٥٥}$ ، ق($\widehat{أدجـ}$) ≃ ٥٦″ ٢١′ ٨٤°

بعد الأشغال: جتا($\widehat{أدهـ}$) = $\frac{٤}{٥٥}$ ، ق($\widehat{أدجـ}$) ≃ ٤٦″ ٤٩′ ٨٥°

حل المثلث قائم الزاوية
Solving Right Triangle

سوف تتعلم

- إيجاد قياسات زوايا مثلث قائم.
- إيجاد أطوال أضلاع مثلث قائم.

عمل تعاوني

استخدم برنامج رسم هندسي على الحاسوب.

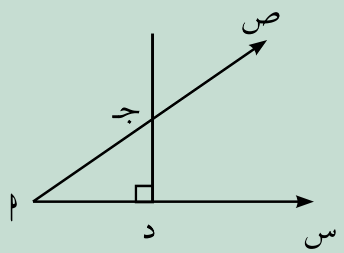
ارسم شعاعين $\overrightarrow{\text{أس}}$ ، $\overrightarrow{\text{أص}}$ يشكلان زاوية حادة س $\hat{\text{أ}}$ ص.

من نقطة د على $\overrightarrow{\text{أس}}$ ارسم شعاعًا متعامدًا مع $\overrightarrow{\text{أس}}$ يقطع $\overrightarrow{\text{أص}}$ في جـ.

بتحريك النقطة د تتحرك تبعًا لها النقطة جـ محافظًا على جـ$\hat{\text{د}}$أ قائمة، يكبر المثلث أد جـ أو يصغر. وبتحريك النقطة ص يكبر أو يصغر قياس الزاوية $\hat{\text{أ}}$.

١ – أوجد قياس الزاوية $\hat{\text{أ}}$.

٢ – أوجد أطوال أضلاع المثلث أدجـ.



احسب النسبة $\frac{\text{دجـ}}{\text{أجـ}}$ $\left(\frac{\text{الضلع المقابل للزاوية } \hat{\text{أ}}}{\text{الوتر}}\right)$

حرّك $\overrightarrow{\text{أص}}$ بحيث يتغيّر قياس الزاوية $\hat{\text{أ}}$.

ما الذي تلاحظه حول النسبة $\frac{\text{دجـ}}{\text{أجـ}}$ عندما يتغيّر قياس الزاوية $\hat{\text{أ}}$.

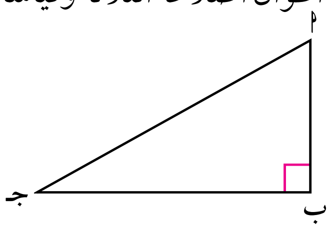
من أي قيمة تقترب هذه النسبة عندما يقترب قياس $\hat{\text{أ}}$ من ٠°؟ ومن ٩٠°؟

٣ – اصنع جدولًا يبيّن قيم الزاوية $\hat{\text{أ}}$ والنسبة $\left(\frac{\text{الضلع المقابل للزاوية } \hat{\text{أ}}}{\text{الوتر}}\right)$ يتضمن القياسات ١٠°، ٢٠°، ٣٠°، ... ٨٠° للزاوية $\hat{\text{أ}}$.

٣ – حل المثلث قائم الزاوية Solving Right Triangle

نعلم أن للمثلث ستة عناصر هي أضلاعه الثلاثة وزواياه الثلاث. حلّ المثلث يعني إيجاد أطوال أضلاعه الثلاثة وقياسات زواياه الثلاث. سيقتصر عملنا في هذا البند على المثلث قائم الزاوية.

في الشكل المقابل المثلث أب جـ قائم الزاوية في ب.



الأضلاع: $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أجـ}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$

الزوايا: $\hat{\text{أ}}$ ، $\hat{\text{ب}}$ ، $\hat{\text{جـ}}$

غالبًا ما تعطى ثلاثة عناصر في المثلث أحدها على الأقل طول أحد الأضلاع ويتعين علينا إيجاد الباقي.

مثال (١)

حلّ المثلث أب جـ القائم في $\hat{\text{ب}}$ إذا علم أن: أب = ٤ سم، ب جـ = ٣ سم

الحل:

بتطبيق نظرية فيثاغورث

(أجـ)^{٢} = (أب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

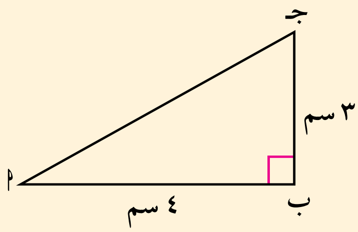
أجـ = ٥ سم

ظا$\hat{أ}$ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{٣}{٤} =$ ٠,٧٥

استخدم حاسبة الجيب لإيجاد ق($\hat{أ}$).

Shift	TAN	0.75	=	36.869897

ق($\hat{أ}$) ≃ ٣٧°.   ق($\hat{جـ}$) ≃ ٩٠° − ٣٧° ≃ ٥٣°



حاول أن تحل

١ حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في $\hat{جـ}$ حيث: ب جـ = ١٥ سم، أجـ = ١٢ سم

مثال (٢)

حلّ المثلث أ ب جـ القائم في ($\hat{جـ}$) إذا علم أن: أ ب = ٤٠ سم، ق($\hat{ب}$) = ٢٥°

الحل:

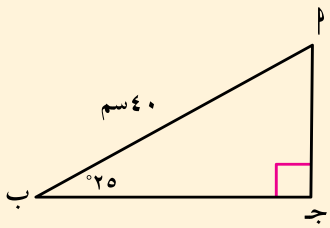
ق($\hat{أ}$) = ٩٠° − ٢٥° = ٦٥°

جتا($\hat{ب}$) = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}}$ ، جتا (٢٥°) = $\frac{\text{ب جـ}}{٤٠}$

ب جـ = ٤٠ × جتا(٢٥°) ≃ ٣٦,٢٥ سم

جاب = $\frac{\text{أجـ}}{\text{أ ب}}$ ، جا (٢٥°) = $\frac{\text{أجـ}}{٤٠}$

أجـ = ٤٠ جا (٢٥°) ≃ ١٧ سم



حاول أن تحل

٢ حل المثلث أ ب جـ القائم في جـ حيث: أجـ = ٢٠ سم، ق($\hat{ب}$) = ٧٥°

مثال (٣)

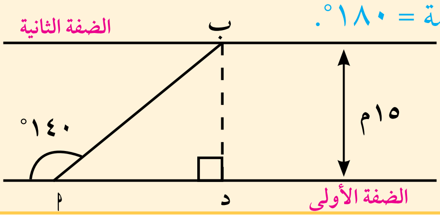
حاول أحد السباحين عبور النهر انطلاقًا من النقطة أ الموضحة بالشكل المرسوم جرفه التيار ووصل إلى النقطة ب.

ما المسافة التي قطعها السباح؟

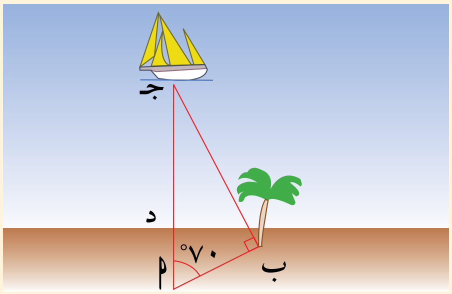
الحل: ليكن ب د البعد العمودي بيبّن الضفتين

في المثلث أ ب د، ق(د$\hat{أ}$ب) = ١٨٠° − ١٤٠° = ٤٠° قياس الزاوية المستقيمة = ١٨٠°.

جا($\hat{أ}$) = $\frac{\text{ب د}}{\text{أ ب}}$ جا(٤٠°) = $\frac{١٥}{\text{أ ب}}$ بالتعويض



أب = $\frac{١٥}{\text{جا}(٤٠°)}$ ≃ ٢٣,٣ أي أن السباح قطع حوالى ٢٣,٣ مترًا.



حاول أن تحل

٣ في الشكل المقابل إذا كان، أد = ١٠٠ متر، أب = ١٥٠ متر.

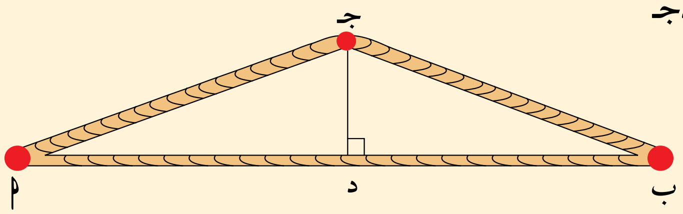
أوجد:

(أ) البعد بين الزورق والشجرة (ب) البعد بين الزورق والشاطىء

مثال (٤)

حبل طوله ١٠ أمتار مثبت في مسمارين عند النقطتين أ، ب. حبل آخر طوله ١١ مترًا مثبت في نفس النقطتين، شُدّ من وسطه (النقطة جـ) إلى أعلى.

أ أوجد ق(د أ جـ) ب أوجد طول $\overline{\text{دجـ}}$



الحل:

أد = $\frac{\text{أب}}{٢}$ = ٥ أمتار.

أجـ = $\frac{١١}{٢}$ = ٥,٥ أمتار.

جتاأ = $\frac{\text{أد}}{\text{أجـ}}$ = $\frac{٥}{٥,٥}$ ≃ ٠,٩١

∴ ق(أ) ≃ ٢٤° ٢٩′ ٤١″ باستخدام الآلة الحاسبة

ق(د أ جـ) ≃ ٢٤° ٢٩′ ٤١″.

ب باستخدام نظرية فيثاغورث (جـ د)^٢ + (أد)^٢ = (جـأ)^٢

أي (جـ د)^٢ = (جـأ)^٢ − (أد)^٢

(جـ د)^٢ = (٥,٥)^٢ − ٥^٢ = ٥,٢٥

∴ جـ د = $\sqrt{٥,٢٥}$ ≃ ٢,٣

طول القطعة $\overline{\text{جـ د}}$ يساوي حوالي ٢,٣ متر.

حاول أن تحل

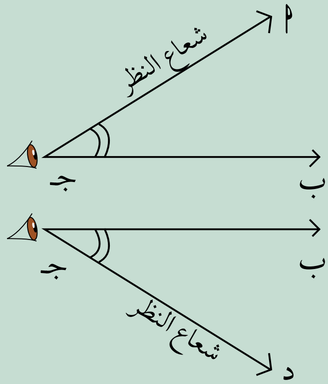
٤ في المثال السابق أوجد ق(أ) إذا كان طول الحبل من أ إلى ب والمار بالنقطة جـ يساوي ١٢ مترًا.

٦-٢ زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض
Angles of Elevation and Angles of Depression

سوف تتعلم

- زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض
- استخدام زوايا الارتفاع والانخفاض في حل مسائل حياتية

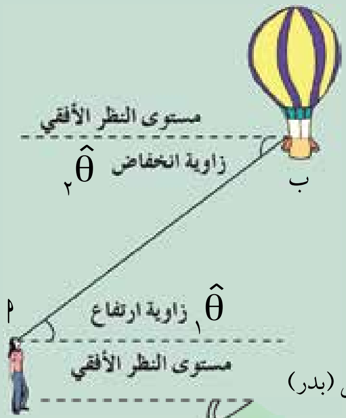
دعنا نفكر ونتناقش



١ - إذا رصد شخص (جـ) نقطة أ أعلى من مستوى نظره الأفقيّ $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ فإن الزاوية التي يحددها $\overleftarrow{\text{جـ أ}}$، $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ تسمى **زاوية ارتفاع أ** عن المستوى الأفقي لنظر الشخص جـ.

٢ - وإذا رصد الشخص جـ نقطة د أدنى من مستوى نظره الأفقي $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ فإن الزاوية التي يحددها $\overleftarrow{\text{جـ د}}$، $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ تسمّى **زاوية انخفاض د** عن المستوى الأفقي لنظر الشخص جـ.

ملاحظة:



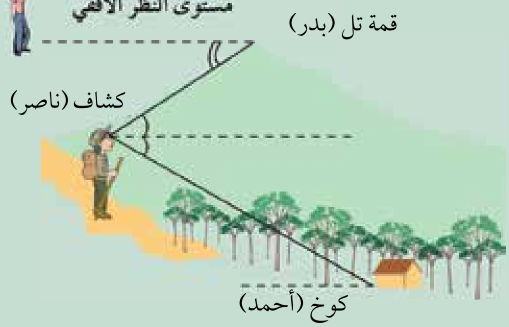
إذا كان أ شخصًا موجودًا على سطح الأرض، وكان ب شخصًا موجودًا في منطاد مرتفع عن سطح الأرض، ونظر كلّ منهما إلى الآخر فإنّ:

$\hat{\theta}_1$ هي زاوية ارتفاع ب عن المستوى الأفقيّ لنظر (أ).

$\hat{\theta}_2$ هي زاوية انخفاض (أ) عن المستوى الأفقيّ لنظر (ب)

ونلاحظ في هذه الحالة أنّ:

زاوية الارتفاع ($\hat{\theta}_1$) = زاوية الانخفاض ($\hat{\theta}_2$).



٣ -يقف بدر عند قمة التل ويقف ناصر عند الكشاف ويقف أحمد عند الكوخ.

صف كلّ زاوية في الشكل عندما ينظر:

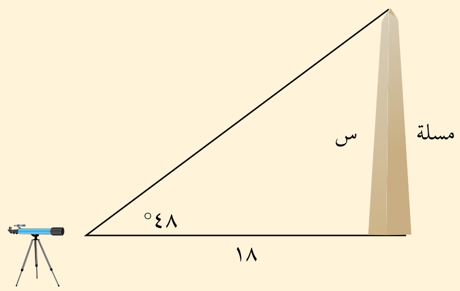
(أ) بدر إلى ناصر

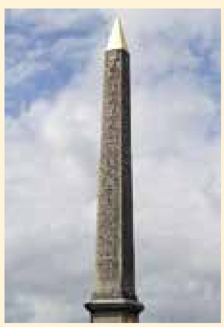
(ب) ناصر إلى أحمد

(جـ) ناصر إلى بدر

مثال (١)

لقياس طول إحدى المسلات قام مرشد سياحيّ برصد قمة المسلة من خلال جهاز للرصد، فوجد أنّ قياس زاوية الارتفاع ٤٨°. إذا كان الجهاز يبعد عن قاعدة المسلة مسافة ١٨ م فاحسب ارتفاع المسلة.





الحل:

ظا(٤٨)° = $\frac{\text{س}}{١٨}$

س = ١٨ × ظا (٤٨)° ≃ ٢٠

ارتفاع المسلة: ٢٠ م تقريبًا

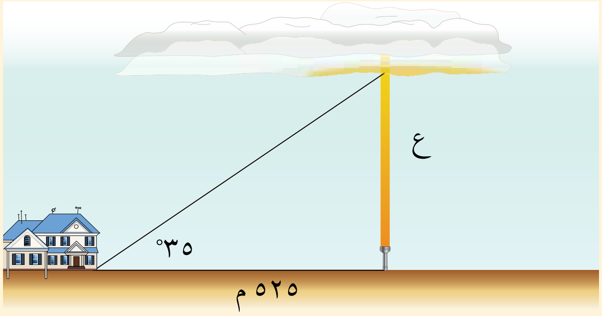
حاول أن تحل

١ من نقطة على سطح الأرض تبعد ١٠٠ متر عن قاعدة مئذنة، وجد أن قياس زاوية ارتفاع المئذنة ١٢° . أوجد ارتفاع المئذنة عن سطح الأرض.

مثال (٢)

علم الأرصاد الجوية: لمعرفة ارتفاع طبقة من الغيوم عن سطح الأرض يستخدم علماء الفلك قياس زاوية الارتفاع في اللحظة التي يصل فيها البرق إلى الأرض. (يمكن نمذجة المسألة كما في الصورة).

أوجد قيمة تقريبية لارتفاع طبقة الغيوم عن سطح الأرض.



الحل:

$$\text{ظا}(٣٥°) = \frac{\text{ع}}{٥٢٥}$$

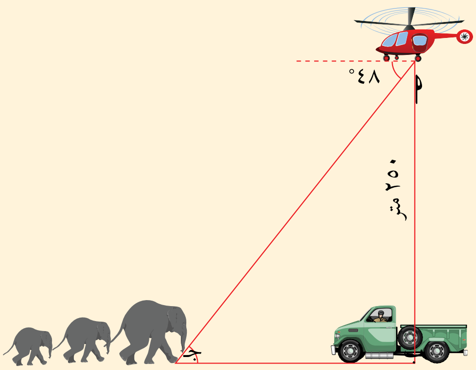
$$\text{ع} = ٥٢٥ \times \text{ظا}(٣٥°)$$

ع $\simeq$ ٣٦٧,٦ مترًا

مثال (٣)

تحلق مروحية فوق محمية طبيعية على ارتفاع ٢٥٠ مترًا وتواكبها على الأرض سيارة حرس المحمية. شاهد ربان المروحية قطيعًا من الفيلة بزاوية انخفاض قياسها ٤٨°. ما المسافة بين المروحية والقطيع في تلك اللحظة علمًا بأن السيارة مباشرة تحت المروحية؟

الحل:



لتكن أ موقع المروحية، ب موقع السيارة، جـ موقع القطيع.

$$\text{جاجـ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\text{جا}٤٨° = \frac{٢٥٠}{\text{أجـ}}$$

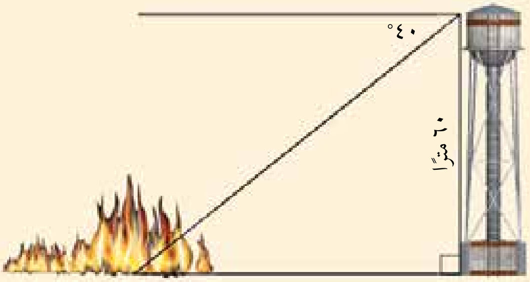
$$\text{أجـ} = \frac{٢٥٠}{\text{جا}٤٨°}$$

أجـ $\simeq$ ٣٣٦,٤ مترًا

يبعد قطيع الفيلة حوالى ٣٣٦ مترًا عن المروحية.

حاول أن تحل

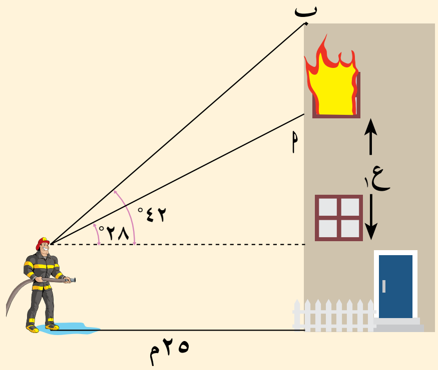
٢ يقف مراقب فوق برج ارتفاعه ٦٠ مترًا. شاهد حريقًا بزاوية انخفاض قياسها ٤٠°. ما المسافة بين قاعدة برج المراقبة وموقع الحريق؟

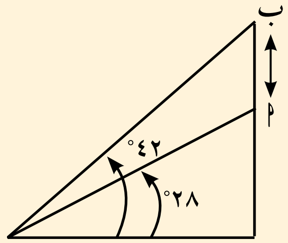


مثال (٤) **(إثرائي)**

شاهد رجل إطفاء وهو يقف على سطح الأرض ألسنة النيران تنبعث من إحدى النوافذ القريبة من سطح البناء. وجد أن قياس زاوية الارتفاع من مستوى نظره إلى القاعدة السفلية للنافذة (أ) حيث تندلع النيران هي ٢٨°، وزاوية الارتفاع من مستوى نظره إلى سطح البناء (ب) قياسها ٤٢°. علمًا أن رجل إطفاء يقف على مسافة ٢٥ مترًا من قاعدة البناء.

ما المسافة بين قاعدة النافذة (حيث ألسنة النيران) وسطح البناء؟





الحل: بفرض أن $ع_1$ هي البعد بين القاعدة السفلية للنافذة أ ومستوى النظر الأفقي.

$ظا ٢٨° = \frac{ع_1}{٢٥}$ ؛ $ع_1 = ٢٥$ ظا ٢٨°.

بفرض أن $ع_2$ هي البعد بين سطح البناء والمستوى الأفقي للنظر.

$ظا ٤٢° = \frac{ع_2}{٢٥}$ ؛ $ع_2 = ٢٥$ ظا ٤٢°

$ع = ع_2 - ع_1 = ٢٥($ظا ٤٢° − ظا ٢٨°$)$

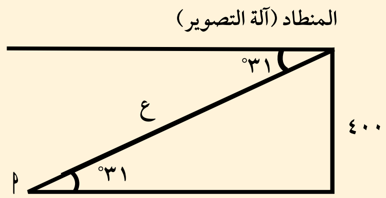
$\simeq ٩,٢٢$ أمتار

∴ المسافة المطلوبة $\simeq ٩,٢٢$ أمتار

حاول أن تحل

٣ زُوِّد منطاد بهوائي تلفزيون لنقل مباراة كرة القدم، حيث تراقب آلة التصوير الملعب عند النقطة أ بزاوية انخفاض ٣١°. يبلغ ارتفاع المنطاد عن سطح الأرض ٤٠٠ متر.

ما طول خط الضوء المرسل من آلة التصوير إلى الملعب؟

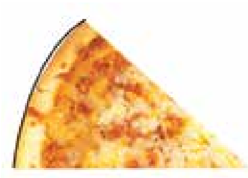


٢ – ٧

القطاع الدائري والقطعة الدائرية
Circular Sector and Circular Segment

تعريف:
القطاع الدائري هو جزء من سطح الدائرة محدود بنصفي قطرين وقوس.

سوف تتعلم
- القطاع الدائري
- إيجاد مساحة القطاع الدائري
- القطعة الدائرية
- إيجاد مساحة القطعة الدائرية

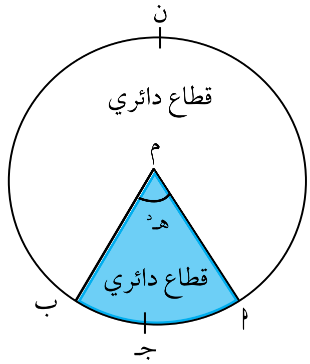


تمثل قطعة الشطيرة قطاعًا دائريًا

في الشكل المرسوم:

نصفا القطرين م‌أ، م ب يقسمان الدائرة إلى قطاعين دائريين.

القطاع الأصغر م‌أجـ ب زاويته المركزية هـ ͩ، والقطاع الأكبر م‌أن ب زاويته المركزية ٢π – هـ ͩ.



معلومة رياضية:
قياس القوس = قياس الزاوية المركزية التي تحصر القوس بين ضلعيها.

١ – مساحة القطاع الدائري: Area of Circular Sector

لإيجاد مساحة القطاع الدائري نستخدم التناسب: **(البرهان غير مطلوب)**

نسبة طول القوس إلى طول الدائرة (محيط الدائرة) هي نسبة مساحة القطاع الدائري إلى مساحة الدائرة.

$$\frac{\text{طول القوس}}{\text{طول الدائرة}} = \frac{\text{مساحة القطاع الدائري}}{\text{مساحة الدائرة}}$$

$$\frac{\text{ل}}{٢\pi\text{نق}} = \frac{\text{مساحة القطاع الدائري}}{\pi\text{نق}^٢}$$

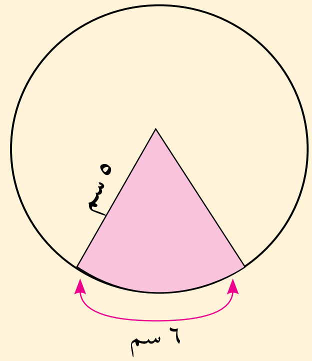
$$\text{مساحة القطاع الدائري} = \frac{\text{ل}}{٢\pi\text{نق}} \times \pi\text{نق}^٢$$

$$\boxed{\text{مساحة القطاع الدائري} = \frac{١}{٢}\text{ل نق}}$$

تذكر:
- محيط الدائرة = ٢ π نق
- مساحة الدائرة = π نق^٢
- طول القوس ل = هـ ͩ × نق

مثال (١)

أوجد مساحة القطاع الأصغر في الشكل المقابل:



الحل:

مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ ل نق = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٥

= ١٥ سم^{٢}

مساحة القطاع الدائري تساوي ١٥ سم^{٢}

حاول أن تحل

١ **أوجد مساحة القطاع الدائري الذي طول نصف قطر دائرته ١٠ سم وطول قوسه ٤ سم.**

تعرّفت في بداية الوحدة الثانية أن طول القوس ل يساوي قياس الزاوية المركزية بالراديان مضروبًا في طول نصف القطر:

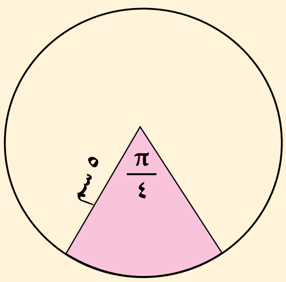
ل = هـ^{د} × **نق**

إذا عوّضنا عن ل بـ هـ^{د} × **نق** نحصل على:

مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ هـ^{د} × **نق** × **نق** = **$\frac{١}{٢}$ هـ^{د} نق^{٢}**

مثال (٢)

أوجد مساحة القطاع الدائري الأصغر في الشكل المقابل:



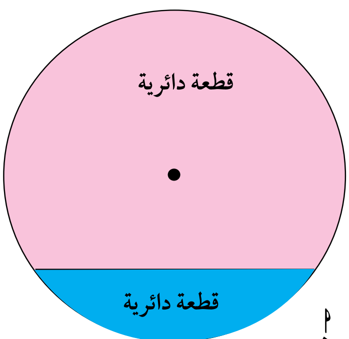
الحل:

مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ هـ^{د} نق^{٢} = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{\pi}{٤}$ × (٥)^{٢}

= $\frac{٢٥\pi}{٨}$ ≃ ٩,٨ سم^{٢}

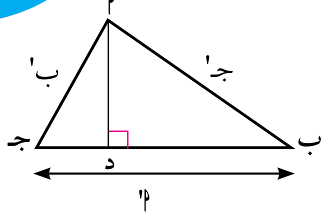
مساحة القطاع الدائري تساوي حوالى ٩,٨ سم^{٢}

٢- القطعة الدائرية: Circular Segment



القطعة الدائرية هي جزء من سطح الدائرة محدود بقوس فيها ووتر.

٣- مساحة المثلث: Area of a Triangle



مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ × أد

لكن جاب = $\frac{أد}{أب}$ ∴ أ د = أب × جاب

مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ × ب أ × جاب.

مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ × ب أ × جا ب

= $\frac{1}{2}$ ب جـ × أ جـ × جا جـ

= $\frac{1}{2}$ أ ب × أ جـ × جا أ

أي أن مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولي أي ضلعين × جيب الزاوية المحددة بهما

وباختصار نكتب مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ أ' جـ' جا ب

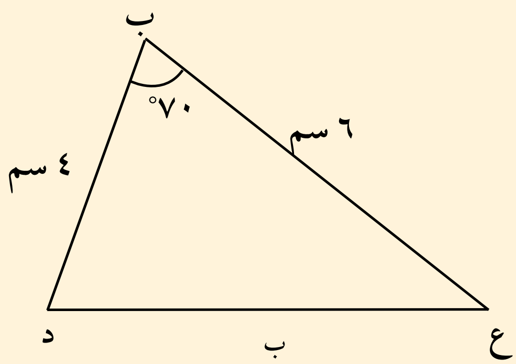
= $\frac{1}{2}$ أ' ب' × جا جـ

= $\frac{1}{2}$ ب' جـ' جا أ

مثال (٣)

ب ع د مثلث فيه ب ع = ٦ سم، ب د = ٤ سم، ق($\hat{ب}$) = ٧٠°

أوجد مساحة هذا المثلث.



الحل:

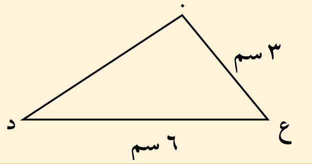
مساحة المثلث ب ع د = $\frac{1}{2}$ ب ع × ب د × جا($\hat{ب}$)

= $\frac{1}{2}$ × ٦ × ٤ × جا(٧٠°) ≃ ١١,٢٧٦

مساحة المثلث ب ع د هي حوالى ١١,٢٧٦ سم^{٢}.

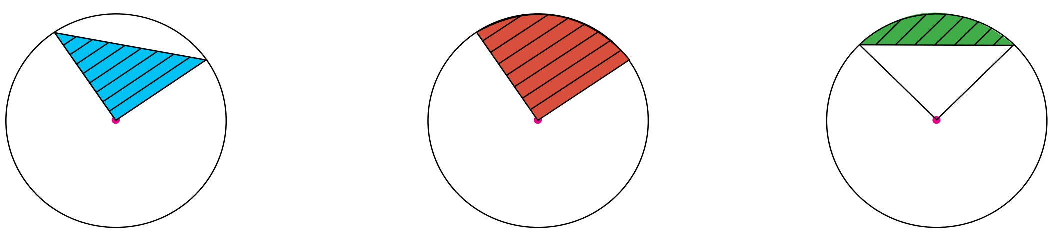
حاول أن تحل

٢ في المثلث المقابل إذا كانت مساحته = ٧ سم^{٢}. فأوجد ق($\hat{ع}$).



٤- مساحة القطعة الدائرية: Area of a Circular Segment

مساحة القطعة الدائرية تساوي مساحة القطاع الدائري مطروحًا منه مساحة المثلث.



مساحة القطعة الدائرية = مساحة القطاع الدائري − مساحة المثلث

إيجاد مساحة القطعة الدائرية:

مساحة القطاع الأصغر = $\frac{١}{٢}$ هـ^{د} × نق^{٢}

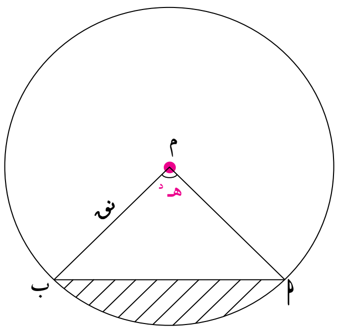
مساحة المثلث م أ ب = $\frac{١}{٢}$ م أ × م ب × جا(هـ^{د})

= $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} × جا(هـ^{د})

مساحة القطعة الدائرية = مساحة القطاع الأصغر − مساحة المثلث م أ ب

= $\frac{١}{٢}$ هـ^{د} × نق^{٢} − $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} × جا(هـ^{د})

مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} (هـ^{د} − جاهـ^{د})



تذكر:

هـ^{د} هو قياس الزاوية بالراديان.

انتبه لوضع الآلة الحاسبة.

مثال (٤)

احسب مساحة قطعة دائرية زاويتها المركزية ٦٠° وطول نصف قطر دائرتها ١٠ سم.

الحل:

مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} [هـ^{د} − جاهـ^{د}]

نحول ٦٠° إلى القياس الدائري

هـ^{د} = ٦٠° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ ≃ ١,٠٤٧٢

نوجد جا (٦٠°) بالآلة الحاسبة

جا (٦٠°) ≃ ٠,٨٦٦ (لاحظ أن جا ١,٠٤٧٢ ≃ ٠,٨٦٦ أيضًا)

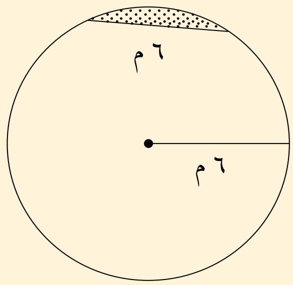
مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} [هـ^{د} − جاهـ^{د}]

≃ $\frac{١}{٢}$ × ١٠٠ [١,٠٤٧٢ − ٠,٨٦٦]

≃ ٩,٠٦ سم^{٢}

حاول أن تحل

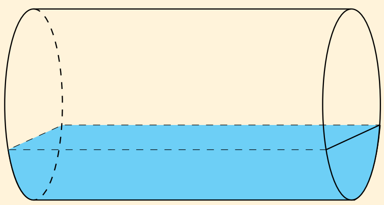
٣ **أ** حوض زهور دائري طول نصف قطره ٦ م (انظر الشكل المقابل)، وفي هذا الحوض وتر طوله ٦ م. احسب مساحة القطعة الدائرية الصغرى.

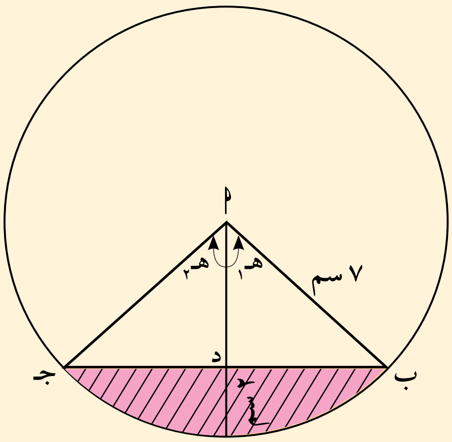


ب أوجد مساحة قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها ١٠ سم وقياس زاويتها المركزية ٧٠°.

مثال (٥)

يبيّن الشكل المقابل مقطعًا في أنبوب أسطواني الشكل، ومياهًا متجمعة في القاع.
إذا كان أقصى عمق الماء هو ٢ سم وطول نصف قطر الأنبوب ٧ سم،
فأوجد مساحة الجزء المظلل باللون الوردي.





الحل: أد = ٥ سم

هـ$_1$ ≃ ٠٫٧٧٥ د = هـ$_2$

هـ = هـ$_1$ + هـ$_2$ ≃ ١٫٥٥ د

مساحة القطاع الأصغر = $\frac{1}{2}$ × هـ د × نق^{2}

= $\frac{1}{2}$ × ١٫٥٥ × ٧^{2} ≃ ٣٧٫٩٧٥ سم^{2}

مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ × أجـ × أب × جا(١٫٥٥ د) ≃ $\frac{1}{2}$ × ٤٩ × جا (١٫٥٥ د) ≃ ٢٤٫٤٩٤٧ سم^{2}

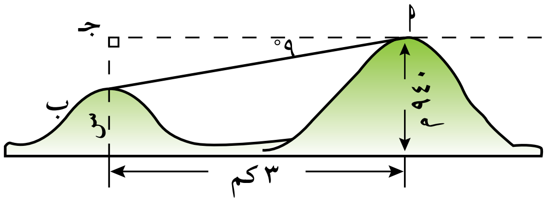
مساحة الجزء المظلل = ٣٧٫٩٧٥ − ٢٤٫٤٩٤٧ ≃ ١٣٫٤٨ سم^{2}

ملاحظة:
يمكن الحل باستخدام القانون

المرشد لحل المسائل

خلال بحثه على أحد المواقع الإنترنت وجد سلطان المسألة التالية:
يبعد تلان عن بعضهما ٣ كم. يبلغ ارتفاع القمة «أ» ٩٤٠ مترًا وقياس زاوية الانخفاض من القمة «أ» إلى القمة «ب» ٩°. أوجد ارتفاع القمة «ب».

كيف فكر سلطان لإيجاد ارتفاع القمة ب.



قياسات الرسم غير صحيحة

بداية، سوف أرسم مخططًا للمسألة.

البعد بين التلين = ٣ كم.

قياس زاوية الانخفاض = ٩°.

ارتفاع القمة «أ» = ٩٤٠ مترًا.

عليّ إيجاد ارتفاع القمة «ب». ليكن س هذا الارتفاع.

لإيجاد قيمة س، سوف أستخدم النسب المثلثية في المثلث أ ب جـ. طول أحد ضلعي القائمة البعد بين القمتين وقياس إحدى زواياه الحادة ٩°. سوف أستخدم ظل هذه الزاوية أو مقلوبه إذا استطعت إيجاد طول أحد أضلاع الزاوية القائمة. إذا تمعنت في الرسم أجد أن:

أجـ = ٣ كم = ٣٠٠٠ متر.

∵ كانت الزاوية هي زاوية انخفاض، فارتفاع القمة: «ب» سوف يكون أصغر من ارتفاع القمة «أ».

سأكتب معادلة $\quad$ ظا٩° = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{\text{ب جـ}}{٣٠٠٠}$

سأحل المعادلة $\quad$ ب جـ = ٣٠٠٠ × ظا٩°

سأستخدم آلة حاسبة وأقرّب $\quad$ ب جـ = ٤٧٥ متر تقريبًا

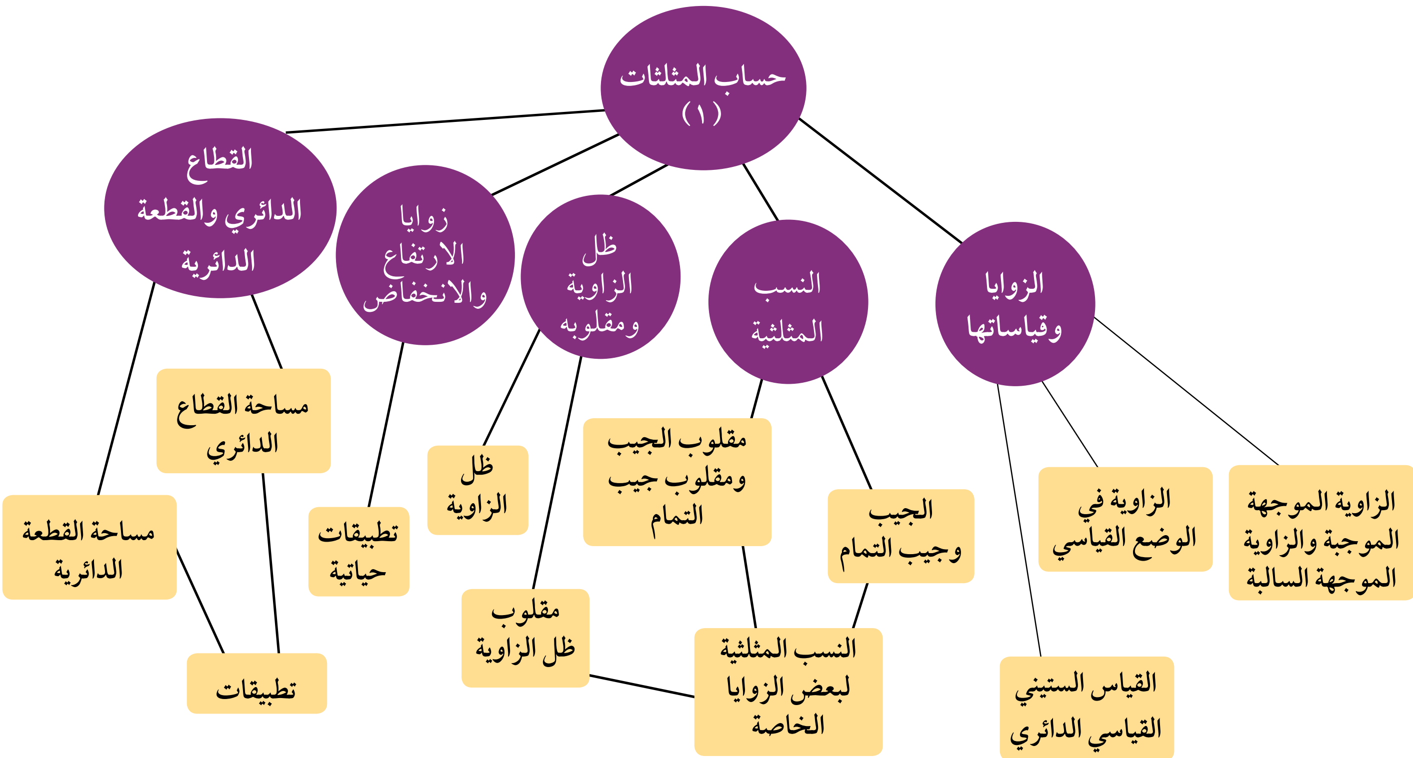
يبقى عليّ طرح هذه القيمة من ارتفاع القمة «أ» $\quad$ س = ٩٤٠ − ٤٧٥ = ٤٦٥

لذا يكون ارتفاع القمة (ب) ٤٦٥ مترًا.

مسألة إضافية

في صف الطيران المظلي، وقف الطلاب على تل ارتفاعه ٤٧٠ مترًا يراقبون رفيقًا لهم يهبط بالمظلة. عندما وصل إلى الأرض كانت زاوية الانخفاض ٧٢°. ما بعد هذا المظلي عن قاعدة التل؟

مخطط تنظيمي للوحدة الثانية



ملخص

- تكون الزاوية الموجهة موجبة إذا كان الاتجاه من الضلع الابتدائي إلى الضلع النهائي عكس دوران عقارب الساعة.
- تكون الزاوية الموجهة سالبة إذا كان الاتجاه من الضلع الابتدائي إلى الضلع النهائي مع دوران عقارب الساعة.
- تكون الزاوية الموجهة في الوضع القياسي إذا كان ضلعها الابتدائي على الجزء الموجب من محور السينات ورأسها في نقطة الأصل لمحاور الإحداثيات.
- تقاس الزاوية بالدرجات أو بالراديان.
- الزاوية نصف القطرية هي زاوية مركزية في دائرة تحصر قوسًا طوله يساوي طول نصف قطر هذه الدائرة وقياسها يساوي ١ راديان.
- العلاقة: $\frac{هـ^{د}}{\pi} = \frac{س^{\circ}}{١٨٠^{\circ}}$ تربط بين القياس الستيني والقياس الدائري لزاوية.
- في المثلث قائم الزاوية جيب الزاوية هو نسبة الضلع المقابل إلى الوتر ويرمز إليه بـ جا أو sin.
- جيب التمام للزاوية هو نسبة الضلع المجاور إلى الوتر ويرمز إليه بـ جتا أو cos.
- قاطع الزاوية هو مقلوب جيب تمام الزاوية قا$\text{أ} = \frac{١}{\text{جتا أ}}$ حيث جتا أ $\neq$ ٠.
- قاطع تمام الزاوية هو مقلوب جيب الزاوية قتا$\text{أ} = \frac{١}{\text{جا أ}}$ حيث جا أ $\neq$ ٠.
- ظل الزاوية هو نسبة الضلع المقابل إلى الضلع المجاور ويرمز إليه ظا أو tan.
- ظل تمام الزاوية هو نسبة طول الضلع المجاور إلى طول الضلع المقابل ويرمز إليه ظتا أو cotan.

- $جا ٤٥° = جتا ٤٥° = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ؛ $ظا ٤٥° = ١$

$جا ٣٠° = \frac{١}{٢}$ $جتا ٣٠° = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ $ظا ٣٠° = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$

$جا ٦٠° = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ $جتا ٦٠° = \frac{١}{٢}$ $ظا ٦٠° = \sqrt{٣}$

- زاوية الارتفاع: إذا كانت نقطة ما أعلى من مستوى النظر الأفقي.
- زاوية الانخفاض: إذا كانت نقطة ما أدنى من مستوى النظر الأفقي.
- القطاع الدائري هو جزء من الدائرة محدود بنصفي قطرين وقوس على الدائرة.
- مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ هـ^ء نق^٢ حيث هـ^ء قياس الزاوية المركزية للقطاع الدائري بالراديان، نق هو نصف قطر الدائرة.
- القطعة الدائرية هي جزء من الدائرة محدودة بوتر وقوس على الدائرة.
- مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^٢ (هـ^ء – جاهـ^ء).

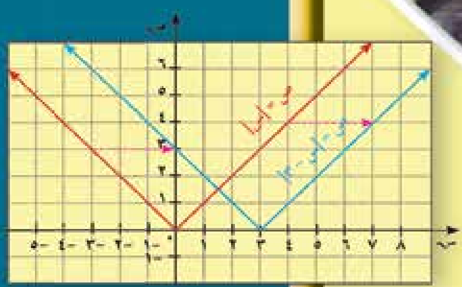
وزارة التربية
Ministry of Education
State of Kuwait | دولـــة الكويـت

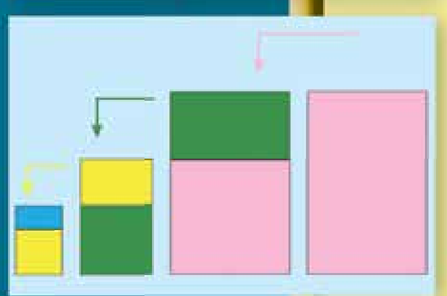
كويت جديدة
NEWKUWAIT

٢/١

الرياضيات

كتاب الطالب





الصـــفّ الـعــاشـــر ١٠
الفصل الـدراســي الأوّل

الطبعة الثانية

٢/١

وزارة التربية
Ministry of Education
State of Kuwait | دولـــة الكويت

كويت جديدة
NEWKUWAIT

الرياضيات

الصـــفّ العـاشـــر
الفصل الدراسي الأول

كتاب الطالب

الطبعة الثانية
١٤٤٧ هـ
٢٠٢٥ - ٢٠٢٦م

الوحدة الثالثة

الجبر – التغير
Algebra - Variation

مشروع الوحدة: تحويل التروس Shifting Gears في الدراجات الهوائية الرياضية.

١ مقدمة المشروع:
يستخدم الرياضيون في سباقات الدراجات الهوائية دراجات لها تروس متغيّرة.
يمكن للتروس والروافع أن تسهّل العمل، لكن تبقى هناك مفاضلة للجودة. فالتروس العالية في الدراجة تسمح بالسير مسافة أكبر مع كل دورة من الدواسات ولكن بمجهود أكبر.

٢ الهدف:
كيف تختار التروس الملائمة خلال ركوب الدراجة: أماكن مسطحة، صعود الجبال، سباقات السرعة، أو المسافات الطويلة.
سوف تستخدم ما تتعلمه في الوحدة حول التغير والتناسبات في عملك.

٣ اللوازم:
أوراق، أوراق رسم بياني، آلة حاسبة.

٤ أسئلة حول التطبيق:
أ ضع جدولًا يبيّن المسافات التي تقطعها على دراجتك مستخدمًا تروسات مختلفة، ولمدة زمنية ثابتة وعلى الطريق نفسها.
ب أعد التجربة واختر طريقًا غير مسطحة (صعودًا ثم نزولًا).
جـ اسأل أحد المحال التجارية عن خصائص الدراجات التي يستخدمها الرياضيون في السباقات وقارنها بخصائص الدراجة التي قدتها.
د التقرير: ضع تقريرًا مفصلًا تبيّن فيه كيف استفدت من النسب والتناسب في تنفيذ المشروع.

دروس الوحدة

النسبة والتناسب	التغير الطردي	التغير العكسي
٣–١	٣–٢	٣–٣

الوحدة الثالثة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت تمثيل العلاقات بيانيًّا باستخدام المتغيرات.
- استكشفت أنماط الدوال.
- تعرفت طرائق حل معادلات ومتباينات من الدرجة الأولى بمتغير واحد أو بمتغيرين.
- تعرفت طرائق حل معادلات ومتباينات من الدرجة الثانية بمتغير واحد ومثلت الحلول بيانيًّا.
- تعرفت التناسب وبعض خواص التناسب.

ماذا سوف تتعلم؟

- النسبة والتناسب واستخدامهما في حل مسائل حياتية.
- خواص التناسب المتسلسل.
- التغير الطردي.
- التغير العكسي.

المصطلحات الأساسية

النسبة - مقياس الرسم - التناسب - التناسب المتسلسل (الهندسي) - التغير الطردي - التغير العكسي.

أضف إلى معلوماتك

الجبر كلمة عربية استخدمها محمد بن موسى الخوارزمي (القرن التاسع الميلادي في عصر الخليفة العباسي المأمون) في كتابه الذي ألفه وكان عنوانه «الجبر والمقابلة» والذي وضع فيه طرقًا أصيلةً لحلّ المعادلات، وبذلك يعتبر الخوارزمي مؤسس علم الجبر بعد أن كان الجبر جزءًا من الحساب. وقد ترجم الكتاب إلى اللغات الأوروبيّة بعنوان «الجبر» ومنها أخذ العلم «الجبر» (algebra) هذا الاسم.

ويقول ابن الياسمين (أحدُ الرياضيّين الشعراء):

على ثلاثة يدور الجبر
المال والأعداد ثم الجذر
فالمال كل عدد مربع
وجذره واحد تلك الأضلع
والعدد المطلق ما لم ينسب
للمال أو للجذر، فافهم تصب

محمد بن موسى الخوارزمي

٣–١

النسبة والتناسب
Ratio and Proportion

دعنا نفكر ونتناقش

تعلم أن **النسبة** هي مقارنة بين كميتين من النوع نفسه يمكن تمثيلها بكسر.
فمثلًا: النسبة بين العدد ٣ (الحد الأول)، والعدد ٤ (الحد الثاني) هي $\frac{٣}{٤}$ ويمكن التعبير عن هذه النسبة بالصورة ٣:٤ وتُقرأ ٣ إلى ٤.

سوف تتعلم

- بعض خواص التناسب
- تمارين وتطبيقات هندسيّة
- خواص التناسب المتسلسل

يستخدم التناسب في تطبيقات حياتية، ومن أهمها **مقياس الرسم** الذي يستخدم في عمل الخرائط والرسوم الهندسية بمقاييس مصغرة للأشكال الحقيقية، وذلك بنسبة ثابتة بين الأبعاد في الرسم والأبعاد في الحقيقة.

مثال (١)

إذا كانت المسافة بين الكويت العاصمة والرياض هي ٥٥٠ كم، وكانت هذه المسافة ممثَّلةً في إحدى الخرائط بقطعة مستقيمة طولها ١١ سم. أوجد مقياس الرسم، ثم أوجد النسبة بين الطول على الخريطة والمسافة الحقيقيّة.

تذكر:
١ كم = ١٠٠٠٠٠ سم

الحلّ:

$$\text{مقياس الرسم} = \frac{\text{المسافة على الخريطة}}{\text{المسافة الحقيقية}}$$

$$= \frac{\text{١١ سم}}{\text{٥٥٠ كم}} = \frac{\text{١١ سم}}{\text{٥٥٠٠٠٠٠٠ سم}}$$

حيث إن الكميتين من النوع نفسه يمكن كتابتها كنسبة بالصورة:

$\frac{١١}{٥٥٠٠٠٠٠٠}$ أو ١١ : ٥٥٠٠٠٠٠٠

أي النسبة تساوي ١ : ٥٠٠٠٠٠٠

حاول أن تحل

١ من مثال (١) استخدم مقياس الرسم على الخريطة لإيجاد المسافة الحقيقيّة بين الدمام والكويت العاصمة.

التناسب Proportion

التناسب هو تساوي نسبتين أو أكثر.

فمثلًا: $\frac{٣}{٤} = \frac{١٢}{١٦} = \frac{١٥}{٢٠} = ...$

ويمكن كتابة ذلك كالآتي: ٣:٤ = ١٢:١٦ = ١٥:٢٠...

وتقرأ ٣ إلى ٤ هي نفسها ١٢ إلى ١٦ هي نفسها ١٥ إلى ٢٠...

خاصيّة التساوي:

ليكن أ، ب، جـ، د، ∈ ح*، ك ∈ ح.

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإنّ $\frac{أ}{ب} \times ك = \frac{جـ}{د} \times ك$ ، $ك \times \frac{أ}{ب} = ك \times \frac{جـ}{د}$

تذكر:

ح* هي مجموعة الأعداد الحقيقية غير الصفرية

ح* = ح − {٠}

الرمز ∈ يقرأ ينتمي إلى

فمثلًا:

نعلم أن $\frac{٣}{٤} = \frac{١٥}{٢٠}$ بضرب الطرفين في ٢ نجد أن:

$\frac{٣}{٤} \times ٢ = \frac{١٥}{٢٠} \times ٢$ أي أن $\frac{٣}{٢} = \frac{١٥}{١٠}$

مثال (٢)

إذا كان $\frac{أ}{٩} = \frac{٥}{٦}$ فأوجد قيمة أ.

الحل: $\frac{أ}{٩} = \frac{٥}{٦}$

$٩ \times \frac{أ}{٩} = ٩ \times \frac{٥}{٦}$ بضرب الطرفين في ٩ (النظير الضربي لـ $\frac{١}{٩}$)

$أ = \frac{١٥}{٢}$ بالتبسيط

أ = ٧,٥

حاول أن تحل

٢ إذا كان $\frac{٤}{٦} = \frac{ص}{٩}$ فأوجد قيمة ص.

خاصيّة الضرب التقاطعي:

ليكن أ، ب، جـ، د $\in$ ح*

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن أد = ب جـ

$\frac{أ}{ب} \times \frac{جـ}{د}$

فمثلًا: $\frac{١٢}{١٦} = \frac{٣}{٤}$ من ذلك نجد أن:

$١٢ \times ٤ \stackrel{?}{=} ١٦ \times ٣$

$٤٨ = ٤٨$ عبارة صحيحة

مثال (٣)

أوجد قيمة ص في التناسب: $\frac{ص}{٢,٥} = -\frac{٣}{٤}$

الحل:

ص × ٤ = −٣ × ٢,٥ ضرب تقاطعي

٤ص = −٧,٥

ص = $-\frac{٧,٥}{٤}$ بقسمة الطرفين على ٤

ص = −١,٨٧٥

حاول أن تحل

٣ أوجد قيمة ب في التناسب: $\frac{٢}{ب} = \frac{٨}{٢٠}$

تعريف:

ليكن أ، ب، جـ، د $\in$ ح*

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإنه يقال أن أ، ب، جـ، د **أعداد متناسبة**.

وإذا كانت أ، ب، جـ، د أعداد متناسبة فإن $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$

ويسمى أ، د **طرفي التناسب**، كما يسمى جـ، ب **وسطي التناسب**.

ولأنّ في هذه الحالة أد = ب جـ خاصيّة الضرب التقاطعي

فإنّ: حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين.

مثال (٤)

أثبت أن ٤ ، ١,٥ ، ٨ ، ٣ أعداد متناسبة.

الحل:

تكون الأعداد ٤، ١,٥، ٨، ٣ أعدادًا متناسبة عندما تتساوى النسبتان $\frac{٤}{١,٥}$ ، $\frac{٨}{٣}$

وحيث أن $\frac{٤}{١,٥} = \frac{٤٠}{١٥} = \frac{٨}{٣}$

أي أن $\frac{٤}{١,٥} = \frac{٨}{٣}$

∴ الأعداد متناسبة.

حاول أن تحل

٤ أثبت أن ٣,٤ ، ٧ ، ٢,٠٤ ، ٤,٢ أعداد متناسبة.

تدريب

أعط أمثلة عددية توضح خواص التناسب التالية:

ليكن ﺍ، ب، جـ، د أعدادًا حقيقية غير صفرية:

خواص التناسب	أمثلة عددية
إذا كان $\frac{ﺍ}{ب} = \frac{جـ}{د}$. فإن: **١** ﺍد = ب جـ	
٢ $\frac{ب}{ﺍ} = \frac{د}{جـ}$	
٣ $\frac{ﺍ}{جـ} = \frac{ب}{د}$	
٤ $\frac{ﺍ + ب}{ب} = \frac{جـ + د}{د}$	
٥ $\frac{ﺍ + جـ}{ب + د} = \frac{ﺍ}{ب}$	

مثال (٥)

إذا كانت ﺃ، ب، ﺟ أعدادًا متناسبة مع الأعداد ٢، ٥، ٧. فأوجد القيمة العددية للمقدار $\frac{ﺃ + ٣ب}{٢ب + ﺟ}$.

معلومة رياضية:
إذا كانت ﺃ، ب، ﺟ أعدادًا متناسبة مع الأعداد د، ﻫ، و، فإن:
$\frac{ﺃ}{د} = \frac{ب}{ﻫ} = \frac{ﺟ}{و} = م$
حيث م عدد ثابت

الحل:

$\because$ ﺃ، ب، ﺟ متناسبة مع ٢، ٥، ٧

$\therefore \frac{ﺃ}{٢} = \frac{ب}{٥} = \frac{ﺟ}{٧} = م$ حيث م عدد ثابت

$\therefore$ ﺃ = ٢م، ب = ٥م، ﺟ = ٧م

$\therefore$ المقدار $\frac{ﺃ + ٣ب}{٢ب + ﺟ} = \frac{٢م + ٣(٥م)}{٢(٥م) + ٧م} = \frac{١٧م}{١٧م} = ١$

حاول أن تحل

٥ إذا كانت الأعداد ﺃ، ب، ﺟ متناسبة مع ٣، ٥، ١١. فأوجد القيمة العددية للمقدار $\frac{ﺃ + ٣ب}{٥ب + ﺟ}$.

مثال (٦) تطبيقات حياتية

تشارك سالم ومنصور بتنفيذ أعمال الدهان. إن نسبة الزمن الذي أمضياه في العمل هي ٧:٤. قبضا معًا ٨٨ دينارًا. كيف سيتوزع هذا المبلغ بينهما إذا عمل سالم فترة زمنية أطول من منصور؟

الحل: لتكن س نصيب سالم، م نصيب منصور من المبلغ.

$\frac{س}{م} = \frac{٧}{٤}$ كتابة التناسب

$\frac{س + م}{م} = \frac{٧ + ٤}{٤}$ من خواص التناسب

$\frac{٨٨}{م} = \frac{١١}{٤}$

$م = \frac{٤ \times ٨٨}{١١} = ٣٢$

س = ٨٨ − ٣٢ = ٥٦

ينال سالم ٥٦ دينارًا، وينال منصور ٣٢ دينارًا.

حاول أن تحل

٦ في مثال (٧)، كيف سيتوزع المبلغ بين سالم ومنصور إذا كانت نسبة الزمن ٥:٣ ، إذا عمل منصور فترة زمنية أطول من سالم؟

مثال (٧) تطبيقات حياتية

عند القيام بأنشطة رياضية فإن الشخص يفقد سعرات حراريّة تتناسب تقريبًا مع وزنه.

والجدول المجاور يبيّن ذلك لشخص وزنه ٦٥ كجم، عند قيامه بالنشاطات المذكورة لمدة ٦٠ دقيقة.

قام هذا الشخص بأحد هذه الأنشطة لمدة ٨٠ دقيقة. اكتب تناسبًا تستطيع بواسطته أن تحسب عدد السعرات الحراريّة التي يفقدها (بالتقريب).

النشاط لمدة ٦٠ دقيقة	السعرات المحروقة
المشي بسرعة ٤-٥ كم/ ساعة	٣٠٠
السباحة أو التزلج	٥٠٠
لعبة كرة قدم	٤٠٠

الحلّ: بفرض أن س عدد السعرات الحرارية التي يفقدها في كل نشاط

عند المشي ٦٠ دقيقة يحرق ٣٠٠ سعرة حرارية

عند المشي ٨٠ دقيقة يحرق س سعرة حرارية

أي أن $\frac{\text{س}}{٣٠٠} = \frac{٨٠}{٦٠}$

$٦٠\text{س} = ٣٠٠ \times ٨٠$ باستخدام الضرب التقاطعي

$\text{س} = \frac{٣٠٠ \times ٨٠}{٦٠}$

س = ٤٠٠ سعرة حرارية تقريبًا

وبالمثل السباحة: $\frac{\text{س}}{٥٠٠} = \frac{٨٠}{٦٠}$ ، س = ٦٦٧ سعرة حرارية تقريبًا.

وبالمثل كرة القدم: $\frac{\text{س}}{٤٠٠} = \frac{٨٠}{٦٠}$ ، س = ٥٣٣ سعرة حرارية تقريبًا.

حاول أن تحل

٧ إذا مارست رياضة كرة السلة لمدة ٢٠ دقيقة، تفقد ٣٠٠ سعرة. اكتب تناسبًا تستطيع بواسطته أن تحسب عدد السعرات الحرارية التي تفقدها إذا مارست هذه الرياضة لمدة ٥٠ دقيقة.

Geometric Proportion التناسب المتسلسل الهندسي

ليكن أ، ب، جـ ∈ ح*

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ}$ فإنّه يقال إن أ، ب، جـ في **تناسب متسلسل** (أو تناسب هندسي)

وبالعكس: إذا كانت أ، ب، جـ في تناسب متسلسل فإنّ: $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ}$

ويسمى ب **الوسط المتناسب** للعددين أ، جـ أو **الوسط الهندسي** لهما كما يسمى أ، جـ **طرفي التناسب**.

فمثلًا: ٢، ٤، ٨ في تناسب متسلسل لأن $\frac{٢}{٤} = \frac{٤}{٨}$.

ولاحظ أن ٨، ٤، ٢ كذلك في تناسب متسلسل لأن $\frac{٨}{٤} = \frac{٤}{٢}$.

إذا كان أ، ب، جـ ∈ ح* في تناسب متسلسل فإن جـ، ب، أ في تناسب متسلسل أيضًا.

مثال (٨)

أثبت أن الأعداد ٣، ٩، ٢٧ في تناسب متسلسل.

الحلّ:

$\frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$ ، $\frac{٩}{٢٧} = \frac{٩ \div ٩}{٢٧ \div ٩} = \frac{١}{٣}$

$\therefore \frac{٣}{٩} = \frac{٩}{٢٧}$

أي أن : ٣، ٩، ٢٧ في تناسب متسلسل.

حاول أن تحل

٨ اكتب ٣ أعداد في تناسب متسلسل.

مثال (٩)

إذا كانت الأعداد ٥، س، ٢٠ في تناسب متسلسل، أوجد قيمة س، ثم تحقق.

الحل: نكتب التناسب المتسلسل: $\frac{٥}{س} = \frac{س}{٢٠}$

$س^٢ = ١٠٠$ الضرب التقاطعي

س = ١٠ أو س = −١٠

التحقق:

س = ١٠	س = −١٠
$\frac{٥}{س} = \frac{س}{٢٠}$	$\frac{٥}{س} = \frac{س}{٢٠}$
$\frac{٥}{١٠} \overset{?}{=} \frac{١٠}{٢٠}$	$\frac{٥}{-١٠} \overset{?}{=} \frac{-١٠}{٢٠}$
١٠٠ = ١٠٠ ✓	١٠٠ = ١٠٠ ✓

حاول أن تحل

٩ هل يمكن إيجاد قيمة س بحيث تكون الأعداد −٩، س، ٤ في تناسب متسلسل؟ فسّر.

خواص التناسب المتسلسل Properties of Chaine Proportion

خاصيّة (١)

ليكن أ، ب، جـ ∈ ح*

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ}$ (أي أن أ، ب، جـ في تناسب متسلسل)

فإن $ب^٢ = أجـ$ وذلك من خاصية الضرب التقاطعي

فمثلًا: في حالة ٣، ٩، ٢٧ نجد أن:

$٣ \times ٢٧ = (٩)^٢$ (كل من الطرفين يساوي ٨١)

خاصيّة (٢)

ليكن أ، ب، جـ، د $\in$ ح*

إذا كان:

$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} =$ م (أي أن أ، ب، جـ، د في تناسب متسلسل) حيث م عدد ثابت

فإن:

جـ = د × م ، ب = د × $م^{٢}$ ، أ = د × $م^{٣}$

فمثلًا: في حالة $\frac{١٦}{٨} = \frac{٨}{٤} = \frac{٤}{٢} = ٢$ نجد أن:

٤ = ٢ × ٢ ، ٨ = ٢ × $(٢)^{٢}$ ، ١٦ = ٢ × $(٢)^{٣}$

مثال (١٠)

إذا كانت الأعداد ٦، س، ٥٤، ١٦٢ في تناسب متسلسل، أوجد قيمة س.

الحل:

$\because$ الأعداد في تناسب متسلسل

$\therefore \frac{٦}{س} = \frac{س}{٥٤} = \frac{٥٤}{١٦٢}$

$\therefore \frac{٦}{س} = \frac{٥٤}{١٦٢}$

س × ٥٤ = ٦ × ١٦٢ الضرب التقاطعي

س = $\frac{٦ \times ١٦٢}{٥٤}$ = ١٨

قيمة س = ١٨

حاول أن تحل

١٠ إذا كانت الأعداد ٤، س − ٢، ١، $\frac{١}{٢}$ في تناسب متسلسل، أوجد قيمة س.

مثال (١١) **إثرائي**

إذا كانت الأعداد أ، ب، جـ، د في تناسب متسلسل، فأثبت أن $\frac{أ + ب + جـ}{ب + جـ + د} = \frac{أ}{ب}$

الحل:

$\because$ أ، ب، جـ، د في تناسب متسلسل

$\therefore \frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = م$ تناسب متسلسل

$\therefore$ جـ = د × م ، ب = د × م^{٢} ، أ = د × م^{٣}

$$\frac{أ + ب + جـ}{ب + جـ + د} = \frac{دم^{٣} + دم^{٢} + دم}{دم^{٢} + دم + د} = \frac{دم(م^{٢} + م + ١)}{د(م^{٢} + م + ١)} = م = \frac{أ}{ب}$$

حل آخر: من التناسب السابق أ = ب م، ب = جـ م، جـ = د م

$$\frac{أ + ب + جـ}{ب + جـ + د} = \frac{ب م + جـ م + دم}{ب + جـ + د} = \frac{م(ب + جـ + د)}{ب + جـ + د} = م = \frac{أ}{ب}$$

حاول أن تحل

١١ إذا كانت الأعداد أ، ب، جـ في تناسب متسلسل

فأثبت أن: $\frac{أ + ٣ب}{ب + ٣جـ} = \frac{أ - ٢ب}{ب - ٢جـ}$ (بشرط المقام ≠ ٠)

٣–٢

التغير الطردي
Direct Variation

دعنا نفكر ونتناقش

سوف تتعلم
- التغير
- التغير الطردي
- دالة التغير الطردي
- ثابت التغير الطردي
- معدل التغير الطردي

التغير

التغيّر هو ظاهرة طبيعية في الحياة نلمسها ونشاهدها في العديد من المواقف والأشياء.
فمثلًا:
- درجات الحرارة تتغيّر بالارتفاع والانخفاض في اليوم الواحد وفي الفصول المختلفة.
- وزن الطفل يتغيّر مع نموه.
- الزمن يتغيّر مع توالي الليل والنهار والأشهر والسنين.
- الأسعار تتغيّر.
- حجم الغاز يتغيّر بتغيّر درجة حرارته.
- المسافة التي يقطعها جسم متحرّك تتغيّر بمرور الزمن.

تدريب
١ أُذكر بعض الأشياء التي تتغيّر في حياتك.
٢ عدِّد بعض الأشياء التي تتغيّر بسبب تغيّر أشياء أخرى.
٣ هل تتغيّر مساحة المربع بتغيّر طول ضلعه؟
٤ عدِّد بعض الظواهر التي لا تتغيّر – أي الظواهر الثابتة.
٥ أُذكر أمثلة لبعض الثوابت التي مرّت عليك في الرياضيّات.

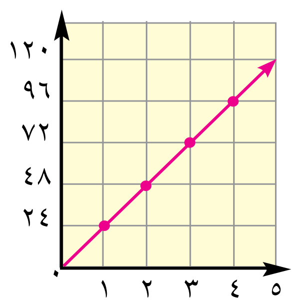
التغير الطردي

مثال توضيحي: الصورة المتحركة في السينما
عندما تشاهد فيلمًا سينمائيًّا عاديًّا، فإن ٢٤ صورة فرديّة تسطع سريعًا على الشاشة كل ثانية. في ما يلي ثلاث طرائق لبيان العلاقة بين عدد الصور (أو الإطارات التي تعرض) وعدد الثواني:

الطريقة الأولى
الجدول

س عدد الثواني	ص عدد الصور
١	٢٤
٢	٤٨
٣	٧٢
٤	٩٦
٥	١٢٠

الطريقة الثانية
الشكل المرسوم



الطريقة الثالثة
العلاقة بين عدد الصور (ص) وعدد الثواني (س) هي:
ص = ٢٤ س

من الطرائق الثلاث السابقة أجب عن التالي:

(أ) ما معدل التغيّر في البيانات المبينة في الجدول؟

(ب) ما ميل المستقيم في الشكل البيانيّ؟

(جـ) ما معامل س في العلاقة بين ص ، س؟

ما العلاقة التي تلاحظها بين: معدل التغيّر، ميل المستقيم، معامل س؟

- نلاحظ في هذا المثال أن **عدد الصور يتغيّر مع عدد الثواني التي تظهر فيها.**

معلومة مفيدة:

لتكن أ (س$_{1}$، ص$_{1}$)، ب(س$_{2}$، ص$_{2}$) فإن

ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = $\frac{\text{ص}_{2} - \text{ص}_{1}}{\text{س}_{2} - \text{س}_{1}}$: س$_{1}$ $\neq$ س$_{2}$

وعندما يمر المستقيم بنقطة الأصل والنقطة (س$_{1}$ ، ص$_{1}$)

يصبح ميل المستقيم = $\frac{\text{ص}_{1}}{\text{س}_{1}}$: س$_{1}$ $\neq$ ٠

ويسمى الميل في هذه الحالة ثابت التغير أو معدل التغير

(كلما زاد عدد الثواني زاد عدد الصور التي تعرض بنفس النسبة) وفي هذه الحالة نقول إن العلاقة تمثل **تغيّرًا طرديًا**.

التغيّر الطردي Direct Variation

هو دالة خطية يمكن أن تكتب بالصورة: ص = ك س حيث ك ≠ ٠

ويسمى ك ثابت التغير أو معدل التغير.

ويمكن التعبير عن العلاقة ص = ك س على الصورة ص α س.

ملاحظات

١ يمكن تمثيل دالة التغير الطردي: ص = ك س بخط مستقيم يمر بنقطة الأصل.

٢ يمكن كتابة المعادلة الخطيّة ص = ك س بالصورة: ك = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ حيث س ≠ ٠

٣ ثابت التغيّر ك = معدل التغيّر في البيانات التي تصف التغيّر.

٤ الثابت ك = ميل الخط المستقيم الذي يمثّل المعادلة بيانيًا.

٥ في حالة التغيّر الطردي فإنّ: ثابت التغيّر = معدل التغيّر = ميل المستقيم الممثل لمعادلة التغيّر.

٦ التغير قد يكون بالزيادة أو بالنقصان.

٧ إذا كانت ص α س فمعنى ذلك أن $\frac{\text{ص}_{1}}{\text{س}_{1}} = \frac{\text{ص}_{2}}{\text{س}_{2}} = \frac{\text{ص}_{2} - \text{ص}_{1}}{\text{س}_{2} - \text{س}_{1}} = \frac{\text{التغير في ص}}{\text{التغير في س}}$: المقام ≠ صفر

تعميم

إذا كانت ص تتغير طرديًا مع س أي ص α س فإن:

ص = ك س حيث ك ثابت لا يساوي الصفر

والعكس صحيح.

سنكتفي بدراسة التغير الطردي عندما ك > ٠

مثال (١)

إذا كانت ص α س وكانت ص = ٣٠ عندما س = ١٠، فأوجد قيمة ص عندما س = ٤٠، ثم مثل العلاقة بين س، ص بيانيًا.

الحل: ∵ ص α س

∴ ص = ك س ‏ ‏ ‏ ك ثابت التغير

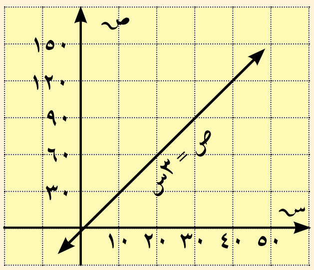
∴ ٣٠ = ك × ١٠

ك = ٣

∴ ص = ٣ س

عندما س = ٤٠ تكون ص = ٣ × ٤٠ = ١٢٠

س	٠	١٠	٤٠
ص = ٣س	٠	٣٠	١٢٠



حاول أن تحل

١ إذا كانت ص α س وكانت ص = ١,٥ عندما س = ١٠، أوجد قيمة ص عندما س = ١٥

ثم مثّل العلاقة بين س، ص بيانيًا.

مثال (٢)

في إحدى المناطق ترتفع درجة الحرارة بانتظام خلال النهار بمعدل ٣° في الساعة. اكتب معادلة تغيّر طردي تمثل هذا الارتفاع.

الحل:

∵ درجة الحرارة ترتفع بانتظام

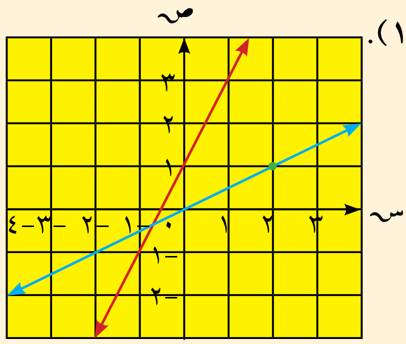
∴ معدل التغيير = ٣

المعادلة هي ص = ٣س حيث ص درجة الحرارة، س عدد الساعات.

مثال (٣)

في الشكل المقابل، أي من المستقيمين يمثل تغيرًا طرديًّا؟ أوجد ثابت التغير في حالة التغير الطردي.

الحل:



المستقيم الذي يمر بنقطة الأصل يمثل تغيرًا طرديًّا بين س ، ص وهو يمر بالنقطة (٢، ١).

ثابت التغير = $\frac{ص_١}{س_١} = \frac{١}{٢}$

المستقيم الثاني لا يمر بنقطة الأصل فهو لا يمثّل تغيرًا طرديًّا.

حاول أن تحل

٢ هل المستقيم الذي يمر بالنقطتين: أ (٢، ٣)، ب (٤، ٦) يمثل تغيّرًا طرديًّا بين س، ص. اشرح إجابتك

مثال (٤)

أي من المعادلتين التاليتين تمثّل تغيّرًا طرديًّا؟ أوجد ثابت التغيّر في حالة التغيّر الطرديّ.

أ ٥س − ٣ص = ٣س + ٥ص

ب ٥س + ٢ص = ٩

الحل:

أ ٥س − ٣ص = ٣س + ٥ص

٨ص = ٢س

ص = $\frac{٢}{٨}$ س = $\frac{١}{٤}$ س على الصورة ص = ك س

هذه المعادلة تمثل تغيّرًا طرديًّا،

حيث ثابت التغيّر = $\frac{١}{٤}$

ب ٥س + ٢ص = ٩

٢ص = −٥س + ٩

ص = − $\frac{٥}{٢}$ س + $\frac{٩}{٢}$ وهذه ليست على الصورة ص = ك س

إذًا هذه المعادلة لا تمثّل تغيّرًا طرديًّا.

حاول أن تحل

٣ أي من المعادلات التالية تمثّل تغيّرًا طرديًّا؟ أوجد ثابت التغيّر في حالة التغير الطردي.

أ ٧ص = ٢س

ب ٣س + ٤ص = ٨

جـ ص + ٣س = ٢(س + ٢ص)

مثال (٥) **تطبيقات حياتية**

الطقس: الزمن الذي تستغرقه لسماع الرعد يتغيّر طرديًّا مع المسافة بينك وبين موقع البرق. فإذا كنت على مسافة ٣ كم من موقع البرق فإنك سوف تسمع الرعد بعد ١٠ ثوانٍ من رؤية البرق.

أ اكتب المعادلة التي توضح العلاقة بين المسافة والزمن.

ب أوجد المسافة بينك وبين موقع البرق إذا سمعت الرعد بعد ١٨ ثانية من رؤية البرق.

الحل:

أ لتكن س المسافة بالكيلومترات بينك وبين موقع البرق،

وليكن ص الزمن بالثواني الذي يمر بين رؤية البرق وسماع الرعد.

بما أن الزمن يتغيّر طرديًّا مع المسافة

∴ معادلة التغيّر الطرديّ:

ص = ك س

وحيث إن س = ٣، ص = ١٠

٣ × ك = ١٠

ك = $\frac{١٠}{٣}$

= ثابت التغيّر

∴ المعادلة هي: ص = $\frac{١٠}{٣}$ س هي المعادلة المطلوبة

حيث س تقاس بالكيلومترات، ص بالثواني.

ب ص = $\frac{١٠}{٣}$ س

١٨ = $\frac{١٠}{٣}$ س

س = $\frac{١٨ \times ٣}{١٠}$ = ٥,٤

المسافة المطلوبة = ٥,٤ كيلومتر.

مثال (٦)

البيولوجيا: تتغير كمية الدم في جسم الإنسان طرديًّا مع وزنه. تبلغ كمية الدم في جسم رجل يزن ٧٥ كجم نحو ٥ ليترات.

أ أوجد ثابت التغيّر.

ب اكتب معادلة تربط العلاقة بين كمية الدم والوزن.

الحل:

نفرض أن كمية الدم في جسم الانسان هي ص وزن الجسم هو س

أ **ثاتب التغيّر** $= \frac{ص}{س}$

$= \frac{٥}{٧٥} = \frac{١}{١٥}$

ب **معادلة التغيّر الطردي:**

$ص = \frac{١}{١٥} س$

المعادلة المطلوبة:

كمية الدم = ثابت التغير × الوزن

كمية الدم = $\frac{١}{١٥}$ **الوزن.**

حاول أن تحل

٤ **السؤال المفتوح: قدّر كمية الدم في جسمك مستخدما مثال (٦).**

التعبير عن التغير الطردي

في التغيّر الطرديّ تكون **النسبة** $\frac{ص}{س}$ **ثابتة** لكل زوج مرتّب حيث س ≠ ٠ في جميع الحالات. وبالتالي يمكن التعبير عن التغيّر الطرديّ باستخدام التناسب.

فيكون: $\frac{ص_١}{س_١} = \frac{ص_٢}{س_٢}$ ... لجميع الأزواج المرتبة $(س_١، ص_١)$، $(س_٢، ص_٢)$ ، ...

حيث $س_١ \neq ٠$، $س_٢ \neq ٠$ ، ...

وكل من هذه النسب تساوي ثابت التغيّر ك.(معدل التغير).

مثال (٧)

بيّن ما إذا كانت ص تتغيّر طرديًّا مع س في كل من بيانات الجدولين أ، ب. اكتب معادلة التغيّر في حالة التغيّر الطرديّ.

الحل:

أ

س	٢	٤	٦
ص	١-	١	٣
$\frac{\text{ص}}{\text{س}}$	٠,٥-	٠,٢٥	٠,٥

ب

س	٣	١	٤
ص	٢,٢٥	٠,٧٥	٣
$\frac{\text{ص}}{\text{س}}$	٠,٧٥	٠,٧٥	٠,٧٥

- الجدول أ لا يمثّل تغيّرًا طرديًّا لأن $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ليست ثابتة لكل البيانات.
- الجدول ب يمثّل تغيّرًا طرديًّا حيث ثابت التغيّر يساوي ٠,٧٥ . معادلة التغيّر هي ص = ٠,٧٥ س.

حاول أن تحل

٥ هل تتغيّر ص طرديًّا مع س في الجدول:

س	١	١-	٢	٣-
ص	٣	١-	٥	٥-

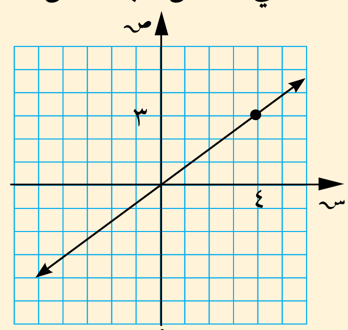
مثال (٨)

تفكير ناقد: هل كل معادلة خط مستقيم تعبّر عن تغيّر طرديٍّ؟ فسر إجابتك.

الحل: لا: ليست كل معادلة خط مستقيم تعبّر عن تغيّر طرديّ.

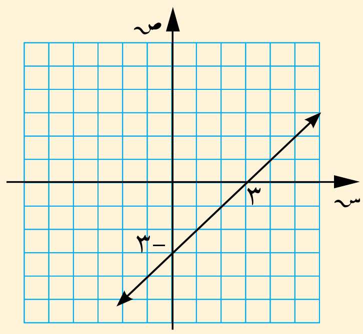
معادلة التغيّر الطرديّ تكون بالصورة ص = ك س، أي أن المستقيم الممثل لها يمر بنقطة الأصل.

مثلًا: البيانات في الشكل (أ) تمثّل بالمعادلة ص = ٠,٧٥ س، وهي معادلة تغيّر طرديّ، لأنها بالصورة ص = ك س بينما البيانات في الشكل (ب) تمثّل بالمعادلة ص = س − ٣ وهي ليست بالصورة ص = ك س.



(أ)

معادلة خط مستقيم تمثّل تغيّرًا طرديًّا



(ب)

معادلة خط مسقيم لا تمثّل تغيّرًا طرديًّا

مثال (٩) تطبيقات حياتية

معلومة فيزيائية:
من قوانين الحركة : الوزن هو كمية فيزيائية لها نفس وحدة القوة (نيوتن) وهي ناتجة من تأثير عجلة الجاذبية الارضية على كتلة الجسم أي وزن ١ كجم = ١٠ نيوتن

الفيزياء: القوة التي تستخدمها لرفع جسم تتغيّر طرديًّا مع وزن الجسم.

فأنت تحتاج إلى استخدام قوة قدرها ٠,٢٧٥ نيوتن لتتمكن إحدى المعدات من رفع جسم وزنه ١٢ نيوتن. أوجد مقدار القوة اللازم استخدامه في هذه الآلة لرفع جسم وزنه ٤٥ نيوتن.

الحل:

لنرمز إلى القوة بالرمز ٯ، وإلى وزن الجسم بالرمز و.

∵ ٯ α و

∴ $\frac{ٯ_١}{و_١} = \frac{ٯ_٢}{و_٢}$

$\frac{ٯ_٢}{٤٥} = \frac{٠,٢٧٥}{١٢}$

ٯ$_٢$ × ١٢ = ٤٥ × ٠,٢٧٥

ٯ$_٢$ = $\frac{٤٥ \times ٠,٢٧٥}{١٢}$ = ١,٠٣١٢٥ نيوتن

أي أنك تحتاج إلى كيلوجرام تقريبًا لرفع ٤٥ نيوتن.

حاول أن تحل

٦ اكتب معادلة التغيّر الطردي للمثال السابق، واستخدمها لإيجاد الوزن الذي يمكن أن ترفعه باستخدام قوّة قدرها ٤,٣ نيوتن في الرافعة نفسها.

التغير العكسي
Inverse Variation

سوف تتعلم

- التغير العكسي
- ثابت التغير العكسي
- دالة التغير العكسي
- مقارنة بين التغيّر الطردي والتغيّر العكسي

عمل تعاوني

يرغب فريق من الشباب في استصلاح قطعة أرض لجعلها صالحة للزراعة، ويتطلب هذا العمل ١٦٠ يوم عمل. ويمكن لفريق مكون من ٢٠ شابًا أن ينجزوا هذا العمل في ٨ أيام؛ فإذا استمر العمل بالمعدل نفسه:

١ كم يومًا يتطلب العمل إذا كان عدد أعضاء الفريق مكونًا من ٤٠ شخصًا؟

٢ أكمل الجدول التالي:

عدد أعضاء الفريق (س)	عدد أيام العمل (ص)	س ص
٢	٨٠	١٦٠
٥	٣٢	١٦٠
٨	....	....
....	١٦	....
٢٠	٨	١٦٠
٤٠	....	....

هل تعلم؟

روبرت بويل (١٦٢٧-١٦٩١) عالم إيرلندي. درس العلاقة بين حجم الغاز وضغطه. اشتهر بقانونه: حجم الغاز × ضغط الغاز = مقدار ثابت. يسمى القانون أيضًا قانون بويل ماريوت.

٣ يمثل الجدول العلاقة بين س ،ص في هذا النوع من التغيّر.

٤ صف ما يحدث لعدد أيام العمل (ص) عندما يزداد عدد أعضاء الفريق(س).

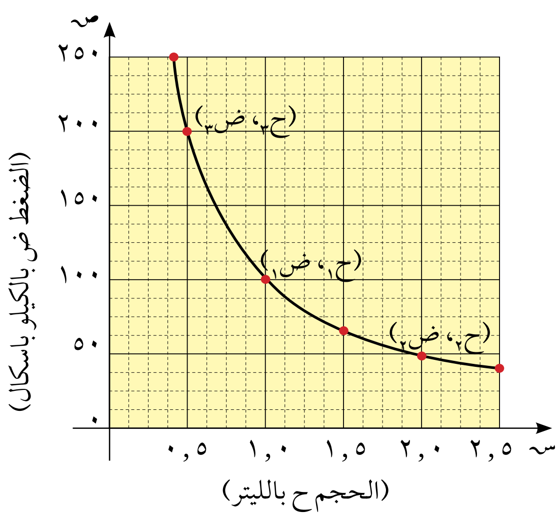
٥ ماذا تلاحظ على حاصل الضرب س ص في هذا النوع من التغيّر؟

قانون بويل

إن حاصل ضرب حجم الغاز في ضغطه يساوي مقدارًا ثابتًا.

$$\boxed{\text{ح} \times \text{ض} = \text{مقدار ثابت}}$$

في كل نقطة في الشكل المقابل حاصل الضرب ثابت.



١ - التغير العكسي

إذا تغيرت كمية س مع تغيّر كمية أخرى ص بحيث كان **حاصل ضرب الكميتين** ثابتًا، فإن هذا التغير يسمى **تغيّرًا عكسيًّا**. ويسمى حاصل الضرب س ص ثابت التغيّر، ويرمز إلى ذلك:

$$\text{س ص} = \text{ك} \quad \text{أو} \quad \text{ص} = \frac{\text{ك}}{\text{س}} \quad ، \quad \text{ك} \neq ٠$$

ويمكن التعبير عن التغيّر العكسي بالصورة ص $\alpha \frac{١}{\text{س}}$

ففي العمل التعاوني السابق نجد أن:

س ص = ١٦٠

أي ص = $\frac{١٦٠}{\text{س}}$ حيث ثابت التغيّر هنا هو ١٦٠.

مثال (١)

أ أكمل الجدول التالي حيث س ص = ١٠٠

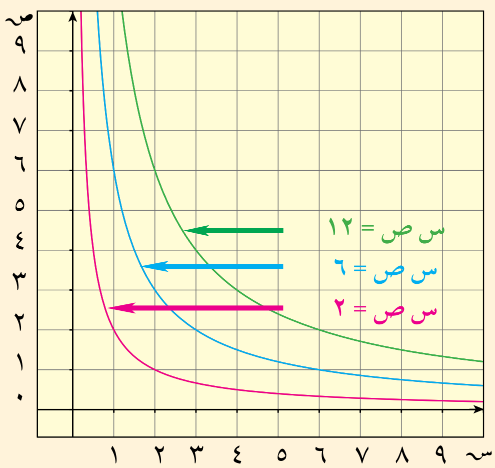
س	١	٢	٤	٥	١٠	٢٠	٥٠	١٠٠
ص	١٠٠	...	...	...	...	...	...	...

الحل:

س	١	٢	٤	٥	١٠	٢٠	٥٠	١٠٠
ص	١٠٠	٥٠	٢٥	٢٠	١٠	٥	٢	١

ب كيف تتغيّر قيم ص مع زيادة قيم س في الجدول السابق؟ وما نوع هذا التغير؟

الحل: نلاحظ أن كلما تزايدت قيمة س، تتناقص قيمة ص بحيث تحقق العلاقة س ص = ١٠٠ ∴ التغير عكسي.



جـ اذكر ثابت التغيّر ك في التغيرات العكسية الممثلة بالأشكال البيانيّة.

الحل: ثابت التغير ١٢، ٦، ٢.

د اذكر ثلاث نقاط تقع على كل من الأشكال البيانية المبينة.

الحل:

أ (٢، ٦)، ب (٣، ٤)، جـ (٤، ٣)

د (١، ٦)، هـ (٢، ٣)، و (٣، ٢)

حـ (١، ٢)، ط (٢، ١)، ي (٤، ٥,٠)

مثال (٢)

منطقة مستطيل مساحتها ٢٤سم^{٢}، وطولها س سم، وعرضها ص سم. إذا كان كل من س، ص أعدادًا كلية، فأوجد القيم الممكنة لـ س، ص ثم حدد نوع التغير الذي يمثل هذه العلاقة.

الحل:

س	٢٤	١٢	٨	٦
ص	١	٢	٣	٤

مساحة المستطيل = س ص = ٢٤

أي س ص = ثابت ونعبر عن ذلك رياضيًّا:

س × ص = ك　　　ك ثابت

أي أن ص = $\frac{ك}{س}$ ،　　ص α $\frac{١}{س}$

∴ التغير عكسي.

حاول أن تحل

١

س	٢	٣	٤	٥	٦	١٠
ص	٣٠	٢٠	١٥	١٢	١٠	٦

بالنظر إلى الجدول أعلاه، هل س × ص يعبّر عن تغيير عكسي؟ اشرح إجابتك.

٢ كوّن جدولًا من س، ص على أن يكون س ص يعبّر عن تغيير عكسي.

ملاحظة: استخدام التناسب في التعبير عن التغيّر العكسي.

إذا كان (س$_{١}$، ص$_{١}$)، (س$_{٢}$، ص$_{٢}$) زوجين مرتبين في تغيّر عكسي.

ص α $\frac{١}{س}$ ، أي ص = $\frac{ك}{س}$ فإنّ

س$_{١}$ ص$_{١}$ = س$_{٢}$ ص$_{٢}$ = ك

ومن ذلك نستنتج أن $\frac{ص_{١}}{ص_{٢}}$ = $\frac{س_{٢}}{س_{١}}$

في مثال العمل التعاوني السابق نجد أن:

٣٢ × ٥ = ٨٠ × ٢

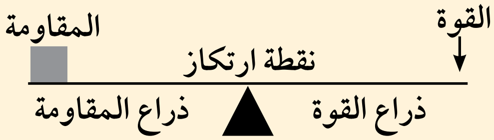
ومن ذلك نرى أن: $\frac{٥}{٢}$ = $\frac{٨٠}{٣٢}$ ، $\frac{٨٠}{٥}$ = $\frac{٣٢}{٢}$ ، $\frac{٢}{٥}$ = $\frac{٣٢}{٨٠}$ ، ...

مثال (٣) تطبيقات حياتية

الفيزياء: الوزن الذي تحتاج إليه لإحداث توازن في أرجوحة على شكل رافعة يتغيّر عكسيًّا مع المسافة بين الوزن ونقطة الارتكاز. جاسم وزنه ٥١٠ نيوتن ويجلس على بعد ٢,٥ م من نقطة الارتكاز. أين يجلس وائل الذي وزنه ٧٥٠ نيوتن ليحدث التوازن؟

معلومة فيزيائية: قانون الرافعة

ناتج ضرب القوة في المسافة العمودية بين نقطة تأثير القوة ونقطة الارتكاز (ذراع القوة) يساوي حاصل ضرب المقاومة في ذراع المقاومة.



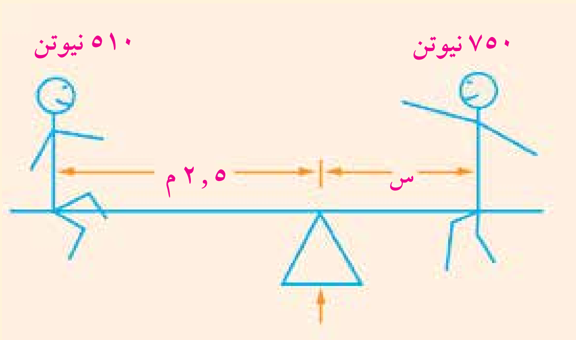
الحل: قانون الرافعة : القوة × ذراعها = المقاومة × ذراعها

من توازن الرافعة: الوزن$_{١}$ × المسافة$_{١}$ = الوزن$_{٢}$ × المسافة$_{٢}$

$$٥١٠ \times ٢,٥ = ٧٥٠ \times س$$

$$س = \frac{٥١٠ \times ٢,٥}{٧٥٠} = ١,٧$$

أي أن وائل يجلس على مسافة ١,٧ م بعيدًا عن نقطة الارتكاز.



حاول أن تحل

٣ (أ) في تغيّر عكسي ص α $\frac{١}{س}$ إذا كانت ص = ٢,٠ عندما س = ٧٥. أوجد س عندما ص = ٣.

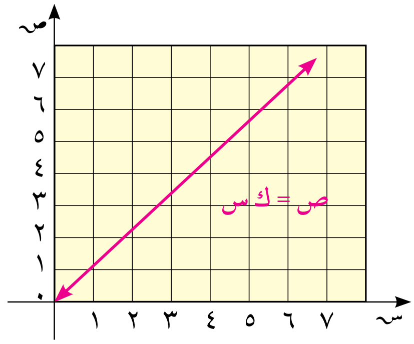
(ب) ما وزن جسم يوضع على مسافة ٣ م من نقطة ارتكاز رافعة، ليحدث توازنًا مع جسم وزنه ٤٠ نيوتن على بعد ٦ م من نقطة الارتكاز؟

(جـ) رحلة تستغرق ٣ ساعات عندما تسير السيارة بسرعة ٧٥ كم/ ساعة. كم تستغرق الرحلة إذا سارت السيارة بسرعة ٩٠ كم/ ساعة.

مقارنة بين التغير الطردي والتغير العكسي

يوضح الشكلان البيانيان التاليان الفرق بين التغيّر الطردي والتغيّر العكسي.

تغيّر طردي



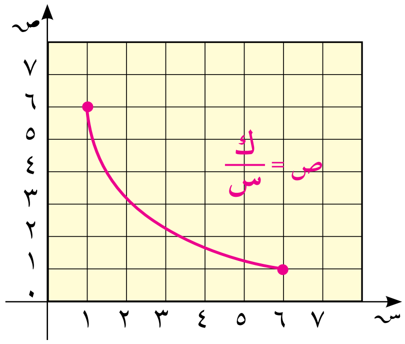
ص α س

ص = ك س ك > ٠

ك = $\frac{ص}{س}$

= ثابت التغيّر

تغيّر عكسي



ص α $\frac{١}{س}$

ص = $\frac{ك}{س}$: ك > ٠

ك = س ص

= ثابت التغيّر

مثال (٤)

أي من بيانات الجدولين (أ)، (ب) يمثل تغيّرًا طرديًا؟ وأيهما يمثل تغيّرًا عكسيًا؟ اكتب المعادلة التي تمثّل التغيّر في الحالتين:

(أ)

س	٥	١٠	٢٥
ص	٢٠	١٠	٤

(ب)

س	٢	٤	١٠
ص	٥	١٠	٢٥

الحل:

(أ) نلاحظ أن $\frac{ص}{س}$ ليست ثابتة.

نبحث س ص نجد أن

س ص = ٥ × ٢٠ = ١٠ × ١٠

= ٢٥ × ٤ = ١٠٠ = ثابت

إذًا التغيّر هنا تغيّر عكسي معادلته س ص = ١٠٠

(ب) نبحث عن النسب $\frac{ص}{س}$ في جميع الحالات نجد أن:

$\frac{ص}{س} = \frac{٥}{٢} = \frac{١٠}{٤} = \frac{٢٥}{١٠}$

وهي نسبة ثابتة = ٢,٥

إذًا التغيّر هنا طرديّ معادلته ص = ٢,٥س

حاول أن تحل

٤ بيّن نوع التغيّر المناسب للموقف في كل من الحالات التالية، ثم اكتب رمز المعادلة التي تمثله:

(١) المبلغ الذي يأخذه كل شخص عند توزيع مبلغ ١٠٠ دينار على عدة أشخاص بالتساوي.

(٢) تكلفة شراء عدد من الأقلام علمًا أن ثمن القلم ٢٠ فلسًا.

(٣) أنت تمشي ٥ كم كل يوم. سرعتك في المشي والزمن يتغيّران من يوم إلى يوم.

أ س ص = ٥

ب ص = $\frac{١٠٠}{س}$

جـ ص = ٢٠ س

د ص = ٥ س

مثال (٥) تطبيقات حياتية

توفي رجل وترك لزوجته وأبنائه مبلغ ٠٠٠ ٤٥٠ ٣ دينار. (والداه متوفيان).

أوجد نصيب كل فرد إذا تألفت عائلته من:

أ ٥ أولاد و٤ بنات ب ٤ أولاد و٣ بنات جـ ولد واحد وابنتين

ماذا تلاحظ؟

سورة النساء

﴿ يُوصِيكُمُ ٱللَّهُ فِيٓ أَوۡلَٰدِكُمۡۖ لِلذَّكَرِ مِثۡلُ حَظِّ ٱلۡأُنثَيَيۡنِۚ فَإِن كُنَّ نِسَآءٗ فَوۡقَ ٱثۡنَتَيۡنِ فَلَهُنَّ ثُلُثَا مَا تَرَكَۖ وَإِن كَانَتۡ وَٰحِدَةٗ فَلَهَا ٱلنِّصۡفُۚ وَلِأَبَوَيۡهِ لِكُلِّ وَٰحِدٖ مِّنۡهُمَا ٱلسُّدُسُ مِمَّا تَرَكَ إِن كَانَ لَهُۥ وَلَدٞۚ فَإِن لَّمۡ يَكُن لَّهُۥ وَلَدٞ وَوَرِثَهُۥٓ أَبَوَاهُ فَلِأُمِّهِ ٱلثُّلُثُۚ فَإِن كَانَ لَهُۥٓ إِخۡوَةٞ فَلِأُمِّهِ ٱلسُّدُسُۚ مِنۢ بَعۡدِ وَصِيَّةٖ يُوصِي بِهَآ أَوۡ دَيۡنٍۗ ءَابَآؤُكُمۡ وَأَبۡنَآؤُكُمۡ لَا تَدۡرُونَ أَيُّهُمۡ أَقۡرَبُ لَكُمۡ نَفۡعٗاۚ فَرِيضَةٗ مِّنَ ٱللَّهِۗ إِنَّ ٱللَّهَ كَانَ عَلِيمًا حَكِيمٗا ١١ ﴾

الحل:

للزوجة الثمن أي $\frac{١}{٨}$ × ٠٠٠ ٤٥٠ ٣ = ٢٥٠ ٤٣١

يبقى لأبنائه: ٠٠٠ ٤٥٠ ٣ − ٢٥٠ ٤٣١ = ٧٥٠ ٠١٨ ٣

أ عدد الحصص = عدد الابناء × ١ + عدد البنات × $\frac{١}{٢}$

= ٥ × ١ + ٤ × $\frac{١}{٢}$ = ٧

نصيب الولد = ٧٥٠ ٠١٨ ٣ ÷ ٧ = ٢٥٠ ٤٣١ دينارًا.

نصيب الابنة = $\frac{١}{٢}$ × ٢٥٠ ٤٣١ = ٦٢٥ ٢١٥ دينارًا.

ب عدد الحصص = ٤ × ١ + ٣ × $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١١}{٢}$

نصيب الولد = ٧٥٠ ٠١٨ ٣ ÷ $\frac{١١}{٢}$ ≃ ٥٤٨ ٨٦٣,٦ دينارًا.

نصيب الابنة = ٥٤٨ ٨٦٣,٦ ÷ ٢ ≃ ٢٧٤ ٤٣١,٨ دينارًا.

جـ عدد الحصص = ١ × ١ + ٢ × $\frac{١}{٢}$ = ٢

نصيب الولد = ٧٥٠ ٠١٨ ٣ ÷ ٢ = ٣٧٥ ٥٠٩ ١ دينارًا.

نصيب الابنة= ٣٧٥ ٥٠٩ ١ ÷ ٢ = ٧٤٥ ٦٨٧,٥ دينارًا.

نلاحظ أنه كلما زاد عدد الحصص قل نصيب الفرد. أي أن نصيب كل فرد من الابناء يتغير عكسيًّا مع عدد الحصص.

حاول أن تحل

٥ هندسة: خصصت قطعتا أرض لبناء مجمعين سكنيين لهما المساحة نفسها، كل منهما على شكل مستطيل:
أبعاد القطعة الأولى ٤٢ م × ٣٥ م، فإذا كان طول القطعة الثانية ٥٢,٥ م فاحسب عرضها.

المرشد لحل المسائل

يباع الحجر المصنوع من الإسمنت المعد سلفًا ويوزع في شاحنات تتسع كل منها لِـ ٨,٥ م^{٣}.

أبعاد حجر الأسمنت المعتمدة هي ١٥ سم، ١٨ سم، ٢٠ سم.

يريد جاسم تغطية رقعة مساحتها ٢٨٠ مترًا مربعًا ويريد معرفة عدد الشاحنات اللازم للعملية.

كيف فكر جاسم

أ كلما زاد عمق الرقعة المغطاة بالأسمنت قلت مساحتها. استنتج أن تغيّر عمق الرقعة مع تغيّر المساحة هو عكسي.

ب قام بوضع جدول يبيّن الأمتار المكعبة من الأسمنت اللازمة وفق كل عمق.

إذا كان العمق ١٥ سم: ح = ٢٨٠ × ٠,١٥ = ٤٢ م^{٣}.

يتغيّر عدد الشاحنات طرديًّا مع حجم الأسمنت: ٤٢ ÷ ٨,٥ ≃ ٥ شاحنات.

العمق بالأمتار	الأمتار المكعبة	عدد الشاحنات
٠,١٥	٤٢	٥
٠,١٨	٥٠,٤	٦
٠,٢٠	٥٦	٧

استشار جاسم أحد مهندسي الإنشاءات فأفاده أن عمق ٢٠ سم غير ضروري، ولكن يجب أن لا يقل عن ١٥ سم.

قرّر جاسم اعتماد عمق ١٨ سم.

برأيك، هل اختيار جاسم موفق؟ وهل كمية حجر الاسمنت المتبقية كبيرة (تشكل هدرًا للمال؟) فسّر.

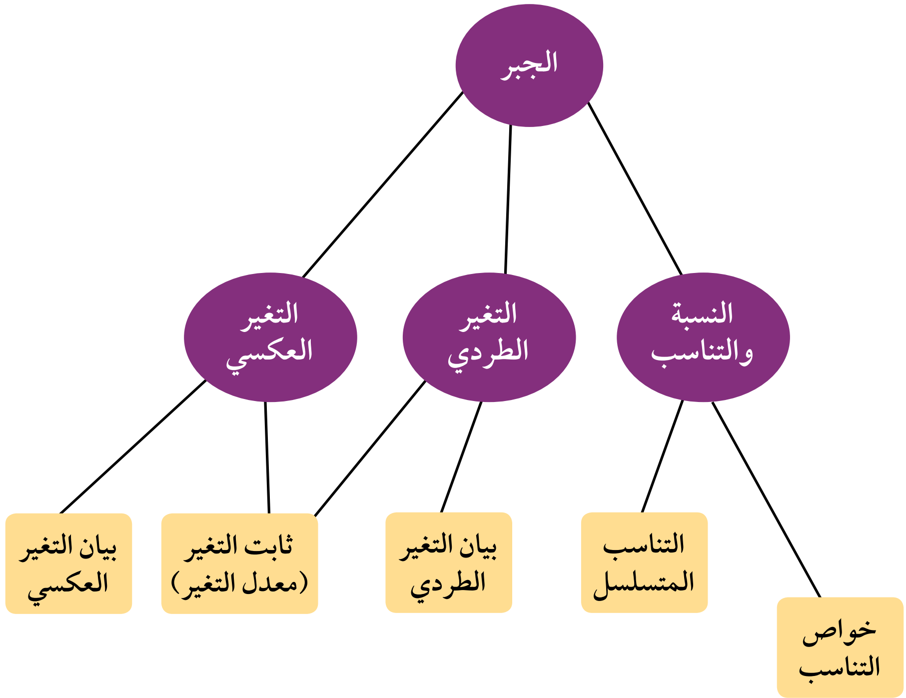
مسألة إضافية

في أحد المهرجانات الرياضيّة، تقذف آلة كهربائية كراتًا إلى البعيد. تتغير المسافة التي تقطعها الكرة عكسيًّا مع وزنها.

أ يريد عبدالله قذف الكرة مسافة تزيد على ١٥٠ مترًا بأقل وزن ممكن للكرة. وضع في الآلة كرة تزن ٢٠٠ جم فقذفتها الآلة مسافة ١٢٠ م.

ب ما الوزن المناسب لكي تقطع الكرة مسافة تزيد على ١٥٠ مترًا؟

مخطط تنظيمي للوحدة الثالثة



ملخص

- النسبة هي مقارنة بين كميتين من النوع نفسه ويمكن تمثيلها بكسر .
- مقياس الرسم هو النسبة بين الطول على الخريطة والمسافة الحقيقية.
- التناسب هو تساوي نسبتين أو أكثر.
- إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ}$ فإنه يقال إن الأعداد أ، ب، جـ في تناسب متسلسل والعكس صحيح.
- بيان التغير الطردي هو دالة خطية تكتب بالصورة: ص = ك س حيث ك ≠ ٠، ك: ثابت التغير .
- في التغير الطردي: النسبة $\frac{ص}{س}$ ثابتة لكل زوج مرتب (س ≠ ٠).
- إذا تغيرت كمية ص مع تغير كمية أخرى س بحيث كان حاصل ضرب الكميتين ثابتًا، فإن هذا التغير يسمى تغيرًا عكسيًّا.
- في التغير العكسي: $س_١ \times ص_١ = س_٢ \times ص_٢$ أو $\frac{س_١}{س_٢} = \frac{ص_٢}{ص_١}$.
- حاصل الضرب هو ثابت التغير أي س × ص = ك (ثابت).

الوحدة الرابعة

الهندسة المستوية
Plane Geometry

مشروع الوحدة: هندسة الكسريات CTALS

١ **مقدمة المشروع:** خلال السنوات العشرين الأخيرة، تزايدت كثيرًا أهمية هندسة الكسريات fractal geometry كطريقة لوصف بعض ظواهر الحياة اليومية. استخدمت بعض الكسريات لوصف التكوينات الطبيعية مثل سلاسل الجبال والغيوم. في العام ١٩٠٤، وضع السويدي فون كوش (Von Kosh) منحنى استخدم لنمذجة السواحل.

كثير من الأشكال تحتوي على أنماط تتكرر بمقاييس مختلفة مثل زهرة القرنبيط، حيث تهتم هندسة الكسريات بهذه الأشكال. ويعتبر عالم الرياضيات فون كوش من أهم الباحثين في هذ المجال.

٢ **الهدف:** دراسة الأشكال ذاتية التماثل التي تتغير.

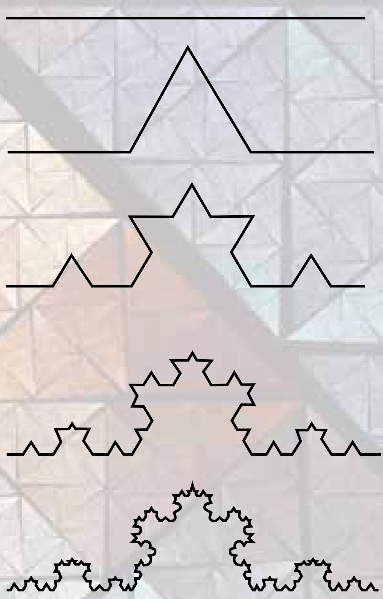
٣ **اللوازم:** أوراق رسم بياني ؛ حاسبة علمية أو حاسوب.

٤ **أسئلة حول التطبيق:**

أ ابحث عن الخصائص الثلاث المهمة للكسريات.

ب ابحث عن العالم الرياضي فون كوش واعرض لبعض أعماله في مجال الكسريات وخاصة «رقعة كوش» Koch snow flake

ج طول القطعة المقابلة وحدة واحدة وتشكل المرحلة صفر من «منحنى كوش».
نفذ المراحل من ١ إلى ٤. في كل مرحلة، قسّم القطعة إلى ٣ قطع متطابقة واستبدل قطعة الوسط بقطعتين لهما القياس نفسه.



د ارسم مثلثًا متطابق الأضلاع. عيّن نقطة المنتصف لكل ضلع. صل بين النقاط الثلاث. كرّر ذلك عدة مرات.

٥ **التقرير:** ضعْ تقريرًا تبيّن فيه كيف نفذت المشروع وتجيب عن الأسئلة.

دروس الوحدة

المضلعات المتشابهة	تشابه المثلثات	التشابه في المثلثات قائمة الزاوية	التناسبات والمثلثات المتشابهة
٤–١	٤–٢	٤–٣	٤–٤

الوحدة الرابعة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت نظرية فيثاغورث وتطبيقاتها في المثلثات قائمة الزاوية.
- تعرفت على منصف الزاوية والمنصف العمودي للقطعة المستقيمة والقطعة المتوسطة في المثلث والعمود المرسوم من الرأس إلى الضلع المقابل في المثلث.
- تعلمت الحلول للمعادلات من الدرجة الأولى في متغيرين.
- تعلمت الحلول للمعادلات من الدرجة الثانية في متغير.
- تعرفت حلول المتباينات.
- تعرفت النسبة والتناسب.

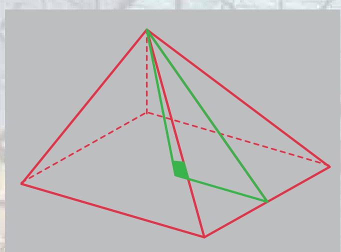
ماذا سوف تتعلم؟

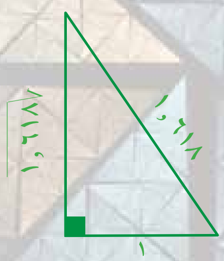
- التشابه: مفهوم التشابه بين الأشكال الهندسية المستوية وإيجاد مقاييس رسم معين باستخدام التشابه وإيجاد النسبة الذهبية.
- حالات تشابه المثلثات والتطبيق في مواقف حياتية.
- تطبيق التشابه على المثلث قائم الزاوية والخصائص الناتجة من العمود المرسوم من رأس القائمة إلى الوتر المقابل.
- نظرية طاليس.
- خصائص منصف الزاوية الداخلي في المثلث.
- إدراك العلاقة بين محيطي شكلين متشابهين والعلاقة بين مساحتيهما.

أضف إلى معلوماتك

كان المصريون القدماء، على ما يبدو، على علمٍ بوجود النسبة الذهبية وقد استخدموها في بناء بعض الأهرامات مثل الهرم الكبير في الجيزة (هرم خوفو).

في هرم خوفو، طول كل ارتفاع جانبي يساوي ١,٦١٨ مضروبًا في نصف طول ضلع القاعدة.





المصطلحات الأساسية

التشابه – مستطيل ذهبي – نظرية طاليس – عمود في المثلث – مساحة – مقياس رسم – نسبة ذهبية – منصف زاوية – محيط.

المضلعات المتشابهة
Similar Polygons

سوف تتعلم

- تحديد مفهوم التشابه بين الأشكال الهندسية المستوية
- تشابه مثلثين
- المستطيل الذهبي
- النسبة الذهبية

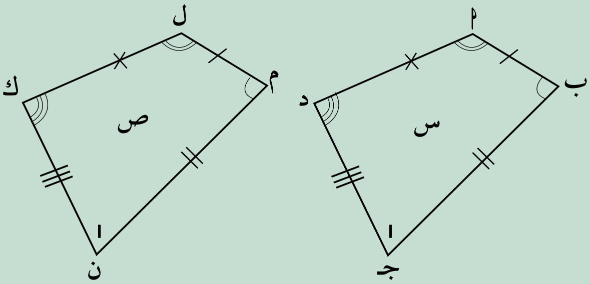
دعنا نفكر ونتناقش

درسنا في ما سبق مفهوم **تطابق المثلثات**. بالنسبة إلى المضلعات، يكون المضلعان متطابقين إذا تحقق الشرطان التاليان معًا:

- **أطوال أضلاعهما المتناظرة متساوية.**
- **قياسات زواياهما المتناظرة متساوية.**

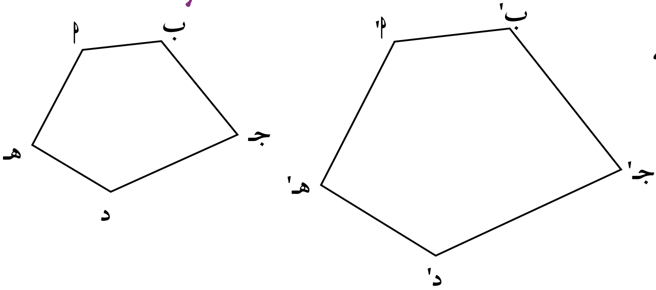
في الشكل المرسوم:

المضلعان ٲب جـ د، ل م ن ك متطابقان.



١ – التشابه
Similarity

يقال لشكلين هندسيين إنهما **متشابهان** إذا كان لهما **الشكل العام نفسه** وكان **أحدهما تكبيرًا أو تصغيرًا للآخر أو مطابقًا له.**



فكر معي: في ما يلي أجب بنعم أو لا.

وإذا كانت الإجابة (لا) أعط مثالًا مضادًّا.

هل:

- كل مربعين متشابهان؟
- كل مثلثين متطابقي الأضلاع متشابهان؟
- كل مثلثين متطابقي الضلعين متشابهان؟
- كل المثلثات قائمة الزاوية متشابهة؟

معلومة مفيدة:

في بعض الأحيان، لا يكون التخمين دائمًا صحيحًا. يمكن إثبات أن تخمينًا ما خطأ باستخدام مثال مضاد.

يكون المثال المضاد لتخمين معين طريقة لإثبات أن هذا التخمين هو خطأ.

يكفي إيجاد مثال مضاد واحد لإثبات أن تخمينًا ما خطأ. فالقول أن الأعداد الأولية هي أعداد فردية صحيح لعدد لامتناهٍ من الأعداد. العدد ٢ هو أولي وزوجي (ليس عددًا فرديًّا) وهذا كافٍ لإثبات خطأ التخمين.

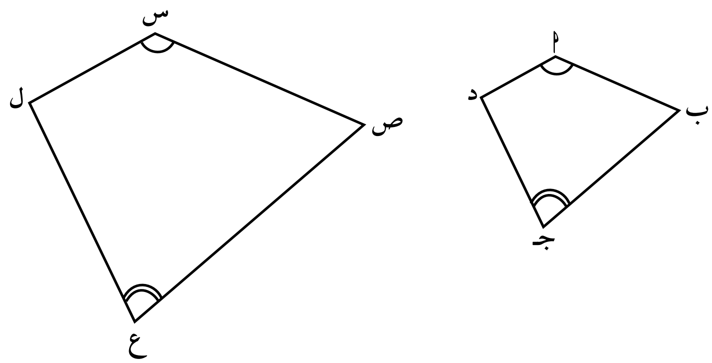
تعميم (١)

يقال لمضلعين (لهما العدد نفسه من الأضلاع) إنهما متشابهان إذا تحقق الشرطان التاليان معًا:
- **قياسات زواياهما المتناظرة متساوية.**
- **أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة.**

والعكس صحيح.

وتسمى النسبة بين طولي أي ضلعين متناظرين **نسبة التشابه**.

تدريب (١)



أكمل:

إذا كان المضلعان أ ب جـ د، س ص ع ل متشابهين فإن:

١ ق(سْ̂) = ...، ق(عْ̂) = ...

ق(صْ̂) = ...، ق(لْ̂) = ...

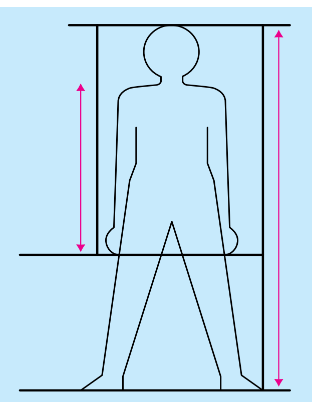
٢ $\frac{\text{س ص}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{ص ع}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ع ل}}{\dots} = \frac{\dots}{\text{د أ}}$

تدريب (٢)

أجب عن الأسئلة التالية (أعط مثالًا مضادًا إذا كانت الإجابة لا):

٣ هل جميع المضلعات المنتظمة والتي لها العدد نفسه من الأضلاع متشابهة؟

____



٤ إذا نظرت إلى صورتك (الفوتوغرافية) هل النسبة بين طول ذراعك وطول ذراعك في الصورة تساوي النسبة بين طول جسمك وطول جسمك في الصورة؟

____

٥ هل النسبة بين طولي أي ضلعين متجاورين في مستطيل تساوي النسبة بين طولي ضلعين متجاورين مناظرين لهما في مستطيل آخر؟

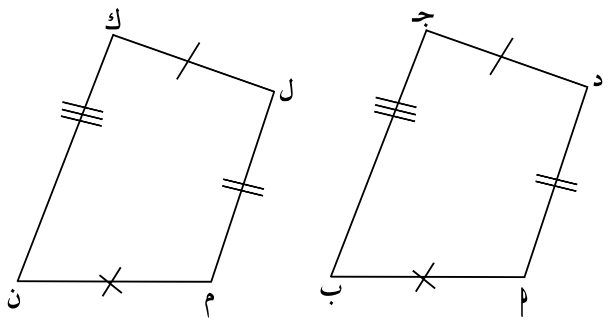
____

تعميم (٢)

المضلعان المتطابقان يكونان متشابهين.

تذكر:
الرمز ≅ يعني تطابق

فمثلًا:



إذا كان المضلع ٲب جـ د ≅ المضلع م ن ك ل فإن:

١ ق(ٲ̂) = ق(م̂)، ق(ب̂) = ق(ن̂)، ....

٢ $\frac{\text{ٲب}}{\text{م ن}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ن ك}} = \frac{\text{جـ د}}{\text{ك ل}} = \frac{\text{دٲ}}{\text{ل م}} = ١$

∴ المضلع ٲب جـ د ~ المضلع م ن ك ل

ومنه Δٲب جـ ≅ Δم ن ك

ومنه Δٲب جـ ~ Δم ن ك.

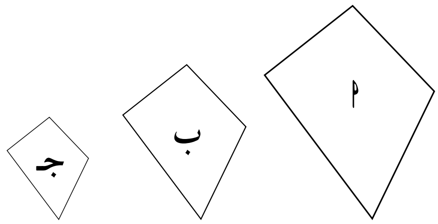
ملاحظة:
الرمز ~ يعني تشابه

تعميم (٣)

إذا كان المضلع ٲ يشابه المضلع ب وكان المضلع ب يشابه المضلع جـ ، فإن المضلع ٲ يشابه المضلع جـ.

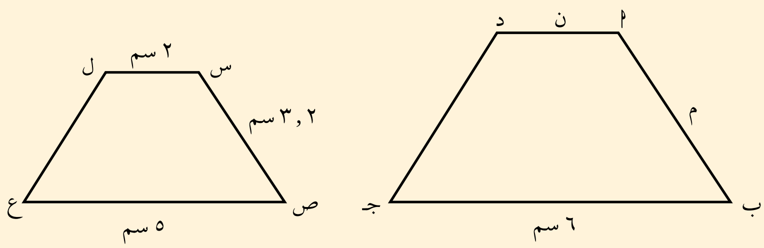
أي أنه إذا كان: ٲ ~ ب، ب ~ جـ

فإن ٲ ~ جـ



مثال (١)

في الشكل المقابل: إذا كان ٲب جـ د ~ س ص ع ل، أوجد قيمة ن، م.



المعطيات: ٲب جـ د، س ص ع ل متشابهين.

ٲد = ن، ب جـ = ٦ سم، ص ع = ٥ سم،

ص س = ٣,٢سم، س ل = ٢ سم

المطلوب: إيجاد قيمة ن، م.

البرهان:

المضلع أب جـ د ~ س ص ع ل.

$$\therefore \frac{\text{أب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{جـ د}}{\text{ع ل}} = \frac{\text{أد}}{\text{س ل}}$$

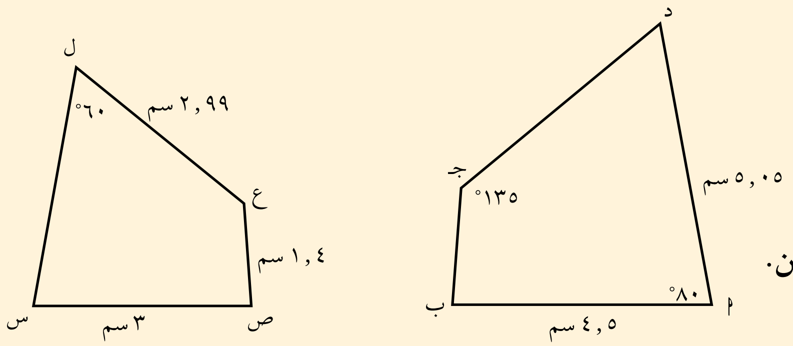
ومنه: $\frac{\text{م}}{٣,٢} = \frac{٦}{٥} = \frac{\text{جـ د}}{\text{ع ل}} = \frac{\text{ن}}{٢}$

$\frac{\text{ن}}{٢} = \frac{٦}{٥}$ $\therefore$ ن = ٢,٤ سم

$\frac{\text{م}}{٣,٢} = \frac{٦}{٥}$ $\therefore$ م = ٣,٨٤ سم

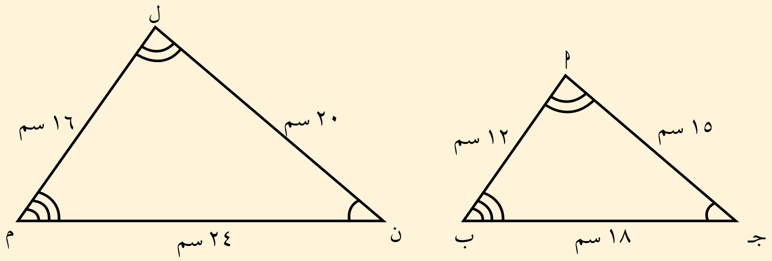
حاول أن تحل

١ في الشكل المقابل، المضلعان أب جـ د، س ص ع ل متشابهان.
أوجد قياسات الزوايا المجهولة وأطوال الأضلاع المجهولة في كلا المضلعين.



مثال (٢)

حدّد فيما إذا كان المثلثان أب جـ، ل م ن متشابهين.
إذا كان المثلثان متشابهين،
اكتب قاعدة التشابه ونسبة التشابه.



البرهان:

من المعطيات في الشكل: الزوايا المتناظرة متطابقة. (١)

بمقارنة أطوال الأضلاع المتناظرة نجد أن:

$$\frac{\text{أب}}{\text{ل م}} = \frac{١٢}{١٦} = \frac{٣}{٤}$$

$$\frac{\text{ب جـ}}{\text{م ن}} = \frac{١٨}{٢٤} = \frac{٣}{٤}$$

$$\frac{\text{جـ أ}}{\text{ن ل}} = \frac{١٥}{٢٠} = \frac{٣}{٤}$$

أي أن:

$\frac{\text{أ ب}}{\text{ل م}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{م ن}} = \frac{\text{جـ أ}}{\text{ن ل}} = \frac{٣}{٤}$

بالتالي:

أطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة. (٢)

من (١)، (٢) يتبيّن أن:

Δأ ب جـ $\sim$ Δل م ن، وأن نسبة التشابه $\frac{٣}{٤}$.

كذلك نسبة التشابه $\frac{٤}{٣}$

حاول أن تحل

٢ المثلثان أ ب جـ، د هـ و فيهما:

ق($\hat{\text{أ}}$) = ق($\hat{\text{د}}$) ، ق($\hat{\text{ب}}$) = ق($\hat{\text{هـ}}$) ، ق($\hat{\text{جـ}}$) = ق($\hat{\text{و}}$)

أ ب = ١٢ سم، ب جـ = ١٤ سم، أ جـ = ١٦ سم، د هـ = ١٨ سم، هـ و = ٢١ سم، د و = ٢٤ سم.

هل يمكنك استنتاج أن المثلثين متشابهان؟ وضِّحْ إجابتك.

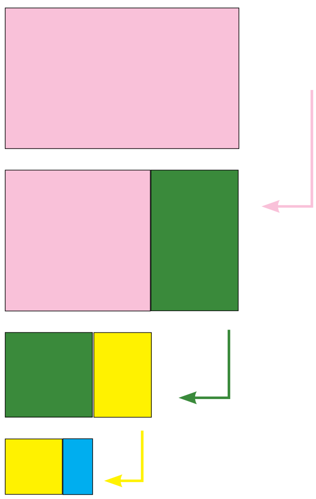
ملاحظة مهمة: إن نسبة التشابه تقارن بين قياسين بالوحدات نفسها، فمثلًا أطوال أضلاع المثلثين في المثال (٢) هي بالسنتيمتر.

المستطيل الذهبي Golden Rectangle

هو مستطيل يمكن تقسيمه إلى جزئين، أحدهما مربع والآخر مستطيل.

والمستطيل الناتج يكون مستطيلًا ذهبيًّا آخر ويكون مشابهًا للمستطيل الأصلي.

يبيّن الشكل المقابل نمطًا من المستطيلات الذهبية.

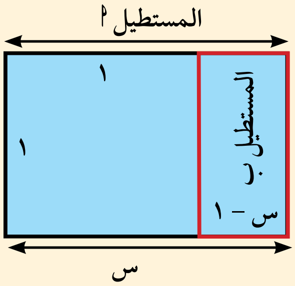


النسبة الذهبية Golden Ratio

في كل مستطيل ذهبي، نسبة طول الضلع الأكبر إلى طول الضلع الأصغر تسمى النسبة الذهبية وتساوي $\frac{١ + \sqrt{٥}}{٢}$: ١ أي حوالى ١,٦١٨ : ١.

مثال (٣)

استخدم المستطيل الذهبي المقابل والتناسب لإيجاد النسبة الذهبية.



الحل:

∵ المستطيل ٲ هو مستطيل ذهبي وتم تقسيمه إلى مربع ومستطيل ب.

∴ المستطيل ب مستطيل ذهبي

∴ المستطيل ٲ ∼ المستطيل ب.

∴ $\frac{\text{طول المستطيل ٲ}}{\text{عرض المستطيل ٲ}} = \frac{\text{طول المستطيل ب}}{\text{عرض المستطيل ب}}$ = النسبة الذهبية

ليكن س = طول المستطيل ٲ.

س − ١ = عرض المستطيل ب.

نحصل على $\frac{\text{س}}{١} = \frac{١}{\text{س} - ١}$

∴ س^٢ − س = ١ باستخدام الضرب التقاطعي

س^٢ − س − ١ = ٠

نستخدم القانون لحل المعادلة التربيعية.

المميز = ب^٢ − ٤ٲجـ = ٥

∴ س = $\frac{١ + \sqrt{٥}}{٢}$ أو س = $\frac{١ - \sqrt{٥}}{٢}$ مرفوضة

س ≃ ١,٦١٨ باستخدام الآلة الحاسبة

أي أن النسبة الذهبية هي $\frac{١ + \sqrt{٥}}{٢}$: ١

أو حوالى ١,٦١٨ : ١

معلومة رياضية:

في أي مستطيل، البعد الأقصر يسمى العرض والبعد الأطول يسمى الطول.

هل تعلم:

العدد الذهبي يساوي ١,٦١٨ تقريبًا

حاول أن تحل

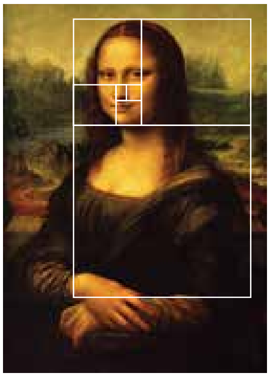
٣ قطعة نقدية ورقية مستطيلة الشكل أبعادها ٥,١٠ سم، ٥,٦ سم.

هل نسبة طولها إلى عرضها تساوي النسبة الذهبية؟

التحدي: إذا كان العدد الذهبي س هو الجذر الموجب للمعادلة التربيعية $س^2 = س + 1$

فأثبت أن: $س = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$

استخدم الرسامون كثيرًا المستطيل الذهبي في أعمالهم.



لوحة موناليزا

مثال (٤) تطبيقات حياتية

يخطط أحد الفنانين لرسم لوحة مستطيلة الشكل طولها ٦٠ سم. كم يجب أن يكون عرض اللوحة ليكون المستطيل ذهبيًّا؟ (علمًا بأن النسبة الذهبية ≃ ١,٦١٨ :١)

الحلّ:

حتى تكون اللوحة على شكل مستطيل ذهبي يجب أن يكون:

$$\frac{\text{طول اللوحة}}{\text{عرض اللوحة}} = \frac{1{,}618}{1}$$

ليكن هـ عرض اللوحة.

$$\frac{60}{هـ} \simeq \frac{1{,}618}{1}$$ كتابة التناسب

$$1{,}618\ هـ \simeq 60$$ الضرب التقاطعي

$$هـ \simeq \frac{60}{1{,}618}$$

$$هـ \simeq 37$$

يجب أن يكون عرض اللوحة حوالى ٣٧ سم.

حاول أن تحل

٤ إذا كان عرض أحد المستطيلات الذهبية ٦٠ سم، فكم يجب أن يكون طوله؟

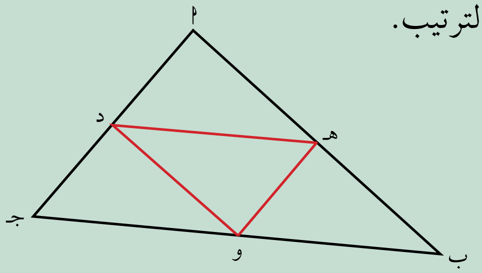
٤ – ٢

تشابه المثلثات
Similar Triangles

سوف تتعلم
- حالات تشابه المثلثات

دعنا نفكر ونتناقش

في المثلث ٯب جـ: هـ، د، و منتصفات $\overline{ٯب}$، $\overline{ٯجـ}$، $\overline{ب جـ}$ على الترتيب.



١ هل قياسات زوايا المثلثين ٯهـ د، ٯب جـ متساوية؟

٢ هل أطوال أضلاع المثلثين ٯهـ د، ٯب جـ متناسبة؟

إذا كانت إجابتك نعم، فما قيمة هذه النسبة.

٣ برهن أن المثلثات ٯدهـ، دجـ و، هـ وب، هـ ود متطابقة.

٤ هل برأيك، المثلث ٯهـ د هو تصغير للمثلث ٯب جـ؟ وهل هما متشابهان؟

سبق أن تعلمت عدة طرائق تبيّن بها تطابق مثلثين.

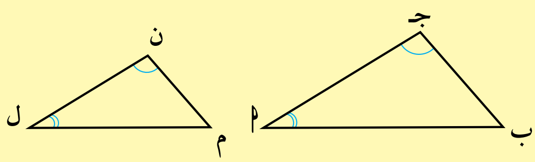
في أي مثلثين متشابهين تكون قياسات الزوايا المتناظرة متساوية، والنسب بين طولي كل ضلعين متناظرين متساوية؟

النظريات التالية تبين أن توفر أحد الشرطين يكفي لإثبات أن المثلثين متشابهان حيث إن الشرط الآخر سيكون محققًا أيضًا.

نظرية (١)

يتشابه المثلثان إذا تطابقت زاويتان في أحد المثلثين مع زاويتين في المثلث الآخر.

Δٯب جـ ~ Δل م ن.



مثال (١)

في الشكل المقابل ٯب جـ، ع ل د مثلثان، فإذا كان:

ق($\hat{ب}$) = ٥٠°، ق($\hat{ٯ}$) = ٨٥°

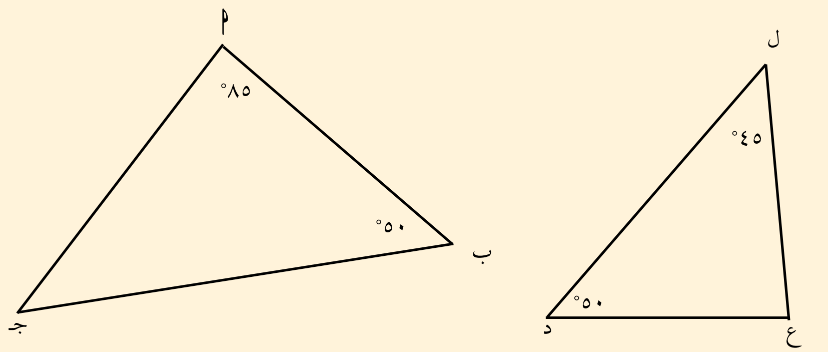
ق($\hat{ل}$) = ٤٥°، ق($\hat{د}$) = ٥٠°

أثبت تشابه المثلثين ٯب جـ، ع د ل.

المعطيات:

ق($\hat{ب}$) = ٥٠°، ق($\hat{ٯ}$) = ٨٥°

ق($\hat{ل}$) = ٤٥°، ق($\hat{د}$) = ٥٠°



المطلوب:

إثبات تشابه المثلثين ؟ب جـ، ع د ل.

البرهان: في المثلثين ؟ب جـ، ع د ل:

ق(بˆ) = ق(دˆ) = ٥٠° (معطى) (١)

ق(جـˆ) = ١٨٠° − (٥٠° + ٨٥°)

= ١٨٠° − ١٣٥° = ٤٥°. مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°.

∴ ق(جـˆ) = ق(لˆ) (٢)

من (١)، (٢)، نستنتج أن المثلثين ؟ب جـ، ع د ل متشابهان أي أن ∆؟ب جـ ~ ∆ع د ل.

من الاستخدامات:

يستخدم منفذو الحفر على المفروشات الخشبية التشابه بين المثلثات لوضع تصاميم لأعمالهم قبل تنفيذها.

حاول أن تحل

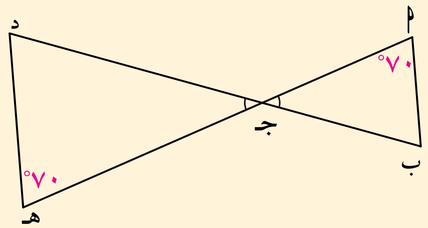
١ المثلث ؟ب جـ قائم الزاوية ؟، ق(بˆ) = ٥٥°.

المثلث م ل ح قائم الزاوية م، ق(لˆ) = ٣٥°.

أثبت تشابه المثلثين ؟ب جـ، م ح ل.

مثال (٢)

أثبت أن المثلثين في الشكل المقابل متشابهان. اكتب عبارة التشابه.



الحل:

المعطيات:

∆؟ب جـ ، ∆د هـ جـ فيهما:

ق(؟ˆ) = ٧٠°، ق(هـˆ) = ٧٠°

؟جـˆب، هـ جـˆد متقابلتان بالرأس

المطلوب:

إثبات تشابه المثلثين ؟ب جـ، هـ د جـ، وكتابة عبارة التشابه.

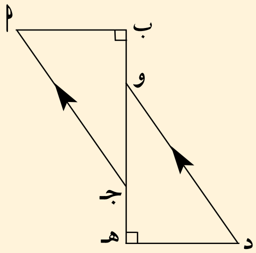
البرهان: المثلثان ؟ب جـ ، هـ د جـ فيهما:

ق(؟جـˆب) = ق(هـ جـˆد) زاويتان متقابلتان بالرأس

ق(جـ ؟ˆب) = ق(جـ هـˆد) معطى

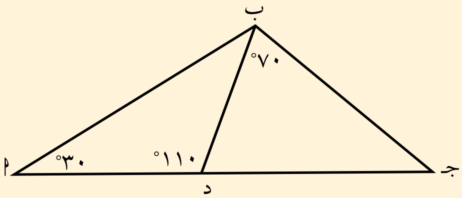
∴ ∆؟ب جـ ~ ∆ هـ د جـ (المثلثان متشابهان) نظرية (١)

حاول أن تحل



٢ في الشكل المقابل، أثبت تشابه المثلثين ؟ب جـ، د هـ و.

مثال (٣)



أثبت أن المثلثين أ ب د ، أ جـ ب متشابهان. اكتب عبارة التشابه.

المعطيات:

في الشكل:

ق(جـ بَ د) = ٧٠°، ق(أ دَ ب) = ١١٠°، ق(ب أَ د) = ٣٠°.

المطلوب:

إثبات تشابه المثلثين أ ب د، أ جـ ب.

البرهان:

المثلثان أ ب د، أ جـ ب فيهما:

ق(ب أَ د) = ق(ب أَ جـ) = ٣٠° — زاوية مشتركة

ق(أ بَ د) = ١٨٠° − (١١٠° + ٣٠°) = ٤٠° — مجموع زوايا المثلث أ ب د = ١٨٠°

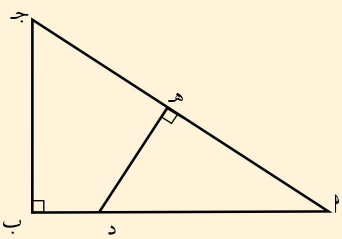
ق(أ بَ جـ) = ٤٠° + ٧٠° = ١١٠°

∴ ق(أ بَ جـ) = ق(أ دَ ب)

المثلثان متشابهان (تطابق زاويتين)

△أ ب د ~ △أ جـ ب.

حاول أن تحل

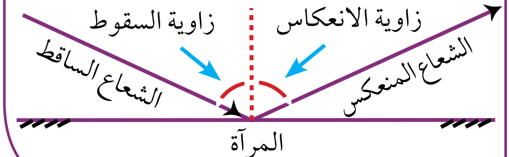


٣ في الشكل المقابل، أثبت تشابه المثلثين أ ب جـ، أ هـ د، واكتب عبارة التشابه.

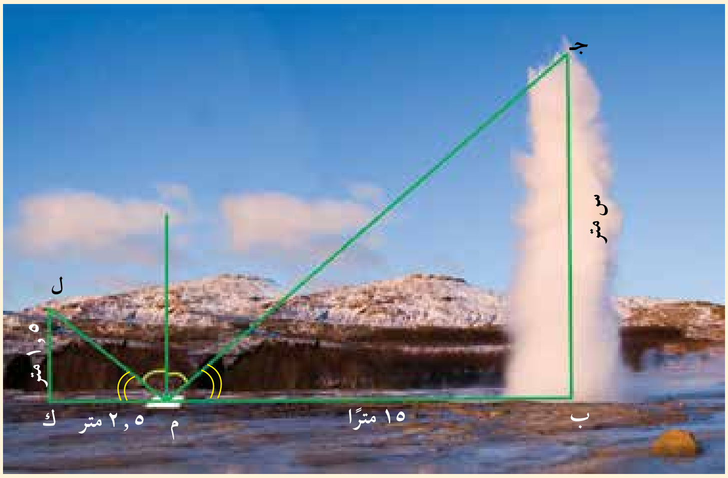
في بعض الحالات، يصعب قياس مسافة أو ارتفاع معين مباشرة. في هذه الحالة، يمكنك استخدام تشابه المثلثات لإيجاد هذا القياس بطريقة غير مباشرة.
إحدى الطرائق تستخدم خاصية انعكاس الضوء في المرآة المستوية.
فكما تعرف في الفيزياء، إن **قياس زاوية السقوط يساوي قياس زاوية الانعكاس.**

تذكر:

قياس زاوية السقوط = قياس زاوية الانعكاس



مثال (٤) **(إثرائي)**



أراد سعيد أن يعرف ارتفاع المياه. وضع مرآة على مسافة ١٥ مترًا من موقع اندفاع المياه، ثم تحرك إلى الخلف حتى استطاع أن يرى أعلى نقطة بلغتها المياه في وسط المرآة. عند هذه النقطة كان سعيد قد تحرك بعيدًا عن المرآة بمسافة ٢,٥ متر، وكانت عيناه على ارتفاع ١,٥ متر فوق الأرض. إذا كانت قدماه والمرآة وموقع اندفاع المياه على استقامة واحدة، فأوجد ارتفاع المياه.

المعطيات:

م ب = ١٥ مترًا ، م ك = ٢,٥ متر ، ك ل = ١,٥ متر

قدما سعيد، المرآة، موقع اندفاع المياه على استقامة واحدة.

المطلوب: معرفة ارتفاع المياه.

البرهان:

المثلثان م ب جـ ، م ك ل فيهما:

ق(ب مَ جـ) = ق(ك مَ ل) زاوية الانعكاس = زاوية السقوط

ق(بَ) = ق(كَ) = ٩٠°

المثلثان م ب جـ ، م ك ل متشابهان (تطابق زاويتين)

$\therefore \frac{\text{ب جـ}}{\text{ك ل}} = \frac{\text{م ب}}{\text{م ك}}$ تناسب أطوال الأضلاع المتناظرة

$\frac{\text{س}}{١,٥} = \frac{١٥}{٢,٥}$

$٢,٥\text{س} = ١,٥ \times ١٥$

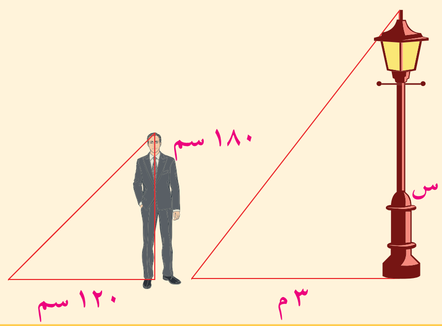
$\text{س} = \frac{١,٥ \times ١٥}{٢,٥} = ٩$

يبلغ ارتفاع المياه ٩ أمتار.

حاول أن تحل

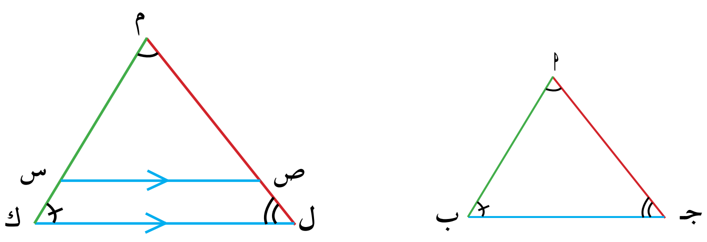
٤ أ لإيجاد ارتفاع برج، وضع سالم مرآة مستوية على الأرض على بعد ١٢ مترًا من قاعدة البرج.
وعندما كان سالم على بعد ١,٢ متر من المرآة استطاع أن يرى قمة البرج.
إذا كان ارتفاع عين سالم عن الأرض ١,٨ متر في هذه النقطة، فكم يكون ارتفاع البرج؟
(علمًا بأن قاعدة البرج وقدمي سالم والمرآة على استقامة واحدة).

ب عمود طول ظله ٣ م في الوقت نفسه الذي يكون فيه طول ظل محمد ١٢٠ سم. إذا كان طول محمد ١٨٠ سم، فكم سيكون طول العمود؟



نظرية (٢)

يتشابه المثلثان إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة فيهما.



المعطيات: Δٲب جـ، Δم ك ل فيهما:

$\frac{\text{ٲب}}{\text{م ك}} = \frac{\text{ٲجـ}}{\text{م ل}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ك ل}}$.

المطلوب: إثبات أن Δٲب جـ $\sim$ Δم ك ل.

العمل:

نأخذ س $\in$ $\overline{\text{م ك}}$ حيث م س = ٲب ونرسم $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ل ك}}$.

$\therefore$ Δم س ص ، Δم ك ل متشابهان. لماذا؟ (١)

$\frac{\text{م س}}{\text{م ك}} = \frac{\text{م ص}}{\text{م ل}} = \frac{\text{س ص}}{\text{ك ل}}$ تناسب الأضلاع المتناظرة

$\frac{\text{ٲب}}{\text{م ك}} = \frac{\text{ٲجـ}}{\text{م ل}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ك ل}}$ معطى

بما أن م س = ٲب إذًا $\frac{\text{م س}}{\text{م ك}} = \frac{\text{ٲب}}{\text{م ك}}$

ومنه $\frac{\text{م ص}}{\text{م ل}} = \frac{\text{ٲجـ}}{\text{م ل}}$ ، $\frac{\text{س ص}}{\text{ك ل}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ك ل}}$ تساوي التناسبين

م ص = ٲجـ ، س ص = ب جـ. لماذا؟

Δم س ص ، Δٲب جـ متطابقان. (ض. ض. ض) فهما متشابهان (٢)

من (١)، (٢)

$\therefore$ Δٲب جـ $\sim$ Δم ك ل وهو المطلوب.

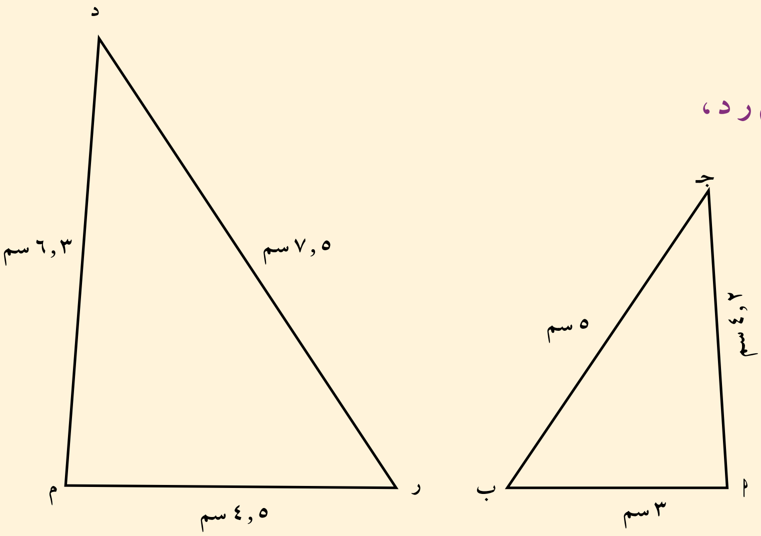
لاحظ أن:

ق($\hat{\text{ٲ}}$) = ق($\hat{\text{م}}$) ، ق($\hat{\text{ب}}$) = ق($\hat{\text{ك}}$) ، ق($\hat{\text{جـ}}$) = ق($\hat{\text{ل}}$).

مثال (٥)

في الشكل المقابل، أ أثبت تشابه المثلثين أب جـ، م ر د ،

ب اكتب أزواج الزوايا متساوية القياس.



المعطيات:

أب = ٣ سم، ب جـ = ٥ سم، جـأ = ٤,٢ سم

م ر = ٤,٥ سم، رد = ٧,٥ سم، د م = ٦,٣ سم.

المطلوب:

أ إثبات تشابه المثلثين أب جـ، م ر د.

ب كتابة أزواج الزوايا متساوية القياس.

البرهان:

أ $\frac{\text{أب}}{\text{م ر}} = \frac{٣}{٤,٥} = \frac{٢}{٣}$ (١)

$\frac{\text{ب جـ}}{\text{رد}} = \frac{٥}{٧,٥} = \frac{٢}{٣}$ (٢)

$\frac{\text{جـأ}}{\text{دم}} = \frac{٤,٢}{٦,٣} = \frac{٢}{٣}$ (٣)

من (١)، (٢)، (٣) نستنتج أن $\frac{\text{أب}}{\text{م ر}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{رد}} = \frac{\text{جـأ}}{\text{دم}} = \frac{٢}{٣}$

∴ المثلثان متشابهان أي أن Δأب جـ ~ Δم ر د.

ب $\hat{\text{جـ}}$ هي الزاوية المقابلة للضلع $\overline{\text{أب}}$، $\hat{\text{د}}$ هي الزاوية المقابلة للضلع $\overline{\text{م ر}}$.

∴ ق($\hat{\text{جـ}}$) = ق($\hat{\text{د}}$)

الزاوية $\hat{\text{أ}}$ مقابلة للضلع $\overline{\text{ب جـ}}$، الزاوية $\hat{\text{م}}$ مقابلة للضلع $\overline{\text{رد}}$.

∴ ق($\hat{\text{أ}}$) = ق($\hat{\text{م}}$)

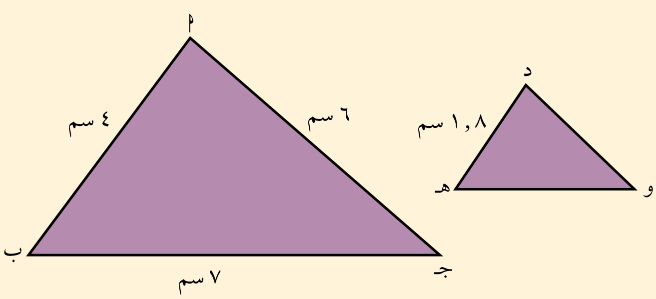
ويبقى: ق($\hat{\text{ب}}$) = ق($\hat{\text{ر}}$).

ق($\hat{\text{جـ}}$) = ق($\hat{\text{د}}$)، ق($\hat{\text{أ}}$) = ق($\hat{\text{م}}$)، ق($\hat{\text{ب}}$) = ق($\hat{\text{ر}}$).

حاول أن تحل

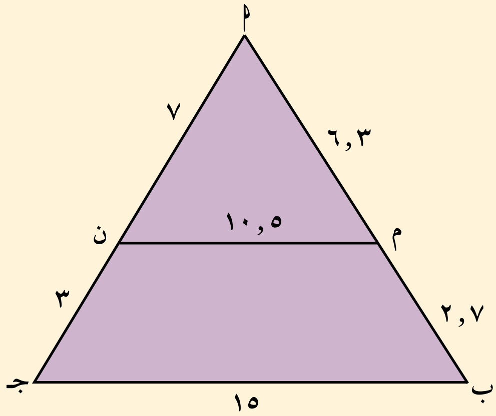
٥ في الشكل المقابل المثلثان أب جـ ، د هـ و متشابهان.

أوجد طول كل من $\overline{\text{دو}}$ ، $\overline{\text{وهـ}}$.



مثال (٦)

في الشكل المرسوم،



أولًا: أثبت أن:

أ △م ب جـ ~ △م م ن. ب $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{م ن}}$.

ثانيًا: أوجد النسبة بين محيطي المثلثين. ماذا تلاحظ؟

المعطيات:

م م = ٦,٣ ، م ن = ٧، م ن = ١٠,٥ ، م ب = ٢,٧، ن جـ = ٣، ب جـ = ١٥

أولًا: المطلوب: أ إثبات تشابه المثلثين م ب جـ، م م ن. ب $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{م ن}}$.

البرهان: أ (م م) / (م ب) = ٦,٣ / (٦,٣ + ٢,٧) = ٦,٣ / ٩ = ٠,٧ أوجد: (م ن) / (م جـ) = ...، (م ن) / (ب جـ) = ... ماذا تلاحظ؟

استخدم نظرية (٢). △م م ن ~ △م ب جـ وهو المطلوب (أ).

ب من تشابه المثلثين: ق(∠م م ن) = ق(∠م ب جـ) وهما في وضع تناظر.

∴ $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{م ن}}$.

ثانيًا: المطلوب: إيجاد النسبة بين محيطي المثلثين م ب جـ، م م ن.

البرهان: (محيط △م م ن) / (محيط △م ب جـ) = ٢٣,٨ / ٣٤ = ٠,٧

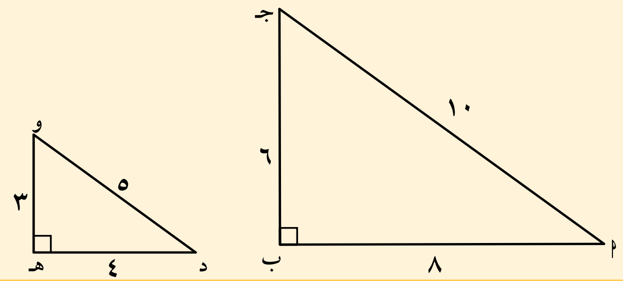
نلاحظ أن النسبة بين محيطي المثلثين تساوي نسبة التشابه.

> **معلومة:**
> في أي شكلين متشابهين:
> النسبة بين المحيطين = نسبة التشابه
> النسبة بين المساحتين = مربع نسبة التشابه
> نسبة التشابه بين محيطي دائرتين تساوي
> النسبة بين طولي نصفي قطري الدائرتين.

حاول أن تحل

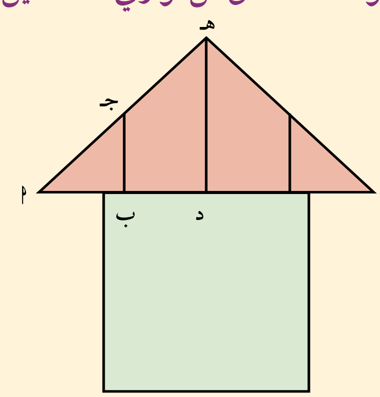
٦ في الشكل المقابل، أثبت أن المثلثين متشابهان.

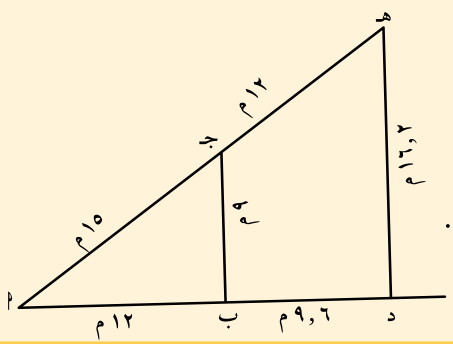
ثم أوجد العلاقة بين نسبة مساحتي المثلثين ونسبة التشابه.



مثال (٧) تطبيقات حياتية

يبيّن الشكل المقابل قسمًا من المنطقة العلوية في أحد الأهراءات (مخازن الحبوب). أراد يوسف التحقق من توازي الدعامتين $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{د هـ}}$. هل يمكنك مساعدته؟





المعطيات: م، ب، د على استقامة واحدة.

م، جـ، هـ على استقامة واحدة.

م ب = ١٢ م، ب د = ٩,٦ م، ب جـ = ٩ م،

د هـ = ١٦,٢ م، م جـ = ١٥ م، جـ هـ = ١٢ م.

المطلوب: إثبات أن $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{د هـ}}$.

البرهان: Δأب جـ ، Δأدهـ فيهما:

$$\frac{\text{أب}}{\text{أد}} = \frac{١٢}{١٢ + ٩,٦} = \frac{٥}{٩}$$

$$\frac{\text{أجـ}}{\text{أهـ}} = \frac{١٥}{١٥ + ١٢} = \frac{٥}{٩}$$

$$\frac{\text{ب جـ}}{\text{دهـ}} = \frac{٩}{١٦,٢} = \frac{٥}{٩}$$

∴ المثلثان متشابهان (نظرية ٢)

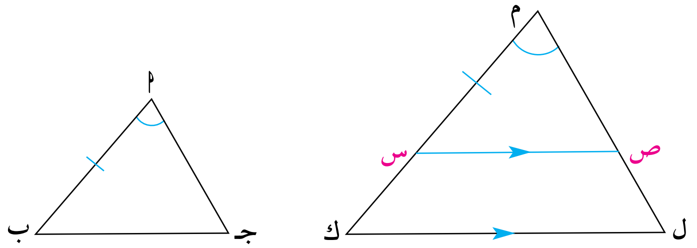
الزاويتان أ بَ جـ ، أ دَ هـ متناظرتان ومتساويتان في القياس إذًا $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{دهـ}}$.

حاول أن تحل

٧ في المثال (٧)، أثبت أن Δأب جـ قائم الزاوية ب ثم أوجد قياس الزاوية أ.

نظرية (٣)

يتشابه المثلثان إذا تطابقت زاوية في أحدهما مع زاوية في المثلث الآخر، وتناسب طولا الضلعين المحددين لهاتين الزاويتين.



المعطيات: ق(أ^) = ق(م^)، $\frac{\text{أب}}{\text{م ك}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{م ل}}$

المطلوب: إثبات أن: Δأب جـ ~ Δم ك ل

العمل: نأخذ س ∋ $\overline{\text{م ك}}$ حيث أب = م س

ونرسم س ص // ك ل.

البرهان: نبدأ بإثبات تشابه Δم س ص، Δم ك ل.

∵ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ل ك}}$

∴ ق(م سَ ص) = ق(م كَ ل) زاويتان بالتوازي والتناظر،

ق(م صَ س) = ق(م لَ ك) زاويتان بالتوازي والتناظر.

وبالتالي من نظرية (١) نستنتج أن: Δم س ص ~ Δم ك ل متشابهان.

∴ $\frac{\text{م س}}{\text{م ك}} = \frac{\text{م ص}}{\text{م ل}}$ (١) تناسب أطوال الأضلاع المتناظرة.

سنثبت الآن أن Δأب جـ، Δم س ص متطابقان.

$\frac{\text{أب}}{\text{م ك}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{م ل}}$ (٢) معطى

بما أن أب = م س وبمقارنة التناسبين (١)، (٢) نحصل على أجـ = م ص.

∴ Δأب جـ ، Δم س ص متطابقان (ض. ز. ض.) فهما متشابهان.

Δأب جـ ~ Δ م س ص ، Δ م س ص ~ Δ م ك ل. ∴ Δأب جـ ~ Δم ك ل.

معلومة مفيدة:
عندما نقول (بالتوازي والتناظر) نعني وجود مستقيمين متوازيين وقاطع لهما، وزاويتان في وضع تناظر.

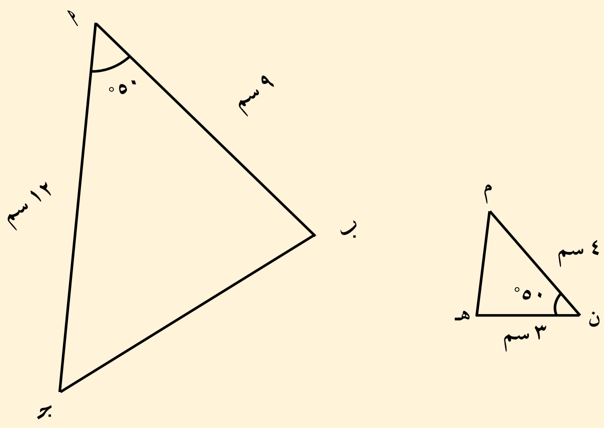
مثال (٨)

في الشكل المقابل ٲب جـ، ن هـ م مثلثان، فإذا كان:

ق(ٲ̂) = ق(ن̂) = ٥٠°

ٲب = ٩ سم، ٲجـ = ١٢ سم، م ن = ٤ سم، ن هـ = ٣ سم.

أثبت تشابه المثلثين ٲب جـ، ن هـ م.



المعطيات:

ق(ٲ̂) = ق(ن̂) = ٥٠°

ٲب = ٩ سم، ٲجـ = ١٢ سم، م ن = ٤ سم، ن هـ = ٣ سم

المطلوب:

إثبات تشابه المثلثين ٲب جـ، ن هـ م.

البرهان:

المثلثان ٲب جـ، ن هـ م فيهما

ق(ٲ̂) = ق(ن̂) = ٥٠° (معطى) (١)

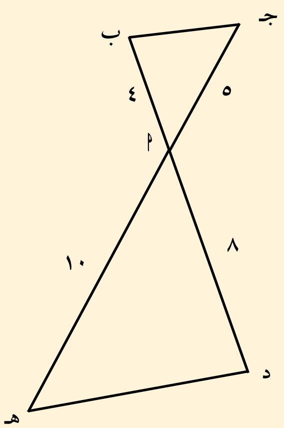
$\frac{\text{ٲب}}{\text{ن هـ}} = \frac{٩}{٣} = ٣$

$\frac{\text{ٲجـ}}{\text{م ن}} = \frac{١٢}{٤} = ٣$

$\therefore \frac{\text{ٲب}}{\text{ن هـ}} = \frac{\text{ٲجـ}}{\text{م ن}}$ (٢)

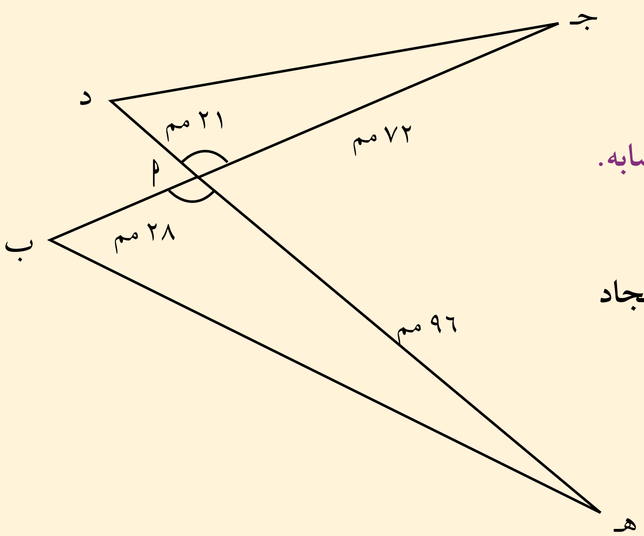
من (١)، (٢) نستنتج أن المثلثين ٲب جـ، ن هـ م متشابهان.

حاول أن تحل



٨ في الشكل المقابل ب د ∩ جـ هـ = {ٲ} ، أثبت أنّ المثلثين ٲب جـ، ٲد هـ متشابهان.

مثال (٩)



في الشكل المقابل ﺃهـ ب، ﺃجـ د مثلثان. فإذا كان

ﺃهـ = ٩٦ مم، ﺃب = ٢٨ مم، ﺃجـ = ٧٢ مم، ﺃد = ٢١ مم

أثبت أن المثلثين ﺃهـ ب، ﺃجـ د متشابهان، وأوجد نسبة التشابه.

المعطيات: ﺃهـ = ٩٦ مم ، ﺃب = ٢٨ مم.

ﺃجـ = ٧٢ مم ، ﺃد = ٢١ مم.

المطلوب: إثبات أن المثلثين: ﺃهـ ب، ﺃجـ د متشابهان، وإيجاد نسبة التشابه.

البرهان: ق(جـ ﺃ̂ د) = ق(هـ ﺃ̂ ب) معطى

$\frac{\text{ﺃجـ}}{\text{ﺃهـ}} = \frac{\text{ﺃد}}{\text{ﺃب}} = \frac{\text{٣}}{\text{٤}}$

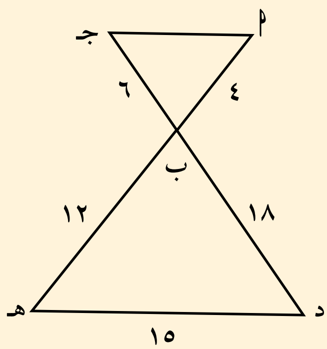
∴ المثلثان متشابهان. نسبة التشابه: $\frac{\text{٣}}{\text{٤}}$ أو $\frac{\text{٤}}{\text{٣}}$.

حاول أن تحل

٩ في المثلثين ﺃب جـ، ف د ي: ﺃب = ٧ سم ، ب جـ = ٦ سم، ق(ب̂) = ٦٣°.

دي = ٤,٥ سم، ق(د̂) = ٦٣°، ف د = ٦,٣ سم. هل المثلثان ﺃب جـ، د ي ف متشابهان؟

مثال (١٠)



في الشكل $\overline{\text{ﺃهـ}} \cap \overline{\text{جـ د}}$ = {ب} ، برهن أن: **أ** $\overline{\text{ﺃجـ}}$ // $\overline{\text{دهـ}}$. **ب** أوجد طول $\overline{\text{ﺃجـ}}$.

المعطيات: ﺃ، ب، هـ على استقامة واحدة. جـ، ب، د على استقامة واحدة.

ﺃب = ٤ ، ب هـ = ١٢، ب جـ = ٦، ب د = ١٨ ، دهـ = ١٥ .

المطلوب: **أ** إثبات توازي $\overline{\text{ﺃجـ}}$ ، $\overline{\text{دهـ}}$. **ب** إيجاد طول $\overline{\text{ﺃجـ}}$

البرهان: **أ** ق(ﺃ ب̂ جـ) = ق(هـ ب̂ د) متقابلتان بالرأس

$\frac{\text{ب جـ}}{\text{ب د}} = \frac{\text{ﺃب}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{١}}{\text{٣}}$

∴ المثلثان متشابهان ومنه نستنتج أن الزوايا المتناظرة متساوية القياس.

وبالتالي ق(جـ̂) = ق(د̂) وهما في وضع تبادل. إذاً $\overline{\text{ﺃجـ}}$ // $\overline{\text{دهـ}}$.

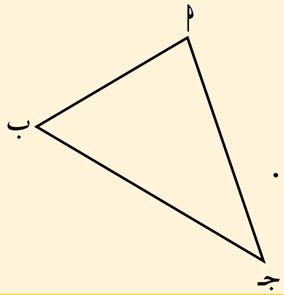
ب لإيجاد طول $\overline{\text{ﺃجـ}}$ نكتب التناسب: $\frac{\text{ﺃجـ}}{\text{د هـ}} = \frac{\text{١}}{\text{٣}}$

أي $\frac{\text{ﺃجـ}}{\text{١٥}} = \frac{\text{١}}{\text{٣}}$

ﺃجـ = $\frac{\text{١٥}}{\text{٣}}$ = ٥

حاول أن تحل

١٠ ارسم بشكل تقريبي $\overline{\text{د هـ}}$ في المثلث أ ب جـ توازي $\overline{\text{ب جـ}}$ حيث د تنتمي إلى $\overline{\text{أ ب}}$، هـ تنتمي إلى $\overline{\text{أ جـ}}$ على أن تكون نسبة التشابه بين المثلثين أ د هـ، أ ب جـ تساوي $\frac{٢}{٣}$.

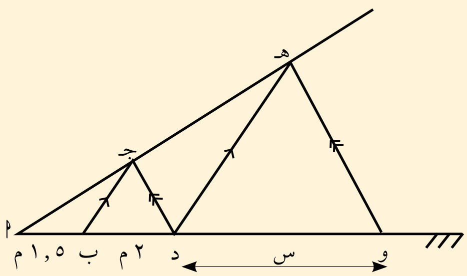


مثال (١١) تطبيقات حياتية

يبيّن الرسم المقابل حلبة منحدرة مدعّمة تستخدم في لعبة التزحلق (سكيت بورد **Skateboard**).

إذا كان $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{د هـ}}$، $\overline{\text{د جـ}}$ // $\overline{\text{و هـ}}$، أوجد قيمة س.

حيث أ، ب، د، و على استقامة واحدة، أ، جـ، هـ على استقامة واحدة.



المعطيات: أ ب = ١,٥ م، ب د = ٢م، د و = س.

$\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{د هـ}}$، $\overline{\text{د جـ}}$ // $\overline{\text{و هـ}}$

المطلوب: إيجاد س.

البرهان: المثلثان أ ب جـ ، أ د هـ فيهما:

ق(ب $\hat{\text{أ}}$ جـ) = ق(د $\hat{\text{أ}}$ هـ) زاوية مشتركة

ق(أ $\hat{\text{ب}}$ جـ) = ق(أ $\hat{\text{د}}$ هـ) بالتناظر والتوازي

∴ Δأ ب جـ ~ Δأ د هـ

ومنه $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ د}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{أ هـ}}$ تناسب الأضلاع المتناظرة

$\frac{١,٥}{١,٥ + ٢} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{أ هـ}}$ (١)

نثبت بالطريقة نفسها أن المثلثين أ د جـ ، أ و هـ متشابهان.

ومنه $\frac{\text{أ د}}{\text{أ و}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{أ هـ}}$ تناسب الأضلاع المتناظرة

$\frac{٣,٥}{٣,٥ + \text{س}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{أ هـ}}$ (٢)

من (١)، (٢) نستنتج: $\frac{١,٥}{١,٥ + ٢} = \frac{٣,٥}{٣,٥ + \text{س}}$

١,٥(٣,٥ + س) = ٣,٥(١,٥ + ٢) الضرب التقاطعي

$\text{س} = \frac{٣,٥ \times ٣,٥}{١,٥} - ٣,٥$

$\text{س} = \frac{١٤}{٣} = ٤,\overline{٦}$

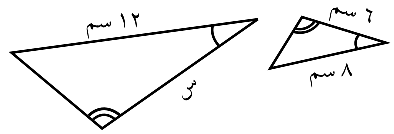
حاول أن تحل

١١ في المثال (١١) إذا كان طول $\overline{\text{هـ جـ}}$ يساوي ٣ م، أوجد طول $\overline{\text{أ جـ}}$.

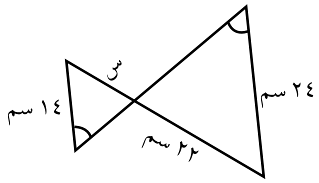
تدريب (١)

اكتب نسبة تشابه المثلثين، ثم أوجد قيمة س في كلٍّ مما يلي:

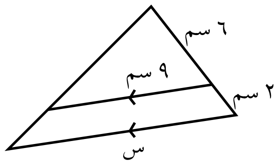
(أ)



(ب)



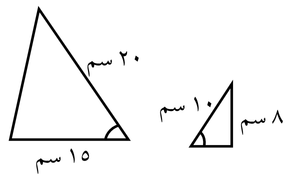
(جـ)



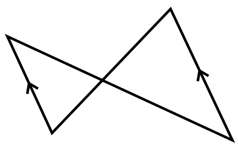
تدريب (٢)

اذكر أي الحالات يكون فيها المثلثان متشابهين، وأيها يكونان فيها غير متشابهين. وفي حالة التشابه، اذكر النظرية التي تثبت تشابههما.

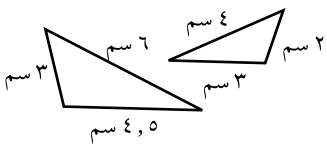
(أ)



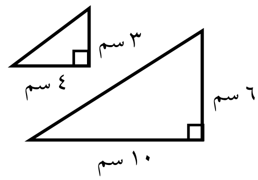
(ب)



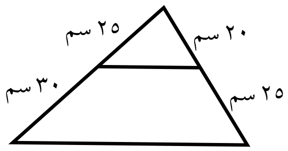
(جـ)



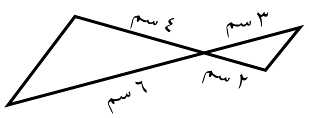
(د)



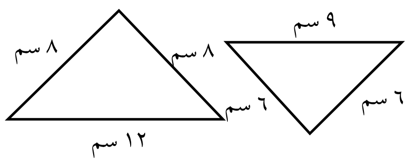
(هـ)



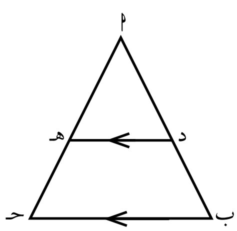
(و)



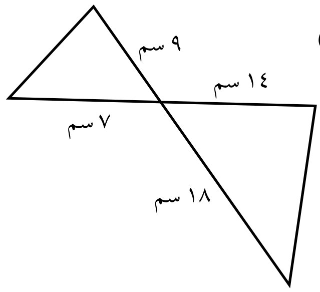
(ز)



(ح)



(ط)



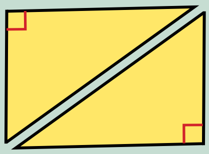
التشابه في المثلثات قائمة الزاوية
Similarity in Right Triangles

سوف تتعلم

- خصائص العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية

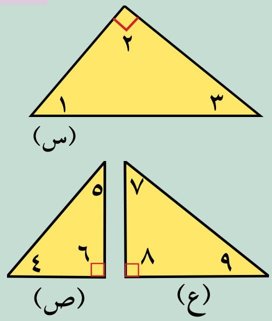
عمل تعاوني

اشترك مع أحد زملائك في التالي:



- أحضر قطعة ورق مستطيلة الشكل. ارسم قطرًا للمستطيل. اقطع الورقة كما في الشكل لتحصل على مثلثين قائمي الزاوية متطابقين.
- خذ أحد المثلثين. اقطع المثلث لتحصل على مثلثين قائمي الزاوية صغيرين كما في الشكل.

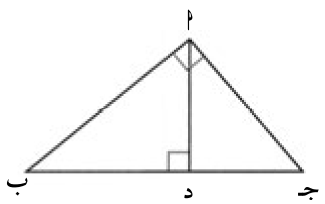
في المثلثات الثلاثة: س، ص، ع.



- أي الزوايا لها نفس قياس $\hat{١}$؟
- أي الزوايا لها نفس قياس $\hat{٢}$؟
- أي الزوايا لها نفس قياس $\hat{٣}$؟
- معتمدًا على نتائجك، ماذا تستنتج بالنسبة إلى المثلثات الثلاثة؟

تدريب (١)

أكمل العبارة: Δٱب جـ ~ Δ ... ~ Δ ...



نظرية (١)

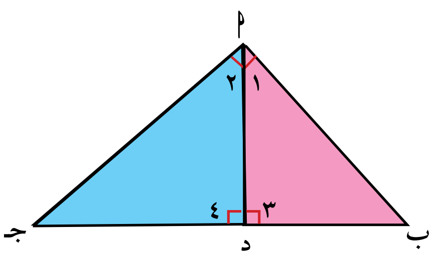
العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية يقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين وكل منهما يشابه المثلث الأصلي.

المعطيات: ٱب جـ مثلث قائم الزاوية ٱ، $\overline{ٱد} \perp \overline{ب جـ}$.

المطلوب: ١ إثبات تشابه المثلثين ٱب د، جـٱد.

٢ إثبات تشابه المثلثين ٱب د، جـ بٱ.

٣ إثبات تشابه المثلثين ٱجـ د، ب جـٱ.



البرهان:

١ المثلثان أب د، جـأد فيهما:

ق(٣̂) = ق(٤̂) = ٩٠°	معطى
ق(١̂) + ق(٢̂) = ٩٠°	معطى
ق(١̂) + ق(ب̂) = ٩٠°	لماذا؟
∴ ق(٢̂) = ق(ب̂)	
∆أب د ~ ∆جـأد.	نظرية

تاريخ الرياضيات:

إقليدس **EUCLID**

هو عالم رياضيات لقب بأبي الهندسة.

اشتهر بكتابة «العناصر» عرض فيه مجموعة بديهيات وتطرق للعديد من مجالات الرياضيات.

تدريب (٢)

أكمل إثبات **٢**، **٣**.

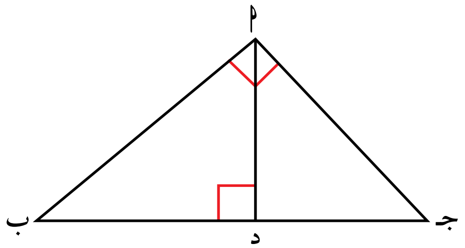
نتيجة (١)

مربع طول العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية يساوي ناتج ضرب طولي القطعتين المستقيمتين اللتين ينقسم إليهما الوتر بهذا العمود.

المعطيات: أب جـ مثلث قائم الزاوية أ، $\overline{\text{أد}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$.

المطلوب: إثبات أن: (أد)^{٢} = ب د × د جـ.

البرهان: ∆أب د ~ ∆جـأد (نظرية ١)



$\frac{\text{أب}}{\text{جـأ}} = \boxed{\frac{\text{ب د}}{\text{أد}} = \frac{\text{أد}}{\text{جـ د}}}$

(أد)^{٢} = ب د × جـ د

نتيجة (٢)

إذا كان △أب جـ قائم الزاوية أ، $\overline{\text{أد}}$ ⊥ $\overline{\text{جـ ب}}$:

١ (أب)^{٢} = ب د × ب جـ

٢ (أجـ)^{٢} = جـ د × جـ ب

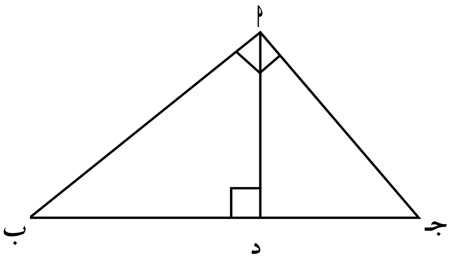
٣ أب × أجـ = أد × ب جـ

المعطيات: △أب جـ مثلث قائم الزاوية أ.

$\overline{\text{أد}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$.

المطلوب: ١ إثبات (أب)^{٢} = ب د × ب جـ.

٢ (أجـ)^{٢} = جـ د × جـ ب.



البرهان:

١ △أب د ~ △جـ ب أ (نظرية ١)

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{جـ ب}} = \frac{\text{ب د}}{\text{ب أ}}$

ومنها (أب)^{٢} = ب د × ب جـ.

٢ △أجـ د ~ △ب جـ أ (نظرية ١)

∴ $\frac{\text{أجـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{جـ د}}{\text{جـ أ}}$

ومنها (أجـ)^{٢} = جـ د × جـ ب

٣ (أب)^{٢} × (أجـ)^{٢} = ب د × ب جـ × جـ د × جـ ب (نتيجة ٢)

= (ب جـ)^{٢} × ب د × جـ د

= (ب جـ)^{٢} × (أد)^{٢} (نتيجة ١)

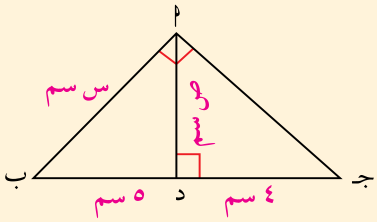
∴ أب × أجـ = ب جـ × أد

طريقة أخرى: مساحة المثلث أب جـ = $\frac{١}{٢}$ × أب × أجـ = $\frac{١}{٢}$ × أد × ب جـ

∴ أب × أجـ = أد × ب جـ

مثال (١)

أوجد س، ص بحسب المعطيات في الشكل.



المعطيات:

$\triangle$ ﻡب جـ قائم الزاوية ﻡ، $\overline{\text{ﻡد}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$.

المطلوب: إيجاد س، ص.

البرهان:

باستخدام نتائج النظرية (١):

$س^{٢} = ٥ \times (٥ + ٤) = ٤٥$

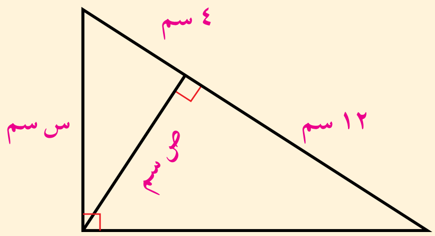
$س = \sqrt{٤٥} = ٣\sqrt{٥}$

$ص^{٢} = ٤ \times ٥$

$ص = \sqrt{٢٠} = ٢\sqrt{٥}$

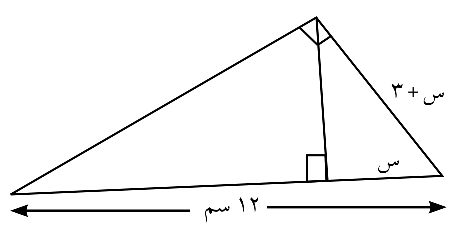
حاول أن تحل

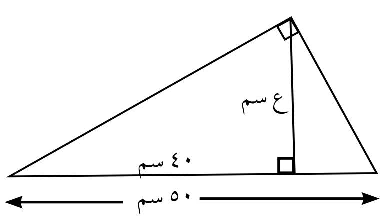
١ أوجد من الشكل المرسوم س، ص في أبسط صورة.

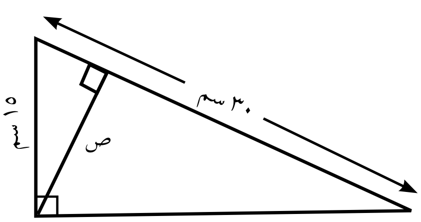


تدريب (٣)

أوجد قيمة س، ص، ع في أبسط صورة في كل من الحالات التالية:

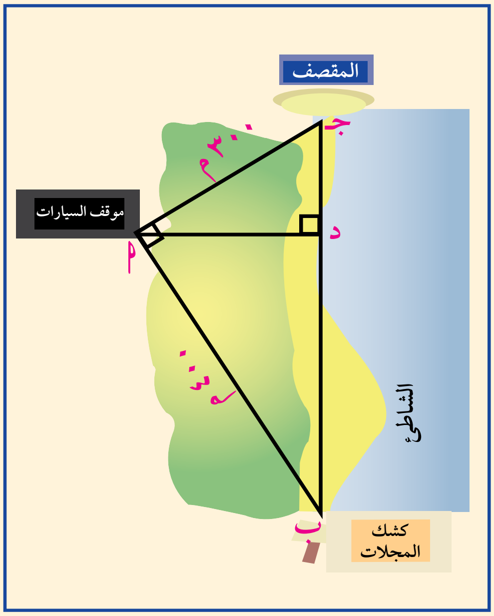






مثال (٢) تطبيقات حياتية

في إحدى الحدائق العامة، التي تقيمها الدولة على الشاطئ للترويح عن المواطنين، كان طول الممر المرصوف داخل الحديقة حتى المقصف يساوي ٣٠٠ م، وطول الممر حتى كشك المجلات ٤٠٠ م، وكان الممران يتقابلان في زاوية قائمة كما في الشكل أمام موقف السيارات. سار جاسم من موقف السيارات على مسار مستقيم عمودي على الشاطئ حتى وصل إلى الشاطئ. كم مترًا على جاسم أن يسير من مكانه على الشاطئ الذي وصل إليه ليشتري شطائر من المقصف؟



المعطيات:

ا جـ = ٣٠٠ م، ا ب = ٤٠٠ م، ق(ب ا جـ) = ٩٠°، $\overline{\text{ا د}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$.

المطلوب:

إيجاد د جـ.

البرهان:

$\triangle$ ا ب جـ قائم الزاوية ا.

بتطبيق نظرية فيثاغورث

$(\text{ب جـ})^{٢} = (٣٠٠)^{٢} + (٤٠٠)^{٢}$

$(\text{ب جـ})^{٢} = ٢٥٠\,٠٠٠$

ب جـ = ٥٠٠ م

بتطبيق نتائج التشابه

$(\text{ا جـ})^{٢} = \text{جـ د} \times \text{جـ ب}$

$(٣٠٠)^{٢} = \text{جـ د} \times ٥٠٠$

$\text{جـ د} = \dfrac{٣٠٠ \times ٣٠٠}{٥٠٠} = ١٨٠$

أي أن جاسم سيسير من مكانه ١٨٠ م ليصل إلى المقصف.

حاول أن تحل

٢ (أ) احسب ا د المسافة من موقف السيارات إلى الشاطئ بطريقتين مختلفتين.

(ب) هل يمكنك حل المثال (٢) بطريقة أخرى؟

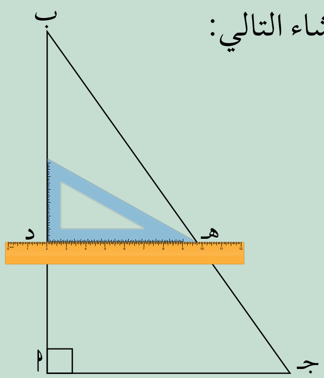
التناسبات والمثلثات المتشابهة
Proportions and Similar Triangles

عمل تعاوني

استخدم الأدوات الهندسية (المسطرة والمثلث القائم) في إنشاء التالي:

- ارسم ∆ أب جـ. خذ نقطة د على $\overline{\text{أب}}$.
- ارسم خطًّا مستقيمًا يمر بنقطة د ويوازي $\overline{\text{أجـ}}$.
- لتكن هـ هي نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{\text{دهـ}}$ مع $\overline{\text{ب جـ}}$.
- أوجد بالقياس طول كل من: $\overline{\text{ب د}}$، $\overline{\text{دأ}}$، $\overline{\text{ب هـ}}$، $\overline{\text{هـ جـ}}$.
- احسب النسبتين: $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}}$ ، $\frac{\text{ب د}}{\text{دأ}}$.

  قارن بين النسبتين: $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}}$ ، $\frac{\text{ب د}}{\text{دأ}}$.
- قارن بين عدد من الحالات يتحرك فيها موقع $\overleftrightarrow{\text{دهـ}}$ محافظًا على توازيه مع $\overline{\text{أجـ}}$.



سوف تتعلم

- خصائص الخط الموازي لأي ضلع في المثلث
- نظرية طاليس
- خصائص منصفات الزوايا الداخلية في المثلث

نظرية (١) نظرية المستقيم الموازي Parallel Line Theory

إذا وازى مستقيم أحد أضلاع مثلث وقطع ضلعيه الآخرين، فإنه يقسم هذين الضلعين إلى أجزاء أطوالها متناسبة.

المعطيات: أب جـ مثلث، $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$.

المطلوب: إثبات أن $\frac{\text{أم}}{\text{م ب}} = \frac{\text{أن}}{\text{ن جـ}}$.

البرهان:

$\overline{\text{م ن}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

∆ أجـ ب ~ ∆ أن م   لماذا؟

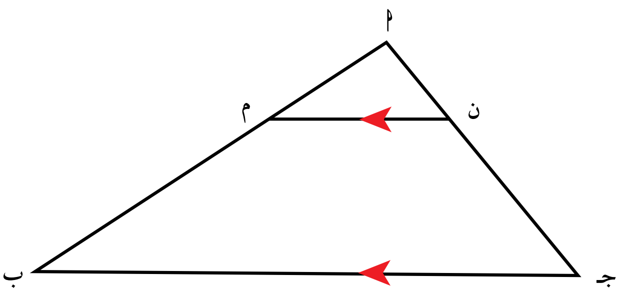
$$\frac{\text{أجـ}}{\text{أن}} = \frac{\text{أب}}{\text{أم}}$$

$$\frac{\text{أن} + \text{ن جـ}}{\text{أن}} = \frac{\text{أم} + \text{م ب}}{\text{أم}}$$

$$1 + \frac{\text{ن جـ}}{\text{أن}} = 1 + \frac{\text{م ب}}{\text{أم}}$$

$$\frac{\text{ن جـ}}{\text{أن}} = \frac{\text{م ب}}{\text{أم}}$$

$$\therefore \frac{\text{أم}}{\text{م ب}} = \frac{\text{أن}}{\text{ن جـ}} .$$



معلومة رياضية:

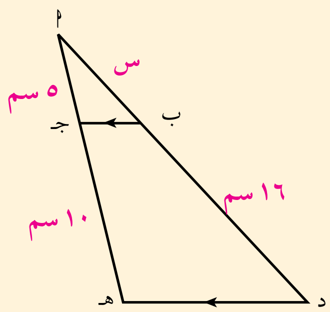
إذا كان $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$

فإن $\overline{\text{م ن}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

والعكس صحيح.

مثال (١)

استخدم نظرية المستقيم الموازي السابقة لإيجاد قيمة س.



المعطيات:

في المثلث ٱ د هـ، $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{د هـ}}$

ٱجـ = ٥ سم، جـ هـ = ١٠ سم، ب د = ١٦ سم، ٱ ب = س.

المطلوب: إيجاد س.

البرهان:

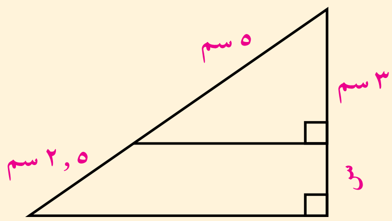
∵ $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{د هـ}}$ وباستخدام نظرية المستقيم الموازي نكتب التناسب:

$\frac{٥}{١٠} = \frac{\text{س}}{١٦}$ الأجزاء المتناسبة

١٠ س = ٨٠ باستخدام الضرب التقاطعي

س = ٨ بالقسمة على ١٠

حاول أن تحل



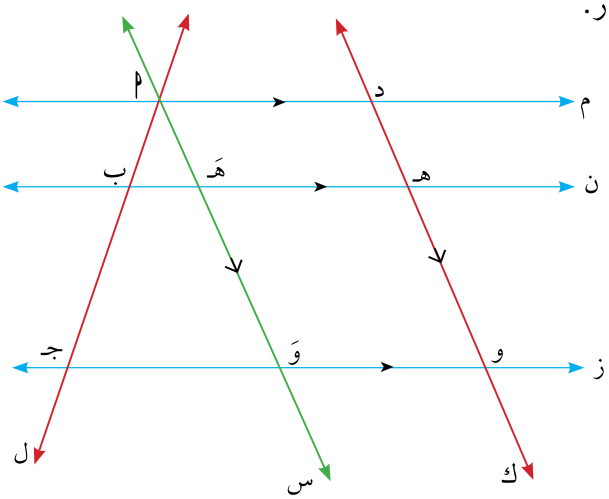
١ في الشكل المقابل، استخدم نظرية المستقيم الموازي السابقة لإيجاد قيمة س.

نظرية (٢) نظرية طاليس Thales Theory

إذا قطع مستقيمان ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر فإن أطوال القطع المستقيمة الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر.

أوّلًا: إذا كان المستقيمان القاطعان متوازيان.

- ارسم ثلاثة مستقيمات متوازية م، ن، ز.
- ارسم مستقيمين متوازيين ك، س بحيث يقطعان المستقيمات م، ن، ز.
- أثبت تناسب أطوال القطع المستقيمة الناتجة على أحد القاطعين مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر.



ثانيًا: إذا كان المستقيمان القاطعان غير متوازيين.

المعطيات: لدينا المستقيمات م، ن، ز حيث م // ن // ز.

المستقيم ل يقطع م، ن، ز بالنقاط ٱ، ب، جـ على الترتيب.

المستقيم ك يقطع م، ن، ز بالنقاط د، هـ، وعلى الترتيب.

المطلوب: إثبات أن: $\frac{\text{ٱب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{د هـ}}{\text{هـ و}}$

العمل:

نأخذ من النقطة ٲ خطًا مستقيمًا س موازيًا للمستقيم ك حيث يقطع ن بالنقطة هَـ ويقطع ز بالنقطة وَ.

البرهان:

في الشكل: ٲ هَـ هـ د متوازي أضلاع

∴ $\overline{\text{ٲهَـ}} \parallel \overline{\text{د هـ}}$

ٲهَـ = د هـ

وبالمثل هَـ وَ و هـ متوازي أضلاع

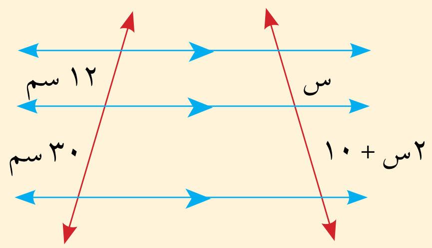
∴ هَـ وَ = هـ و

في Δ ٲوَجـ، $\overline{\text{هَـ ب}} \parallel \overline{\text{وَ جـ}}$

∴ $\frac{\text{ٲب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ٲهَـ}}{\text{هَـ وَ}}$ **نظرية (١)**

ومنه نستنتج: $\frac{\text{ٲب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{دهـ}}{\text{هـ و}}$ **بالتعويض**

مثال (٢)



من الشكل المقابل أوجد قيمة س.

المعطيات: لدينا مستقيمان غير متوازيين يقطعان ثلاثة مستقيمات متوازية.

أطوال القطع الناتجة هي س، ٢س +١٠، ١٢، ٣٠ بالترتيب.

المطلوب: إيجاد قيمة س.

البرهان:

بما أن المستقيمين يقطعان ثلاثة مستقيمات متوازية وباستخدام نظرية طاليس

$\frac{\text{س}}{\text{٢س + ١٠}} = \frac{\text{١٢}}{\text{٣٠}}$

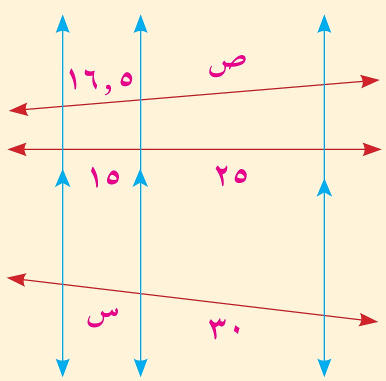
٣٠ س = ١٢(٢س + ١٠) **الضرب التقاطعي**

٣٠ س = ٢٤س + ١٢٠

٦س = ١٢٠

س = ٢٠ سم

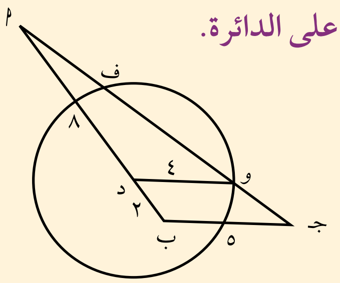
حاول أن تحل



٢ أوجد في الشكل المقابل س، ص في أبسط صورة.

مثال (٣) **تجنب الخطأ**

في الشكل المقابل: د مركز الدائرة، طول نصف قطر الدائرة = ٤ سم.



ٲب = ١٠ سم ، ٲد = ٨ سم ، ب جـ = ٥ سم ، و، ف نقطتان على الدائرة.

قال فهد: النقاط ٲ، د، ب على استقامة واحدة كذلك النقاط ٲ، و، جـ وبالترتيب نفسه.

$\because \frac{\text{ٲد}}{\text{ٲب}} = \frac{٨}{١٠} = \frac{٤}{٥}$ ، $\frac{\text{ود}}{\text{جـ ب}} = \frac{٤}{٥}$

$\therefore \overline{\text{ود}} \parallel \overline{\text{جـ ب}}$

أجابهُ سلطان: في هذه الحالة، $\overline{\text{ف د}}$، $\overline{\text{جـ ب}}$ متوازيتان أيضًا.

أ اشرح علام ارتكز سلطان في إجابته.

ب أين الخطأ في الحل الذي أعطاه فهد؟

الحل:

أ كيف فكر سلطان:

$\because$ $\overline{\text{ف د}}$ نصف قطر في الدائرة.

$\therefore$ ف د = ٤ سم

$\therefore \frac{\text{ف د}}{\text{ب جـ}} = \frac{٤}{٥}$

أي أن $\frac{\text{ٲد}}{\text{ٲب}} = \frac{\text{ف د}}{\text{ب جـ}} = \frac{٤}{٥}$

واستنادًا على ما اقترحه فهد يكون $\overline{\text{ف د}} \parallel \overline{\text{جـ ب}}$ وهذا خطأ

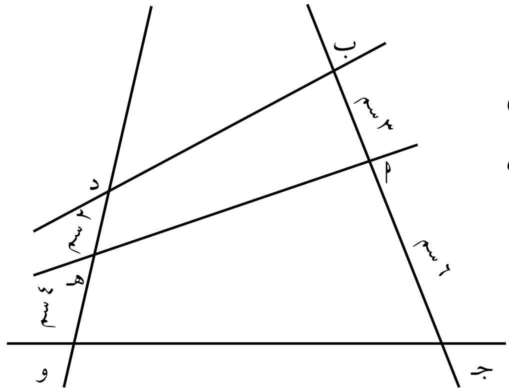
ب يجب أن يكون $\overline{\text{ود}} \parallel \overline{\text{جـ ب}}$ (نظرية طاليس)

توازي المستقيمات يعطي قطعًا أطوالها متناسبة وليس العكس.

حاول أن تحل

٣ في المثال (٣)، إذا كان أيضًا $\overline{\text{ود}} \parallel \overline{\text{جـ ب}}$، وجـ = ٣ سم، فأوجد طول $\overline{\text{ٲو}}$.

ملاحظة:



نستنتج من المثال (٣) أن عكس النظرية غير صحيح: إذا كانت أطوال القطع المستقيمة الناتجة على أحد القاطعين متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر فليس من الضروري أن تكون المستقيمات متوازية.

في الرسم : $\frac{\text{ب ٲ}}{\text{ٲ جـ}} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{\text{د هـ}}{\text{هـ و}} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

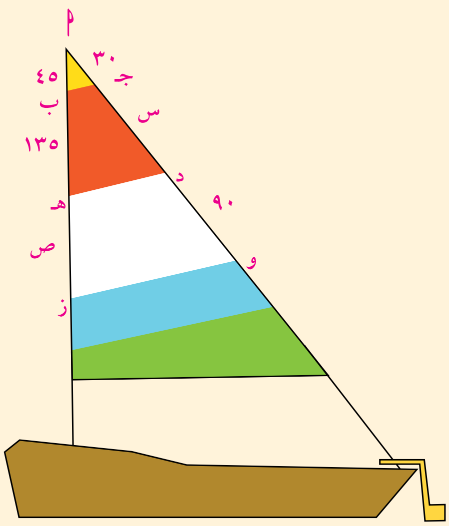
بينما المستقيمات $\overleftrightarrow{\text{ب د}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ٲ هـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ و}}$ ليست متوازية.

تدريب

حل مثال (١١) في صفحة ١٤٥، باستخدام نظرية طاليس.

مثال (٤) **تطبيقات حياتية**

تصميم أنماط لشراع المركب: يستخدم صانعو الأشرعة الحاسوب لتكوين نمط لكل شراع يصنعونه، ثم يرسمون مخططًا له بالطباشير على الأرضية التي يقصونه عليها. بعد أن يقطعوا إطارات الشراع، يحيكونها معًا لتكوين الشراع بأكمله. الخطوط المحاكة تكون متوازية كما في الشكل حيث الأبعاد بالسنتيمتر. أوجد س، ص.



المعطيات: $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{دهـ}}$ // $\overline{\text{وز}}$، ٲجـ = ٣٠، دو = ٩٠، ٲب = ٤٥، ب هـ = ١٣٥

جـ د = س ، هـ ز = ص.

المطلوب:

إيجاد س، ص.

البرهان:

من توازي القطع المستقيمة واستنادًا إلى نظرية طاليس، نكتب التناسب:

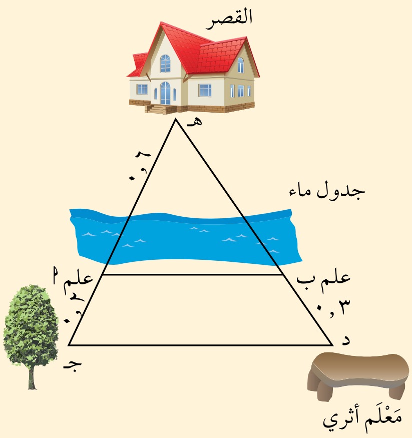
$\frac{٣٠}{س} = \frac{٤٥}{١٣٥}$ باستخدام نظرية طاليس

س = ٩٠

$\frac{ص}{١٣٥} = \frac{٩٠}{٩٠}$

∴ ص = ١٣٥ سم.

حاول أن تحل



٤ باستخدام نظام إشارة (طبوغرافيا)، وضع علمان عند النقطتين أ، ب كما في الشكل المقابل

بحيث يكون $\overline{أب}$ // $\overline{جـ د}$.

إذا كان ب د = ٣,٠ كم، أ هـ = ٦,٠ كم، أ جـ = ٢,٠ كم.

فأوجد المسافة بين القصر هـ والمَعْلَم الأثري د.

نظرية (٣) نظرية منصف الزاوية في مثلث

إذا نصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس، قسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو من الخارج إلى جزئين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين للمثلث.

المعطيات: Δأب جـ فيه، $\overleftrightarrow{أء}$ ينصف ب$\hat{أ}$جـ من الداخل شكل (١)، ينصف الزاوية الخارجة عن المثلث عند أ شكل (٢).

المطلوب: إثبات أن: $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء جـ}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}}$

العمل: نرسم $\overleftarrow{\text{جـ و}}$ // $\overleftarrow{\text{ء أ}}$ ويقطع $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ في نقطة و.

البرهان: ∵ $\overleftarrow{\text{جـ و}}$ // $\overleftarrow{\text{ء أ}}$

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء جـ}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{أ و}}$ **(١) نظرية**

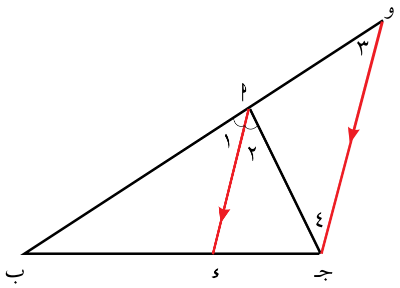
∵ $\overline{\text{جـ و}}$ // $\overline{\text{ء أ}}$

∴ ق($\hat{١}$) = ق($\hat{٣}$) بالتناظر ، ق($\hat{٢}$) = ق($\hat{٤}$) بالتبادل

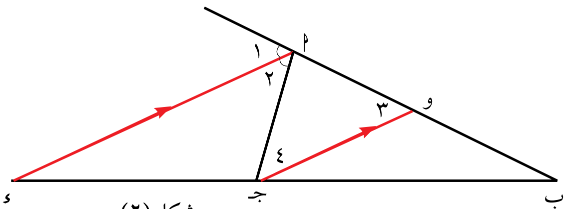
∵ ق($\hat{١}$) = ق($\hat{٢}$) ∴ ق($\hat{٣}$) = ق($\hat{٤}$)

∴ أو = أجـ **(٢)**

وبالتعويض من (٢) في (١) ∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء جـ}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}}$.



شكل (١)



شكل (٢)

ملاحظة: سنكتفي بدراسة الحالة التي ينصف فيها شعاع زاوية داخلية في مثلث.

مثال (٥)

أوجد جـ ب في الشكل المبيّن حيث $\overline{\text{ب د}}$ ينصف أ$\hat{\text{ب}}$جـ.

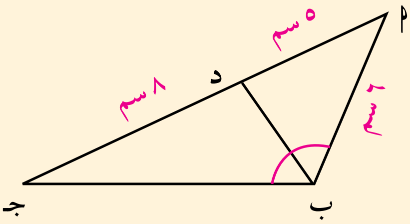
المعطيات: $\overline{\text{ب د}}$ منصف أ$\hat{\text{ب}}$جـ.

أب = ٦ سم، أد = ٥ سم،

جـ د = ٨ سم

المطلوب: إيجاد جـ ب.

البرهان:



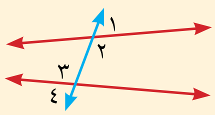
في المثلث أجـ ب، $\overline{\text{ب د}}$ منصف أ$\hat{\text{ب}}$جـ.

∴ $\frac{\text{جـ د}}{\text{د أ}} = \frac{\text{جـ ب}}{\text{ب أ}}$ نظرية منصف الزاوية

$\frac{\text{جـ ب}}{\text{ب أ}} = \frac{٨}{٥}$

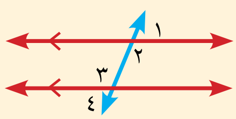
ب جـ = $\frac{٨ \times \text{ب أ}}{٥} = \frac{٨ \times ٦}{٥}$ = ٩,٦ سم

معلومة رياضية:



($\hat{٢}$)، ($\hat{٣}$): زاويتان متبادلتان داخليًّا

($\hat{١}$)، ($\hat{٤}$): زاويتان متبادلتان خارجيًّا



ق($\hat{٢}$) = ق($\hat{٣}$): التوازي والتبادل الداخلي

ق($\hat{١}$) = ق($\hat{٤}$): التوازي والتبادل الخارجي

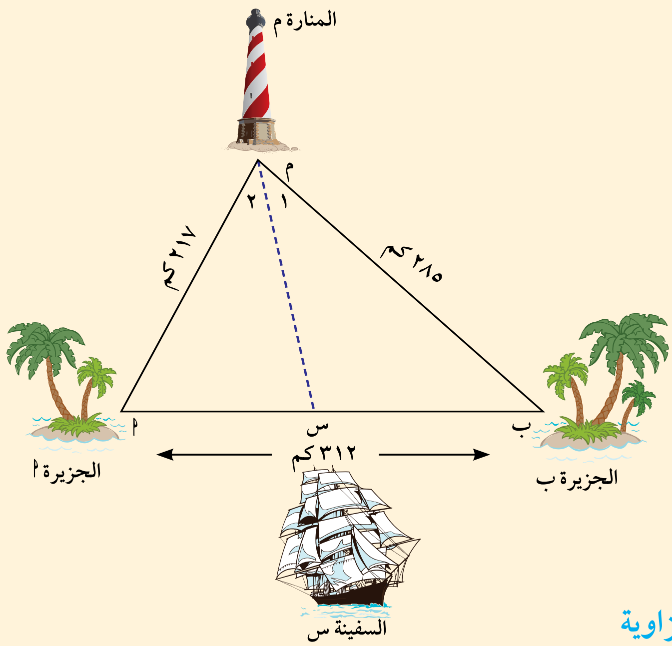
حاول أن تحل

٥ أب جـ مثلث حيث أب = ٦ سم، أجـ = ٨ سم، ثم رسم $\overleftarrow{\text{أد}}$ منصف ب$\hat{\text{أ}}$جـ ويقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ في د. إذا كان ب د = ٣ سم، أوجد جـ د.

مثال (٦)

في الشكل المرسوم تبيّن لمراقب موجود في المنارة (م) أن قياسي الزاويتين (١)، (٢) المكونتين من كل من الجزيرتين (أ)، (ب) والمنارة(م)والسفينة (س) متساويان.

أوجد بعد السفينة عن كل من الجزيرتين إذا كانت السفينة والجزيرتين على استقامة واحدة.



الحل:

المعطيات:

تكوّن المنارة والجزيرتان مثلثًا مأب أبعاده: مأ = ٢١٧،

م ب = ٢٨٥ ، أب = ٣١٢

المستقيم المار بالمنارة والسفينة ينصف الزاوية أمَ̂ب.

السفينة والجزيرتان على استقامة واحدة.

المطلوب:

إيجاد س أ ، س ب.

البرهان:

∵ $\overline{\text{م س}}$ منصف أمَ̂ب

∴ $\frac{\text{س أ}}{\text{س ب}} = \frac{\text{م أ}}{\text{م ب}}$ نظرية منصف الزاوية

$\frac{\text{س أ} + \text{س ب}}{\text{س ب}} = \frac{\text{م أ} + \text{م ب}}{\text{م ب}}$ من خواص التناسب

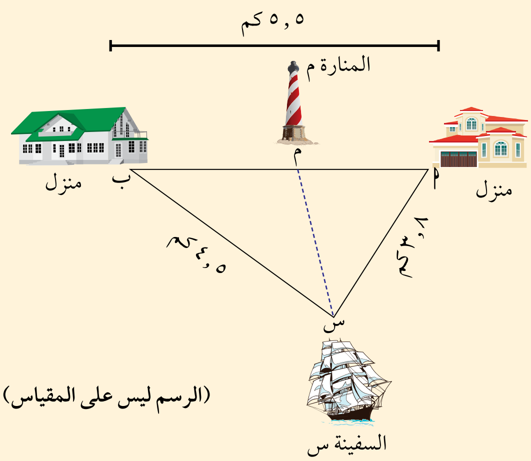
$\frac{٣١٢}{\text{س ب}} = \frac{٢١٧ + ٢٨٥}{٢٨٥}$

∴ $\text{س ب} = \frac{٣١٢ \times ٢٨٥}{٢١٧ + ٢٨٥} = ١٧٧$

$\text{س أ} = ٣١٢ - ١٧٧ = ١٣٥$

تبعد السفينة عن الجزيرة أ حوالى ١٣٥ كم وتبعد عن الجزيرة ب حوالى ١٧٧ كم.

حاول أن تحل



(الرسم ليس على المقياس)

٦ في الشكل المرسوم أوجد المسافة بين المنارة وكل من المنزلين إذا علمنا أن المنزلين والمنارة على استقامة واحدة، وأن المستقيم المار بالسفينة والمنارة ينصف الزاوية أسَ̂ب.

العلاقة بين محيطي شكلين متشابهين والعلاقة بين مساحتيهما
Relation Between Perimeters and Areas of Two Similar Figures

سوف تتعلم

- العلاقة بين محيطات الأشكال المتشابهة ونسبة التشابه
- العلاقة بين مساحات الأشكال المتشابهة ونسبة التشابه

عمل تعاوني

اعمل مع زميل لك لبحث العلاقة بين محيطي شكلين متشابهين والعلاقة بين مساحتيهما.

خطوات العمل:

١ على ورقة المربعات حدّد مستطيلًا أبعاده ٣ وحدات، ٤ وحدات.

٢ حدد ثلاثة مستطيلات مشابهة للمستطيل الأصلي.

٣ استخدم الرسم في ملء الجدول (١).

٤ استعن بالمعلومات التي حصلت عليها في الجدول (١) لتكمل الجدول (٢).

٥ ماذا تعني النسب التي حصلت عليها مقارنة بنسبة التشابه؟

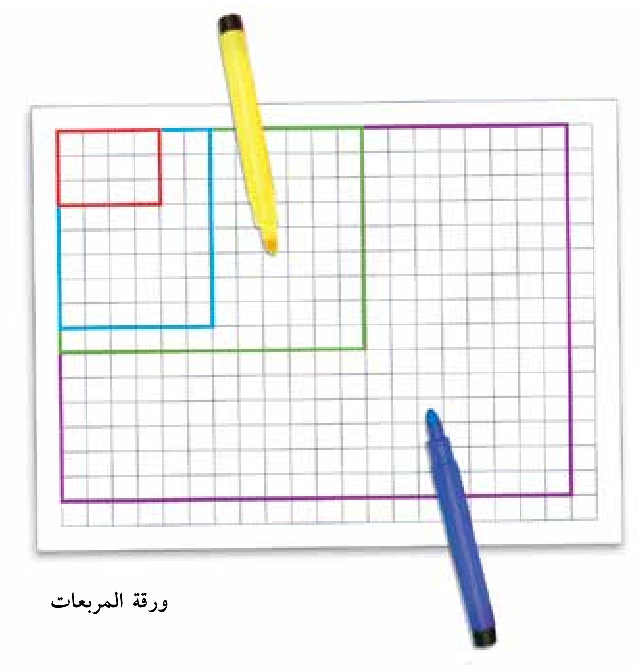
٦ قارن بين النتائج التي حصلت عليها والنتائج التي حصل عليها زملاؤك في الفصل.

جدول (١)

المستطيل	العرض	الطول	المحيط	المساحة
الأصلي				
I				
II				
III				

جدول (٢)

المستطيل	النسبة بين العرضين	النسبة بين الطولين	النسبة بين المحيطين	النسبة بين المساحتين	نسبة التشابه
	١:٢	١:٢			٢
I: الأصلي					
II: الأصلي					
III: الأصلي					



ورقة المربعات

نظرية (١)

نظرية العلاقة بين محيطات أو مساحات الأشكال المتشابهة

Relation Theory Between Perimeters or Areas of Similar Figures

إذا كانت نسبة التشابه لأي شكلين متشابهين هي $\frac{أ}{ب}$ فإن:

١ النسبة بين محيطي الشكلين = $\frac{أ}{ب}$ = نسبة التشابه.

٢ النسبة بين مساحتي الشكلين = $\frac{أ^٢}{ب^٢}$ = $\left(\frac{أ}{ب}\right)^٢$ = مربع نسبة التشابه.

معلومة مفيدة:

مساحة شبه المنحرف = $\frac{\text{مجموع طولي القاعدتين المتوازيتين}}{٢}$ × الارتفاع

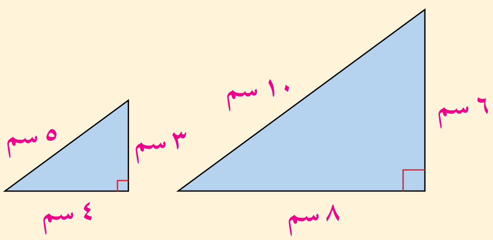
نسبة التشابه بين أي دائرتين هي النسبة بين طولي نصفي قطريهما.

مثال (١)

تحقق من صحة النظرية السابقة بإيجاد نسبة التشابه والنسبة بين محيطي ثمّ بين مساحتي:

أ المثلثين المتشابهين.

ب شبهي المنحرف المتشابهين.



المعطيات:

مثلثان قائمي الزاوية متشابهان، أطوال أضلاعهما ٣ سم ، ٤ سم ، ٥ سم و٦ سم ، ٨ سم ، ١٠ سم بالترتيب .

المطلوب:

إيجاد نسبة التشابه.

إيجاد النسبة بين محيطي المثلثين وبين مساحتيهما.

البرهان:

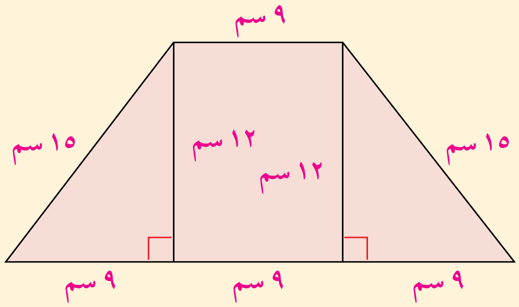
أ نسبة التشابه = النسبة بين طولي أي ضلعين متناظرين = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$

النسبة بين محيطي المثلثين = $\frac{١٢}{٢٤}$ = $\frac{١}{٢}$ = نسبة التشابه.

النسبة بين مساحتي المثلثين = $\frac{\frac{١}{٢} \times ٣ \times ٤}{٢٤}$ = $\frac{٦}{٢٤}$ = $\frac{١}{٤}$ = $\left(\frac{١}{٢}\right)^٢$ = مربع نسبة التشابه.

ب المعطيات:

شبهي منحرف متطابقي الضلعين، أطوال أضلاعهما ٦ سم، ١٠ سم، ١٨ سم، ١٠سم و ٩سم، ١٥سم، ٢٧سم، ١٥سم بالترتيب.



المطلوب: إيجاد نسبة التشابه.

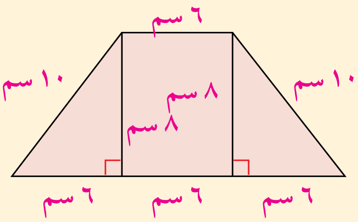
إيجاد النسبة بين محيطي شبهي المنحرف والنسبة بين مساحتيهما.

البرهان:

نسبة التشابه = $\frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$

النسبة بين محيطي شبهي المنحرف = $\frac{٢٠ + ١٨ + ٦}{٩ + ٢٧ + ٣٠}$

= $\frac{٤٤}{٦٦} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$ = نسبة التشابه.



النسبة بين مساحتي شبهي المنحرف = $\frac{١٢ \times ٨}{١٨ \times ١٢}$

= $\frac{٨}{١٨} = \frac{٤}{٩} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢}$ = مربع نسبة التشابه.

حاول أن تحل

١ لدينا مثلثان متشابهان بنسبة $\frac{٢}{٣}$. إذا كان محيط المثلث الأكبر ٤٥ سم، فأوجد محيط المثلث الأصغر.

مثال (٢)

مضلعان متشابهان أحدهما أطوال أضلاعه٣ سم، ٥ سم، ٦ سم، ٨ سم، ١٠ سم والآخر محيطه ٤٨ سم، أوجد أطوال أضلاع المضلع الثاني.

المعطيات: مضلعان متشابهان

أطوال أضلاع الأول: ٣ سم، ٥ سم، ٦ سم، ٨ سم، ١٠ سم.

محيط المضلع الثاني = ٤٨ سم.

المطلوب: إيجاد أطوال أضلاع المضلع الثاني.

البرهان:

محيط المضلع الأول = ٣ + ٥ + ٦ + ٨ + ١٠ = ٣٢ سم.

النسبة بين محيطي المضلعين = $\frac{٣٢}{٤٨} = \frac{٢}{٣}$.

لتكن أ، ب، جـ، د، هـ على التوالي أطوال أضلاع المضلع الثاني المناظرة للأطوال ٣، ٥، ٦، ٨، ١٠ في المضلع الأول.

النسبة بين ضلعين متناظرين = النسبة بين محيطي المضلعين.

$\frac{٣}{أ} = \frac{٢}{٣}$ ∴ أ = ٤,٥ سم $\frac{٥}{ب} = \frac{٢}{٣}$ ∴ ب = $\frac{١٥}{٢}$ = ٧,٥ سم

$\frac{٦}{جـ} = \frac{٢}{٣}$ ∴ جـ = ٩ سم $\frac{٨}{د} = \frac{٢}{٣}$ ∴ د = ١٢ سم

$\frac{١٠}{هـ} = \frac{٢}{٣}$ ∴ هـ = ١٥ سم

حاول أن تحل

٢ مضلعان متشابهان أحدهما أطوال أضلاعه ٣ سم، ٥ سم، ٦ سم، ٨ سم، ١٠ سم والآخر ينقص محيطه ٨ سم عن محيط المضلع الأول. أوجد أطوال أضلاع المضلع الثاني.

مثال (٣)

ليكن لدينا دائرتان م، ن: الأولى طول نصف قطرها $نق_١$، والثانية طول نصف قطرها $نق_٢$.

أوجد النسبة بين محيطي الدائرتين والنسبة بين مساحتيهما.

المعطيات:

دائرتان طول نصف قطر الأولى $نق_١$ وطول نصف قطر الثانية $نق_٢$.

المطلوب:

إيجاد النسبة بين محيطي الدائرتين والنسبة بين مساحتيهما.

البرهان:

نسبة التشابه = $\frac{نق_١}{نق_٢}$

النسبة بين المحيطين = $\frac{٢\pi نق_١}{٢\pi نق_٢} = \frac{نق_١}{نق_٢}$

النسبة بين المساحتين = $\frac{\pi (نق_١)^٢}{\pi (نق_٢)^٢} = \frac{(نق_١)^٢}{(نق_٢)^٢} = \left(\frac{نق_١}{نق_٢}\right)^٢$

حاول أن تحل

٣ دائرتان م، ن، طول نصف قطر الأولى = ٥ سم وطول نصف قطر الثانية = ٨ سم. أوجد النسبة بين محيطي الدائرتين والنسبة بين مساحتيهما.

النسبة بين محيطي دائرتين تساوي نسبة التشابه بين الدائرتين.

النسبة بين مساحتي دائرتين تساوي مربع نسبة التشابه بين الدائرتين.

مثال (٤)

لدينا شكلان رباعيان متشابهان بنسبة تشابه $\frac{٥}{٤}$. إذا كانت مساحة الشكل الرباعي الأكبر ٣٠ سم^٢، فما مساحة الشكل الرباعي الأصغر؟

المعطيات: رباعيان متشابهان.

نسبة التشابه = $\frac{٥}{٤}$ مساحة الشكل الرباعي الأكبر = ٣٠سم^٢

المطلوب: إيجاد مساحة الشكل الرباعي الأصغر.

البرهان: النسبة بين المساحتين = مربع نسبة التشابه

$$\frac{\text{مساحة الشكل الرباعي الأكبر}}{\text{مساحة الشكل الرباعي الأصغر}} = \left(\frac{٥}{٤}\right)^٢ = \frac{٢٥}{١٦}$$

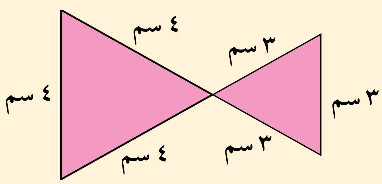
$$\frac{٣٠}{\text{مساحة الشكل الرباعي الأصغر}} = \frac{٢٥}{١٦}$$

مساحة الشكل الرباعي الأصغر = $\frac{٣٠ \times ١٦}{٢٥}$ = ١٩,٢ سم^٢.

حاول أن تحل

٤ النسبة بين مساحتي مضلعين متشابهين هي $\frac{١٦}{٩}$. ما محيط المضلع الأكبر إذا كان محيط المضلع الأصغر ٢٤ سم؟

مثال (٥) **تطبيقات حياتية**



رسم يوسف ربطة عنق على شكل عقدة فراشة. لاحظ أن قسمي الربطة غير متطابقين. أوجد النسبة المئوية لمساحة المنطقة التي عليه أن يقطعها من المثلث الأكبر ليصبح القسمان متطابقين؟

الحل:

طريقة أولى للحل:

المثلثان كل منهما متطابق الأضلاع.

∴ المثلثان متشابهان

نسبة التشابه = $\frac{٣}{٤}$

∴ النسبة بين مساحتي المثلثين = $\left(\frac{٣}{٤}\right)^٢ = \frac{٩}{١٦}$

إذا فرضنا أن مساحة Δ الأكبر = س

فإن مساحة Δ الأصغر = $\frac{٩س}{١٦}$

وعليه يكون الفرق بين المساحتين = س − $\frac{٩س}{١٦}$ = $\frac{٧}{١٦}$ س

النسبة المئوية لمساحة المنطقة المطلوبة = $\frac{\frac{٧}{١٦}س}{س}$ × ١٠٠٪ = ٤٣,٧٥٪.

يجب أن يقطع ٤٣,٧٥٪ من مساحة المثلث الأكبر.

طريقة ثانية للحل:

مساحة المثلث الأصغر = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولي أي ضلعين × جيب الزاوية المحددة بهما

= $\frac{١}{٢}$ × ٣ × ٣ × جا ٦٠° لماذا؟

= $\frac{٩\sqrt{٣}}{٤}$ وحدة مربعة

مساحة المثلث الأكبر = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٤ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ وحدة مربعة

= ٤$\sqrt{٣}$ وحدة مربعة

الفرق بين مساحتي المثلثين = ٤$\sqrt{٣}$ − $\frac{٩\sqrt{٣}}{٤}$ وحدة مربعة

= $\frac{٧\sqrt{٣}}{٤}$ وحدة مربعة

النسبة المئوية للفرق بين المساحتين = $\left(\frac{٧\sqrt{٣}}{٤} \div ٤\sqrt{٣}\right)$ × ١٠٠٪

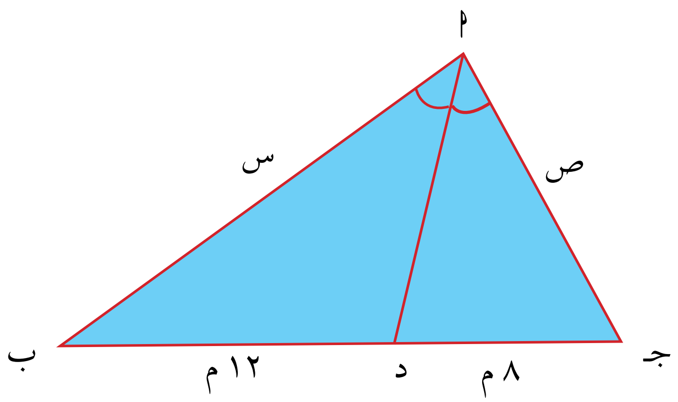
= ٤٣,٧٥٪

حاول أن تحل

٥ هل تبقى النسبة المئوية دون تغيير إذا كان طول ضلع المثلث الأصغر ٤ سم، وطول ضلع المثلث الأكبر ٥ سم؟ فسّر إجابتك.

المرشد لحل المسائل

١ محيط المثلث المقابل يساوي ٥٠ مترًا. $\overline{\text{أد}}$ منصف داخلي للزاوية أ. أوجد قيم س، ص.



ما الذي أعرفه؟ يجب عرض المعطيات

محيط المثلث أب جـ يساوي ٥٠ مترًا، أي أن:

أب + أجـ + ب جـ = ٥٠ م.

ثم ب د = ١٢ م، دجـ = ٨ م أي أن:

ب جـ = ١٢ + ٨ = ٢٠

$\overline{\text{أد}}$ منصف داخلي للزاوية أ.

ما الذي أريد معرفته؟

قيمة س، قيمة ص.

كيف سأحل المسألة؟

استخدم المعطيات، اكتب:

$$\begin{cases} \text{س + ص + ٢٠ = ٥٠} \\ \dfrac{\text{س}}{\text{ص}} = \dfrac{\text{١٢}}{\text{٨}} = \dfrac{\text{٣}}{\text{٢}} \end{cases}$$

أي: س + ص = ٣٠

أي: س = $\dfrac{\text{٣ص}}{\text{٢}}$

$$\begin{cases} \text{س + ص = ٣٠} \\ \text{س} = \dfrac{\text{٣ص}}{\text{٢}} \end{cases}$$

أوجد حل نظام المعادلتين باستخدام طريقة التعويض أحصل على:

$\dfrac{\text{٣ص}}{\text{٢}}$ + ص = ٣٠ ومنه ص = ١٢ وبالتالي س = ١٨

أي أن ص = ١٢ م، س = ١٨ م.

سوف أتحقق من صحة الحل:

س + ص + ٢٠ = ١٨ + ١٢ + ٢٠ = ٥٠ محيط المثلث يساوي ٥٠ م.

معلومة مفيدة:

يمكنك استكمال الحل بطرق أخرى ومنها:

$\dfrac{\text{س}}{\text{ص}} = \dfrac{\text{١٢}}{\text{٨}}$ ، $\dfrac{\text{س + ص}}{\text{ص}} = \dfrac{\text{١٢ + ٨}}{\text{٨}}$

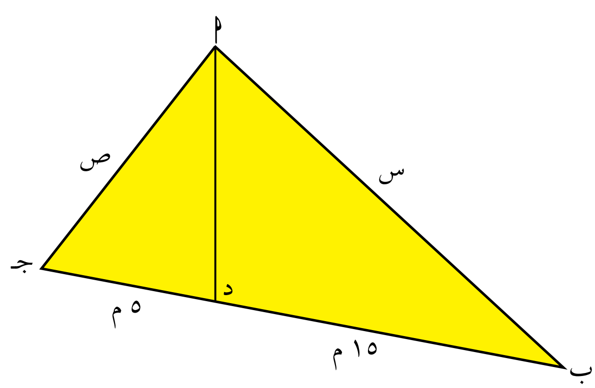
$\dfrac{\text{٣٠}}{\text{ص}} = \dfrac{\text{٢٠}}{\text{٨}}$

ومنها ص = ١٢ ∴ س = ١٨

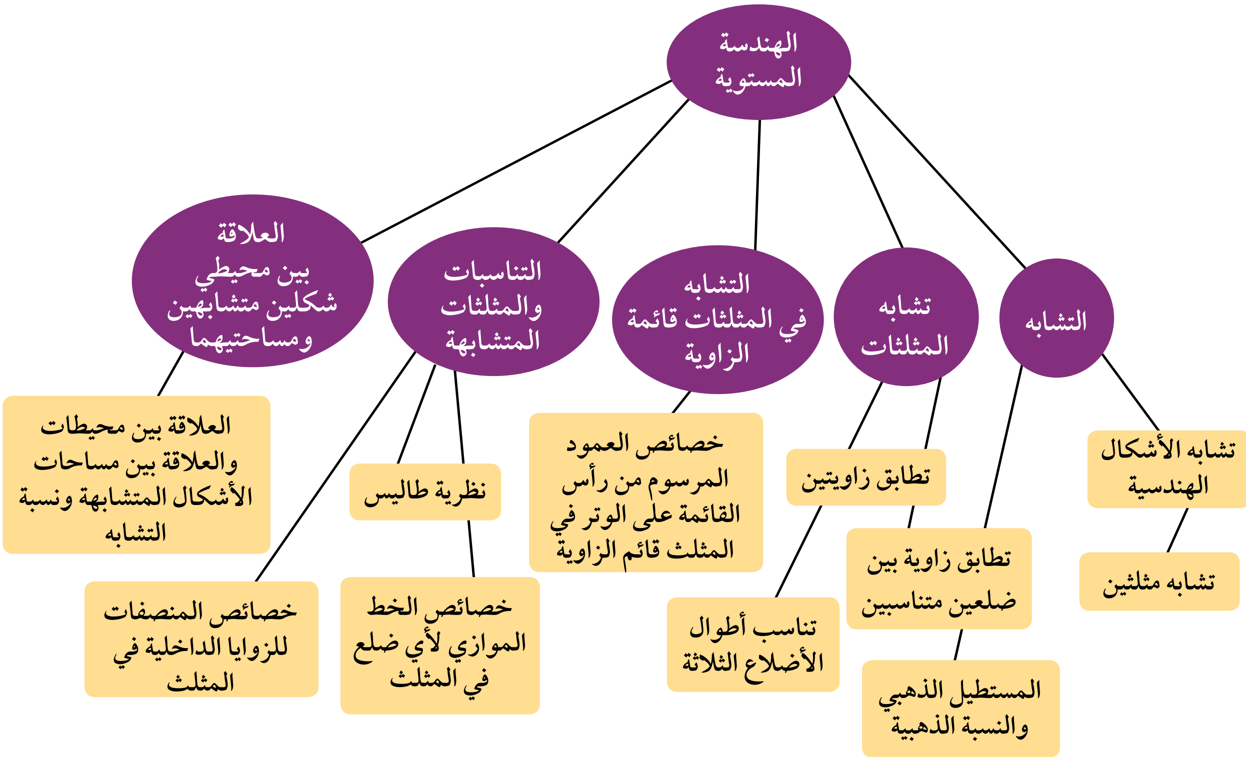
مسألة إضافية

محيط المثلث أدناه يساوي ٤٤ مترًا، $\overline{\text{أد}}$ منصف داخلي للزاوية أ.

أوجد قيم س، ص.



مخطط تنظيمي للوحدة الرابعة



ملخص

– يكون شكلان متشابهين عندما يكون لهما الشكل نفسه وأحدهما تكبيرًا أو تصغيرًا للآخر أو متطابقًا معه.

– يوجد في شكلين متشابهين أزواج من الزوايا متساوية القياس وأزواج من الأضلاع متناسبة الأطوال.

– يستخدم التناسب في الأشكال المتشابهة للتطبيق على مقياس الرسم.

– عند تطابق زاويتين في مثلث مع زاويتين في مثلث آخر يكون المثلثان متشابهين.

– عند تطابق زاوية في مثلث مع زاوية في مثلث آخر وتناسب طولي الضلعين المحددين لهاتين الزاويتين، يكون المثلثان متشابهين.

– عند تناسب أطوال الأضلاع الثلاثة المتناظرة في مثلثين، يكون المثلثان متشابهين.

– يقسم العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر، المثلث قائم الزاوية إلى مثلثين متشابهين وكل منهما مشابه للمثلث الأصلي.

– عندما يوازي مستقيم أحد أضلاع مثلث ويقطع ضلعيه الآخرين، فإنه يقسم هذين الضلعين إلى أجزاء أطوالها متناسبة.

– تنص نظرية طاليس على أنه إذا قطع مستقيمان ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر مع بعضها بعضًا، فإن أطوال القطع المستقيمة الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر.

– يقسم المنصف للزاوية الداخلية في المثلث الضلع المقابل لها إلى جزئين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين للمثلث.

– إذا كانت نسبة التشابه بين مضلعين متشابهين هي $\frac{أ}{ب}$ فإن:

(١) النسبة بين محيطي مضلعين = $\frac{أ}{ب}$

(٢) النسبة بين مساحتي مضلعين = $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{٢}$

– نسبة التشابه بين محيطي أي دائرتين هي النسبة بين طولي نصفي قطريهما.

الوحدة الخامسة

المتتاليات (المتتابعات)
Sequences

مشروع الوحدة: استخدام المتتابعات في الرسوم الهندسية والتصاميم.

١ مقدمة المشروع: يدعى كل حد في متتالية فيبوناتشي عدد فيبوناتشي. في العديد من النباتات والزهور والثمار عدد البتلات هو من أعداد فيبوناتشي.

٢ الهدف: دراسة بعض أنواع النباتات والزهور والثمار وتبيان توافق عدد بتلاتها مع أعداد فيبوناتشي.

٣ اللوازمُ: أوراق رسم بياني، آلة حاسبة، صور: زنابق، قزحية زهور على شكل نجمة، مخروط صنوبر، عباد الشمس (تباع الشمس).

٤ أسئلة حول التطبيق:

أ ابحث عن إحدى النباتات التي يتوافق نمو ساقها مع متتالية فيبوناتشي. ضع مخططًا وجدولًا يبينان هذا التوافق.

ب ابحث عن بعض الزنابق وعشب الحوزان والقزحية والأقحوانات. اعرض هذه الصور وبين كيف أن عدد بتلات كل منها هو عدد فيبوناتشي.

ج ابحث عن صورة لزهرة الآلام (PASSI FLORA) واعرض صورتها من الجهتين الأمامية والخلفية، ثم بين أن أعداد مجموعتي بتلاتها الخضراء هي أعداد فيبوناتشي. كذلك من الجهة الخلفية، بيّن العلاقة بين الأوراق الخضراء والبتلات ومتتالية فيبوناتشي.

د اعرض صورة لزهرة إشنسا فرفرية Echinacea Purpura وصورة لقرص عباد الشمس Sun FLower. بين توافق المنحنيات الحلزونية مع أعداد فيبوناتشي.

هـ اجمع بعض مخاريط الصنوبر. عد الحلزونات في الاتجاهين في كل مخروط. ماذا تلاحظ؟ وماذا عن ثمرة الأناناس؟

٥ التقرير: ضع تقريرًا مفصلًا تبيّن فيه كيف استفدت منَ المتتاليات للإجابة عن الأسئلة فيما تنفذ المشروع.


عباد الشمس (تباع الشمس)


كوز صنوبر


أناناس

دروس الوحدة

الأنماط الرياضية والمتتاليات (المتتابعات)	المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
٥-١	٥-٢	٥-٣

الوحدة الخامسة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت إيجاد قيم دوال بمعلومية المتغير.
- استخدمت بيان القطع المكافئ لرسم بيان دوال تربيعية.
- تعلمت تبسيط الكسور المركبة.
- تعلمت تبسيط الجذور التربيعية.

أضف إلى معلوماتك

في العام ١٢٠٢ أصدر فيبوناتشي كتابه "ليبري أباتشي" وعرض فيه المتتالية:
٠، ١، ١، ٢، ٣، ٥، ٨، ١٣، ٢١، ...

(متتالية فيبوناتشي) حيث كل حد هو ناتج جمع الحدين السابقين:

$$ح_{ن} = ح_{ن-١} + ح_{ن-٢} : ن \geqslant ٣$$

لهذه المتتالية تطبيقات مهمة وكثيرة في مجالات متعددة، منها علم الأحياء وعلم النبات.

في متتالية فيبوناتشي، يقترب ناتج قسمة كل حد على الحد الذي يسبقه من العدد الذهبي ١,٦١٨.

ماذا سوف تتعلم؟

- الأنماط الرياضية.
- الحد النوني للمتتالية.
- المتتاليات الحسابية.
  الحد النوني ومجموع ن حدًّا الأولى من حدود المتتالية الحسابية.
- المتتاليات الهندسية.
  الحد النوني ومجموع ن حدًّا الأولى من حدود المتتالية الهندسية.

المصطلحات الأساسية

المتتالية (المتتابعة) – حد المتتالية – أساس المتتالية – المتتالية الحسابية – رتبة الحد – الأوساط الحسابية – المتتالية الهندسية – أساس المتتالية الهندسية – الأوساط الهندسية

٥–١

الأنماط الرياضية والمتتاليات (المتتابعات)

Mathematical Patterns and Sequences

سوف تتعلم

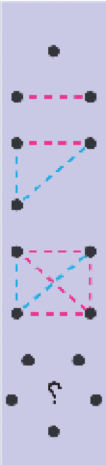
- النمط الرياضي
- المتتالية الحقيقية
- الحد النوني للمتتالية

عمل تعاوني

افترض أن كل طالبين من الفصل تجري بينهما مكالمة هاتفية.

ما أقل عدد من المكالمات الهاتفية التي يمكنك الحصول عليها بحيث يتحدث كل طالب من فصلك مع الآخر هاتفيًا؟

ثم أجب عن الأسئلة التالية باستخدام الشكل المجاور:



١ كم مكالمة يمكن أن تجري بين طالبين؟

٢ كم مكالمة يمكن أن تجري بين ٣ طلاب أو ٤ طلاب؟

٣ استخدم الشكل المجاور لتحديد عدد المكالمات الممكنة بين ٥ طلاب، ثم أكمل الجدول التالي:

عدد الطلاب (ن)	١	٢	٣	٤	٥
عدد المكالمات (م)	٠	١			

٤ **النمط الرياضي**: أي من الصيغ التالية تمثل النمط الموجود في الجدول السابق؟

أ م = ٢ن – ٣ ب م = ن (ن – ١) – ٥ ج م = $\frac{\text{ن (ن – ١)}}{٢}$

حيث ن عدد الطلاب، م عدد المكالمات.

٥ أوجد عدد المكالمات م اللازم لمجموعة من ٧ طلاب مستخدمًا الصيغة المناسبة.

٦ ما عدد المكالمات اللازم ليتحدث كل طلاب صفك مع بعضهم بعضًا؟

مثال (١)

سقطت كرة من ارتفاع ١٢,٥ مترًا عن سطح الأرض وكانت ترتفع إلى ٨٠٪ من الارتفاع السابق في كل مرة نتيجة اصطدامها بالأرض. احسب ارتفاع الكرة بعد الاصطدام الرابع.

الحل:

الارتفاع الأصلي ١٢,٥ م.

- بعد الاصطدام الأول بالأرض، يكون ارتفاع الكرة: ٠,٨ × ١٢,٥ = ١٠ أمتار.
- بعد الاصطدام الثاني بالأرض، يكون ارتفاع الكرة: ٠,٨ × ١٠ = ٨ أمتار.
- بعد الاصطدام الثالث بالأرض، يكون ارتفاع الكرة: ٠,٨ × ٨ = ٦,٤ أمتار.
- بعد الاصطدام الرابع بالأرض، يكون ارتفاع الكرة: ٠,٨ × ٦,٤ = ٥,١٢ أمتار.

وبالتالي يكون الارتفاع ٥,١٢ م بعد الاصطدام الرابع للكرة بالأرض.

لاحظ تتابع الارتفاعات (١٢,٥ ، ١٠ ، ٨ ، ٦,٤ ، ٥,١٢ ، ...)

حاول أن تحل

١ سقطت كرة من ارتفاع ١٠ أمتار، وكانت ترتفع إلى ٦٠٪ من الارتفاع السابق في كل مرة نتيجة اصطدامها بالأرض. احسب ارتفاع الكرة بعد الاصطدام الثالث.

هل تعلم:

ليس من الضروري أن تكون جميع حدود المتتالية مختلفة. فمثلًا المتتابعة ٢، ٢، ٢، ٢... حيث $ح_ن$ = ٢ جميع حدودها متساوية وهذه تسمى متتابعة ثابتة.

معلومة رياضية:

يستخدم الرمز ($ح_ن$) للتعبير عن المتتابعة. بينما يعبر $ح_ن$ عن الحد النوني لهذه المتتابعة.

تدريب(١)

صف النمط التالي ثم أكمل بكتابة الحدود الثلاثة التالية:

أ ٢، ٤، ٦، ٨، —، —، —

ب ٢٤٣، ٨١، ٢٧، ٩، —، —، —

مثل الأنماط الرياضية السابقة تسمى متتابعات أو متتاليات ويمكننا إيجاد الحدود التالية باتباع قاعدة النمط.

اعتبر متتالية الأعداد في (أ):

الحد الأول	الحد الثاني	الحد الثالث	الحد الرابع	...	الحد النوني
↓	↓	↓	↓	↓	↓
$ح_١$	$ح_٢$	$ح_٣$	$ح_٤$		$ح_ن$

$ح_١$ = ٢، $ح_٢$ = ٤، $ح_٣$ = ٦، $ح_٤$ = ٨، ...، ...

ويرمز إلى الحد النوني في المتتابعة بالرمز $ح_ن$ حيث ن ∈ $صـ_+$ وهي تعبر عن رتبة الحد.

تعريف:

المتتالية الحقيقية هي دالة حقيقية مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة أو مجموعة جزئية منها مرتبة على الصورة {١، ٢، ٣، ٤، ...، م} ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية ح.

ملاحظة: يمكن التعبير عن المتتالية بكتابة حدودها ($ح_١$، $ح_٢$، $ح_٣$، ...)

ويمكن الحصول على حدود المتتالية من صور عناصر مجال المتتالية.

مثال (٢)

لتكن الدالة ت: {١، ٢، ٣، ٤، ٥} ← ح حيث ت(ن) = ن٢

بين في ما إذا كانت هذه الدالة متتالية، ثم أوجد حدودها.

الحل:

ت دالة مجالها مجموعة جزئية مرتبة من ص+ وتبدأ بالعدد ١ وبالصورة {١، ٢، ٣، ...، م}.

∴ ت متتالية.

حدود المتتالية هي: ١، ٤، ٩، ١٦، ٢٥

ن	١	٢	٣	٤	٥
ت(ن)	١	٤	٩	١٦	٢٥

حاول أن تحل

٢ لتكن الدالة ت : {١، ٢، ٣، ٤} ← ح حيث ت(ن) = ن٣ + ١

بيّن في ما إذا كانت هذه الدالة متتالية، ثم أوجد حدودها.

تسمى المتتالية في مثال (٢) متتالية منتهية لأنه يمكن حصر عدد حدودها.

مثال (٣)

لتكن ت: ص+ ← ح دالة معرفة بالقاعدة ت (ن) = $\frac{١}{ن}$.

بين في ما إذا كانت ت متتالية، ثم اكتب المتتالية مكتفيًا بالحدود الثلاثة الأولى منها.

الحل:

ت دالة مجالها ص+ ∴ ت متتالية.

ت(١) = ١، ت(٢) = $\frac{١}{٢}$، ت(٣) = $\frac{١}{٣}$.

أي أنه يمكن كتابة المتتالية على الصورة $\left(١، \frac{١}{٢}، \frac{١}{٣}، ...\right)$

حاول أن تحل

٣ لتكن ت: ص+ ← ح دالة معرفة بالقاعدة ت (ن) = $\frac{ن}{ن + ١}$.

بين في ما إذا كانت ت متتالية، ثم أوجد الحدود الثلاثة الأولى منها.

تسمى المتتالية في مثال (٣) متتالية غير منتهية لأن مجالها $ص_+$.

الصيغة الارتدادية Recursive Formula

تعرف الصيغة الارتدادية حدود المتتالية بربط كل حد بالحد (أو بالحدود) الذي يسبقه مباشرة ويمكن اعتبارها **حد عام للمتتالية**.

في مثال (١) كان النمط ارتداديًّا لأن ارتفاع الكرة بعد كل اصطدام بالأرض يساوي ٨٠٪ من الارتفاع الذي يسبقه مباشرة.

الصيغة الارتدادية التي تصف ارتفاع الكرة هي $ح_ن = ٠,٨ \times ح_{ن-١}$ مع $ح_١ = ١٢,٥$ حيث ن عدد طبيعي أكبر من ١.

مثال (٤)

أ) صف النمط الذي يسمح بإيجاد الحد التالي من المتتالية (٦، ١، −٤، −٩، ...).

ب) أوجد الحدين الخامس والسادس ($ح_٥$، $ح_٦$) من هذه المتتالية.

الحل:

أ) نحصل على أي حد من المتتالية بطرح ٥ من الحد الذي يسبقه مباشرة.

١ = ٦ − ٥ ، −٤ = ١ − ٥ ، −٩ = −٤ − ٥ ∴ النمط ارتدادي

∴ الصيغة الارتدادية هي: $ح_ن = ح_{ن-١} - ٥$ مع $ح_١ = ٦$

ب) بما أن $ح_٤ = -٩$، $ح_٥ = ح_٤ - ٥ = -٩ - ٥ = -١٤$،

$ح_٦ = ح_٥ - ٥ = -١٤ - ٥ = -١٩$.

ملاحظة:

في كل متتالية معرفة بالصيغة الارتدادية، يجب إعطاء الحد الأول (أو الحدود الأولى).

حاول أن تحل

٤ اكتب الصيغة الارتدادية (الحد العام) مما يلي ثم أوجد الحد التالي:

أ) (−٢، −١، ٠، ١، ٢، ...)

ب) (٤٣، ٤١، ٣٩، ٣٧، ٣٥، ...)

ج) (٤٠، ٢٠، ١٠، ٥، $\frac{٥}{٢}$، ...)

د) ($\frac{١}{٢}$، $\frac{١}{٤}$، $\frac{١}{٨}$، $\frac{١}{١٦}$، $\frac{١}{٣٢}$، ...)

الصيغة الصريحة (الحد النوني للمتتالية) Explicit Formula

يمكنك أحيانًا معرفة قيمة الحد في متتالية دون معرفة الحد الذي يسبقه. بدلًا منه يمكنك استخدام عدد الحدود لحساب قيمة الحد. الصيغة التي تعبر عن الحد النوني بدلالة ن تسمى **صيغة صريحة**.

مثال (٥) الهندسة

يمثل الجدول التالي أطوال أضلاع المربعات ومحيطاتها.

الحد	$ح_١$	$ح_٢$	$ح_٣$	$ح_٤$	$ح_٥$	$ح_٦$	$ح_٧$
طول ضلع المربع	١	٢	٣	٤	٥	٦	...
المحيط	٤	٨	١٢	١٦	٢٠	٢٤	...

أ في كل متتالية، أوجد الحد التالي ($ح_٧$) والحد الرابع والعشرين ($ح_{٢٤}$).

ب اكتب صيغة صريحة لكل متتالية.

الحل:

أ في المتتالية الخاصة بأطوال أضلاع المربع، كل حد يساوي قيمة رتبته، وبالتالي $ح_٧ = ٧$، $ح_{٢٤} = ٢٤$.

في المتتالية الخاصة بالمحيط، كل حد يساوي أربعة أمثال قيمة رتبته، وبالتالي $ح_٧ = ٤ \times ٧ = ٢٨$.

$ح_{٢٤} = ٤ \times ٢٤ = ٩٦$.

ب الصيغة الصريحة للمتتالية الخاصة بأطوال أضلاع المربع هي $ح_ن = ن$،

والصيغة الصريحة الخاصة بالمحيط هي: $ح_ن = ٤ن$.

حاول أن تحل

٥ أ في المثال (٥) اكتب الحدود الستة الأولى للمتتالية التي تبين مساحة المربع.

ب اكتب الصيغة الصريحة لهذه المتتالية.

٦ اكتب الصيغة الصريحة (الحد النوني) لكل متتالية في ما يلي، ثم أوجد $ح_{١٢}$.

أ (٤، ٧، ١٠، ١٣، ١٦، ...)

ب (٣، ٧، ١١، ١٥، ١٩، ...)

ج $\left(-٢\frac{١}{٢}، -١\frac{١}{٢}، -\frac{١}{٢}، ...\right)$

مثال (٦)

اكتب الصيغة الصريحة (الحد النوني) للمتتالية (٢، ٥، ١٠، ١٧، ٢٦، ...).

الحل:

$ح_{١} = ٢ = ١^{٢} + ١$ $\quad$ $ح_{٢} = ٥ = ٢^{٢} + ١$

$ح_{٣} = ١٠ = ٣^{٢} + ١$ $\quad$ $ح_{٤} = ١٧ = ٤^{٢} + ١$

$ح_{٥} = ٢٦ = ٥^{٢} + ١$

الصيغة الصريحة هي $ح_{ن} = ن^{٢} + ١$.

حاول أن تحل

٧ اكتب الصيغة الصريحة (الحد النوني) للمتتالية (٠، ٣، ٨، ١٥، ٢٤، ...).

مثال (٧) صنع متتالية

لإيجاد ضلع من «رقعة كوش» **Koch snowflake**، استبدل كل  .

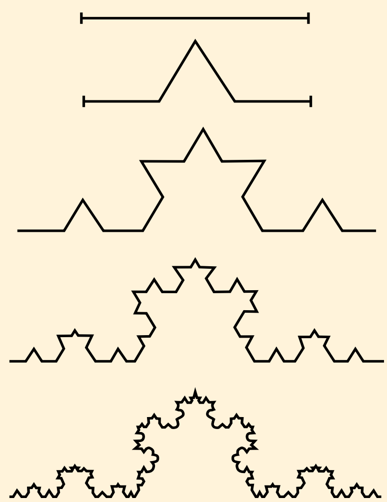
أ ارسم الأشكال الأربعة الأولى من النمط.

ب اكتب عدد القطع في كل شكل من أ أعلاه على صورة متتالية.

جـ توقع الحد التالي من المتتالية ثمّ فسّر اختيارك.

الحل:

أ



ب في الشكل الأول قطعة واحدة (١)

في الشكل الثاني ٤ قطع (٤)

في الشكل الثالث ١٦ قطعة (١٦)

في الشكل الرابع ٦٤ قطعة (٦٤)

∴ المتتالية (١، ٤، ١٦، ٦٤، ...)

جـ كل حد يساوي ٤ أمثال الحد السابق.

الحد التالي = ٤ × ٦٤ = ٢٥٦. يوجد ٢٥٦ قطعة في الشكل التالي أي الحد الخامس من المتتالية = ٢٥٦.

حاول أن تحل

٨ صف كل نمط وأوجد الحدود الثلاثة التالية.

أ ٢٧، ٣٤، ٤١، ٤٨، ...

ب ٢٤٣، ٨١، ٢٧، ٩، ...

مثال (٨) **متتالية فيبوناتشي** Fibonacci Sequence

الصيغة الارتدادية لمتتالية فيبوناتشي هي: $ف_ن = ف_{ن-٢} + ف_{ن-١}$ حيث $ف_١ = ١$، $ف_٢ = ١$.
استخدم الصيغة الارتدادية لإيجاد الحدود السبعة الأولى من المتتالية ثم اكتب المتتالية.

الحل:

$ف_١ = ١$

$ف_٢ = ١$

$ف_٣ = ف_١ + ف_٢ = ١ + ١ = ٢$

$ف_٤ = ف_٢ + ف_٣ = ١ + ٢ = ٣$

$ف_٥ = ف_٣ + ف_٤ = ٢ + ٣ = ٥$

$ف_٦ = ف_٤ + ف_٥ = ٣ + ٥ = ٨$

$ف_٧ = ف_٥ + ف_٦ = ٥ + ٨ = ١٣$

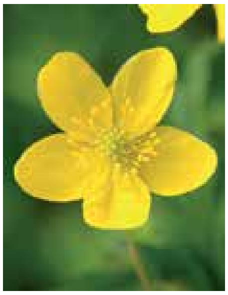
∴ متتالية فيبوناتشي هي (١، ١، ٢، ٣، ٥، ٨، ١٣، ...)

حاول أن تحل

٩ اختر عددين متساويين غير العدد ١، ١ واكتب الحدود الخمسة الأولى لمتتالية مشابهة لمتتالية فيبوناتشي.

غالبًا ما نجد أعداد فيبوناتشي في الطبيعة.

التريليوم
٣ بتلات: الحد الرابع



الحوذان الزاحف
٥ بتلات: الحد الخامس

زهرة البق
٨ بتلات: الحد السادس

بالنسبة إلى زهرة تباع الشمس، عند حساب عدد بتلاتها من الداخل إلى الخارج سنجدها: ١، ١، ٢، ٣، ٥، ٨،...

٥ – ٢

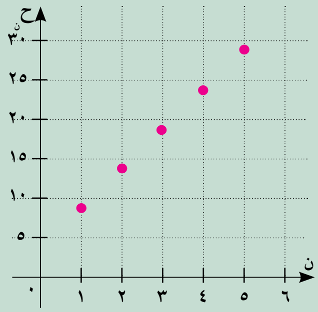
المتتالية الحسابية
Arithmetic Sequence

سوف تتعلم

- المتتالية الحسابية وأساسها
- الحد النوني للمتتالية الحسابية
- الأوساط الحسابية
- مجموع (ن) حدًّا الأولى من حدود المتتالية الحسابية

عمل تعاوني

$ح_١$ ← ٩
$ح_٢$ ← ١٤
$ح_٣$ ← ١٩
$ح_٤$ ← ٢٤
$ح_٥$ ← ٢٩



١ أ أوجد الحد السادس من المتتالية المبينة جهة اليسار.

ب اكتب صيغة للحد السادس مستخدمًا الحد الخامس.

جـ اكتب صيغة ارتدادية للمتتالية.

٢ في المتتالية (٩، ١٤، ١٩، ٢٤، ٢٩، ...)، ناتج طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرة هو مقدار ثابت.

أ كون متتاليتين، إحداهما بإضافة عدد ثابت والأخرى بطرح العدد الثابت نفسه من كل حد من حدود المتتالية الأصلية.

ب أوجد ناتج طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرة في كل متتابعة حصلت عليها. ماذا تلاحظ.

جـ ارسم في شكل بياني واحد العلاقة بين ن، $ح_ن$ للمتتالية الأصلية والمتتاليات التي حصلت عليها في ٢ – أ.
قارن بين الرسوم الثلاثة. ماذا تلاحظ؟

تعريف:

المتتالية (المتتابعة) الحسابية هي متتالية ناتج طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرة عددًا ثابتًا. يسمى هذا الناتج أساس المتتالية ويرمز إليه بالرمز ى. وعلى ذلك $ح_{ن+١} - ح_ن = ى$ أو $ح_{ن+١} = ح_ن + ى$.

أي أنه يمكن الحصول على أي حد من حدود المتتالية الحسابية (بعد الحد الأول) وذلك بإضافة ى إلى الحد الذي يسبقه مباشرة.

مثال (١)

بين أن المتتالية (٦، ١٢، ١٨، ٢٤) هي متتالية حسابية.

الحل:

١٢ – ٦ = ١٨ – ١٢ = ٢٤ – ١٨ = ٦

ناتج طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرة يساوي ٦. لاحظ أن أساس المتتالية ى = ٦.

∴ المتتالية حسابية.

حاول أن تحل

١ هل المتتاليتان التاليتان حسابيتان؟ إذا كانتا كذلك، فأوجد أساس كل منهما.

أ المتتالية (٢، ٥، ٧، ١٢)

ب المتتالية (٤٨، ٤٥، ٤٢، ٣٩)

مثال (٢)

إذا كان $ح_١ = ٥$، $ء = ٧$ في متتالية حسابية فاكتب الحدود الستة الأولى من المتتالية.

الحل:

$ح_١ = ٥$

$ح_٢ = ح_١ + ء = ٥ + ٧ = ١٢$

$ح_٣ = ح_٢ + ء = ١٢ + ٧ = ١٩$

الحدود الستة الأولى هي: ٥، ١٢، ١٩، ٢٦، ٣٣، ٤٠

وتكون المتتالية: $(ح_ن) = (٥، ١٢، ١٩، ٢٦، ٣٣، ٤٠، ...)$

حاول أن تحل

٢ إذا كان $ح_١ = ٤$، $ء = -٣$ في متتالية حسابية، فاكتب الحدود الستة الأولى من المتتالية.

الحد النوني للمتتالية الحسابية General Term of an Arithmetic Sequence

إذا كان الحد الأول في المتتالية الحسابية $(ح_ن)$ هو $ح_١$ وأساس المتتالية يساوي ء. واعتبرنا الحد النوني هو $ح_ن$،
فمن تعريف المتتالية الحسابية:

$ح_٢ = ح_١ + ء$

$ح_٣ = ح_١ + ٢ء$

$ح_٤ = ح_١ + ٣ء$

وبصفة عامة

$ح_ن = ح_١ + (ن - ١)ء$ لكل $ن \in ص_+$.

إذا كان الحد المعروف $ح_ك$، فإن $ح_ك = ح_١ + (ك - ١)ء$: $ك \in ص_+$

ومنه يكون $ح_ن - ح_ك = (ن - ك)ء$

أي أن $ح_ن = ح_ك + (ن - ك)ء$

وتكون الصورة العامة للمتتالية الحسابية:

$(ح_١، ح_١ + ء، ح_١ + ٢ء، ...، ح_١ + (ن - ١)ء، ...)$

لاحظ أن $ء = \frac{ح_ن - ح_ك}{ن - ك}$: $ن \neq ك$

ملاحظة:

ن تمثل رتبة الحد $ح_ن$ أما $ح_ن$ فتمثّل قيمة الحد، فمثلاً: $ح_٧ = ٣٥$ تعني أن قيمة الحد السابع تساوي ٣٥.

مثال (٣)

أوجد الحد العاشر والحد المائة من المتتالية الحسابية (٨، ٦، ٤، ...).

الحل:

$ح_١ = ٨$ ، $ى = ٦ - ٨ = -٢$

$ح_{١٠} = ح_١ + ٩ى$

$ح_{١٠} = ٨ + ٩ \times (-٢) = -١٠$ أي أن $ح_{١٠} = -١٠$

$ح_{١٠٠} = ح_١ + ٩٩ى$

$= ٨ + ٩٩ \times (-٢)$

$= -١٩٠$

أو

$ح_{١٠٠} = ح_{١٠} + (١٠٠ - ١٠)ى$

$= -١٠ + (١٠٠ - ١٠) \times (-٢)$

$= -١٩٠$

أي أن: $ح_{١٠٠} = -١٩٠$

حاول أن تحل

٣ في المتتالية الحسابية $ح_١ = ٤$، $ى = ٣$.

أوجد $ح_{١٢}$.

مثال (٤)

أوجد رتبة الحد الذي قيمته ٩٩ من المتتالية الحسابية (٧، ٩، ١١، ...).

الحل:

$ح_١ = ٧$ ، $ى = ٢$، $ح_ن = ٩٩$

$ح_ن = ح_١ + (ن - ١)ى$

$٩٩ = ٧ + (ن - ١) \times ٢$

$٩٢ = (ن - ١) \times ٢$

$٤٦ = ن - ١$ $ن = ٤٧$

أي أن الحد من المتتالية الحسابية الذي قيمته ٩٩ هو $ح_{٤٧}$.

حاول أن تحل

٤ أ في المتتالية الحسابية (٢، ٥، ٨، ١١، ...): أوجد رتبة الحد الذي قيمته ٧١.

ب أوجد عدد حدود المتتالية الحسابية (٧، ١١، ١٥، ... ، ٤٧).

مثال (٥)

في المتتالية $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = ٧ن - ٣$ لكل ن ∈ $ص_+$، أثبت أن المتتالية حسابية.

الحل:

$ح_ن = ٧ن - ٣$

$ح_{ن+١} = ٧(ن + ١) - ٣ = ٧ن + ٤$

$ح_{ن+١} - ح_ن = (٧ن + ٤) - (٧ن - ٣) = ٧$

= مقدارًا ثابتًا

∴ المتتالية $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = ٧ن - ٣$ متتالية حسابية.

حاول أن تحل

٥ في المتتالية $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = ٣ن + ٥$: ن ∈ $ص_+$

أثبت أن المتتالية حسابية.

مثال (٦)

إذا كان الحد الخامس من متتالية حسابية يساوي ٩ والحد الثامن يساوي ١٥، فأوجد أساس المتتالية.

الطريقة الأولى

$ح_ن = ح_١ + (ن - ١)ء$

$ح_٥ = ح_١ + ٤ء$

∴ $ح_١ + ٤ء = ٩$ (١)

$ح_٨ = ح_١ + ٧ء$

∴ $ح_١ + ٧ء = ١٥$ (٢)

بطرح (١) من (٢)

∴ $٣ء = ٦$

∴ $ء = ٢$

الطريقة الثانية

$ح_ن = ح_ك + (ن - ك)ء$

$ح_٥ = ٩$، $ح_٨ = ١٥$

$ح_٨ - ح_٥ = (٨ - ٥) × ء$

$١٥ - ٩ = ٣ء$

∴ $٦ = ٣ء$

∴ $ء = ٢$

إذًا، أساس المتتالية الحسابية هو ٢.

حاول أن تحل

٦ إذا كان الحد الثاني من متتالية حسابية يساوي ٩ والحد السادس يساوي −٣، فأوجد أساس المتتالية ثم أوجد المتتالية الحسابية مكتفيًا بالحدود الأربعة الأولى منها.

مثال (٧)

بفرض أنك تشارك في سباق دراجات لدعم مشروع خيري. على المتسابق الأول تأمين مبلغ ٥ دنانير. وكل متسابق تالي يؤمن مبلغ يزيد ١,٥ دينارًا عن المتسابق الذي يسبقه مباشرةً. ما المبلغ الذي سيدفعه المتسابق الخامس والسبعون؟

الحل:

$ح_١ = ٥$ ، $ح_٢ = ٦,٥$ ، $ح_٣ = ٨$ ، ... لماذا؟

$ح_ن = ح_١ + (ن - ١)د$ استخدام الصيغة الصريحة

$ح_{٧٥} = ٥ + (٧٥ - ١) \times ١,٥$ التعويض

$ح_{٧٥} = ٥ + ٧٤ \times ١,٥$

$= ١١٦$

سيدفع المتسابق الخامس والسبعون ١١٦ دينارًا.

حاول أن تحل

٧ استخدم الصيغة الصريحة لإيجاد الحد الخامس والعشرين ($ح_{٢٥}$) من المتتالية الحسابية (٥، ١١، ١٧، ٢٣، ٢٩، ...).

الأوساط الحسابية Arithmetic Means

إذا كونت أ، ب، جـ متتالية حسابية حيث أ، ب، جـ هي عناصر من ح (أعداد حقيقية):

فإن: ب - أ = جـ - ب

٢ب = جـ + أ

$$ب = \frac{أ + جـ}{٢}$$

أي أن ب هو **الوسط الحسابي** للعددين أ، جـ.

مثال (٨)

إذا كانت (٨٤، س، ١١٠) متتالية حسابية، فأوجد قيمة س.

الحل:

الحد س هو الوسط الحسابي بين ٨٤، ١١٠.

$$س = \frac{٨٤ + ١١٠}{٢} = ٩٧$$

حاول أن تحل

٨ أوجد قيمة ص من المتتالية الحسابية (٤٣، ص، ٥٧).

بصورةٍ عامّةٍ

إذا كانت (أ، ب، جـ، د، ...، ف، ص) متتالية حسابية فإن ب، جـ، د، ...، ف تسمى أوساطًا حسابية للعددين أ، ص.

وتسمى عملية إيجاد الأوساط الحسابية إدخال أوساط حسابية بين العددين أ، ص.

مثال (٩)

أدخل ٥ أوساط حسابية بين ٢٣، ٦٥.

الحل:

(٢٣، ■، ■، ■، ■، ■، ٦٥).

$ح_١$ = ٢٣، عدد الحدود: ٥ + ٢ = ٧، $ح_٧$ = ٦٥.

إذًا $ح_٧ = ح_١ + ٦ء$

٦ء + ٢٣ = ٦٥

٦ء = ٤٢

ء = ٧

الأوساط الحسابية هي ٣٠، ٣٧، ٤٤، ٥١، ٥٨.

حاول أن تحل

٩ (أ) أدخل ثلاثة أوساط حسابية بين –٩، ٣.

(ب) أدخل خمسة أوساط حسابية بين ١٣، ١.

مجموع ن حدا الأولى من حدود متتالية حسابية

Sum of The First n Terms of an Arithmetic Sequence

مجموع ن حدًّا الأولى من حدود متتالية حسابية ($ح_ن$) يعطى بالقاعدة:

$$جـ_ن = \frac{ن}{٢}(ح_١ + ح_ن) \quad \text{أو} \quad جـ_ن = \frac{ن}{٢}[٢ح_١ + (ن - ١)ء]$$

حيث $ح_ن$ هو الحد الذي ترتيبه ن من المتتالية الحسابية وحدها الأول $ح_١$.

البرهان

ليكن ى أساس المتتالية.

$$جـ_ن = ح_1 + (ح_1 + ى) + (ح_1 + ٢ى) + \ldots + (ح_ن - ٢ى) + (ح_ن - ى) + ح_ن$$

$$جـ_ن = ح_ن + (ح_ن - ى) + (ح_ن - ٢ى) + \ldots + (ح_1 + ٢ى) + (ح_1 + ى) + ح_1$$

$$٢جـ_ن = (ح_1 + ح_ن) + (ح_1 + ح_ن) + (ح_1 + ح_ن) + \ldots + (ح_1 + ح_ن)$$ بالجمع

$$٢جـ_ن = ن(ح_1 + ح_ن)$$ ن حدًّا

$$جـ_ن = \frac{ن}{٢}(ح_1 + ح_ن) \quad (١)$$ لكن $ح_ن = ح_1 + (ن - ١)د$

$$جـ_ن = \frac{ن}{٢}[ح_1 + ح_1 + (ن - ١)ى]$$ بالتعويض

$$جـ_ن = \frac{ن}{٢}[(٢ح_1) + (ن - ١)ى] \quad (٢)$$

القانون (١): يعطي مجموع حدود متتالية حسابية بمعلومية الحد الأول والحد الأخير.

القانون (٢): يعطي مجموع ن حدًّا الأولى من حدود متتالية حسابية بمعلومية الحد الأول والأساس ى.

مثال (١٠)

أوجد مجموع العشرين حدًّا الأولى من حدود متتالية حسابية التي حدها الأول ١٠ وحدها العشرون ٥٠٠.

الحل:

$ح_1 = ١٠$، $ح_{٢٠} = ٥٠٠$، $ن = ٢٠$

$$جـ_ن = \frac{ن}{٢}(ح_1 + ح_ن)$$

$$جـ_{٢٠} = \frac{٢٠}{٢}(١٠ + ٥٠٠) = ٥١٠٠$$

حاول أن تحل

١٠ أوجد مجموع الحدود العشرة الأولى من المتتالية الحسابية التي حدها الأول −١٢ وحدها العاشر ٢٤.

مثال (١١)

أوجد مجموع الستة عشر حدًّا الأولى من المتتالية الحسابية التي حدها الأول ١٥ وأساسها ٧.

الحل:

$ح_١ = ١٥$ ، $ء = ٧$ ، $ن = ١٦$

$جـ_ن = \frac{ن}{٢} [٢ح_١ + (ن - ١)ء]$

$جـ_{١٦} = \frac{١٦}{٢} (٢ \times ١٥ + ١٥ \times ٧)$

$جـ_{١٦} = ٨(٣٠ + ١٠٥)$

$جـ_{١٦} = ١٠٨٠$

حاول أن تحل

١١ أ) متتالية حسابية حدها الأول -٧ وأساسها ٤ . أوجد مجموع أول خمسة وعشرين حدًّا منها.

ب) أوجد مجموع حدود المتتالية الحسابية (٥، ٧، ٩، ...، ٩٥).

مثال (١٢)

كم حدًّا يلزم أخذه من المتتالية الحسابية (١٠، ١٥، ٢٠، ...) ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع ٤٥٠؟

الحل:

$ح_١ = ١٠$ ، $ء = ٥$ ، $جـ_ن = ٤٥٠$

$جـ_ن = \frac{ن}{٢} [٢ح_١ + (ن - ١)ء]$

$٤٥٠ = \frac{ن}{٢} [٢٠ + (ن - ١)٥]$

$٤٥٠ = \frac{ن}{٢} (١٥ + ٥ن)$

$٩٠٠ = ١٥ن + ٥ن^٢$

$ن^٢ + ٣ن - ١٨٠ = ٠$

$(ن + ١٥)(ن - ١٢) = ٠$

$ن = -١٥$ ، $ن = ١٢$

وحيث إن $ن = -١٥$ مرفوض لأن $-١٥ \notin ص_+$

$\therefore$ ن = ١٢ أي أن عدد الحدود المطلوبة هو ١٢ حدًّا.

حاول أن تحل

١٢ (أ) كم حدًّا يلزم أخذه من المتتالية الحسابية التي حدها الأول ٥ وأساسها ٣ ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع ٩٤٨؟

(ب) كم حدًّا يلزم أخذه من المتتالية الحسابية (٣٠، ٢٥، ٢٠، ...) ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع ١٠٠؟

مثال (١٣)

أراد فهد حفر بئر في مزرعته. تبلغ كلفة حفر المتر الأول ٧ دنانير، وتزيد كلفة حفر كل متر دينارين عن كلفة حفر المتر السابق. دفع فهد للمتعهد ٤٣٢ دينارًا. ما عمق البئر الذي حفر؟

الحل: بما أن الزيادة ثابتة وهي ديناران، إذًا المتتالية حسابية. ليكن $جـ_ن$ المبلغ المدفوع لقاء حفر ن متر.

$جـ_ن = \frac{ن}{٢} [٢ح_١ + (ن - ١) \times ٢]$

$٤٣٢ = \frac{ن}{٢} (٢ \times ٧ + ٢ن - ٢)$

$٤٣٢ = ٦ن + ن^٢$

أي $ن^٢ + ٦ن - ٤٣٢ = ٠$

$(ن + ٢٤)(ن - ١٨) = ٠$

ن = −٢٤ (مرفوض)، ن = ١٨

يبلغ عمق البئر ١٨ مترًا.

حاول أن تحل

١٣ في المثال (١٣)، كم ستبلغ كلفة الحفر بالدينار إذا بلغ عمق البئر ٢٥ مترًا؟

٥ ـ ٣

المتتالية الهندسية
Geometric Sequence

سوف تتعلم

- المتتالية الهندسيّة وأساسها
- الحد النوني للمتتالية الهندسيّة
- الأوساط الهندسية
- مجموع (ن) حدًا الأولى من حدود متتالية هندسيّة

عمل تعاوني

- ارسم مثلثًا قائم الزاوية ومتطابق الضلعين.
- قصّ المثلث إلى مثلّثين قائمي الزاوية، وكل منهما متطابق الضلعين.

كرّر الشيء نفسه كما في الشكل وأوجد عدد المثلثات في كل مرة.

$ح_١ = ■$ ، $ح_٢ = ■$ ، $ح_٣ = ■$ ، $ح_٤ = ■$

هل الحدود الناتجة تكون متتالية حسابية؟ وإذا لم تكن كذلك، فلماذا؟

ماذا تلاحظ في العلاقة بين الحدود الناتجة؟

هل يمكنك إيجاد الحد السادس $ح_٦$؟

هل يمكنك إيجاد الحد السادس $ح_٦$ بدلالة الحد الخامس $ح_٥$؟

هل يمكنك إيجاد الحد النوني $ح_ن$ بدلالة الحد $ح_{ن-١}$؟

جملة مفتوحة:

في المتتاليّة السابقة، اضرب كل حد من حدود المتتالية في عدد ثابت غير صفري واكتب المتتالية الجديدة الناتجة. ما العلاقة التي تجدها بين المتتاليتين؟

لنأخذ المتتالية (١، ٢، ٤، ٨، ١٦، ...). لاحظ النمط المتمثل في كل حد وسابقه.

تعريف:

المتتاليّة الهندسيّة: هي متتالية ناتج قسمة أي حد فيها على الحد السابق له مباشرة، يساوي عددًا حقيقيًّا ثابتًا غير صفري،

فيكون $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = ر$ حيث $ح_ن \neq ٠$.

لكل ن $\in$ $ص_+$، ر عدد حقيقي ثابت يسمى **أساس المتتالية الهندسية** common ratio

فمثلًا، المتتالية (٥، ١٠، ٢٠، ٤٠) متتالية هندسية.

أما (٥، ١٠، ١٥، ٢٠، ...) فليست متتالية هندسية.

لماذا لا يمكن لأي حد في المتتالية الهندسية أن يساوي الصفر؟

مثال (١)

لتكن $(ح_{ن})$ متتالية حيث $ح_{ن} = ٣^{ن}$.

أ اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتالية $(ح_{ن})$.

ب أثبت أن $(ح_{ن})$ متتالية هندسية.

الحل:

أ $ح_{١} = ٣^{١} = ٣$ $\qquad$ $ح_{٢} = ٣^{٢} = ٩$

$ح_{٣} = ٣^{٣} = ٢٧$ $\qquad$ $ح_{٤} = ٣^{٤} = ٨١$

$ح_{٥} = ٣^{٥} = ٢٤٣$ $\qquad$ الحدود الخمسة الأولى هي: ٣، ٩، ٢٧، ٨١، ٢٤٣.

∴ المتتالية $(ح_{ن}) = (٣، ٩، ٢٧، ٨١، ٢٤٣، ...)$

ب $\frac{ح_{ن+١}}{ح_{ن}} = \frac{٣^{ن+١}}{٣^{ن}} = ٣^{ن+١-ن} = ٣$ $\qquad$ (مقدار ثابت)

∴ المتتالية هندسية.

حاول أن تحل

١ أثبت أن المتتالية $(ح_{ن})$ حيث $ح_{ن} = (٢)^{ن}$، هي متتالية هندسية.

الحد النوني للمتتالية الهندسية General term of an Geometrie Sequence

إذا كانت $(ح_{ن})$ متتالية هندسية أساسها $ر \neq ٠$ فإن $ح_{ن} = ح_{١} \times ر^{ن-١}$

حيث $ح_{١}$ هو الحد الأول، $ح_{ن}$ هو الحد النوني، $ر$ هو أساس المتتالية الهندسية.

ويكون $ح_{٢} = ح_{١} \times ر$ ، $ح_{٣} = ح_{١} \times ر^{٢}$ ، $ح_{٤} = ح_{١} \times ر^{٣}$ ، ...

وتكون الصورة العامة للمتتالية الهندسية $ح_{١}، ح_{١}ر، ح_{١}ر^{٢}، ح_{١}ر^{٣}، ...، ح_{١}ر^{ن-١}، ...$

إذا كان الحد المعروف $ح_{ك}$ فإن $ح_{ك} = ح_{١} \times ر^{ك-١}$

ومنه يكون $\frac{ح_{ن}}{ح_{ك}} = \frac{ح_{١} \times ر^{ن-١}}{ح_{١} \times ر^{ك-١}} = ر^{ن-ك}$

أي أن $ح_{ن} = ح_{ك} \times ر^{ن-ك}$

مثال (٢)

اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتالية الهندسية التي حدها الأول ٩ وأساسها ٣.

الحل:

$ح_١ = ٩$ ، $ر = ٣$

$ح_٢ = ح_١ \times ر = ٩ \times ٣ = ٢٧$

$ح_٣ = ح_١ \times ر^٢ = ٩ \times ٣^٢ = ٨١$

$ح_٤ = ح_١ \times ر^٣ = ٩ \times ٣^٣ = ٢٤٣$

$ح_٥ = ح_١ \times ر^٤ = ٩ \times ٣^٤ = ٧٢٩$

∴ الحدود الخمسة الأولى هي: ٩، ٢٧، ٨١، ٢٤٣، ٧٢٩

حاول أن تحل

٢ اكتب الحدود الأربعة الأولى من المتتالية الهندسية التي حدها الأول ٥ وأساسها −٣.

مثال (٣)

متتالية هندسية حدها الأول ٤ وحدها السادس ١٢٨ . اكتب المتتالية الهندسية مكتفيًا بالحدود الأربعة الأولى منها.

الحل:

الحد الأول: $ح_١ = ٤$ ، الحد السادس: $ح_٦ = ١٢٨$

نعلم أن $ح_ن = ح_١ \times ر^{ن-١}$

$ح_٦ = ح_١ \times ر^٥$

$١٢٨ = ٤ \times ر^٥$

$ر^٥ = ٣٢$ ∴ $ر = ٢$

∴ الحدود الأربعة الأولى هي: ٤، ٨، ١٦، ٣٢.

المتتالية هي: (٤، ٨، ١٦، ٣٢، ...)

حاول أن تحل

٣ متتالية هندسية حدها الأول ٢٧ وحدها الخامس $\frac{١}{٣}$. اكتب المتتالية مكتفيًا بالحدود الخمسة الأولى منها.

مثال (٤)

متتالية هندسية حدودها موجبة، ومجموع الحدين الأول والثاني ٣٦، وحدها الثالث يساوي ٣. أوجد الحد الخامس.

الحل:

$\text{ح}_١ + \text{ح}_٢ = ٣٦$ ، $\text{ح}_٣ = ٣$

في المتتالية الهندسية : $\text{ح}_\text{ن} = \text{ح}_١ \times \text{ر}^{\text{ن}-١}$

$\therefore \text{ح}_١ + \text{ح}_١ \text{ر} = ٣٦$

$\text{ح}_١ (١ + \text{ر}) = ٣٦$

$\text{ح}_٣ = \text{ح}_١ \text{ر}^٢ = ٣$

بالقسمة $\dfrac{\text{ح}_١ \text{ر}^٢}{\text{ح}_١ (١ + \text{ر})} = \dfrac{٣}{٣٦}$

$\dfrac{\text{ر}^٢}{١ + \text{ر}} = \dfrac{١}{١٢}$

$١٢\text{ر}^٢ = \text{ر} + ١$ الضرب التقاطعي

$١٢\text{ر}^٢ - \text{ر} - ١ = ٠$

$(٤\text{ر} + ١)(٣\text{ر} - ١) = ٠$

$\text{ر} = -\dfrac{١}{٤}$ (مرفوض لأن الحدود موجبة) أو $\text{ر} = \dfrac{١}{٣}$.

$\text{ح}_٥ = \text{ح}_٣ \times \text{ر}^٢$

$= ٣ \times \left(\dfrac{١}{٣}\right)^٢ = \dfrac{١}{٣}$.

الحد الخامس $= \dfrac{١}{٣}$.

حاول أن تحل

٤ $(\text{ح}_\text{ن})$ متتالية هندسية، مجموع حديها الأول والثاني يساوي ٢، ومجموع حديها الثالث والرابع يساوي ٨.

أوجد الحد الأول والحد الخامس منها.

الأوساط الهندسية بين عددين Geometric Means Between two Numbers

إذا كوَّنت أ، ب، جـ متتالية هندسية حيث أ، ب، جـ أعداد حقيقية غير صفرية وحيث أجـ > ٠ فإن: $\frac{\text{ب}}{\text{أ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{ب}}$ ومنه $\text{ب}^{٢} = \text{أجـ}$

∴ **$\text{ب} = \pm\sqrt{\text{أجـ}}$.**

يسمى ب وسطًا هندسيًّا بين العددين أ، جـ، أي أن: $\sqrt{\text{أجـ}}$ أو $-\sqrt{\text{أجـ}}$ وسطًا هندسيًّا بين العددين أ، جـ.

مثال (٥)

أوجد وسطًا هندسيًّا بين العددين $\frac{١}{٣}$ ، ٢٧.

الحل:

الوسط الهندسي: $\sqrt{\frac{١}{٣} \times ٢٧} = \sqrt{٩} = ٣$

أو الوسط الهندسي: $-\sqrt{\frac{١}{٣} \times ٢٧} = -\sqrt{٩} = -٣$

حاول أن تحل

٥ أوجد وسطًا هندسيًّا بين العددين في كل ما يلي:

أ −٣ ، −٧٢ ب ٢٠ ، ٨٠ جـ ٣ ، ١٨,٧٥

مثال (٦) إثرائي

عندما يتأرجح ولد دون تأثير قوة خارجية فإن مقاومة الهواء تؤدي إلى تناقص في طول قوس التأرجح. ويشكل التناقص في طول القوس متتالية هندسيّة. أوجد الوسط الهندسي لطولي القوسين (لأقرب عدد كلي.)

الحل:

الوسط الهندسي $= \sqrt{٣,٢ \times ٢,٨}$

$= \sqrt{٨,٩٦}$

$\simeq ٣$

الوسط الهندسي لطولي القوسين يساوي حوالى ٣ أمتار.

حاول أن تحل

٦ يتدرب عماد على القفزة الثلاثية. حقق في المحاولة الأولى ٨,٨ أمتار وفي المحاولة الثانية ٩,٢ أمتار. ما الوسط الهندسي لطولي القفزتين؟

بصورةٍ عامة

في المتتالية الهندسية (أ، ب، جـ، د، ...، ك، ل). تسمى ب، جـ، د، ...، ك **أوساطًا هندسية** للعددين الحقيقيين أ، ل.

وتسمى عملية إيجاد ب، جـ، د، ...، ك عملية إدخال أوساط هندسية بين العددين أ، ل.

مثال (٧)

أدخل خمسة أوساط هندسيّة موجبة بين العددين ٥١٢ ، ٨.

الحل: (٥١٢، ■، ■، ■، ■، ■، ٨).

عدد حدود المتتالية الهندسية = عدد الأوساط + ٢.

ن = ٥ + ٢ = ٧

$ح_١ = ٥١٢$

$ح_ن = ٨$ أي أن $ح_٧ = ٨$

$\because ح_ن = ح_١ \times ر^{ن-١}$

$\therefore ٨ = ٥١٢ \times ر^٦$

$ر^٦ = \frac{٨}{٥١٢} = \frac{١}{٦٤} = \left(\frac{١}{٢}\right)^٦$

$ر = \frac{١}{٢}$ أو $ر = -\frac{١}{٢}$ مرفوضة لأن الأوساط موجبة.

الأوساط هي: ٢٥٦، ١٢٨، ٦٤، ٣٢، ١٦.

حاول أن تحل

٧ أدخل ثمانية أوساط هندسية بين ٢ ، ١٠٢٤.

مجموع ن حدا الأولى من متتالية هندسية Sum of n First Terms of a Geometric Sequence

قانون

إذا كانت $(ح_ن)$ متتالية هندسية، $جـ_ن = ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + ... + ح_ن$ هو مجموع ن حدًّا الأولى، فإن:

١ $جـ_ن = ح_١ \times \frac{ر^ن - ١}{ر - ١}$ أو $جـ_ن = ح_١ \times \frac{١ - ر^ن}{١ - ر}$ ، $ر \neq ١$

٢ إذا كانت $ر = ١$ فإن $جـ_ن = ن ح_١$

البرهان

ليكن $ر$ أساس المتتالية.

$جـ_ن = ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + \dots + ح_ن$

$جـ_ن = ح_١ + ح_١ ر + ح_١ ر^٢ + \dots + ح_١ ر^{ن-١}$ (١)

$ر جـ_ن = ح_١ ر + ح_١ ر^٢ + ح_١ ر^٣ + \dots + ح_١ ر^ن$ (٢) يضرب طرفي المعادلة (١) في $ر \neq ٠$

بطرح (١) من (٢) وبالتبسيط ينتج:

$ر جـ_ن - جـ_ن = ح_١ ر^ن - ح_١$

$جـ_ن \times (ر - ١) = ح_١ (ر^ن - ١)$

$جـ_ن = ح_١ \times \frac{ر^ن - ١}{ر - ١}$ أو $جـ_ن = ح_١ \times \frac{١ - ر^ن}{١ - ر}$، $ر \neq ١$

أما إذا كانت $ر = ١$ فإن حدود المتتالية متساوية فيكون مجموع الحدود = قيمة الحد الأول مضروبة في عدد الحدود أي

$جـ_ن = ح_١ \times ن$.

مثال (٨)

أوجد مجموع الحدود العشرة الأولى من المتتالية الهندسية (٢، ٤، ٨، ...).

الحل:

$ح_١ = ٢$، $ر = \frac{ح_٢}{ح_١} = \frac{٤}{٢} = ٢$، $ن = ١٠$

$جـ_ن = ح_١ \times \frac{ر^ن - ١}{ر - ١}$

$جـ_{١٠} = \frac{٢ \times (٢^{١٠} - ١)}{(٢ - ١)}$

$جـ_{١٠} = ٢ \times ١٠٢٣ = ٢٠٤٦$.

حاول أن تحل

٨ أوجد مجموع الحدود الثمانية الأولى من المتتالية الهندسية (٣، ٩، ٢٧، ...).

مثال (٩)

الحد الأول من متتالية هندسية يساوي ٨ والحد الثالث منها يساوي $\frac{٨}{٩}$. أوجد مجموع الحدود الستة الأولى منها.

الحل: ∵ المتتالية هندسية

$\therefore ح_٣ = ح_١ \times ر^٢$

$\frac{٨}{٩} = ٨ \times ر^٢$

$ر^٢ = \frac{١}{٩}$

$ر = \frac{١}{٣}$ أو $ر = -\frac{١}{٣}$.

إذا كانت $ر = \frac{١}{٣}$

$$جـ_٦ = ٨ \times \frac{١ - \left(\frac{١}{٣}\right)^٦}{١ - \frac{١}{٣}}$$

$$= ٨ \times \frac{١ - \left(\frac{١}{٣}\right)^٦}{\frac{٢}{٣}}$$

$$= \frac{٢٩١٢}{٢٤٣} \simeq ١١{,}٩٨$$

إذا كانت $ر = -\frac{١}{٣}$

$$جـ_٦ = ٨ \times \frac{١ - \left(-\frac{١}{٣}\right)^٦}{١ - \left(-\frac{١}{٣}\right)}$$

$$= ٨ \times \frac{١ - \left(-\frac{١}{٣}\right)^٦}{\frac{٤}{٣}}$$

$$= \frac{١٤٥٦}{٢٤٣} \simeq ٥{,}٩٩٢$$

حاول أن تحل

٩ أوجد مجموع الحدود العشرة الأولى من المتتالية الهندسية (٤، ■، ١، ■، $\frac{١}{٤}$، ...)

معلومات عامة:

رمز المجموع Summation Symbol

لكتابة مجموعة حدود المتتالية: $ب_١ + ب_٢ + ب_٣ + ... + ب_ن + ... + ب_ك$

طريقة مختصرة استخدم الرياضيون الحرف اليوناني $\sum$ (سيغما) على الشكل التالي: $\sum_{ن=١}^{ك} ب_ن$

يقرأ: مجموع الأعداد $ب_ن$ من ن = ١ إلى ن = ك

فمثلًا، المجموع: $\frac{٥}{٢} \times (١) + \frac{٥}{٢} \times (٢) + \frac{٥}{٢} \times (٣) + ... + \frac{٥}{٢} \times (١٣)$ يكتب $\sum_{ن=١}^{١٣} \frac{٥}{٢} ن$.

$$\sum_{ن=١}^{١٣} \frac{٥}{٢} ن$$

الحد الأعلى أكبر قيمة لـ ن

الحد الأدنى أصغر قيمة لـ ن

الصيغة الصريحة للمتتالية

> **ملاحظة:**
> في دراستنا للمجموع $\sum$ سنقتصر على الحالات التي تكون فيها ن تبدأ من العدد ١ حيث ن $\in$ {١، ٢، ٣، ...} وهذا يمثل مجال المتتالية.

لكتابة: $١ + ٢ + ٣ + ٤ + ... + ٤٥$ نكتب $\sum_{ن=١}^{٤٥} ن$

لكتابة: $١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + ٤^٢ + ... + ١٠^٢$ نكتب $\sum_{ن=١}^{١٠} ن^٢$

مثال (١٠)

أ) أوجد قيمة $\sum_{ن=١}^{١٠٠} ن$.

الحل:

$$\sum_{ن=١}^{١٠٠} ن = ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ... + ١٠٠$$

(١، ٢، ٣، ...، ١٠٠) متتالية حسابية حدها الأول ١ وأساسها ١ وحدها الأخير $ح_{١٠٠} = ١٠٠$ لماذا؟

$$\therefore \sum_{ن=١}^{١٠٠} ن = جـ_{١٠٠}$$

وحيث إن $جـ_ن = \frac{ن}{٢} (ح_١ + ح_ن)$

$$جـ_{١٠٠} = \frac{١٠٠}{٢} (١ + ١٠٠)$$

$$جـ_{١٠٠} = \frac{١٠٠ \times ١٠١}{٢} = ٥٠٥٠$$

حاول أن تحل

١٠ أوجد قيمة: $\sum_{ن=١}^{٨٠} ن$

تعميم

مجموع الأعداد الصحيحة الموجبة الأولى التي عددها ن $= \frac{ن \times (ن + ١)}{٢}$

لاحظ أن $\sum_{ن=١}^{٤٥} ن = \frac{٤٥ \times ٤٦}{٢} = ١٠٣٥$

مثال (١١)

أوجد قيمة $\sum_{ن=١}^{١٣} \frac{٥}{٢} ن$.

الحل:

$$\sum_{ن=١}^{١٣} \frac{٥}{٢} ن = \frac{٥}{٢} \times (١) + \frac{٥}{٢} \times (٢) + \frac{٥}{٢} \times (٣) + \ldots + \frac{٥}{٢} \times (١٣)$$

$$= \frac{٥}{٢} \times (١ + ٢ + ٣ + \ldots + ١٣)$$

$$= \frac{٥}{٢} \times \frac{١٣ \times ١٤}{٢}$$

$$= ٢٢٧,٥$$

حاول أن تحل

١١ أوجد قيمة: $\sum_{ن=١}^{١٠} ٢ن$.

مثال (١٢)

أوجد قيمة $\sum_{ن=١}^{٩}$ (٦ن − ٤)

الحل:

نفرض $ح_ن$ = ٦ن − ٤ هي الصيغة الصريحة للمتتالية.

فيكون $ح_{ن+١}$ = ٦(ن + ١) − ٤

= ٦ن + ٢

∴ $ح_{ن+١}$ − $ح_ن$ = (٦ن + ٢) − (٦ن − ٤)

= ٦

= مقدارًا ثابتًا

∴ المتتالية ($ح_ن$) حيث $ح_ن$ = ٦ن − ٤ متتالية حسابية أساسها ٦.

والمطلوب هو إيجاد مجموع ٩ حدود الأولى منها وهو $جـ_٩$.

∴ $\sum_{ن=١}^{٩}$ (٦ن − ٤) = $\frac{ن}{٢}$ [٢$ح_١$ + (ن − ١)ى]

= $\frac{٩}{٢}$ [٢ × ٢ + (٩ − ١) × ٦]

= $\frac{٩}{٢}$ × ٥٢

= ٢٣٤

حاول أن تحل

١٢ أوجد قيمة = $\sum_{ن=١}^{٨}$ (٣ن + ٥).

مثال (١٣)

أوجد قيمة $\sum_{ن=١}^{٨} ٣^{ن}$

الحل:

الصيغة الصريحة للمتتالية: $ح_{ن} = ٣^{ن}$

$ح_{ن+١} = ٣^{ن+١}$

$\therefore \frac{ح_{ن+١}}{ح_{ن}} = \frac{٣^{ن+١}}{٣^{ن}} = ٣$ = مقدارًا ثابتًا

$\therefore$ المتتالية $(ح_{ن})$ حيث $ح_{ن} = ٣^{ن}$ متتالية هندسية حدها الأول ٣ وأساسها ٣.

وهي على الصورة (٣، ٩، ٢٧، ...)

والمطلوب إيجاد مجموع ٨ حدود الأولى للمتتالية الهندسية.

$$\sum_{ن=١}^{٨} ٣^{ن} = ح_{١} \times \frac{ر^{ن} - ١}{ر - ١}$$

$$= ٣ \times \frac{٣^{٨} - ١}{٣ - ١} = ٩٨٤٠$$

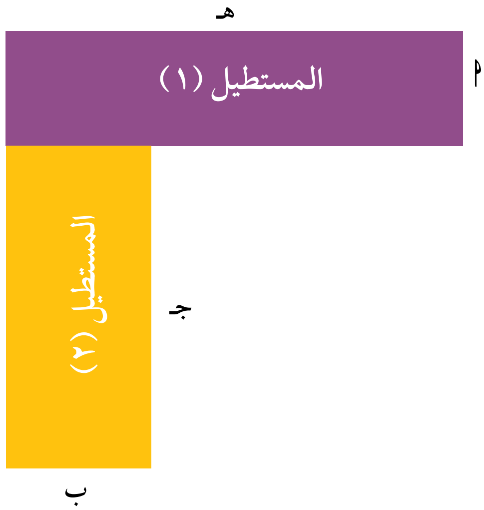
حاول أن تحل

١٣ أوجد قيمة = $\sum_{ن=١}^{١٠} ٢^{ن}$

المرشد لحل المسائل

١ إذا كانت الأعداد ٲ، ب، جـ، هـ، على هذا الترتيب تمثل أبعاد المستطيلين (١)، (٢) كما في الشكل.

أ قارن بين مساحتي المستطيلين (١)، (٢). إذا كانت هذه الأعداد بنفس الترتيب تمثّل الحدود الأربعة الأولى من متتالية هندسية أساسها ر.



ب قارن بين محيطي المستطيلين (١)، (٢). إذا كانت هذه الأعداد بنفس الترتيب تمثّل الحدود الأربعة الأولى من متتالية حسابية أساسها ء.

٢ **كيف نفكر في حل المسألة**

أ في المتتالية الهندسية كل حد يساوي الحد الذي يسبقه مضروبًا في الأساس ر.

∴ ب = ٲر ، جـ = بر = ٲر^{٢} ، هـ = جـر = ٲر^{٣}

مساحة المستطيل = الطول × العرض

ومنه مساحة المستطيل (١) = ٲ × هـ = ٲ × ٲر^{٣} = ٲ^{٢}ر^{٣}

مساحة المستطيل (٢) = ب × جـ = ٲر × ٲر^{٢} = ٲ^{٢}ر^{٣}

الاستنتاج: وهكذا نستنتج أن مساحتي المستطيلين متساويتان.

ب بما أن المتتالية حسابية أساسها ء فإن ب = ٲ + ء ، جـ = ب + ء = ٲ + ٢ء ، هـ = جـ + ء = ٲ + ٣ء

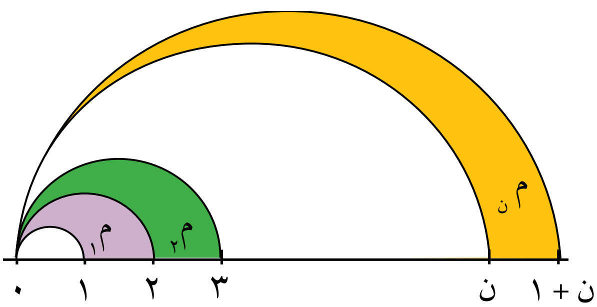
محيط المستطيل (١) = ٢ × (ٲ + هـ) = ٢ × (ٲ + ٲ + ٣ء) = ٤ٲ + ٦ء

محيط المستطيل (٢) = ٢ × (ب + جـ) = ٢ × (ٲ + ء + ٲ + ٢ء) = ٤ٲ + ٦ء

الاستنتاج: للمستطيلين المحيط نفسه.

٣ **مسألة إضافية**

قارن بين مساحتي المستطيلين (١)، (٢) في الحالة (ب).



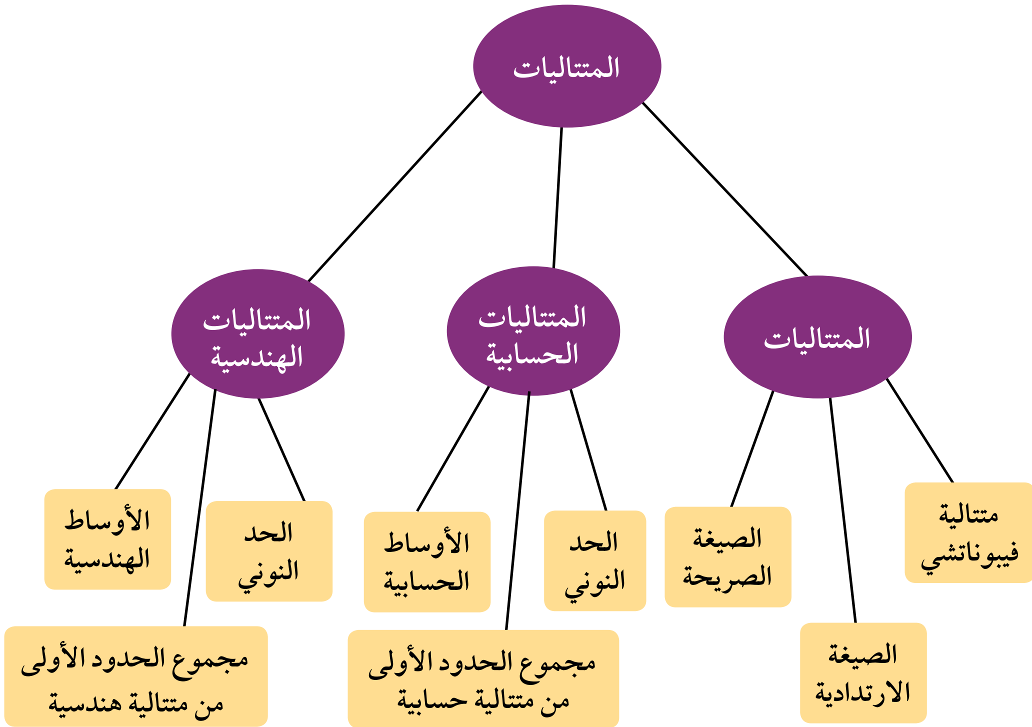
* ٤ **تفكير منطقي**

في الشكل المقابل، تمثل م$_{١}$، م$_{٢}$، ...، م$_{ن}$ المساحات المحصورة بين أنصاف الدوائر.

أ أثبت أن المتتالية (م$_{١}$، م$_{٢}$، ...، م$_{ن}$) حسابية.

ب احسب بطريقتين مختلفتين المجموع: جـ$_{١٠}$ = م$_{١}$ + م$_{٢}$ + ... + م$_{١٠}$.

مخطط تنظيمي للوحدة الخامسة



ملخص

- تعرّف الصيغة الارتدادية حدود المتتالية بربط كل حد بالحد (أو بالحدود) الذي يسبقه مباشرة.
- تعبر الصيغة الصريحة عن الحد النوني بدلالة ن.
- متتالية فيبوناتشي: $ف_{ن} = ف_{ن-٢} + ف_{ن-١}$ مع $ف_{١} = ف_{٢} = ١$.
- في المتتالية الحسابية يكون الفرق بين كل حد والحد السابق له عددًا ثابتًا يسمى أساس المتتالية: $ح_{ن+١} = ح_{ن} + د$.
- الحد النوني للمتتالية الحسابية: $ح_{ن} = ح_{ك} + (ن - ك)د$.
- إذا كونت أ، ب، جـ متتالية حسابية، فإن $ب = \frac{أ + جـ}{٢}$. ب هو الوسط الحسابي لـ أ، جـ.
- مجموع ن حدًا الأولى من حدود متتالية حسابية: $جـ_{ن} = \frac{ن}{٢}(ح_{١} + ح_{ن})$.
- في المتتالية الهندسية إن ناتج قسمة أي حد فيها على الحد السابق له مباشرة يساوي عددًا ثابتًا يسمى أساس المتتالية الهندسية $ح_{ن+١} = ح_{ن} \times ر$ أساس المتتالية الهندسية.
- مجموع ن حد الأولى من حدود متتالية هندسية: $جـ_{ن} = ح_{١} \times \frac{ر^{ن} - ١}{ر - ١} = ح_{١} \times \frac{١ - ر^{ن}}{١ - ر}$ **حيث** $ر \neq ١$
- إذا كونت أ، ب، جـ متتالية هندسية فإن $ب^{٢} = أ \times جـ$. ب هو الوسط الهندسي لـ أ، جـ وهو يساوي $\sqrt{أجـ}$ أو $-\sqrt{أجـ}$.

ملاحظات

ملاحظات

ملاحظات

تطرح سلسلة الرِّياضيّات مواقف حياتيّة يوميّة، وتؤمّن فرص تعلُّم كثيرة. فهي تعزّز المهارات الأساسيّة، والحسّ العدديّ، وحلّ المسائل، والجهوزيّة لدراسة الجبر، والهندسة، وتنمّي مهارتَيِ التّعبير الشّفهيّ والكتابيّ ومهارات التفكير في الرِّياضيَّات. وهي تتكامل مع الموادّ الدراسيّة الأخرى فتكون جزءًا من ثقافة شاملة متماسكة تحفّز الطلّاب على اختلاف قدراتهم وتشجّعهم على حبّ المعرفة.

تتكوّن السلسلة من:

- كتاب الطالب
- كتاب المعلّم
- كرّاسة التمارين
- كرّاسة التمارين مع الإجابات

ISBN 978-614-406-291-3

PEARSON
Scott Foresman