وزارة التربية
Ministry of Education
State of Kuwait | دولـــة الكويـت

كويت جديدة
NEWKUWAIT

الرياضيات

كتاب الطالب

الصفّ الحادي عشر أدبي
الفصل الدراسي الأوّل
١١

الطبعة الثالثة

وزارة التربية
Ministry of Education
State of Kuwait | دولـــة الكويـت

كويت جديدة
NEWKUWAIT

الرياضيات

الصفّ الحادي عشر أدبي
الفصل الدراسي الأول

كتاب الطالب

اللجنة الإشرافية لدراسة ومواءمة سلسلة كتب الرياضيات

أ. إبراهيم حسين القطان (رئيسًا)

أ. حصة يونس محمد علي **أ. فتحية محمود أبو زور**

الطبعة الثالثة

١٤٤٧ هـ

٢٠٢٥ - ٢٠٢٦ م

حقوق التأليف والطبع والنشر محفوظة لوزارة التربية - قطاع البحوث التربوية والمناهج
إدارة تطوير المناهج

الطبعة الأولى ٢٠١٣ - ٢٠١٤م
الطبعة الثانية ٢٠١٦ - ٢٠١٧ م
٢٠١٨ - ٢٠١٩ م
٢٠٢١ - ٢٠٢٢ م
٢٠٢٢ - ٢٠٢٣ م
٢٠٢٣ - ٢٠٢٤ م
٢٠٢٤ - ٢٠٢٥ م
الطبعة الثالثة ٢٠٢٥ - ٢٠٢٦ م

فريق عمل دراسة ومواءمة كتب الرياضيات للصف الحادي عشر أدبي

أ. فتحي محمد عبد الفتاح (رئيسًا)

أ. محمد بدر حاتم محمد
أ. إقبال محمد البحراني
أ. مها زايد مطلق العنزي
أ. رضية جواد حسين النصر

أ. محمد عبدالله الحمد المجرن

دار التَّربَوِيّون House of Education ش.م.م. وبيرسون إديوكيشن ٢٠١٣م

الكتاب كاملًا

شاركنا بتقييم مناهجنا

القناة التربوية

مطبعة حكومة دولة الكويت
Government Press - State of Kuwait

أودع بمكتبة الوزارة تحت رقم (٢) بتاريخ ٣٠/ ٤/ ٢٠٢٥م

حضرة صاحب السمو الشيخ مشعل الأحمد الجابر الصباح

أمير دولة الكويت

H.H. Sheikh Meshal AL-Ahmad Al-Jaber Al-Sabah
Amir Of The State Of Kuwait

سمو الشيخ صباح خالد الحمد الصباح
ولي عهد دولة الكويت

H. H. Sheikh Sabah Khaled Al-Hamad Al-Sabah
Crown Prince Of The State Of Kuwait

مقدمـــة

الحمدلله رب العالمين، والصلاة والسلام على سيد المرسلين، محمد بن عبدالله وصحبه أجمعين.

عندما شرعت وزارة التربية في عملية تطوير المناهج، استندت في ذلك إلى جملة من الأسس والمرتكزات العلمية والفنية والمهنية، حيث راعت متطلبات الدولة وارتباط ذلك بسوق العمل، وحاجات المتعلمين والتطور المعرفي والعلمي، بالإضافة إلى جملة من التحديات التي تمثلت بالتحدي القيمي والاجتماعي والاقتصادي والتكنولوجي وغيرها، وإن كنا ندرك أن هذه الجوانب لها صلة وثيقة بالنظام التعليمي بشكل عام وليس المناهج بشكل خاص.

ومما يجب التأكيد عليه، أن المنهج عبارة عن كم الخبرات التربوية والتعليمية التي تُقدم للمتعلم، وهذا يرتبط أيضًا بعمليات التخطط والتنفيذ، والتي في محصلتها النهائية تأتي لتحقيق الأهداف التربوية، وعليه أصبحت عملية بناء المناهج الدراسية من أهم مكونات النظام التعليمي، لأنها تأتي في جانبين مهمين لقياس كفاءة النظام التعليمي، فهي من جهة تمثل أحد المدخلات الأساسية ومقياسًا أو معيارًا من معايير كفاءته من جهة أخرى، عدا أن المناهج تدخل في عملية إنماء شخصية المتعلم في جميع جوانبها الجسمية والعقلية والوجدانية والروحية والاجتماعية.

من جانب آخر، فنحن في قطاع البحوث التربوية والمناهج، عندما نبدأ في عملية تطوير المناهج الدراسية، ننطلق من كل الأسس والمرتكزات التي سبق ذكرها، بل إننا نراها محفزات واقعية تدفعنا لبذل قصارى جهدنا والمضي قدمًا في البحث في المستجدات التربوية سواء في شكل المناهج أم في مضامينها، وهذا ما قام به القطاع خلال السنوات الماضية، حيث البحث عن أفضل ما توصلت إليه عملية صناعة المناهج الدراسية، ومن ثم إعدادها وتأليفها وفق معايير عالمية استعدادًا لتطبيقها في البيئة التعليمية.

ولقد كانت مناهج العلوم والرياضيات من أول المناهج التي بدأنا بها عملية التطوير، إيمانًا بأهميتها وانطلاقًا من أنها ذات صفة عالمية، مع الأخذ بالحسبان خصوصية المجتمع الكويتي وبيئته المحلية. وعندما أدركنا أنها تتضمن جوانب عملية التعلم ونعني بذلك المعرفة والقيم والمهارات، قمنا بدراستها وجعلها تتوافق مع نظام التعليم في دولة الكويت، مركزين ليس فقط على الكتاب المقرر ولكن شمل ذلك طرائق وأساليب التدريس والبيئة التعليمية ودور المتعلم، مؤكدين على أهمية التكامل بين الجوانب العلمية والتطبيقية حتى تكون ذات طبيعة وظيفية مرتبطة بحياة المتعلم.

وفي ضوء ما سبق من معطيات وغيرها من الجوانب ذات الصفة التعليمية والتربوية تم اختيار سلسلة مناهج العلوم والرياضيات التي أكملناها بشكل ووقت مناسبين، ولنحقق نقلة نوعية في مناهج تلك المواد. وهذا كله تزامن مع عملية التقويم والقياس للأثر الذي تركته تلك المناهج، ومن ثم عمليات التعديل التي طرأت أثناء وبعد تنفيذها، مع التأكيد على الاستمرار في القياس المستمر والمتابعة الدائمة حتى تكون مناهجنا أكثر تفاعلية.

د. سعود هلال الحربي

الوكيل المساعد لقطاع البحوث التربوية والمناهج

المحتوَياتُ

الوحدة الأولى: الأعداد الحقيقية ١٠

١-١ الجذور والتعبيرات الجذرية والعمليات عليها ١٢

(١-١-أ) الجذور والتعبيرات الجذرية ١٢

(١-١-ب) تبسيط التعبيرات الجذرية ١٣

(١-١-جـ) جمع وطرح التعبيرات الجذرية ١٤

(١-١-د) ضرب وقسمة التعبيرات الجذرية ١٧

(١-١-هـ) المرافق واستخدامه ٢٠

١-٢ الأسس النسبية وخواصها ٢٤

(١-٢-أ) الأسس النسبية ٢٤

(١-٢-ب) خواص الأسس النسبية ٢٩

الوحدة الثانية: أنواع العينات ٣٦

٢-١ المجتمع الإحصائي ٣٨

(٢-١-أ) جمع البيانات ٤٠

(٢-١-ب) أنواع البيانات وطرائق جمعها ٤١

٢-٢ العينات ٤٥

(٢-٢-أ) العينة العشوائية البسيطة ٤٥

(٢-٢-ب) العينة العشوائية الطبقية ٤٧

(٢-٢-جـ) العينة العشوائية المنتظمة ٤٩

الوحدة الثالثة: أساليب عرض البيانات ٥٤

٣-١ عرض وتمثيل البيانات ٥٦

(٣-١-أ) الجدول التكراري النسبي والمئوي ٥٧

(٣-١-ب) التمثيل البياني للبيانات ٥٨

(٣-١-ب-١) تمثيل البيانات الكيفية باستخدام القطاعات الدائرية ٥٨

(٣-١-ب-٢) تمثيل البيانات باستخدام المدرج التكراري - المنحنى التكراري - المضلع التكراري ٥٩

(٣-١-ب-٣) المضلع التكراري المتجمع الصاعد - المضلع التكراري المتجمع النازل ٦٢

(٣-١-ب-٤) تمثيل البيانات باستخدام الخط المنكسر ٦٤

الأعداد الحقيقية
Real Numbers

مشروع الوحدة: العلاقة بين الهندسة والأعداد الحقيقية

١ **مقدمة المشروع:** أثناء العمل على هذا المشروع سوف ترسم مثلثات قائمة الزاوية بمعلومية طول كل من ضلعي الزاوية القائمة، ثم تطبق قانون فيثاغورث لإيجاد طول الوتر.

٢ **الهدف:** إيجاد قيمة $\sqrt{٢}$، $\sqrt{٣}$، $\sqrt{٥}$ دون استخدام الآلة الحاسبة.

٣ **اللوازم:** مسطرة، فرجار، زاوية قائمة.

٤ **أسئلة حول التطبيق:**

أ ارسم مثلثًا قائم الزاوية، متطابق الضلعين، طول كل من ضلعي زاويته القائمة ١ سم.

- أوجد طول الوتر بتطبيق قانون فيثاغورث، ثم باستخدام المسطرة ماذا تستنتج؟
- $\sqrt{٢} \simeq$ ...

ب ارسم مثلثًا قائم الزاوية، طول ضلعي الزاوية القائمة ١ سم، $\sqrt{٢}$ سم.

- أوجد طول الوتر بتطبيق قانون فيثاغورث، ثم باستخدام المسطرة ماذا تستنتج؟
- $\sqrt{٣} \simeq$ ...

جـ بالطريقة نفسها أوجد قيمة $\sqrt{٤}$ ، $\sqrt{٥}$، ...

٥ **التقرير:** ضع تقريرًا مفصلًا تبين فيه كيف استخدمت الهندسة لإيجاد قيمة تقريبية لـ $\sqrt{٢}$ و $\sqrt{٣}$ ، ... ثم ضع ملصقًا يبيّن الأشكال التي رسمتها.

دروس الوحدة

١-١ الجذور والتعبيرات الجذرية والعمليات عليها	١-٢ الأسس النسبية وخواصها
(١-١-أ) الجذور والتعبيرات الجذرية	(١-٢-أ) الأسس النسبية
(١-١-ب) تبسيط التعبيرات الجذرية	(١-٢-ب) خواص الأسس النسبية
(١-١-جـ) جمع وطرح التعبيرات الجذرية	
(١-١-د) ضرب وقسمة التعبيرات الجذرية	
(١-١-هـ) المرافق واستخدامه	

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعرّفت الأعداد الحقيقية.
- تعرّفت الجذور التربيعية.
- استخدمت الآلة الحاسبة لإيجاد الجذور التربيعية.

ماذا سوف تتعلم؟

- الجذور والتعبيرات الجذرية.
- تبسيط التعبيرات الجذرية.
- جمع وطرح التعبيرات الجذرية.
- ضرب وقسمة التعبيرات الجذرية.
- إيجاد المرافق واستخدامه.
- كتابة عدد حقيقي بالصورة الجذرية.
- كتابة عدد حقيقي بالصورة الأسية.

المصطلحات الأساسية

الجذر التربيعي – الجذر التكعيبي – الجذر النوني – المرافق – دليل الجذر – الصورة الجذرية – المجذور – الصورة الأسية.

أضف إلى معلوماتك

المعكوس الضربي لكل عدد حقيقي موجب أكبر من واحد هو عدد حقيقي موجب أصغر من واحد.

إذًا يوجد أعداد حقيقية موجبة أصغر من واحد بقدر ما يوجد أعداد حقيقية موجبة أكبر من واحد.

١ – ١

الجذور والتعبيرات الجذرية والعمليات عليها

Roots and Radical Expressions and Operations

سوف تتعلم

- الجذور التربيعية والتكعيبية.
- جمع وطرح التعبيرات الجذرية.
- ضرب التعبيرات الجذرية.
- قسمة التعبيرات الجذرية.
- استخدام المرافق لكتابة كسر بصورة كسر مقامه عدد نسبي.

دعنا نفكر ونتناقش

١ مساحة مربّع طول ضلعه ٤ أمتار هي ٤ × ٤ = ١٦ مترًا مربعًا.

٢ أ مساحة مربع هي ٦٤ مترًا مربعًا.

أوجد طول ضلعه.

ب استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد طول ضلع مربع مساحته ٧٢ مترًا مربعًا.

٣ ما حجم مكعب إذا كان طول ضلعه ٥ أمتار؟

٤ ما طول ضلع مكعب إذا كان حجمه يساوي ٢٧ مترًا مكعبًا؟

(١ – ١ – أ) الجذور والتعبيرات الجذرية Roots and Radical Expressions

بما أن $٢٥ = (-٥)^{٢} = ٢٥$ ، فإن العددين ٥ و–٥ هما الجذران التربيعيان للعدد ٢٥.

بما أن $(+٥)^{٣} = +١٢٥$، فإن العدد $(+٥)$ هو الجذر التكعيبي للعدد $(+١٢٥)$.

وأيضًا $(-٥)^{٣} = -١٢٥$، فإن العدد (-٥) هو الجذر التكعيبي للعدد (-١٢٥).

وبالتالي:

- لكل عدد حقيقي موجب جذران تربيعيان أحدهما موجب والآخر سالب.
- لكل عدد حقيقي جذر تكعيبي واحد.

ملخص عدد الجذور لعدد حقيقي

العدد الحقيقي	عدد الجذور التربيعية	عدد الجذور التكعيبية
موجب	٢	١
صفر	١	١
سالب	٠	١

الجذور التكعيبية Cubic Roots

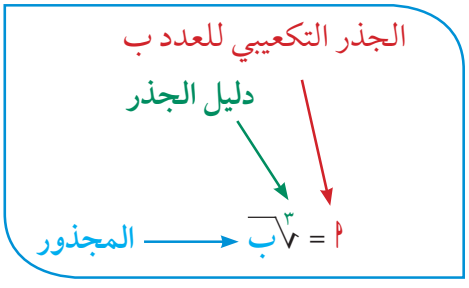
إذا كان $أ^{٣} = ب$ فإن $أ = \sqrt[٣]{ب}$ هو **الجذر التكعيبي** للعدد ب، ٣ هو **دليل الجذر**، ب هو **المجذور**.

وبالتالي:

لكل عدد حقيقي س:

$$\left(\sqrt[٣]{س}\right)^{٣} = س$$

$$\sqrt[٣]{س^{٣}} = س$$



مثال (١)

أوجد الجذر التكعيبي لكل عدد مما يلي:

أ -٨ ب ١٢٥

الحل:

أ الجذر التكعيبي للعدد (-٨) هو $\sqrt[٣]{-٨}$

$\sqrt[٣]{-٨} = \sqrt[٣]{(-٢)^{٣}}$ اكتب (-٨) على صورة مكعب كامل

$= -٢$ $\sqrt[٣]{س^{٣}} = س$ لكل س عدد حقيقي

$\therefore \sqrt[٣]{-٨} = -٢$

ب الجذر التكعيبي للعدد ١٢٥ هو $\sqrt[٣]{١٢٥}$

$\sqrt[٣]{١٢٥} = \sqrt[٣]{٥^{٣}}$ اكتب (١٢٥) على صورة مكعب كامل

$= ٥$ $\sqrt[٣]{س^{٣}} = س$ لكل س عدد حقيقي

حاول أن تحل

١ أوجد الجذر التكعيبي لكل عدد مما يلي:

أ -٢٧ ب ٦٤

(١-١-ب) تبسيط التعبيرات الجذرية

Simplifying Radical Expressions

متى يكون التعبير الجذري في أبسط صورة؟

يكون التعبير الجذري في أبسط صورة عندما:

- لا يكون للمجذور عوامل مرفوعة لقوة أكبر من أو تساوي دليل الجذر مثل: $\sqrt[٣]{س^{٥} ص^{٧}}$
- لا يوجد جذر في المقام مثل $\frac{٣}{\sqrt{٢}}$ أو $\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٥}}$
- لا يكون المجذور كسرًا مثل $\sqrt{\frac{٣}{٥}}$.
- يكون دليل الجذر **أصغر** عدد صحيح موجب ممكن مثل $\sqrt[١٢]{٦٤}$ ليس في أبسط صورة.

لأن: $\sqrt[١٢]{٦٤} = \sqrt[١٢]{٢^{٦}} = ٢^{\frac{٦}{١٢}} = ٢^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٢}$.

معلومة:

- كل مقدار يتضمن جذورًا يسمى تعبيرًا جذريًا.
- عندما يكون دليل الجذر يساوي ٢ فلا يكتب.
- الجذر التربيعي ل س يكتب $\sqrt{س}$ حيث $س \geq ٠$.
- $\sqrt{س^{٢}} = |س|$ لكل س عدد حقيقي.

مثال (٢)

بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

أ $\sqrt{٤س^{٦}}$ ب $\sqrt[٣]{٨س^{٣}}$ ج $\sqrt{١٦س^{٤}ص^{٦}}$

الحل:

أ $\sqrt{٤س^{٦}} = \sqrt{٢^{٢} \times (س^{٣})^{٢}}$ — اكتب $٤س^{٦}$ على صورة مربعات كاملة

$= \sqrt{(٢ \times س^{٣})^{٢}}$ — $س^{ن} \times ص^{ن} = (س \times ص)^{ن}$

$= |٢ \times س^{٣}|$ — $\sqrt{س^{٢}} = |س|$

$= ٢|س^{٣}| = ٢س^{٢}|س|$

ب $\sqrt[٣]{٨س^{٣}} = \sqrt[٣]{٢^{٣}س^{٣}}$ — اكتب $٨س^{٣}$ على صورة مكعبات كاملة

$= \sqrt[٣]{(٢س)^{٣}}$ — $س^{ن} \times ص^{ن} = (س \times ص)^{ن}$

$= ٢س$ — $\sqrt[٣]{س^{٣}} = س$

ج $\sqrt{١٦س^{٤}ص^{٦}} = \sqrt{(٤)^{٢}(س^{٢})^{٢}(ص^{٣})^{٢}}$ — اكتب $١٦س^{٤}ص^{٦}$ على صورة مكعبات كاملة

$= \sqrt{(٤س^{٢}ص^{٣})^{٢}}$ — $س^{ن} \times ص^{ن} = (س \times ص)^{ن}$

$= |٤س^{٢}ص^{٣}|$ — $\sqrt{س^{٢}} = |س|$

$= ٤س^{٢}|ص^{٣}|$

$= ٤س^{٢}ص^{٢}|ص|$

حاول أن تحل

٢ بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

أ $\sqrt{٩س^{٢}ص^{٤}}$ ب $\sqrt[٣]{-٢٧س^{٦}}$ ج $\sqrt{س^{٨}ص^{٦}}$

(١-١-جـ) جمع وطرح التعبيرات الجذرية

Addition and Subtraction of Radical Expressions

لجمع وطرح التعبيرات الجذرية يجب أن تكون **متشابهة**.

يكون التعبيران الجذريان متشابهين عندما يكون لهما دليل الجذر نفسه والمجذور نفسه.

يجب وضع التعبيرات الجذرية في **أبسط صورة** مما يسمح لنا بمعرفة ما إذا كانت متشابهة أم لا.

لاحظ أن:

$\sqrt[٣]{٥}$ ، $\sqrt[٣]{٢}$ — تعبيران جذريان متشابهان

$\sqrt{٨س}$ ، $-٣\sqrt{س}$ $(س \geq ٠)$ — تعبيران جذريان متشابهان

$\sqrt{٢٧}$ ، $\sqrt{١٢}$ — تعبيران جذريان متشابهان (لماذا؟)

في حين أن:

$٥\sqrt{٣}$ ، $٥\sqrt{٣}$ تعبيران جذريان غير متشابهين

$٨\sqrt{س}$ ، $-٣\sqrt{ص}$ $(س \geq ٠، ص \geq ٠)$ تعبيران جذريان غير متشابهين

تذكر:

نتعامل مع التعبيرات الجذرية المتشابهة مثل تعاملنا مع الحدود الجبرية المتشابهة.

مثال (٣)

أوجد الناتج في أبسط صورة في كل مما يلي:

أ $٣\sqrt{٥} + ٤\sqrt{٥}$

ب $\sqrt{٢٧} + ٣\sqrt{١٢} - \sqrt{٧٥}$

الحل:

أ $٣\sqrt{٥} + ٤\sqrt{٥} = (٣ + ٤)\sqrt{٥}$ اجمع

$= ٧\sqrt{٥}$

ب $\sqrt{٢٧} + ٣\sqrt{١٢} - \sqrt{٧٥} = \sqrt{٣ \times ٣^{٢}} + ٣\sqrt{٣ \times ٢^{٢}} - \sqrt{٣ \times ٥^{٢}}$ اكتب على صورة مربعات كاملة

$= ٣\sqrt{٣} + ٣ \times ٢\sqrt{٣} - ٣\sqrt{٥}$ $\sqrt{س^{٢}} = س$ ، $س \geq ٠$

$= ٣\sqrt{٣} + ٣\sqrt{٦} - ٣\sqrt{٥}$ اجمع

$= ٣\sqrt{٤}$

حاول أن تحل

٣ أوجد ناتج كل مما يلي في أبسط صورة:

أ $\sqrt{٥} + \sqrt{٢٠}$

ب $\sqrt{٤٨} - \sqrt{٥٠} - \sqrt{٨}$

مثال (٤)

أوجد الناتج في أبسط صورة:

أ $٢\sqrt[٣]{٣} + ٥\sqrt[٣]{٣٧٥}$

ب $٣\sqrt[٣]{٣٢} - \sqrt[٣]{٩٨}$

ج $\sqrt{١٨} + \sqrt{٥٠} - \sqrt{٧٢}$

د $\sqrt[٣]{١٢٨} + \sqrt[٣]{٥٤} - ٢\sqrt[٣]{٢٥٠}$

الحل:

أ $\sqrt[3]{٢} + \sqrt[3]{٥} = \sqrt[3]{٣٧٥} = \sqrt[3]{٣ \times ١٢٥}$ — اكتب ١٢٥ على صورة مكعب كامل

$= \sqrt[3]{٢} + \sqrt[3]{٣ \times ٥^{٣}}$ — $\sqrt[3]{س^{٣}} = س$

$= \sqrt[3]{٢} + \sqrt[3]{٥ \times ٥ \times ٥}$

$= \sqrt[3]{٢} + \sqrt[3]{٢٥}$ — بسّط

$= \sqrt[3]{٢٧}$

ب $\sqrt{٣} \times \sqrt{٣٢} - \sqrt{٩٨} = \sqrt{٣} \times \sqrt{٢ \times ١٦} - \sqrt{٢ \times ٤٩}$ — اكتب ١٦، ٤٩ على صورة مربعات كاملة

$= \sqrt{٣} \times \sqrt{٢ \times ٤^{٢}} - \sqrt{٢ \times ٧^{٢}}$ — $\sqrt{س^{٢}} = س$ ، $س \geq ٠$

$= \sqrt{٣} \times ٤\sqrt{٢} - \sqrt{٧}\sqrt{٢}$

$= \sqrt{١٢}\sqrt{٢} - \sqrt{٧}\sqrt{٢}$ — بسّط

$= \sqrt{٥}\sqrt{٢}$

جـ $\sqrt{١٨} + \sqrt{٥٠} - \sqrt{٧٢} = \sqrt{٢ \times ٩} + \sqrt{٢ \times ٢٥} - \sqrt{٢ \times ٣٦}$ — اكتب ٩، ٢٥، ٣٦ على صورة مربعات كاملة

$= \sqrt{٢ \times ٣^{٢}} + \sqrt{٢ \times ٥^{٢}} - \sqrt{٢ \times ٦^{٢}}$ — $\sqrt{س^{٢}} = س$ ، $س \geq ٠$

$= \sqrt{٣}\sqrt{٢} + \sqrt{٥}\sqrt{٢} - \sqrt{٦}\sqrt{٢}$

$= \sqrt{٢}\sqrt{٢}$ — بسّط

د $\sqrt[3]{١٢٨} + \sqrt[3]{٥٤} - \sqrt[3]{٢٥٠} = \sqrt[3]{٢ \times ٦٤} - \sqrt[3]{٢ \times ٢٧} - \sqrt[3]{٢ \times ١٢٥}$ — اكتب ٦٤، ٢٧، ١٢٥ على صورة مربعات كاملة

$= \sqrt[3]{٢ \times ٤^{٣}} + \sqrt[3]{٢ \times ٣^{٣}} - \sqrt[3]{٢ \times ٥^{٣}}$ — $\sqrt[3]{س^{٣}} = س$

$= ٤\sqrt[3]{٢} + ٣\sqrt[3]{٢} - ٥ \times ٢\sqrt[3]{٢}$

$= -٣\sqrt[3]{٢}$ — بسّط

حاول أن تحل

٤ أوجد الناتج في أبسط صورة.

أ $٤\sqrt[3]{٨} + ٢\sqrt[3]{٦٤}$

ب $٢\sqrt{٧٥} - \sqrt{٢٧}$

جـ $\sqrt{١٢} + \sqrt{١٤٧} - \sqrt{١٠٨}$

د $\sqrt[3]{٣٢٠} - \sqrt[3]{٤٠} - \sqrt[3]{١٣٥}$

(١-١-د) ضرب وقسمة التعبيرات الجذرية

Multiplication and Division of Radical Expressions

الجذور التربيعية	الجذور التكعيبية
س، ص عددان حقيقيان غير سالبين	س، ص عددان حقيقيان
$\sqrt{س^٢} = |س| = س$	$\sqrt[٣]{س^٣} = س$
$(\sqrt{س})^٢ = س$	$(\sqrt[٣]{س})^٣ = س$
$\sqrt{س} \times \sqrt{ص} = \sqrt{س \times ص}$	$\sqrt[٣]{س} \times \sqrt[٣]{ص} = \sqrt[٣]{س \times ص}$
$\frac{\sqrt{س}}{\sqrt{ص}} = \sqrt{\frac{س}{ص}}$ ، ص ≠ ٠	$\frac{\sqrt[٣]{س}}{\sqrt[٣]{ص}} = \sqrt[٣]{\frac{س}{ص}}$ ، ص ≠ ٠

مثال (٥)

بسّط كلًّا من التعبيرين الجذريين التاليين:

أ $\sqrt{٧٢ س^٣}$ حيث س ≤ ٠

ب $\sqrt[٣]{٨٠ن^٥}$

الحل:

أ $\sqrt{٧٢س^٣} = \sqrt{٢^٦ \times ٢ \times س^٢ \times س}$ — اكتب ٧٢، $س^٣$ على صورة مربعات كاملة

$= \sqrt{٢^٦ \times س^٢} \times \sqrt{٢ \times س}$ — $\sqrt{س \times ص} = \sqrt{س} \times \sqrt{ص}$ حيث س ≤ ٠، ص ≤ ٠

$= ٦|س| \times \sqrt{٢س}$ — $\sqrt{س^٢} = |س|$

$= ٦س \sqrt{٢س}$ — |س| = س لأن س ≤ ٠

ب $\sqrt[٣]{٨٠ن^٥} = \sqrt[٣]{٢^٣ \times ١٠ \times ن^٣ \times ن^٢}$ — اكتب ٨٠، $ن^٥$ على صورة مكعبات كاملة

$= \sqrt[٣]{٢^٣ \times ن^٣} \times \sqrt[٣]{١٠ن^٢}$ — $\sqrt[٣]{س \times ص} = \sqrt[٣]{س} \times \sqrt[٣]{ص}$ لكل س، ص أعداد حقيقية

$= ٢ن \sqrt[٣]{١٠ن^٢}$ — $\sqrt[٣]{س^٣} = س$ لكل عدد حقيقي س

حاول أن تحل

٥ بسّط كلًّا من التعبيرين الجذريين التاليين:

أ $\sqrt{٥٠ س^٤}$

ب $\sqrt[٣]{١٨ س^٣}$

مثال (٦)

اضرب ثم بسّط كلًّا مما يلي:

أ $\sqrt{٢} \times \sqrt{٨}$

ب $\sqrt[٣]{٥س^{٣}ص^{٤}} \times \sqrt[٣]{٥٤س^{٢}ص^{٣}}$

الحل:

أ $\sqrt{٢} \times \sqrt{٨} = \sqrt{٨ \times ٢}$ $\quad$ $\sqrt{س} \times \sqrt{ص} = \sqrt{س \times ص}$ حيث $س \geq ٠$، $ص \geq ٠$

$= \sqrt{١٦}$ $\quad$ اضرب

$= ٤$ $\quad$ بسّط

ب $\sqrt[٣]{٥س^{٣}ص^{٤}} \times \sqrt[٣]{٥٤س^{٢}ص^{٣}} = \sqrt[٣]{٥س^{٣}ص^{٤} \times ٥٤س^{٢}ص^{٣}}$ $\quad$ $\sqrt[٣]{س} \times \sqrt[٣]{ص} = \sqrt[٣]{س \times ص}$

$= \sqrt[٣]{٥س^{٣}ص^{٣} \times ٢ \times ٣^{٣} \times س^{٢} \times ص^{٣}}$ $\quad$ اكتب على صورة مكعبات كاملة

$= \sqrt[٣]{١٠ \times ٣^{٣} \times س^{٣} \times ص^{٣} \times ص^{٣} \times س^{٢} \times ص}$

$= \sqrt[٣]{٣^{٣}س^{٣}(ص^{٢})^{٣}} \times \sqrt[٣]{١٠س^{٢}ص}$ $\quad$ $\sqrt[٣]{س \times ص} = \sqrt[٣]{س} \times \sqrt[٣]{ص}$

$= ٣س ص^{٢} \sqrt[٣]{١٠س^{٢}ص}$ $\quad$ $\sqrt[٣]{س^{٣}} = س$

حاول أن تحل

٦ اضرب ثم بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

أ $٣\sqrt{٧س^{٣}} \times ٢\sqrt{س^{٣}ص^{٢}}$ حيث $س \geq ٠$

ب $٤\sqrt[٣]{س^{٤}ص} \times ٥\sqrt[٣]{س^{٢}ص}$

مثال (٧)

اقسم ثم بسّط كلًّا مما يلي:

أ $\frac{\sqrt[٣]{٣٢}}{\sqrt[٣]{-٤}}$

ب $\frac{\sqrt[٣]{١٦٢س^{٥}}}{\sqrt[٣]{٣س^{٢}}}$ حيث $س \neq ٠$

ج $\frac{\sqrt{٢٥٦س^{٣}}}{\sqrt{٣٢س}}$ حيث $س < ٠$

الحل:

أ $\frac{\sqrt[٣]{٣٢}}{\sqrt[٣]{-٤}} = \sqrt[٣]{\frac{٣٢}{-٤}}$ $\quad$ $\frac{\sqrt[٣]{س}}{\sqrt[٣]{ص}} = \sqrt[٣]{\frac{س}{ص}}$ حيث $ص \neq ٠$

$= \sqrt[٣]{-٨}$ $\quad$ اقسم

$= \sqrt[٣]{(-٢)^{٣}}$ $\quad$ اكتب -٨ على صورة مكعب كامل

$= -٢$ $\quad$ $\sqrt[٣]{س^{٣}} = س$

ب $\sqrt[3]{\frac{١٦٢س^{٥}}{٣س^{٢}}} = \sqrt[3]{\frac{١٦٢س^{٥}}{٣س^{٢}}}$ $\sqrt[3]{\frac{س}{ص}} = \frac{\sqrt[3]{س}}{\sqrt[3]{ص}}$ حيث ص ≠ ٠

$= \sqrt[3]{٥٤س^{٣}}$ اقسم

$= \sqrt[3]{٢ \times ٣^{٣} \times س^{٣}}$ اكتب ٥٤ على صورة مكعب كامل

$= \sqrt[3]{٢} \times \sqrt[3]{٣^{٣}} \sqrt[3]{س^{٣}}$ $\sqrt[3]{س \times ص} = \sqrt[3]{س} \times \sqrt[3]{ص}$

$= ٣س \sqrt[3]{٢}$ $\sqrt[3]{س^{٣}} = س$

جـ $\sqrt{\frac{٢٥٦س^{٣}}{٣٢س}} = \sqrt{\frac{٢٥٦س^{٣}}{٣٢س}}$ $\sqrt{\frac{س}{ص}} = \frac{\sqrt{س}}{\sqrt{ص}}$ حيث ص ≠ ٠

$= \sqrt{٨س^{٢}}$ اقسم

$= \sqrt{٢(٢س)^{٢}}$ اكتب $٨س^{٢}$ على صورة مربعات كاملة

$= |٢س| \sqrt{٢}$ $\sqrt{س^{٢}} = |س|$

$= ٢ \sqrt{٢} |س|$

$= ٢س \sqrt{٢}$ حيث س < ٠

حاول أن تحل

٧ اقسم ثم بسط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

أ $\frac{\sqrt{٢٤٣}}{\sqrt{٢٧}}$

ب $\frac{\sqrt{١٢س^{٤}}}{\sqrt{٣س}}$ حيث س < ٠

جـ $\frac{\sqrt[3]{١٢٨س^{١٥}}}{\sqrt[3]{٢س^{٢}}}$ حيث س ≠ ٠

مثال (٨)

بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

أ $(٤ + \sqrt{٣})^{٢}$ ب $(٤ + \sqrt{٣})(٤ - \sqrt{٣})$ جـ $(٦ + \sqrt{٣})(٢ - \sqrt{٢})$

الحل:

أ $(٤ + \sqrt{٣})^{٢} = ١٦ + ٨\sqrt{٣} + ٣$

$= ١٩ + ٨\sqrt{٣}$

$(أ + ب)^{٢} = أ^{٢} + ٢أب + ب^{٢}$

جمع الحدود المتشابهة

ب $(٤ + \sqrt{٣})(٤ - \sqrt{٣}) = ١٦ - ٣$

$= ١٣$

$(أ + ب)(أ - ب) = أ^{٢} - ب^{٢}$

جـ $(٦ + \sqrt{٣})(٢ - \sqrt{٢}) = ١٢ - ٦\sqrt{٢} + ٢\sqrt{٣} - ٦\sqrt{٣}$

حاول أن تحل

بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

٨ أ $(٥ - \sqrt{٣})^{٢}$ ب $(٧ + \sqrt{٥})(٣ - \sqrt{٢})$ جـ $(٦ + \sqrt{٥})(٦ - \sqrt{٥})$

(١-١-هـ) المرافق واستخدامه Conjugate and its Use

$\sqrt{٢}$ يسمى مرافق لِـ $\sqrt{٢}$، لأن $\sqrt{٢} \times \sqrt{٢} = ٢$ (عدد نسبي).

$٣ + \sqrt{٢}$ يسمى مرافق لِـ $٣ - \sqrt{٢}$، لأن $(٣ + \sqrt{٢}) \times (٣ - \sqrt{٢}) = ٩ - ٢ = ٧$ (عدد نسبي).

$\sqrt[٣]{٢٥}$ يسمى مرافق لِـ $\sqrt[٣]{٥}$، لأن $\sqrt[٣]{٢٥} \times \sqrt[٣]{٥} = \sqrt[٣]{٣٥} = ٥$ (عدد نسبي).

معلومة رياضية:

$\sqrt{أ} + \sqrt{ب}$، $\sqrt{أ} - \sqrt{ب}$ **مقداران مترافقان.**

إذا كان س، ص تعبيران جذريان يمثلان أعدادًا غير نسبية، وكان ناتج ضرب س في ص عددًا نسبيًّا فإن س، ص مترافقان.

يمكن إعادة كتابة كسر يحوي مقامه جذورًا تربيعية أو جذورًا تكعيبية بصورة كسر مقامه عدد نسبي، وذلك بضرب بسط الكسر ومقامه في **مرافق المقام**.

مثال (٩)

اختصر كلًّا مما يلي بحيث يكون المقام عددًا نسبيًا.

أ) $\frac{\sqrt{٢}+١}{\sqrt{٣}}$

ب) $\frac{١-\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}-٣}$

الحل:

أ) $\frac{\sqrt{٢}+١}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٢}+١}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}}$ — اضرب بسط الكسر ومقامه في مرافق المقام

$= \frac{\sqrt{٢} \times \sqrt{٣} + \sqrt{٣}}{(\sqrt{٣})^{٢}}$ — خاصية التوزيع

$= \frac{\sqrt{٦} + \sqrt{٣}}{٣}$ — بسّط

$\therefore \frac{\sqrt{٦}+\sqrt{٣}}{٣} = \frac{\sqrt{٢}+١}{\sqrt{٣}}$ — المقام عدد صحيح

ب) $\frac{١-\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}-٣} = \frac{(١-\sqrt{٢})}{(\sqrt{٢}-٣)} \times \frac{(\sqrt{٢}+٣)}{(\sqrt{٢}+٣)}$ — اضرب بسط الكسر ومقامه في مرافق المقام

$= \frac{\sqrt{٢} - ٣ - \sqrt{٢} \times \sqrt{٢} + \sqrt{٢}٣}{(\sqrt{٢})^{٢} - ٣^{٢}}$ — $(أ - ب)(أ + ب) = أ^{٢} - ب^{٢}$

$= \frac{\sqrt{٢} - ٣ - ٢ + \sqrt{٢}٣}{٢ - ٩}$ — بسّط

$= \frac{١ - \sqrt{٢}٢}{٧}$

حاول أن تحل

٩ اختصر كلًّا مما يلي بحيث يكون المقام عددًا نسبيًا.

أ) $\frac{\sqrt{٢}+\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}}$

ب) $\frac{\sqrt{٢}-٣}{\sqrt{٢}-٢}$

مثال (١٠) ربط بالحياة

قانون أينشتاين ط = ك × س^{٢} يربط بين الطاقة ط والكتلة ك وسرعة الضوء س.

أ أوجد قيمة س بدلالة ط، ك.

ب أعد كتابة إجابتك في أ بحيث يكون المقام خاليًا من الجذور.

الحل:

أ $ط = ك \times س^{٢}$ اكتب القانون

$س^{٢} = \frac{ط}{ك}$ اقسم طرفي المعادلة على ك؛ $ك \neq ٠$

$س = \sqrt{\frac{ط}{ك}}$ ، $س > ٠$

ب $س = \sqrt{\frac{ط}{ك}}$

$س = \frac{\sqrt{ط}}{\sqrt{ك}}$ $\sqrt{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}}$ حيث $أ > ٠ ، ب > ٠$

$س = \frac{\sqrt{ط}}{\sqrt{ك}} \times \frac{\sqrt{ك}}{\sqrt{ك}}$ اضرب بسط الكسر ومقامه في مرافق المقام

$س = \frac{\sqrt{ط \times ك}}{ك}$

حاول أن تحل

١٠ القانون ع = $\frac{٢ \times ف}{ن^{٢}}$ يربط بين العجلة ع، والمسافة ف، والوقت ن لجسم متحرك بعجلة منتظمة.

أ أوجد ن بدلالة ع، ف.

ب أعد كتابة إجابتك في أ بحيث يكون المقام خاليًا من الجذور.

مثال (١١)

أوجد قيمة التعبير: $\frac{(س+١)^{٢}(٣س-٢)}{٧س-٤}$ حيث س = $١-\sqrt{٢}\sqrt{٧}$. ثم بسّط الناتج

الحل:

$$\frac{(س+١)^{٢}(٣س-٢)}{٧س-٤} = \frac{(١-\sqrt{٢}\sqrt{٧}+١)^{٢}(٣)(١-\sqrt{٢}\sqrt{٧}-٢)}{٤-(١-\sqrt{٢}\sqrt{٧})٧}$$ عوّض س بقيمتها

$$= \frac{(\sqrt{٢}\sqrt{٧})^{٢}(٣\sqrt{٢}\sqrt{٧}-٥)}{١١-٧\sqrt{٢}\sqrt{٧}}$$ بسّط

$$= \frac{٢(٣\sqrt{٢}\sqrt{٧}-٥)(١١+٧\sqrt{٢}\sqrt{٧})}{(١١-٧\sqrt{٢}\sqrt{٧})(١١+٧\sqrt{٢}\sqrt{٧})}$$ اضرب بسط الكسر ومقامه في مرافق المقام

$$= \frac{٢(٤٢+٣٣\sqrt{٢}\sqrt{٧}-٣٥\sqrt{٢}\sqrt{٧}-٥٥)}{(١١)^{٢}-(٧\sqrt{٢}\sqrt{٧})^{٢}}$$ خاصية التوزيع

$$= \frac{٢(-١٣-٢\sqrt{٢}\sqrt{٧})}{٩٨-١٢١}$$ جمع الحدود المتشابهة

$$= \frac{-٢(١٣+٢\sqrt{٢}\sqrt{٧})}{-٢٣}$$

$$= \frac{٢٦+٤\sqrt{٢}\sqrt{٧}}{٢٣}$$ بسّط

حاول أن تحل

١١ أوجد قيمة التعبير: $\frac{(س-٢)^{٣}}{س+١}$ حيث س = $٢-\sqrt{٣}\sqrt{٧}$. ثم بسّط الناتج

الأسس النسبية وخواصها

Rational Exponents and Properties

سوف تتعلم

- كتابة عدد حقيقي في الصورة الجذرية.
- كتابة عدد حقيقي في الصورة الأسية.
- تحويل من الصورة الجذرية إلى الصورة الأسية.
- تحويل من الصورة الأسية إلى الصورة الجذرية.

دعنا نفكر ونتناقش

عرفت سابقًا أن $س^{٣} \times س^{٣} = س^{٦}$ $\quad (٦ = ٣ + ٣)$

وقلنا أن $س^{٣}$ هو جذر تربيعي لِـ $س^{٦}$ $\quad \left(\frac{٦}{٢} = ٣\right)$

كذلك $س^{٢} \times س^{٢} = س^{٤}$

∴ $س^{٢}$ جذر تربيعي لِـ $س^{٤}$.

$س^{-١} \times س^{-١} = س^{-٢}$

∴ $س^{-١}$ جذر تربيعي لِـ $س^{-٢}$ ، $س \neq ٠$

الجذر التربيعي الأساسي للعدد الموجب س هو $\sqrt{س}$

ويكون: $\sqrt{س} \times \sqrt{س} = س$

وإذا كتبنا هذه العبارة في الصورة الأسية

$س^{\square} \times س^{\square} = س = س^{١}$ (لماذا؟)

بالمقارنة مع ما ورد أعلاه نستطيع أن نكتب:

$\square + \square = ١$

∴ $\square = \frac{١}{٢}$

$\sqrt{س} \times \sqrt{س} = س$ تكتب $س^{\frac{١}{٢}} \times س^{\frac{١}{٢}} = س$

وقد اعتمدت هذه الصورة وعممت لكتابة أي تعبير جذري.

(١ – ٢ – أ) الأسس النسبية

Rational Exponents

الصورة الجذرية	الصورة الأسية
$\sqrt{٢٥}$	$٢٥^{\frac{١}{٢}}$
$\sqrt[٣]{٢٧}$	$٢٧^{\frac{١}{٣}}$
$\sqrt[٤]{٦٤}$	$٦٤^{\frac{١}{٤}}$

يعبّر دليل الجذر عن الجذر الذي تريده، وفي الصورة الأسية يصبح دليل الجذر مقامًا للأس كما هو مبيّن في الجدول السابق.

الجذر النوني
n^{th} root

- إذا كان $أ$ عددًا حقيقيًّا، ن $\in$ صـ$_+$، ن $\geq$ ٢، فإن الجذر النوني للعدد $أ$ يرمز له بالرمز $\sqrt[ن]{أ}$ ويساوي عددًا حقيقيًّا ب بحيث ب^{ن} = $أ$.

- إذا كان الجذر النوني للعدد $أ$ هو عددًا حقيقيًا، م عددًا صحيحًا، ن $\in$ صـ$_+$، ن $\geq$ ٢، فإن:
- $\sqrt[ن]{أ} = أ^{\frac{١}{ن}}$
- $\sqrt[ن]{أ^{م}} = (\sqrt[ن]{أ})^{م} = (أ^{\frac{١}{ن}})^{م} = أ^{\frac{م}{ن}}$
- $\sqrt[ن]{أ^{ن}} = \begin{cases} |أ| & \text{إذا كان ن عددًا زوجيًا} \\ أ & \text{إذا كان ن عددًا فرديًا} \end{cases}$

- إذا كان $\sqrt[ن]{أ}$ ، $\sqrt[ن]{ب}$ عددين حقيقيين، فإن:
- $\sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[ن]{ب} = \sqrt[ن]{أ \times ب}$
- $\frac{\sqrt[ن]{أ}}{\sqrt[ن]{ب}} = \sqrt[ن]{\frac{أ}{ب}}$ ، ب $\neq$ ٠

مثال (١)

بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

أ $\sqrt[٤]{١٦}$ ب $\sqrt[٥]{-٣٢}$ جـ $\sqrt[٦]{٦٤س^{١٢}}$

الحل:

أ $\sqrt[٤]{١٦} = \sqrt[٤]{٤^{٢}}$ — $\sqrt[ن]{س^{ن}} = |س|$ — ن عدد زوجي

$= |٢|$ — $|س| = س$ — س $\geq$ ٠

$= ٢$

ب $\sqrt[٥]{-٣٢} = \sqrt[٥]{(-٢)^{٥}}$ — $\sqrt[ن]{س^{ن}} = س$ — ن عدد فردي

$= -٢$

جـ $\sqrt[٦]{٦٤س^{١٢}} = \sqrt[٦]{٢^{٦}(س^{٢})^{٦}}$

$= \sqrt[٦]{(٢س^{٢})^{٦}}$ — $\sqrt[ن]{س^{ن}} = |س|$ — ن عدد زوجي

$= |٢س^{٢}|$ — $|س| = س$ — س $\geq$ ٠

$= ٢س^{٢}$

حاول أن تحل

١ بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

أ $-\sqrt[٥]{٢٤٣}$ ب $\sqrt[٤]{٦٢٥}$ جـ $\sqrt[٧]{س^{١٤}}$

مثال (٢)

اكتب كل عدد مما يلي في الصورة الجذرية، ثم بسّط:

أ $١٢٥^{\frac{١}{٣}}$ ب $٥^{\frac{١}{٢}} \times ٥^{\frac{١}{٢}}$ جـ $١٠^{\frac{١}{٣}} \times ١٠٠^{\frac{١}{٣}}$

الحل:

أ $١٢٥^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{١٢٥}$ — اكتب العدد $١٢٥^{\frac{١}{٣}}$ بالصورة الجذرية

$= \sqrt[٣]{٥^{٣}}$ — اكتب ١٢٥ على صورة مكعب كامل

$= ٥$ — $\sqrt[٣]{س^{٣}} = س$

$\therefore ١٢٥^{\frac{١}{٣}} = ٥$

ب $٥^{\frac{١}{٢}} \times ٥^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٥} \times \sqrt{٥}$ — اكتب $٥^{\frac{١}{٢}}$ بالصورة الجذرية

$= ٥$ — $\sqrt{س} \times \sqrt{س} = \left(\sqrt{س}\right)^{٢} = س$ لكل $س \geq ٠$

$\therefore ٥^{\frac{١}{٢}} \times ٥^{\frac{١}{٢}} = ٥$

جـ $١٠^{\frac{١}{٣}} \times ١٠٠^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{١٠} \times \sqrt[٣]{١٠٠}$ — اكتب $١٠^{\frac{١}{٣}}$ و $١٠٠^{\frac{١}{٣}}$ بالصورة الجذرية

$= \sqrt[٣]{١٠ \times ١٠٠}$ — $\sqrt[٣]{س} \times \sqrt[٣]{ص} = \sqrt[٣]{س \times ص}$

$= \sqrt[٣]{١٠ \times ١٠^{٢}}$

$= \sqrt[٣]{١٠^{٣}}$ — $س^{م} \times س^{ن} = س^{م+ن}$

$= ١٠$ — $\sqrt[٣]{س^{٣}} = س$

$\therefore ١٠^{\frac{١}{٣}} \times ١٠٠^{\frac{١}{٣}} = ١٠$

حاول أن تحل

٢ اكتب كل عدد مما يلي في الصورة الجذرية، ثم بسّط:

أ $١٦^{\frac{١}{٤}}$ ب $٣^{\frac{١}{٢}} \times ٣^{\frac{١}{٢}}$ جـ $٧^{\frac{١}{٣}} \times ٤٩^{\frac{١}{٣}}$

مثال (٣)

اكتب العدد $٢٥^{\frac{٣}{٢}}$ بالصورة الجذرية، ثم بسّط:

الحل:

$٢٥^{\frac{٣}{٢}} = ٢٥^{٣ \times \frac{١}{٢}}$ $\quad \frac{م}{ن} = م \times \frac{١}{ن}$

$= \left(٢٥^{٣}\right)^{\frac{١}{٢}}$ $\quad س^{م ن} = \left(س^{م}\right)^{ن}$

$= \sqrt{٢٥^{٣}}$ $\quad س^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{س}$ لكل $س \geq ٠$

$= \left(\sqrt{٢٥}\right)^{٣} = ٥^{٣} = ١٢٥$ $\quad \sqrt[ن]{س^{م}} = \left(\sqrt[ن]{س}\right)^{م}$

$\therefore ٢٥^{\frac{٣}{٢}} = ١٢٥$

حاول أن تحل

٣ اكتب العدد $٦٤^{\frac{٤}{٣}}$ بالصورة الجذرية، ثم بسّط.

مثال (٤)

أ اكتب $س^{\frac{٢}{٥}}$ ، $ص^{\frac{٥}{٢}}$ بالصورة الجذرية لكل $ص > ٠$ ، ثم بسّط إن أمكن:

ب اكتب $\sqrt[٥]{ص}$، $\sqrt{ب^{٣}}$، $\left(\sqrt[٣]{س}\right)^{٥}$ بالصورة الأسية لكل $ب > ٠$.

الحل:

أ $س^{\frac{٢}{٥}} = \left(س^{\frac{١}{٥}}\right)^{٢}$ $\quad س^{م \times ن} = \left(س^{م}\right)^{ن}$

$= \left(\sqrt[٥]{س}\right)^{٢}$ $\quad س^{\frac{١}{٥}} = \sqrt[٥]{س}$

$= \sqrt[٥]{س^{٢}}$ $\quad \left(\sqrt[ن]{س}\right)^{م} = \sqrt[ن]{س^{م}}$

$\therefore س^{\frac{٢}{٥}} = \sqrt[٥]{س^{٢}}$

$ص^{\frac{٥}{٢}} = \left(ص^{٥}\right)^{\frac{١}{٢}}$ $\quad س^{م \times ن} = \left(س^{م}\right)^{ن}$

$= \sqrt{ص^{٥}} = \sqrt{(ص^{٢})^{٢} ص}$ $\quad س^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{س}$ ، لكل $س > ٠$

$= |ص^{٢}| \times \sqrt{ص}$

$= ص^{٢} \sqrt{ص}$ $\quad |س^{٢}| = س^{٢}$

$\therefore ص^{\frac{٥}{٢}} = ص^{٢} \sqrt{ص}$

ب $\sqrt[٥]{ص} = ص^{\frac{١}{٥}}$

$\sqrt[ن]{س} = س^{\frac{١}{ن}}$ ، لكل س > ٠

$\sqrt{ب^{٣}} = (ب^{٣})^{\frac{١}{٢}}$

$= ب^{٣ \times \frac{١}{٢}}$

$= ب^{\frac{٣}{٢}}$

$\therefore \sqrt{ب^{٣}} = ب^{\frac{٣}{٢}}$

$(س^{م})^{ن} = س^{م \times ن}$

اضرب

$(\sqrt[٣]{س})^{٥} = (س^{\frac{١}{٣}})^{٥}$

$= س^{\frac{١}{٣} \times ٥}$

$= س^{\frac{٥}{٣}}$

$\therefore (\sqrt[٣]{س})^{٥} = س^{\frac{٥}{٣}}$

$\sqrt[٣]{س} = س^{\frac{١}{٣}}$

$(س^{م})^{ن} = س^{م \times ن}$

اضرب

حاول أن تحل

٤ أ اكتب $ص^{\frac{٣}{٨}}$ لكل ص > ٠ بالصورة الجذرية.

ب بسّط $س^{٠,٤}$ لكل س ≥ ٠ ثم اكتب بالصورة الجذرية.

جـ اكتب $\sqrt[٣]{س^{٢}}$ ، $(\sqrt{ص})^{٣}$ لكل ص ≥ ٠ بالصورة الأسية.

مثال (٥) ربط بالحياة

إن عدم شعور رائد الفضاء بانعدام الوزن في رحلة فضائية يعود إلى دوران جهاز يجلس عليه، ويشعره بجاذبية وهمية تحاكي الجاذبيه الأرضية.

يدور الجهاز وفق المعادلة الرياضية:

$$ن = \frac{و^{٠,٥}}{٢ \times \pi \times نه^{٠,٥}}$$

حيث ن: السرعة الدورانية وتقاس بالدورة في الثانية.

نه: نصف قطر جهاز الدوران ويقاس بالمتر.

و: الجاذبية الوهمية التي تحاكي الجاذبية الأرضية.

احسب سرعة دوران جهاز طول نصف قطره ١,٧ متر، يدور ليحاكي الجاذبية الأرضية التي تساوي ٨,٩ م/ ث^{٢}.

الحل:

$$ن = \frac{و^{٠,٥}}{٢ \times \pi \times نق^{٠,٥}}$$ اكتب المعادلة

$$= \frac{(٨,٩)^{٠,٥}}{٢ \times \pi \times (١,٧)^{٠,٥}}$$ عوّض

$$\simeq ٠,٣٨٢$$ استخدم الآلة الحاسبة

∴ سرعة دوران الجهاز تساوي تقريبًا ٠,٣٨٢ دورة في الثانية.

حاول أن تحل

٥ احسب السرعة الدورانية المطلوبة للجهاز في المثال (٥) ليحاكي جاذبية تعادل نصف مقدار الجاذبية الأرضية.

(١-٢-ب) خواص الأسس النسبية Properties of Rational Exponents

ليكن م، ن عددين نسبيين و$أ$، ب عددين حقيقيين حيث $أ^{م}$، $أ^{ن}$، $ب^{م}$، $ب^{ن}$ أعداد حقيقية.

نكتب الخواص التالية:

خواص	أمثلة
$ب^{م} \times ب^{ن} = ب^{م+ن}$	$٨^{\frac{١}{٣}} \times ٨^{\frac{٢}{٣}} = ٨^{\frac{٣}{٣}} = ٨^{١} = ٨$
$(ب^{م})^{ن} = ب^{م \times ن}$	$(٥^{\frac{١}{٢}})^{٤} = ٥^{\frac{١}{٢} \times ٤} = ٥^{٢} = ٢٥$
$(أ \times ب)^{ن} = أ^{ن} \times ب^{ن}$	$(٤ \times ٥)^{\frac{١}{٢}} = ٤^{\frac{١}{٢}} \times ٥^{\frac{١}{٢}} = ٢ \times ٥^{\frac{١}{٢}}$
$ب^{-ن} = \frac{١}{ب^{ن}}$ لكل ب ≠ ٠	$٩^{-\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٩^{\frac{١}{٢}}} = \frac{١}{\sqrt{٩}} = \frac{١}{٣}$
$\frac{ب^{م}}{ب^{ن}} = ب^{م-ن}$ لكل ب ≠ ٠	$\frac{٩^{\frac{٣}{٢}}}{٩^{\frac{١}{٢}}} = ٩^{\frac{٣}{٢}-\frac{١}{٢}} = ٩^{١} = ٩$
$(\frac{أ}{ب})^{م} = \frac{أ^{م}}{ب^{م}}$ لكل ب ≠ ٠	$(\frac{٥}{٢٧})^{\frac{١}{٣}} = \frac{٥^{\frac{١}{٣}}}{٢٧^{\frac{١}{٣}}} = \frac{٥^{\frac{١}{٣}}}{٣}$

يقدّر علماء الآثار عمر المحفورات باستخدام الأسس النسبية

مثال (٦)

بسّط كلًّا مما يلي:

أ $٤^{\frac{٢}{٥}} \times ٤^{\frac{١}{٥}}$ ب $\left(٥^{\frac{١}{٢}}\right)^{٣}$ جـ $\left(٥ \times ٧\right)^{\frac{١}{٢}}$ د $٣^{-\frac{١}{٢}}$ هـ $\frac{١٧^{\frac{٥}{٣}}}{١٧^{\frac{١}{٢}}}$

الحل:

أ $٤^{\frac{٢}{٥}} \times ٤^{\frac{١}{٥}} = ٤^{\frac{٢}{٥}+\frac{١}{٥}} = ٤^{\frac{٣}{٥}} = \sqrt[٥]{٤^{٣}} = \sqrt[٥]{٦٤} = \sqrt[٥]{٢^{٦}} = ٢\sqrt[٥]{٢}$

ب $\left(٥^{\frac{١}{٢}}\right)^{٣} = ٥^{\frac{١}{٢} \times ٣} = ٥^{\frac{٣}{٢}} = \sqrt{٥^{٣}} = ٥\sqrt{٥}$

جـ $\left(٥ \times ٧\right)^{\frac{١}{٢}} = ٥^{\frac{١}{٢}} \times ٧^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٥} \times \sqrt{٧} = \sqrt{٣٥}$

د $٣^{-\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٣^{\frac{١}{٢}}} = \frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$

هـ $\frac{١٧^{\frac{٥}{٣}}}{١٧^{\frac{١}{٢}}} = ١٧^{\frac{٥}{٣}-\frac{١}{٢}} = ١٧^{\frac{١٠}{٦}-\frac{٣}{٦}} = ١٧^{\frac{٧}{٦}} = ١٧\sqrt[٦]{١٧}$

حاول أن تحل

٦ بسّط كلًّا مما يلي:

أ $٥^{\frac{١}{٣}} \times ٥^{\frac{٢}{٣}}$ ب $\left(٧^{\frac{١}{٣}}\right)^{٢}$ جـ $\left(٢٣\right)^{\frac{١}{٢}}$ د $٦^{-\frac{١}{٢}}$ هـ $\frac{٨^{\frac{١}{٣}}}{٨^{\frac{١}{٣}}}$

مثال (٧)

بسّط كلًّا من الأعداد التالية:

أ $\left(٣٢\right)^{\frac{٣}{٥}}$ ب $٤^{٣,٥}$

الحل:

أ $(٣٢)^{\frac{٣}{٥}} = \left((٣٢)^{\frac{١}{٥}}\right)^{٣}$ $\quad$ $س^{م \times ن} = (س^{م})^{ن}$

$= \left((٢)^{٥}\right)^{\frac{١}{٥}}^{٣}$ $\quad$ $٣٢ = ٢^{٥}$

$= \left((٢)^{٥ \times \frac{١}{٥}}\right)^{٣}$ $\quad$ $(س^{م})^{ن} = س^{م \times ن}$

$= (٢)^{٣} = ٨$ $\quad$ اضرب

$\therefore (٣٢)^{\frac{٣}{٥}} = ٨$

ب $٤^{٣,٥} = ٤^{\frac{٧}{٢}}$ — حوّل ٥ , ٣ إلى كسر مركب

$= (٢^{٢})^{\frac{٧}{٢}}$ — $٤ = ٢^{٢}$

$= (٢)^{\frac{١}{٢}(٢)^{٧}}$ — $س^{م \times ن} = (س^{م})^{ن}$

$= (٢)^{\frac{١}{٢} \times ٢^{٧}}$ — $(س^{م})^{ن} = س^{م \times ن}$

$= ٢^{٧} = ١٢٨$ — اضرب

$\therefore \quad ٤^{٣,٥} = ١٢٨$

حاول أن تحل

٧ بسّط كل عدد من الأعداد التالية:

أ $٥^{\frac{٣}{٢}}$ ب $١٦^{\frac{٣}{٤}}$ جـ $(٣٢)^{\frac{٤}{٥}}$

مثال (٨)

أوجد ناتج كل مما يلي:

أ $\sqrt[٤]{٥} \times \sqrt[٤]{٧}$ ب $\frac{\sqrt[٣]{١٦}}{\sqrt[٣]{٢}}$

الحل:

طريقة أولى:

أ $\sqrt[٤]{٥} \times \sqrt[٤]{٧} = ٥^{\frac{١}{٤}} \times ٧^{\frac{١}{٤}}$ — $\sqrt[ن]{س} = س^{\frac{١}{ن}}$

$= (٥ \times ٧)^{\frac{١}{٤}}$ — $س^{م} \times ص^{م} = (س \times ص)^{م}$

$= (٣٥)^{\frac{١}{٤}}$ — اضرب

$= \sqrt[٤]{٣٥}$ — $س^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{س}$

طريقة ثانية:

$\sqrt[٤]{٥} \times \sqrt[٤]{٧} = \sqrt[٤]{٥ \times ٧}$ — $\sqrt[ن]{س} \times \sqrt[ن]{ص} = \sqrt[ن]{س \times ص}$

$= \sqrt[٤]{٣٥}$ — اضرب

$\therefore \sqrt[٤]{٥} \times \sqrt[٤]{٧} = \sqrt[٤]{٣٥}$

طريقة أولى:

ب $\frac{\sqrt[3]{١٦}}{\sqrt[3]{٢}} = \frac{١٦^{\frac{١}{٣}}}{٢^{\frac{١}{٣}}}$

$= \left(\frac{١٦}{٢}\right)^{\frac{١}{٣}}$

$= ٨^{\frac{١}{٣}}$

$= \sqrt[3]{٨}$

$= ٢$

$\sqrt[ن]{س} = س^{\frac{١}{ن}}$

$\frac{س^{ن}}{ص^{ن}} = \left(\frac{س}{ص}\right)^{ن}$ لكل ص ≠ ٠

اقسم

$س^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{س}$

بسّط

طريقة ثانية:

$\frac{\sqrt[3]{١٦}}{\sqrt[3]{٢}} = \sqrt[3]{\frac{١٦}{٢}}$

$= \sqrt[3]{٨}$

$= \sqrt[3]{٣٢}$

$= ٢$

$\therefore \frac{\sqrt[3]{١٦}}{\sqrt[3]{٢}} = ٢$

$\frac{\sqrt[ن]{س}}{\sqrt[ن]{ص}} = \sqrt[ن]{\frac{س}{ص}}$ ، حيث ص ≠ ٠

اقسم

اكتب ٨ على صورة مكعب كامل

$\sqrt[3]{س^{٣}} = س$

حاول أن تحل

٨ أوجد الناتج في كل مما يلي:

أ $\sqrt[٣]{٩} \times \sqrt[٣]{٢٧}$

ب $\frac{\sqrt[3]{٢٤٣}}{\sqrt[3]{٣}}$

المرشد لحل المسائل

بهدف تعزيز حب رياضة كرة القدم لدى الناشئة، أقام أحد النوادي ملعبًا لتدريبهم.

استخدم المعادلة:

ع = ٤√س لمعرفة طول سور الملعب ع، بمعلومية مساحة الملعب س.

أ تبلغ مساحة الملعب الحالية ١ ٥٠٠ متر مربع.

فما طول السور اللازم لإحاطته؟

ب قررت إدارة النادي زيادة مساحة الملعب لتصبح ٤ أمثال ما كانت عليه محافظة على شكلها.

فما طول السور الإضافي؟

الحل:

أ لمعرفة طول السور، أعوض عن س بـ ١ ٥٠٠ في المعادلة ع = ٤√س.

ع = ٤√١ ٥٠٠ ≃ ١٥٤,٩٢

يبلغ طول السور حوالى ١٥٥ مترًا.

ب مساحة الملعب بعد الزيادة = ١ ٥٠٠ × ٤ = ٦ ٠٠٠ متر مربع.

باستخدام المعادلة ع = ٤√س ، نحصل على:

ع = ٤√٦ ٠٠٠ ≃ ٣٠٩,٨

أي حوالى ٣١٠ أمتار.

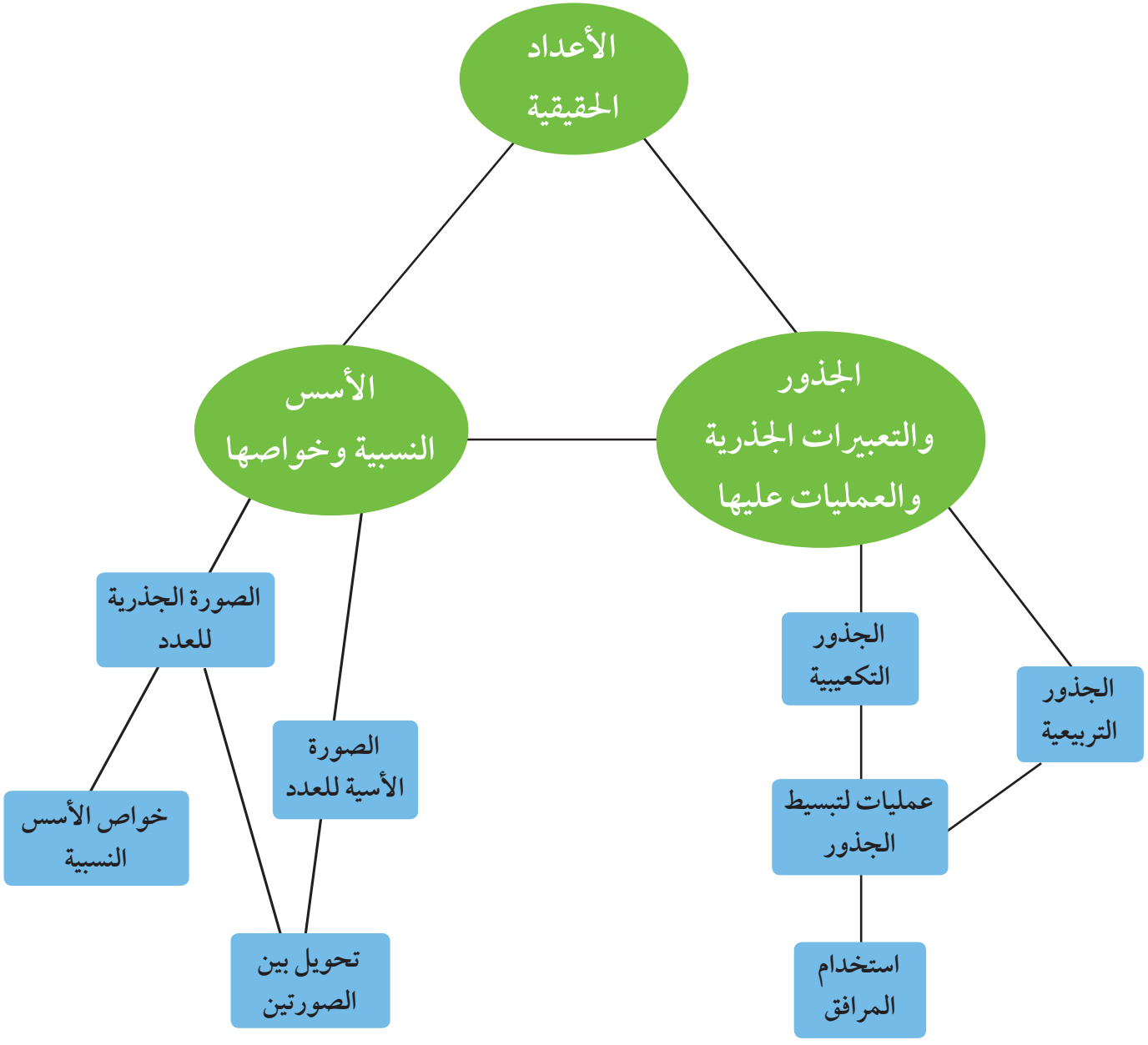
طول السور الإضافي: ٣١٠ – ١٥٥ = ١٥٥ مترًا.

ملاحظة: عندما أصبحت مساحة الملعب ٤ أمثال ما كانت عليه في السابق، أصبح طول السور الحالي مثلي طول السور السابق.

مسألة إضافية

أوجد أبعاد قطعة أرض مستطيلة الشكل، يساوي طولها ثلاثة أمثال عرضها، ومساحتها ٢ ٧٠٠ متر مربع.

مخطط تنظيمي للوحدة الأولى



ملخص

- لكل عدد حقيقي موجب جذران تربيعيان أحدهما موجب والآخر سالب.
- لكل عدد حقيقي جذر تكعيبي واحد.
- خواص الجذور التربيعية (س ≤ ٠، ص ≤ ٠):

$\sqrt{س^{٢}} = |س| = س$

$(\sqrt{س})^{٢} = س$

$\sqrt{س} \times \sqrt{ص} = \sqrt{س \times ص}$

$\frac{\sqrt{س}}{\sqrt{ص}} = \sqrt{\frac{س}{ص}}$ ، $ص \neq ٠$

- خواص الجذور التكعيبية:

$\sqrt[٣]{س^{٣}} = س$

$(\sqrt[٣]{س})^{٣} = س$

$\sqrt[٣]{س} \times \sqrt[٣]{ص} = \sqrt[٣]{س \times ص}$

$\frac{\sqrt[٣]{س}}{\sqrt[٣]{ص}} = \sqrt[٣]{\frac{س}{ص}}$ ، $ص \neq ٠$

- $\sqrt{س} - \sqrt{ص}$ ، $\sqrt{س} + \sqrt{ص}$ مقداران مترافقان
- $\sqrt{س}$ تكتب $س^{\frac{١}{٢}}$ ، $\sqrt[٣]{س}$ تكتب $س^{\frac{١}{٣}}$ ، $\sqrt[ن]{س^{م}} = س^{\frac{م}{ن}}$
- خواص الأسس النسبية:

ليكن م، ن عددين نسبيين و أ، ب عددين حقيقيين حيث $أ^{م}$، $أ^{ن}$، $ب^{م}$ ، $ب^{ن}$ أعداد حقيقية.

$ب^{م} \times ب^{ن} = ب^{م+ن}$

$(ب^{م})^{ن} = ب^{م \times ن}$

$(أ \times ب)^{ن} = أ^{ن} \times ب^{ن}$

$ب^{-ن} = \frac{١}{ب^{ن}}$ ، $ب \neq ٠$

$\frac{ب^{م}}{ب^{ن}} = ب^{م-ن}$ ، $ب \neq ٠$

$(\frac{أ}{ب})^{م} = \frac{أ^{م}}{ب^{م}}$ ، $ب \neq ٠$

الوحدة الثانية

العينات
Samples

مشروع الوحدة: داء الكوليسترول

١ مقدمة المشروع: الكوليسترول، أو داء العصر كما يحب الكثيرون أن يسموه، ينتجه الكبد في جسم الإنسان كما أنه موجود بكميات كبيرة في المأكولات ذات المصدر الحيواني مثل: صفار البيض، الكبد، الكلية، النخاعات، الروبيان، اللحوم الحمراء، الحليب الكامل الدسم ومشتقاته... وقد أثبتت الدراسات أن ٢٠٪ من الكوليسترول ينتج من الطعام و٨٠٪ منه ينتجه الكبد في جسم الإنسان.

٢ الهدف: سوف تقوم بدراسة حول داء الكوليسترول: أعراض ارتفاعه وانخفاضه، تأثيره على حياة الإنسان. طرائق الوقاية لتفادي أخطاره. تأثير الوراثة والأطعمة في تصنيعه. النسبة المئوية لعدد الأشخاص المصابين بداء الكوليسترول. تكوين جدول بكميات الكوليسترول عند عينة من الأشخاص.

٣ اللوازم: آلة حاسبة - أوراق جدولة الانتشار.

٤ أسئلة حول التطبيق:

حدد المكان الذي سوف تقوم بزيارته: مستشفى أو مختبر أو عيادة طبيب.

نظم استمارة بالأسئلة التي تريد طرحها:

أ ما أعراض ارتفاع الكوليسترول؟

ب ما العوامل المؤثرة على الكوليسترول؟ الغذاء، عوامل الوراثة، الوزن، النشاط والحركة، العمر والجنس، ...

جـ كيف تستطيع خفض الكوليسترول؟

ما دور الأدوية في توازن أنواع الكوليسترول: (المفيد) HDL، (الضار) LDL؟ وما المعدل الطبيعي لكل منهما؟

د ما الأمراض الناتجة عن ارتفاع الكوليسترول؟

هـ ما نسبة الوفيات الناتجة عن داء الكوليسترول؟ وما تأثيره؟

كون جدولًا يتضمن كمية الكوليسترول (ملليجرام بالديسيلتر الواحد) لعدد من الأشخاص في المكان الذي اخترته للمعاينة.

اسأل العينة التي اخترتها عن نسبة الأشخاص المصابين بالكوليسترول إلى العدد الإجمالي للمعاينات، وعن تأثير النشاطات الرياضية على تعديل نسبة الكوليسترول.

٥ التقرير: اكتب تقريرًا مفصلًا يتضمن الإجابات التي حصلت عليها من العينة (العينات) التي زرتها والجداول التي كونتها والنسب المئوية للأشخاص المصابين به. كما يجب أن يتضمن التقرير اقتراحاتك ونصائحك.

دروس الوحدة

٢-١ المجتمع الإحصائي	٢-٢ أنواع العينات
(٢-١-أ) جمع البيانات	(٢-٢-أ) العينة العشوائية البسيطة
(٢-١-ب) أنواع البيانات وطرائق جمعها	(٢-٢-ب) العينة العشوائية الطبقية
	(٢-٢-جـ) العينة العشوائية المنتظمة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

تعلمت سابقًا:

- جمع البيانات
- المجتمع الإحصائي
- العينة
- العينة العشوائية

ماذا سوف تتعلم؟

- المجتمع الإحصائي والحصر الشامل.
- العينة واستخداماتها.
- تصنيف البيانات: كيفية أو كمية.
- أنواع العينات العشوائية.

أضف إلى معلوماتك

تهتم منظمة الصحة العالمية باحتياجات الإنسان الوقائية من الأمراض الخبيثة والمزمنة. ويأتي داء السكري والكوليسترول في عداد هذه الأمراض، حيث إنه يوجد تأثير مباشر لأمراض السكري والغدة الدرقية والكلية والكبد على ارتفاع نسبة الكوليسترول في الدم. ويأتي في مقدمة هذا الاهتمام النشرات الإرشادية والتوجيهية عن مسببات هذه الأمراض وكيفية التعامل معها، والتحقق المسبق من صلاحية الأدوية المستخدمة وجودة إنتاجها لتساعد المصاب بهذه الأمراض على العلاج.

المصطلحات الأساسية

المجتمع الإحصائي – المجتمعات المنتهية – المجتمعات غير المنتهية – المتغير – الحصر الشامل – العينة – عينة عشوائية – بيانات كيفية – بيانات كيفية اسمية – بيانات كيفية مرتبة– بيانات كمية – بيانات كمية مستمرة – بيانات كمية متقطعة – طرائق جمع البيانات – عينة عشوائية بسيطة – عينة عشوائية طبقية – عينة عشوائية منتظمة.

١-٢

المجتمع الإحصائي

Statistical Population

سوف تتعلم

- المجتمع الإحصائي.
- المجتمعات المنتهية.
- المجتمعات غير المنتهية.
- المتغير.
- الحصر الشامل.
- المعاينة.
- أنواع البيانات.
- طرائق جمع البيانات.

عمل تعاوني

في كل سنة تعرض خلال شهر رمضان المبارك على شاشات التلفزة في دولة الكويت مسلسلات مهمة خاصة بالشهر الفضيل.

تريد أنت وزملاؤك القيام باستطلاع حول عدد المشاهدين لكل مسلسل.

١ حدد مع زملائك عدد الأشخاص الذين سوف تستطلعون آراءهم على مساحة الدولة كلها.

٢ حدد مع زملائك الطرائق المتبعة في إجراء هذا الاستطلاع:

أ المقابلة الشخصية.

ب الاستبانة.

جـ الهاتف المنزلي أو الهاتف الخلوي.

د البريد العادي أو البريد الإلكتروني.

الإحصاء هو أحد مجالات الرياضيات التطبيقية، حيث هو علم يهتم بجمع البيانات وتنظيمها وتصنيفها وعرضها وتحليلها، ليساعد على اتخاذ قرارات صحيحة مبنية على توقعات واستنتاجات.

المجتمع الإحصائي هو مجموعة كل العناصر قيد الدراسة ويكون لها خصائص مشتركة.

يمكن أن تكون المجتمعات الإحصائية منتهية (عدد عناصرها محدود) أو غير منتهية (عدد عناصرها غير محدود).

مثال (١)

حدد المجتمعات الإحصائية وأنواعها (منتهية – غير منتهية) ووحدة الدراسة في كل مجتمع:

أ **طلاب المرحلة الثانوية في دولة الكويت في إحدى السنوات.**

ب **المدخنون في جميع دول العالم.**

الحل:

أ **المجتمع: طلاب المرحلة الثانوية في دولة الكويت في إحدى السنوات.**

نوع المجتمع: منته، يمكن معرفة العدد الإجمالي.

وحدة الدراسة: الطالب.

ب المجتمع: المدخنون في جميع دول العالم.

نوع المجتمع: غير منته، لا يمكن معرفة العدد الإجمالي.

وحدة الدراسة: المدخن.

حاول أن تحل

١ حدد المجتمعات الإحصائية وأنواعها (منتهية – غير منتهية) ووحدة الدراسة في كل مجتمع:

أ الطلاب المشاركون في زيارة المركز العلمي في أحد الأيام.

ب زوار حديقة الحيوانات.

المتغير هو الصفة التي تكون محور الدراسة في المجتمع الإحصائي.

مثال (٢)

اعرض بعض المتغيرات لطلاب صفك والتي يمكن أن تقوم بدراستها.

الحل:

تتنوع الإجابات. إجابات ممكنة:

أ طول القامة لكل طالب بالسنتيمتر.

ب وزن كل طالب بالكيلوجرام.

ج لون العيون لكل طالب.

د لون الشعر لكل طالب.

حاول أن تحل

٢ اعرض بعض المتغيرات الممكنة للكتب الموجودة في مكتبة مدرستك والتي يمكن أن تقوم بدراستها.

(٢–١–أ) جمع البيانات Collecting Data

عند القيام بدراسة إحصائية يقوم الباحث بتحديد المجتمع محل الدراسة ثم يبدأ بجمع البيانات. وهناك أساليب مختلفة لجمع البيانات تعتمد على نوع الدراسة وخصائص المجتمع وهي:

١ – الحصر الشامل:

هي عملية جمع بيانات جميع المفردات من المجتمع محل الدراسة، (غالبًا ما تصعب دراسة مفردات المجتمع ككل لما تحتاجه من نفقات ووقت وجهد كما أن الحصر الشامل لا يصلح في المجتمعات غير المنتهية لاستحالة حصر مفرداتها في قائمة).

٢–المعاينة

هي عملية اختيار جزء من مفردات المجتمع بطريقة مدروسة تجعل هذه المفردات تمثل المجتمع وتحقق أهداف الدراسة.

مثال (٣)

هل يمكن استخدام الحصر الشامل في دراسة المجتمعات الإحصائية التالية أم لا؟ مع ذكر السبب.

أ دراسة نسبة كمية السكر في الدم عند مريض مصاب بداء السكري.

ب دراسة حول نسبة عدد الطلاب الذين يكتبون باليد اليسرى إلى عدد الطلاب في المرحلة الثانوية في مدرستك.

الحل:

أ لا يمكن استخدام الحصر الشامل في هذا المجتمع، لأن استخدام كافة كمية الدم الموجودة في جسم المريض سوف يؤدي إلى نهاية حياته. لذا نحتاج إلى جزء من هذا الدم لدراسة كمية السكر.

ب يمكن استخدام الحصر الشامل هنا، لأن عدد الطلاب في المرحلة الثانوية يسمح بدراسة عدد الطلاب الذين يكتبون باليد اليسرى وبالتالي يمكن كتابة النسبة.

حاول أن تحل

٣ اكتب مثالًا عن:

أ دراسة في مجتمع إحصائي يمكن استخدام الحصر الشامل فيه.

ب دراسة في مجتمع إحصائي لا يمكن استخدام الحصر الشامل فيه.

مثال (٤)

تقوم إحدى الشركات بإنتاج عبوات من عصير البرتقال وتوزيعها على الأسواق الاستهلاكية. يريد أحد التجار شراء كمية كبيرة من هذا العصير. كيف يتأكد من جودة نوعيته؟

الحل:

يختار التاجر عددًا من العبوات ويحللها في المختبر وعلى ضوء النتائج التي يتوصل إليها يقرر ما إذا كانت نوعية هذا العصير جيدة أم لا.

حاول أن تحل

٤ ماذا تفعل إذا أردت معرفة أطوال قامات طلاب المرحلة الثانوية في جميع مدارس دولة الكويت؟

مثال (٥)

تريد دراسة نسبة الأميّين في العالم إلى عدد السكان في إحدى السنوات. ماذا تفعل؟

الحل:

المجتمع الإحصائي هنا كبير جدًّا، لذا يجب أن نختار عينة تمثل جزءًا مهمًا منه، ثم نتوقع النسبة المطلوبة.

حاول أن تحل

٥ ماذا تفعل لتعرف من هو الممثل الأكثر شعبية في دولة الكويت هذا العام؟

(٢-١-ب) أنواع البيانات وطرائق جمعها Types and methodes of Data Collection

تتنوع البيانات بحسب الهدف الذي تتوجه إليه دراسة المفردات في المجتمعات الإحصائية وتنقسم إلى نوعين.

أولًا: البيانات الكيفية Qualitative Data

البيانات الكيفية هي بيانات نعبر عنها من خلال أسماء أو صفات لتحديد حالة ما للمتغير ويوجد نوعان من البيانات الكيفية:

أ البيانات الكيفية الاسمية: التي تعطي صفة أو عنوانًا للمتغير مثل لون الشعر - لون العيون - الجنسية - نوع الجوال - الاسم ...

ب البيانات الكيفية المرتبة: تحدد بمواصفات تراعي ترتيبًا معينًا مثل تقديرات الطلاب في مادة ما (ممتاز - جيدجدًّا - جيد - مقبول - ضعيف).

ثانيًا: البيانات الكمية Quantitative Data

البيانات الكمية هي بيانات نعبر عن مفرداتها بقيم عددية وهي نوعان:

أ البيانات الكمية المستمرة (متصلة) : وهي بيانات تكون فيها قيمة المتغير عددًا حقيقيًّا مثل: الأطوال – الأوزان – الحجوم – المساحات ...

ب البيانات الكمية المتقطعة (منفصلة): وهي بيانات تكون فيها قيمة المتغير عددًا صحيحًا مثل عدد طوابق الأبنية– عدد درجات السلم– عدد الأشقاء...

مثال (٦)

تم تسجيل ألوان الشعر لعشرة طلاب في الصف الحادي عشر فجاءت كما يلي:
بني، أسود، بني، أشقر، أسود، أسود، بني، كستنائي، أسود، بني.
ما نوع هذه البيانات؟

الحل:

كيفية إسمية.

حاول أن تحل

٦ **عند طرح سؤال على خمسة عشرة طالبًا من الصف الحادي عشر أدبي عن توقعاتهم لمستقبلهم في مجالات العمل أتت إجاباتهم على الشكل التالي: ضابط، محاسب، محام، معلم، ضابط، معلم، محاسب، محام، تاجر، محاسب، محاسب، معلم، لاعب كرة، محاسب، ضابط. ما نوع هذه البيانات؟**

مثال (٧)

أقيمت دورة للألعاب الأولمبية في بكين عاصمة الصين سنة ٢٠٠٨م، وكان ترتيب الدول بحسب العدد الإجمالي للميداليات كما يلي: الصين، الولايات المتحدة الأميركية، روسيا، بريطانيا، ألمانيا، أستراليا. ما نوع هذه البيانات؟

الحل:

كيفية مرتبة.

حاول أن تحل

٧ **تريد إجراء استطلاع حول رحلة إلى المدينة الترفيهية فقمت بتوزيع استمارة على الطلاب كتب عليها:**

(موافق – غير موافق– سأجيب لاحقًا – لا إجابة)

ما نوع هذه البيانات؟ اشرح.

مثال (٨)

كانت درجات الطلاب في الصف الحادي عشر في أحد الاختبارات حيث النهاية العظمى ٢٠ درجة كما يلي:
١٢، ١٣,٥، ١٧، ١٦,٥، ٨,٥، ٩، ١٠، ١٠، ١٠,٥، ١٢، ١٤,٥، ٧، ٩,٥، ١٥، ١٥,٥، ١١، ١١,٥، ١٣، ١٥,٥، ١٣,٥. ما نوع هذه البيانات؟

الحل:

كمية مستمرة.

حاول أن تحل

٨ تم تسجيل درجات حرارة خمسة أطفال في إحدى المستشفيات فكانت كالتالي:
٣٦,٥°، ٣٨°، ٣٧,٨°، ٣٩°، ٣٧,٥°.
ما نوع هذه البيانات؟

مثال (٩)

في نهائيات كأس العالم لكرة القدم ٢٠١٠م، حققت بعض الدول الأهداف التالية: ألمانيا (٥)، هولندا (٥)، اليابان (٤)، الكاميرون (٢)، إيطاليا (٤)، البرازيل (٥)، إسبانيا (٤).
ما نوع هذه البيانات؟

الحل:

كمية متقطعة.

حاول أن تحل

٩ في نهائيات كأس العالم لكرة القدم ٢٠١٠م، كانت نقاط بعض الدول كما يلي: فرنسا (١)، الأرجنتين (٩)، الجزائر (١)، غانا (٤)، البرتغال (٥).
ما نوع هذه البيانات؟

طرائق جمع البيانات

Methods of Data Collecting

عند جمع البيانات يستخدم الإحصائيون طرائق متعددة وذلك بحسب ما هو متوفر لديهم وما هو أسهل. من هذه الطرائق:

- الملاحظة أو المشاهدة.
- الاستبانة.
- البريد العادي أو البريد الإلكتروني.
- الهاتف المنزلي أو الهاتف الخلوي.
- المقابلة الشخصية.
- الوثائق والسجلات.
- الأبحاث التاريخية والأرشيف.
- قواعد البيانات.

مثال (١٠)

أ) أرادت إحدى شركات بيع السيارات التعرف إلى آراء الزبائن في خدمات الشركة بعد المبيع. كيف سيتم ذلك؟

ب) أراد المدير المالي في إحدى المؤسسات الوقوف على آراء الموظفين بعد نسبة الزيادة التي أعطاها لهم. كيف سيتم ذلك؟

الحل:

أ) الاتصال بالزبائن بواسطة الهاتف المنزلي أو بواسطة الهاتف الخلوي أو البريد الإلكتروني.

ب) بواسطة استبانة تكتب عليها بعض الأسئلة ذات الصلة أو بالمقابلة المباشرة مع كل موظف.

حاول أن تحل

١٠) يريد أحد الفنادق معرفة آراء النزلاء من مختلف أنحاء العالم بالخدمة التي يوفرها لهم أثناء إقامتهم. فما هي أفضل طريقة تراها في هذا الاستطلاع؟

٢-٢

أنواع العينات

Samples Types

دعنا نفكر ونناقش

تتكون أسرة إحدى المستشفيات من ١٠٠ إداريًّا، ١٥٠ طبيبًا، ٢٥٠ ممرضًا.

١ أراد مدير المستشفى اختيار ٢٥ ممرضًا للالتحاق ببرنامج تدريبي، وضّح كيفية اختيار الممرضين دون تحيز.

٢ يساعد مدير المستشفى فريق عمل مكون من ١٠ أعضاء من مختلف فئات العاملين. وضّح كيفية اختيارهم بشكل عادل يتناسب مع أعداد كل فئة من العاملين.

سوف تتعلم

- العينة العشوائية البسيطة.
- العينة العشوائية الطبقية.
- العينة العشوائية المنتظمة.

العينة العشوائية Random Sample

هي جزء من المجتمع الإحصائي يتم اختيارها عشوائيًّا بطريقة علمية دون تحيز كي تمثل هذا المجتمع أفضل تمثيل بأقل تكلفة ممكنة. تختلف العينة بحسب طبيعة المجتمع الإحصائي محل الدراسة. في ما يلي بعض من العينات العشوائية:

(٢-٢-أ) العينة العشوائية البسيطة Simple Random Sample

إذا كان المجتمع الإحصائي يتضمن عدد ن من المفردات المتجانسة وأردنا دراستها باتجاه معين اعتمادًا على عينة عشوائية عدد مفرداتها م، وإذا كانت كل عينة عشوائية من هذا المجتمع الإحصائي لها الفرصة نفسها في أن نختارها فيكون لدينا عينة عشوائية بسيطة. في مثل هذه العينة يكون لكل مفردة من مفردات المجتمع الإحصائي الفرصة نفسها في الظهور.

يوجد طرائق عدة لاختيار العينة العشوائية البسيطة، إما باستخدام جدول الأعداد العشوائية أو آلات حاسبة متخصصة أو برامج إحصائية، على سبيل المثال برنامج Microsoft Excel.

مثال (١)

في إحدى المؤسسات التعليمية يوجد ٨٠ طالبًا مرقمين من ١ إلى ٨٠.
المطلوب سحب عينة عشوائية بسيطة حجمها ٧ طلاب لدراسة بعض الأمور في المؤسسة باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف الأول والعمود الثاني.

الحل:

بما أن حجم المجتمع ٨٠ فإننا نأخذ أول رقمين لجهة اليسار من الصف الأول والعمود الثاني ثم نتحرك رأسيًّا إلى الأسفل نجد الأعداد التالية: ٢٨، ٥٣، ٣١، ٩٦، ٣٧، ٨٦، ٤١.

ولكن يوجد عددان ٩٦، ٨٦ لا يوجد مقابل لهما في ترقيم الطلاب لذا يبقى لدينا: ٢٨، ٥٣، ٣١، ٣٧، ٤١.

فنكمل لنجد العددين الآخرين على ألا يكون تكرارًا لما سبق فنجد: ٢، ٣٥.

وبذلك يصبح لدينا الطلاب بحسب الترقيم التالي: ٢٨، ٥٣، ٣١، ٣٧، ٤١، ٢، ٣٥.

ملاحظة

يتم اختيار الصف الأول والعمود الأول من جدول الأعداد العشوائية إذا لم يتم التحديد.

حاول أن تحل

١ في مثال (١) إذا كان المطلوب سحب العينة من جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف العاشر والعمود الخامس. فما هي الأعداد التي سوف يحصل عليها؟

مثال (٢)

في أحد الأندية الكبيرة في دولة الكويت كان عدد العمال ٢٠٠ عامل مرقمين من ٢٠١ إلى ٤٠٠، المطلوب سحب عينة عشوائية بسيطة مكونة من ١٠ عمال لدراسة المستوى الفني للعمال باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداء من الصف الخامس والعمود الرابع.

الحل:

٢٤٦، ٣٨٣، ٣٤٩، ٣٤١، ٢١٥، ٢٦٧، ٣١٨، ٢٧١، ٣٦٨، ٢٨٨

فيكون العمال حاملي الأعداد السابقة يشكلون عينة عشوائية بسيطة.

حاول أن تحل

٢ في أحد المصانع في دولة الكويت كان عدد الموظفين ٣٠٠ موظف مرقمين من ٦٠١ إلى ٩٠٠، المطلوب سحب عينة عشوائية بسيطة مكونة من ٦ موظفين باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداء من الصف العاشر والعمود الرابع عشر.

(٢-٢-ب) العينة العشوائية الطبقية Stratified Random Sample

يمكن تقسيم المجتمع الإحصائي إلى مجموعات لا تتقاطع مع بعضها البعض، ثم نأخذ عينة عشوائية بسيطة من كل مجموعة فنحصل على عينة عشوائية طبقية.

تستخدم العينة العشوائية الطبقية عادة في حالة إمكان تقسيم المجتمع الإحصائي إلى طبقات مختلفة غير متقاطعة مع بعضها البعض وكل طبقة متجانسة من حيث المفردات التي تؤلفها.

$$\text{كسر المعاينة} = \frac{\text{حجم العينة}}{\text{حجم المجتمع الإحصائي}}$$

حجم العينة من أي طبقة = كسر المعاينة × حجم الطبقة المناظرة

مثال (٣)

لدراسة الأداء الوظيفي والكفاءة عند الموظفين في إحدى المؤسسات، تم سحب عينة طبقية مكونة من ٨٠ فردًا من أصل ١٦٠٠ موظف موزعين كما يبين الجدول التالي:

إداريون	تقنيون وفنيون	عمال ومستخدمون	المجموع
١٠٠	٣٠٠	١٢٠٠	١٦٠٠

ما حجم كل عينة عشوائية بسيطة مسحوبة من كل طبقة؟

الحل:

$$\text{كسر المعاينة} = \frac{\text{حجم العينة}}{\text{حجم المجتمع الإحصائي}} = \frac{٨٠}{١٦٠٠} = ٠,٠٥$$

لإيجاد حجم العينة الطبقية نأخذ القاعدة:

حجم العينة الطبقية = كسر المعاينة × حجم الطبقة المناظرة.

نوجد إذًا حجم العينة لكل طبقة في المؤسسة:

حجم عينة الإداريين = ٠,٠٥ × ١٠٠ = ٥

حجم عينة التقنيين والفنيين = ٠,٠٥ × ٣٠٠ = ١٥

حجم عينة العمال والمستخدمين = ٠,٠٥ × ١٢٠٠ = ٦٠

وبالتالي تكون العينة العشوائية الطبقية مكونة من: ٥ (إداريين)، ١٥ (تقنيًّا وفنيًّا)، ٦٠ (عاملًا ومستخدمًا).

حاول أن تحل

٣ لدراسة الآداء الوظيفي والكفاءة لدى الموظفين في أحد المصارف، تم سحب عينة طبقية مكونة من ٧ أفراد من ٣٥ موظفًا موزعين كما يبين الجدول التالي:

مدراء أقسام	محاسبون ومدققون	عمال ومستخدمون	المجموع
١٠	٢٠	٥	٣٥

ما حجم كل عينة عشوائية بسيطة مسحوبة من كل طبقة؟

مثال (٤)

في إحدى المؤسسات يوجد ١٠٠ إداري مرقمين من ١٠٠ إلى ١٩٩، ٢٠٠ مهندس وتقني مرقمين من ٢٠٠ إلى ٣٩٩، ٦٠٠ عامل ومستخدم مرقمين من ٤٠٠ إلى ٩٩٩. المطلوب سحب عينة عشوائية طبقية مكونة من ١٨ فردًا لدراسة كفاءة العاملين في هذه المؤسسة باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف الثاني والعمود العاشر.

الحل:

أولًا: نوجد كسر المعاينة = $\frac{\text{حجم العينة}}{\text{حجم المجتمع الإحصائي}}$

$$= \frac{١٨}{٩٠٠} = ٠,٠٢$$

ثانيًا: نوجد حجم كل عينة بسيطة.

حجم عينة الإداريين = ٠,٠٢ × ١٠٠ = ٢

حجم عينة المهندسين والتقنيين = ٠,٠٢ × ٢٠٠ = ٤

حجم عينة العمال والمستخدمين = ٠,٠٢ × ٦٠٠ = ١٢

فتكون العينة العشوائية الطبقية مكونة من عينات عشوائية بسيطة كما يلي:

٢ (إداريين)، ٤ (مهندسين وتقنيين)، ١٢ (عاملًا ومستخدمًا).

ثالثًا: نستخدم جدول الأعداد العشوائية لإيجاد أرقام:

٢ إداريين من بين الأعداد ١٠٠ إلى ١٩٩.

٤ مهندسين وتقنيين من بين الأعداد ٢٠٠ إلى ٣٩٩.

١٢ عاملًا ومستخدمًا من بين الأعداد ٤٠٠ إلى ٩٩٩.

ملاحظة

يمكن استخدام جداول الأعداد العشوائية لسحب عينة عشوائية طبقية مكونة من عينات عشوائية بسيطة.

- الإداريين: نأخذ الأرقام الثلاثة لجهة اليسار من الصف الثاني، والعمود العاشر ثم نتحرك نزولًا.
فنجد الأعداد ١١٩، ١٠٤.
- المهندسين والتقنيين: نأخذ الأرقام الثلاثة لجهة اليسار من الصف الثاني والعمود العاشر ثم نتحرك نزولًا.
فنجد الأعداد: ٣١٧، ٢٤٤، ٣١٣، ٣٤٦.
- العمال والمستخدمين: نأخذ الأرقام الثلاثة لجهة اليسار من الصف الثاني والعمود العاشر، ثم نتحرك نزولًا.
فنجد الأعداد: ٩٠٩، ٦٧٢، ٧١٥، ٤٢٥، ٧٦٣، ٥٣٥، ٥٨٩، ٧٠١، ٨٤٩، ٧٤٧، ٨٥٠، ٧٦٨.

فتكون العينة العشوائية الطبقية مكونة من عينات عشوائية بسيطة بحسب الترقيم التالي:

- للإداريين: ١١٩، ١٠٤.
- للمهندسين والتقنيين: ٣١٧، ٢٤٤، ٣١٣، ٣٤٦.
- للعمال والمستخدمين: ٩٠٩، ٦٧٢، ٧١٥، ٤٢٥، ٧٦٣، ٥٣٥، ٥٨٩، ٧٠١، ٨٤٩، ٧٤٧، ٨٥٠، ٧٦٨.

حاول أن تحل

٤ في مثال (٤) إذا أراد صاحب المؤسسة سحب عينة عشوائية طبقية مكونة من ٩ أفراد:

أ أوجد كسر المعاينة.

ب أوجد حجم العينات العشوائية البسيطة المكونة لهذه العينة العشوائية الطبقية.

جـ استخدم الصف الثالث والعمود السابع، لتجد الترقيم المناسب في كل عينة بسيطة.

(٢-٢-جـ) العينة العشوائية المنتظمة Systematic Random Sample

من أكثر العينات العشوائية استخدامًا العينة العشوائية المنتظمة، حيث يتم تقسيم المجتمع إلى فترات متساوية الطول وعددها يساوي حجم العينة.

تستخدم العينة العشوائية المنتظمة في المجتمعات الإحصائية المتجانسة حيث:

$$\text{طول الفترة} = \frac{\text{حجم المجتمع الإحصائي}}{\text{حجم العينة}}$$

يمكن سحب المفردة الأولى في العينة باستخدام جدول الأعداد العشوائية أو عن طريق المختبر الإحصائي.

مثال (٥)

في أحد المصانع حيث عدد العمال ٩٠٠ مرقمين من ١ إلى ٩٠٠، أراد صاحب هذا المصنع مناقشة هؤلاء العمال حول كيفية تحسين الأداء وزيادة الإنتاج. المطلوب سحب عينة عشوائية منتظمة حجمها ١٥، مستخدمًا جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف الثامن والعمود العاشر.

الحل:

نوجد: طول الفترة = $\frac{\text{حجم المجتمع الإحصائي}}{\text{حجم العينة}} = \frac{٩٠٠}{١٥} = ٦٠$

نختار أول عدد عشوائي مؤلف من رقمين لجهة اليسار باستخدام جدول الأعداد العشوائية على ألا يزيد عن العدد ٦٠.

نجد العدد ٣١ على التقاطع بين الصف الثامن والعمود العاشر.

فتكون الأعداد كما يلي:

٣١
٣١ + ٦٠ = ٩١
٩١ + ٦٠ = ١٥١
١٥١ + ٦٠ = ٢١١
٢١١ + ٦٠ = ٢٧١
٢٧١ + ٦٠ = ٣٣١
٣٣١ + ٦٠ = ٣٩١
٣٩١ + ٦٠ = ٤٥١
٤٥١ + ٦٠ = ٥١١
٥١١ + ٦٠ = ٥٧١
٥٧١ + ٦٠ = ٦٣١
٦٣١ + ٦٠ = ٦٩١
٦٩١ + ٦٠ = ٧٥١
٧٥١ + ٦٠ = ٨١١
٨١١ + ٦٠ = ٨٧١

والعينة العشوائية المنتظمة تتكون من العمال حيث ترقيمهم بالأعداد التالية:

٣١، ٩١، ١٥١، ٢١١، ٢٧١، ٣٣١، ٣٩١، ٤٥١، ٥١١، ٥٧١، ٦٣١، ٦٩١، ٧٥١، ٨١١، ٨٧١.

حاول أن تحل

٥ في مثال (٥) ما العينة العشوائية المنتظمة إذا أراد صاحب المصنع تشكيلها على أن يكون حجمها ١٠، مستخدمًا جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف الخامس عشر والعمود السابع؟

مثال (٦)

يبلغ عدد طلاب إحدى مدارس الكويت ٧٠٠ طالبًا مرقمين من ١ إلى ٧٠٠، أراد مدير المدرسة إرسال ١٠ طلاب لحضور ندوة حول «حماية الحيوانات المهددة بالانقراض». المطلوب سحب عينة عشوائية منتظمة حجمها ١٠ باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءًا من الصف الثاني والعشرون والعمود الثالث.

الحل:

نوجد: طول الفترة $= \frac{\text{حجم المجتمع الإحصائي}}{\text{حجم العينة}} = \frac{٧٠٠}{١٠} = ٧٠$

نختار أول عدد عشوائي مؤلّف من رقمين لجهة اليسار باستخدام جدول الأعداد العشوائية بحيث لا يزيد عن طول الفترة (٧٠) ابتداءً من الصف الثاني والعشرون والعمود الثالث فنجد العدد ٣٨.

٣٨
٣٨ + ٧٠ = ١٠٨
١٠٨ + ٧٠ = ١٧٨
١٧٨ + ٧٠ = ٢٤٨
٢٤٨ + ٧٠ = ٣١٨
٣١٨ + ٧٠ = ٣٨٨
٣٨٨ + ٧٠ = ٤٥٨
٤٥٨ + ٧٠ = ٥٢٨
٥٢٨ + ٧٠ = ٥٩٨
٥٩٨ + ٧٠ = ٦٦٨

تتكون العينة العشوائية من الطلاب حيث ترقيمهم بالأعداد التالية:

٣٨، ١٠٨، ١٧٨، ٢٤٨، ٣١٨، ٣٨٨، ٤٥٨، ٥٢٨، ٥٩٨، ٦٦٨.

حاول أن تحل

٦ عدد طلبة الصف الحادي عشر علمي في إحدى المدارس يبلغ ١٤٠ طالبًا مرقيمن من ١ إلى ١٤٠ . المطلوب سحب عيّنة عشوائية منتظمة حجمها ٧ لزيارة إحدى دور المسنين وتقديم هدايا لهم بمناسبة حلول عيد الفطر السعيد، باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداء من الصف السادس والعمود التاسع.

في مؤسسة لحياكة الملابس القطنية يوجد ٢٥ إداريًا مرقمين من ١٠١ إلى ١٢٥، ٧٥ تقنيًا وفنيًا مرقمين من ٢٠١ إلى ٢٧٥، ٤٠٠ عامل مرقمين من ٣٠١ إلى ٧٠٠.

أراد صاحب المؤسسة اختيار ٢٠ شخصًا من هذه المؤسسة لإرسالهم في دورة تدريبية على أن تتضمن هذه المجموعة إداريين وفنيين وتقنيين وعمّالًا.

كيف يمكنك مساعدة صاحب هذه المؤسسة على اختيار عناصر هذه المجموعة؟

ملاحظة:

يتم اختيار الصف الأول والعمود الأول من جدول الأعداد العشوائية حيث إنه لم يتم التحديد.

الحل:

لدينا إداريين، فنيين، تقنيين، عمال لذا يتوجب تكوين عينة طبقية منتظمة.

عدد العاملين في المؤسسة = ٥٠٠

عدد أعضاء المجموعة = ٢٠

نجد كسر المعاينة: $\frac{٢٠}{٥٠٠}$ = ٠,٠٤ ومنه نحصل على:

عدد الإداريين = ٢٥ × ٠,٠٤ = ١

عدد الفنيين والتقنيين = ٧٥ × ٠,٠٤ = ٣

عدد العمال = ٤٠٠ × ٠,٠٤ = ١٦

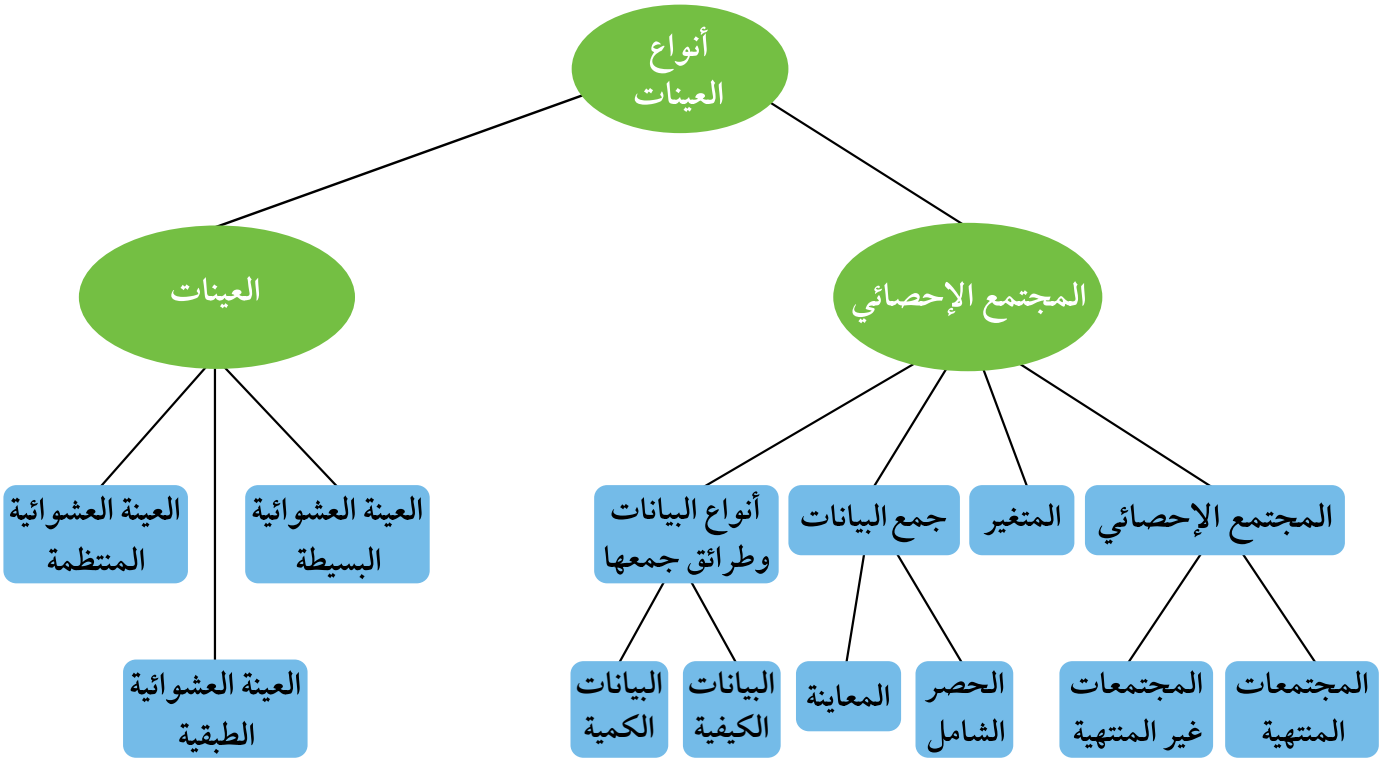
أي أن العينة العشوائية الطبقية ستكون مكونة من ١(إداري)، ٣(فني وتقني) ومن ١٦(عاملًا).

- يمكن اختيار الإداري باستخدام جدول الأعداد العشوائية فمثلًا نأخذ الأرقام الثلاثة لجهة اليسار من الصف الأول والعمود الأول والتحرك نزولًا فنحصل على العدد ١٢١.
- يمكن اختيار الفنيين والتقنيين باستخدام جدول الأعداد العشوائية فمثلًا نأخذ الأرقام الثلاثة لجهة اليسار من الصف الأول والعمود الأول ثم نتحرك نزولًا فنحصل على الأعداد: ٢٠١، ٢٠٩، ٢٢٧.
- يمكن اختيار العمال باستخدام جدول الأعداد العشوائية فمثلًا نأخذ الأرقام الثلاثة لجهة اليسار من الصف الأول والعمود الأول ونتحرك نزولًا فنحصل على الأعداد: ٥٩٢، ٦٧٢، ٤٦٢، ٦٦٠، ٤٦٨، ٥٩٠، ٦٣٠، ٥٤٣، ٤١٢، ٦٦٥، ٣١٥، ٣٦٠، ٣٥٩، ٤١٤، ٦٥٧، ٦٢٠.

مسألة إضافية

في أحد المصارف الكبرى يوجد ٢٠٠ موظف مرقمين من ١ إلى ٢٠٠ موزعين في كل الفروع العاملة في الدولة. أرادت الإدارة العامة في المصرف تشكيل عينة عشوائية منتظمة من ٢٠ موظفًا لدراسة أساليب العمل الفضلى المتعلقة بكيفية التعامل مع الزبائن. ساعد الإدارة على تشكيل هذه العينة العشوائية المنتظمة.

مخطط تنظيمي للوحدة الثانية



ملخص

- المجتمع الإحصائي هو مجموعة كل العناصر قيد الدراسة ويكون لها خصائص مشتركة.
- المتغير هو الصفة التي تكون محور الدراسة في المجتمع الإحصائي.
- الحصر الشامل هي عملية جمع بيانات جميع المفردات من المجتمع محل الدراسة.
- العينة العشوائية هي جزء من المجتمع محل الدراسة يتم اختيارها بحيث يكون لكل فرد من المجتمع فرصة مساوية ليكون ضمن العينة.
- البيانات الكمية تتناول الكم مثل الأطوال والأوزان.
- البيانات الكيفية تتناول الكيف مثل الألوان والتقديرات.
- العينة العشوائية البسيطة هي عينة عشوائية من المجتمع الإحصائي لها الفرصة نفسها في الظهور.
- العينة العشوائية الطبقية تتكون من عينات عشوائية بسيطة لا تتقاطع مع بعضها البعض.
- العينة العشوائية المنتظمة يتم فيها تقسيم المجتمع إلى فترات متساوية الطول وعددها يساوي حجم العينة.
- كسر المعاينة = $\frac{\text{حجم العينة}}{\text{حجم المجتمع الإحصائي}}$.
- حجم العينة البسيطة في العينة الطبقية = كسر المعاينة × حجم الطبقة المناظرة.
- طول الفترة = $\frac{\text{حجم المجتمع الإحصائي}}{\text{حجم العينة}}$.

الوحدة الثالثة

أساليب عرض البيانات

Ways to Display Data

مشروع الوحدة: دراسة جودة التعبئة

١ مقدمة المشروع: تحتاج شركات تعبئة المياه الصالحة للشرب، أو شركات تعبئة عبوات العصير المعدة سلفًا... إلى أجهزة وآلات لتقوم بهذه المهمات. ولكن المستهلك يلاحظ دائمًا أن عبوات المياه الموجودة في الأسواق تختلف من حيث الكمية التي تحويها.

٢ الهدف: في هذا المشروع، سوف تختار عينة عشوائية من عبوات المياه فئة ٥٠ مليلترًا الموجودة في الأسواق لتقيس كمية المياه الموجودة في كل عبوة بعد أن تحدد سلفًا شروط الجودة للجهاز الذي قام بتعبئة هذه العبوات.

٣ اللوازم: آلة حاسبة - ورق رسم بياني.

٤ أسئلة حول التطبيق:

أ ما هو المجمّع التجاري الذي سوف تقوم بزيارته؟

ب ما اسم شركة المياه التي قامت بتعبئة هذه العبوات؟

جـ كم عبوة من فئة ٥٠ مليلترًا سوف تختار لدراسة كمية المياه الموجودة فيها؟

د ما هي الشروط التي وضعتها للتحقق من جودة التعبئة؟

هـ نظم بياناتك في قائمة.

و هل ستستخدم المتوسط الحسابي، أم الوسيط لاتخاذ القرار المناسب؟

٥ التقرير: اكتب تقريرًا مفصلًا عن النتائج التي توصلت إليها. اعرض اقتراحاتك على زملائك، ناقش معهم النتائج التي توصلوا إليها. أعد النظر بأي نقطة غير واضحة. قدم اقتراحات مشتركة مع زملائك إلى شركات التعبئة إذا قررتم ذلك.

دروس الوحدة

٣-١ عرض وتمثيل البيانات
(٣-١-أ) الجدول التكراري النسبي والمئوي
(٣-١-ب) التمثيل البياني للبيانات
(٣-١-ب-١) تمثيل البيانات الكيفية باستخدام القطاعات الدائرية
(٣-١-ب-٢) المدرج التكراري والمنحنى التكراري والمضلع التكراري
(٣-١-ب-٣) المضلع التكراري المتجمع الصاعد والمضلع التكراري المتجمع النازل
(٣-١-ب-٤) الخط المنكسر

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت التمثيلات البيانية.
- تعلمت التكرار المتجمع الصاعد.
- تعلمت التكرار المتجمع النازل.
- تعلمت إيجاد الوسيط بيانيًّا.

ماذا سوف تتعلم؟

- عرض وتنظيم البيانات في جداول تكرارية.
- إيجاد التكرارالنسبي والنسبة المئوية للتكرار.
- استخدام التكرار المتجمع الصاعد والتكرار المتجمع النازل.
- استخدام المنحنيات التكرارية المتجمعة لعرض البيانات.
- استخدام التمثيل البياني بالدائرة لعرض البيانات الكيفية.
- استخدام الخط المنكسر والمدرج التكراري والمضلع والمنحنى التكراري لعرض البيانات.

أضف إلى معلوماتك

تعتبر مشكلة توفير المياه من أهم المشاكل التي تواجه الدول في عصرنا الحاضر. ولقد تزايد الضغط في أيامنا على مياه الشرب بصفة خاصة. فلقد تكاثرت شركات التعبئة مما أوجد تنافسًا في سوق الاستهلاك. ولكن المشكلة الكبرى هي عدم الدقة في التعبئة أو عدم الجودة في نوعية المياه المعبأة.

وليكن معلومًا أنه عند إنشاء مصنع مياه للشرب، يجب أن تتوفر الشروط التالية: الموقع المناسب للوضع – محطة لتحلية المياه (إذا كانت ضرورية) – نظام تعقيم بالأوزون – جهاز لنفخ العبوات من جميع الأحجام – جهاز لطباعة تاريخ التعبئة وانتهاء صلاحية الاستعمال – جهاز للقفل الدائري حول فوهة العبوة – ماكينة لتغليف العبوات – خطوط سير العبوات – خزانات للمياه – مختبر للتحليل.

المصطلحات الأساسية

البيانات الكيفية – البيانات الكمية – التكرار النسبي – النسبة المئوية للتكرار – المنحنى التكراري– التكرار المتجمع الصاعد – التكرار المتجمع النازل – المنحنيات التكرارية المتجمعة – المضلع التكراري – المضلعات التكرارية المتجمعة – التمثيل البياني بالقطاعات الدائرية – الخط المنكسر.

١-٣

عرض وتمثيل البيانات

Display and Data Representation

سوف تتعلم

- التكرار النسبي والنسبة المئوية للتكرار.
- تمثيل البيانات بالقطاعات الدائرية.
- تمثيل البيانات بالمدرج التكراري والمنحنى التكراري والمضلع التكراري والخط المنكسر.
- تنظيم البيانات في جداول باستخدام التكرار المتجمع الصاعد والتكرار المتجمع النازل.

عمل تعاوني

سجلت إحدى الشركات عدد أشهر عمل الآلات الكهربائية التي تنتجها، فكانت كما يلي:

٥٢ – ٦٣ – ٣٩ – ٧٣ – ٤١ – ٥١ – ٥١ – ٥٩ – ٦٢ – ٧٤ – ٣٨ – ٤٣ – ٥٧ – ٥٥

– ٥٥ – ٦٤ – ٥٥ – ٧٠ – ٤٨ – ٥٦ – ٥٨ – ٦٠ – ٧٤ – ٣٥ – ٤٧ – ٥٩ – ٥٢ – ٦٢

– ٥٥ – ٥٨ – ٧٩ – ٦٦ – ٥٥ – ٦٨ – ٤٥ – ٦٦ – ٥٩ – ٧١ – ٦٨ – ٤٤ – ٥٣ – ٥٤

– ٦٢ – ٦٥ – ٧٥ – ٤٢ – ٥٥ – ٦٧ – ٤٥ – ٥٦ – ٧٠ – ٤٧ – ٥٥ – ٥٨ – ٧٥ – ٦٦

– ٥٠ – ٦٢ – ٦٦ – ٤٩

تعاون أنت وزملائك في إكمال الجدول:

الفئة	٣٥–	٤٠–	٤٥–	٥٠–	٥٥–	٦٠–	٦٥–	٧٠–	٧٥–
علامات التكرار									
التكرار									
التكرار المتجمع الصاعد									
التكرار المتجمع النازل									
نسبة التكرار إلى العدد الكلي									
النسبة المئوية لكل تكرار									

تستخدم علامات التكرار لتبيان كل قيمة في البيانات عند فرزها.

التكرار النسبي يساوي ناتج قسمة تكرار كل قيمة على مجموع تكرارات قيم البيانات.

النسبة المئوية للتكرار تساوي ناتج ضرب التكرار النسبي في ١٠٠٪.

(٣–١–٢) الجدول التكراري النسبي والمئوي Frequency Table

يمكن عرض البيانات باستخدام جدول التكرار النسبي والمئوي.

مثال (١)

تراوحت رواتب ٣٥ عاملًا في إحدى المؤسسات بالدينار الكويتي كما يلي:

٢٩٨ – ٣٥٥ – ٣٧٦ – ٣٨٤ – ٤٠٢ – ٣١٧ – ٣٦١ – ٣٧٨ – ٣٨٤ – ٣٣١ – ٣٦٤ – ٣٨٠ – ٣٤٠ – ٣٦٥ – ٣٤٢ – ٣٤٩ – ٣٧٦ – ٣٨٣ – ٣٩٦ – ٤٢٠ – ٣٧٠ – ٣٨٢ – ٣٩٠ – ٤١٢ – ٤٩٨ – ٣٨١ – ٣٨٦ – ٤٠٩ – ٤٧٠ – ٣٨٥ – ٤٠٨ – ٤٣٧ – ٤٠٤ – ٤٢٧ – ٤٤٣.

أ) أوجد المدى لهذه البيانات.

ب) إذا أردت توزيع هذه البيانات إلى ١٠ فئات متساوية في الطول، فما هو طول كل فئة؟

جـ) كوّن جدولًا تبين عليه: الفئات – علامات التكرار – التكرار النسبي – النسبة المئوية للتكرار.

الحل:

أ) القيمة الصغرى = ٢٩٨، القيمة العظمى = ٤٩٨.

فيكون المدى: ٤٩٨ – ٢٩٨ = ٢٠٠.

ب) لإيجاد طول كل فئة، نوجد ناتج قسمة المدى على عدد الفئات متساوية الطول: ٢٠٠ ÷ ١٠ = ٢٠

فيكون طول كل فئة يمثل ٢٠ دينارًا.

جـ) الجدول:

الفئة	٢٩٨–	٣١٨–	٣٣٨–	٣٥٨–	٣٧٨–	٣٩٨–	٤١٨–	٤٣٨–	٤٥٨–	٤٧٨–	المجموع
علامات التكرار	//	/	////	/###	### / ###	###	///	/	/	/	
التكرار	٢	١	٤	٦	١١	٥	٣	١	١	١	٣٥
التكرار النسبي	$\frac{٢}{٣٥}$	$\frac{١}{٣٥}$	$\frac{٤}{٣٥}$	$\frac{٦}{٣٥}$	$\frac{١١}{٣٥}$	$\frac{٥}{٣٥}$	$\frac{٣}{٣٥}$	$\frac{١}{٣٥}$	$\frac{١}{٣٥}$	$\frac{١}{٣٥}$	$\frac{٣٥}{٣٥} = ١$
النسبة المئوية للتكرار	٪٥,٧١	٪٢,٨٦	٪١١,٤٣	٪١٧,١٤	٪٣١,٤٣	٪١٤,٢٨	٪٨,٥٧	٪٢,٨٦	٪٢,٨٦	٪٢,٨٦	٪١٠٠

ملاحظة: مجموع التكرارات النسبية لمجموعة من القيم يساوي ١

مجموع النسب المئوية للتكرار يساوي ٪١٠٠

حاول أن تحل

١) أ) إذا كان طول الفئة في المثال (١) يمثل ٢٥ دينارًا، فما هو عدد الفئات؟

ب) كون جدولًا تبين عليه: الفئات الجديدة – علامات التكرار – التكرار – التكرار النسبي – النسبة المئوية للتكرار.

(٣–١–ب) التمثيل البياني للبيانات Graph of Data

(٣–١–ب–١) تمثيل البيانات باستخدام القطاعات الدائرية Graph of Data Using Pie Chart

يمكن تمثيل البيانات باستخدام القطاعات الدائرية وذلك بتمثيل القيمة الكلية للظاهرة. بمساحة سطح دائرة نصف قطرها اختياري ثم تجزأ المنطقة الدائرية إلى قطاعات دائرية جزئية تتناسب مساحتها السطحية مع قيم هذه المجموعات الجزئية التي تم توزيع الظاهرة عليها مع تميز هذه القطاعات الدائرية الجزئية عن بعضها ويحدد قياس الزاوية المركزية لكل قطاع وفق القاعدة التالية:

قياس الزاوية المركزية للقطاع = التكرار النسبي × ٣٦٠°

مثال (٢)

في أحد الاختبارات قيّم المعلم طلابه باستخدام مفردات تقديرية على الشكل التالي:
مقبول، مقبول، جيد جدًّا، ممتاز، ممتاز، جيد، جيد، جيد جدًّا، متوسط، ممتاز، جيد، مقبول، متوسط، جيد، جيد، جيد جدًّا، مقبول، متوسط، مقبول، غير مقبول، جيد، جيد جدًّا، غير مقبول، متوسط، ممتاز.

أ كون جدولًا تكراريًّا نسبيًّا ومئويًّا لهذه البيانات.

ب مثّل هذه البيانات بالقطاعات الدائرية.

الحل:

أ

التقدير	ممتاز	جيد جدًّا	جيد	متوسط	مقبول	غير مقبول	المجموع
علامات التكرار	////	////	/###	////	###	//	
التكرار	٤	٤	٦	٤	٥	٢	٢٥
التكرار النسبي	$\frac{٤}{٢٥}$	$\frac{٤}{٢٥}$	$\frac{٦}{٢٥}$	$\frac{٤}{٢٥}$	$\frac{٥}{٢٥}$	$\frac{٢}{٢٥}$	$\frac{٢٥}{٢٥}=١$
النسبة المئوية للتكرار	١٦٪	١٦٪	٢٤٪	١٦٪	٢٠٪	٨٪	١٠٠٪

ب نحسب قياس الزاوية المركزية لكل قطاع دائري:

ن(زاوية تقدير ممتاز) = $\frac{٤}{٢٥}$ × ٣٦٠° = ٥٧,٦٠°

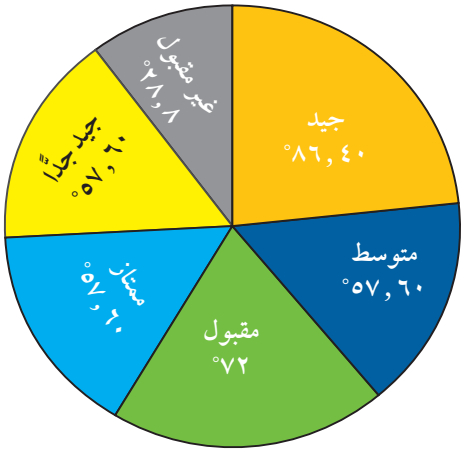
ن(زاوية تقدير جيد جدًّا) = $\frac{٤}{٢٥}$ × ٣٦٠° = ٥٧,٦٠°

ن(زاوية تقدير جيد) = $\frac{٦}{٢٥}$ × ٣٦٠° = ٨٦,٤٠°

ن(زاوية تقدير متوسط) = $\frac{٤}{٢٥}$ × ٣٦٠° = ٥٧,٦٠°

ن(زاوية تقدير مقبول) = $\frac{٥}{٢٥}$ × ٣٦٠° = ٧٢°

ن(زاوية تقدير غير مقبول) = $\frac{٢}{٢٥}$ × ٣٦٠° = ٢٨,٨°



حاول أن تحل

٢ في إحصاء لألوان العيون لدى ٤٠ طالبًا تبين ما يلي: أسود، أزرق، أسود، بني، أزرق، بني، عسلي، زيتي، أزرق، أسود، أسود، بني، بني، عسلي، زيتي، أسود، عسلي، بني، أسود، بني، أسود، زيتي، عسلي، بني، أسود، أسود، بني، بني، أسود، زيتي، أزرق، بني، عسلي، أسود، بني، أسود، بني، عسلي، أسود، بني.

أ كوّن جدولًا تكراريًّا نسبيًّا ومئويًّا لهذه البيانات.

ب مثّل هذه البيانات بالقطاعات الدائرية.

(٣-١-ب-٢) تمثيل البيانات باستخدام المدرج التكراري – المنحنى التكراري – المضلع التكراري

Representing Data UsingHistogram , Frequency Curve and Frequency Polygon

يمكن تمثيل البيانات بالمدرج التكراري – المنحنى التكراري – المضلع التكراري.

مثال (٣)

يبين الجدول التالي نتائج التحليل لتركيز مادة النيترات في ٥٠ وحدة ماء للخدمة المشتركة في المنازل، وذلك خلال شهر واحد (ملجم/ ليتر).

١٥	٥٣	٤٤	٤٥	٣٧	١٧	٤٦	٢٨	٥١	٤٩
٤٧	٥١	٥١	١٩	٤٦	٢٥	١٦	٣٥	٤٠	٣٠
١٩	٢٨	٣٨	٤١	٥٥	٣٣	٢١	١٦	٢٣	٢٤
٢٤	٣٠	٤٩	٢٢	٤٤	١٩	١٧	٣١	٢٩	٣٩
٤٠	٥٠	٣٦	٣٢	٣٤	٢٧	٢٩	٣٢	٤٨	٤٣

أ) أوجد المدى لهذه البيانات.

ب) إذا أردنا استخدام فئات متساوية، طول كل فئة ٥ ملجم، فما هو عدد الفئات؟

جـ) كون جدولًا تبين عليه: علامات التكرار – التكرار – مركز الفئة.

د) ارسم المدرج التكراري – المنحنى التكراري – المضلع التكراري لهذه الفئات.

تذكر:

- الفئة ١٥ – تمثلها $[١٥، ٢٠)$
- مركز الفئة $= \frac{١٥ + ٢٠}{٢}$ $= ١٧,٥$

الحل:

أ) القيمة الصغرى = ١٥، القيمة العظمى = ٥٥

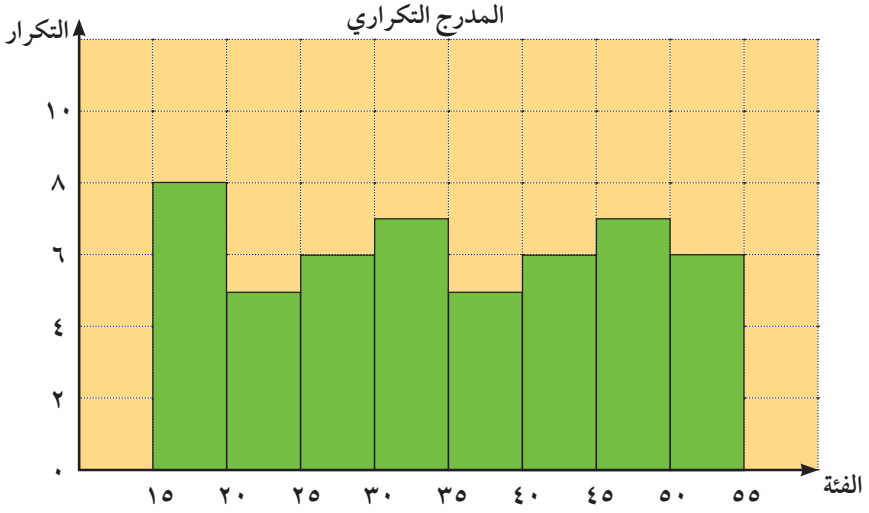
المدى = ٥٥ – ١٥ = ٤٠.

ب) عدد الفئات = ٤٠ ÷ ٥ = ٨ عدد الفئات = ٨.

جـ) الجدول:

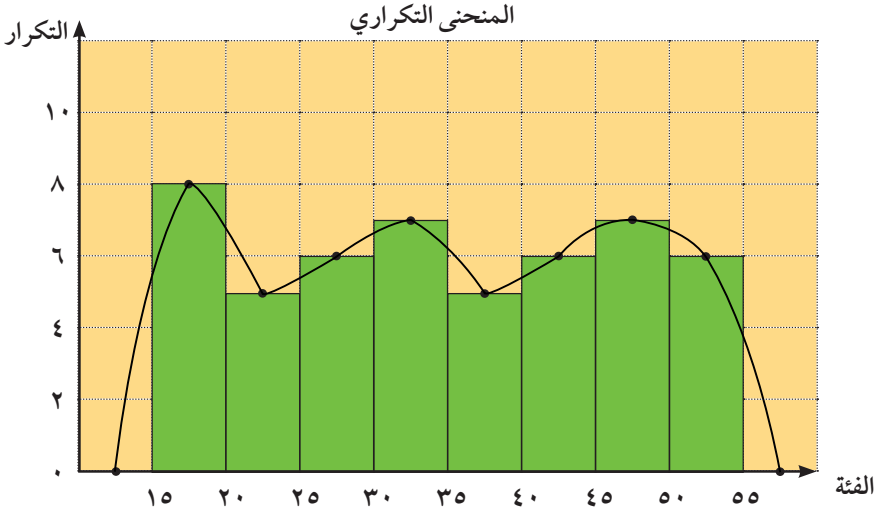
الفئة	١٥-	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-	٤٠-	٤٥-	٥٠-	المجموع
علامات التكرار	/// 𝍸	𝍸	/ 𝍸	// 𝍸	𝍸	/ 𝍸	// 𝍸	/ 𝍸	
التكرار	٨	٥	٦	٧	٥	٦	٧	٦	٥٠
مركز الفئة	١٧,٥	٢٢,٥	٢٧,٥	٣٢,٥	٣٧,٥	٤٢,٥	٤٧,٥	٥٢,٥	

د المدرج التكراري- المنحنى التكراري- المضلع التكراري.



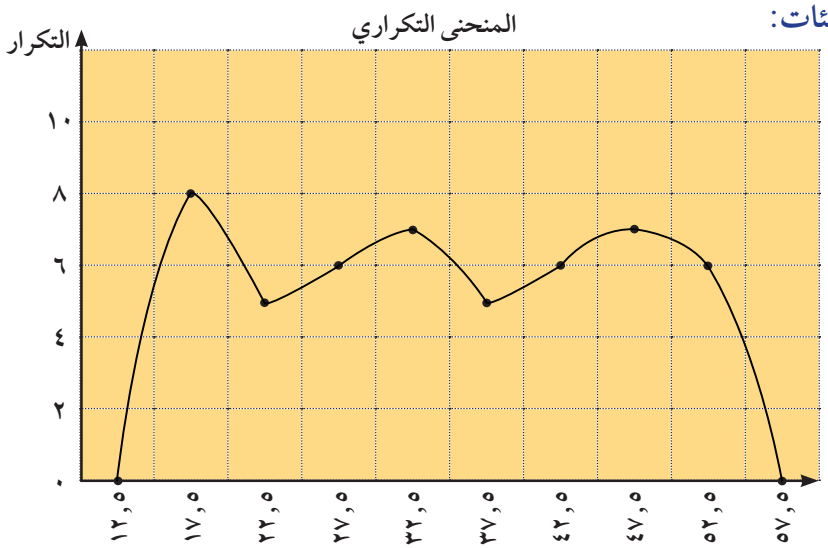
رسم المنحنى التكراري من المدرج التكراري:

لرسم المنحنى التكراري من المدرج التكراري، نأخذ مركز الفئة في كل مستطيل، ومنه نأخذ منتصف القطعة المستقيمة المقابلة في كل مستطيل، ثم نصل هذه المنتصفات لنحصل على المنحنى التكراري ونغلقه من طرفيه بإضافة فئة قبل الأولى وفئة ثانية بعد الأخيرة على أن يكون تكرار كل فئة مضافة يساوي صفرًا. (كما في الشكل التالي)



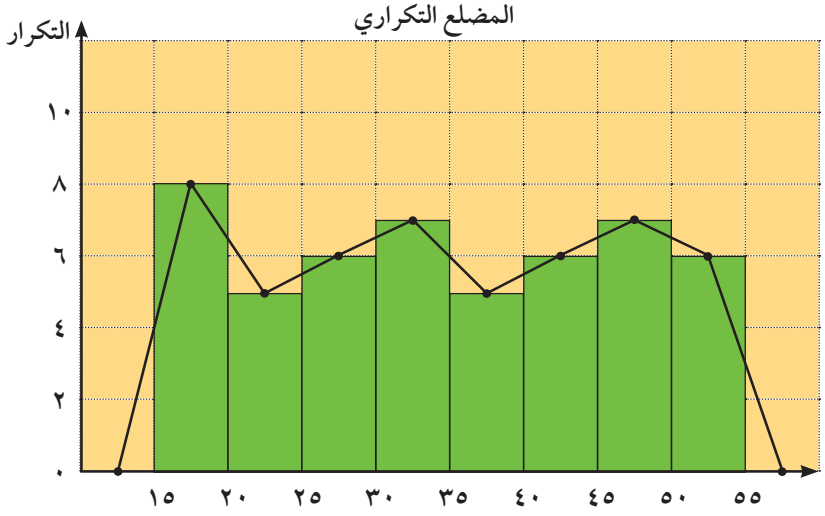
رسم المنحنى التكراري باستخدام مراكز الفئات:

يمكن أيضًا رسم المنحنى التكراري بوصل النقاط الممثلة للأزواج المرتبة التالية:
(٥ , ١٢، ٠)، (٥ , ١٧، ٨)، (٥ , ٢٢، ٥)، (٥ , ٢٧، ٦)، (٥ , ٣٢، ٧)، (٥ , ٣٧، ٥)، (٥ , ٤٢، ٦)، (٥ , ٤٧، ٧)، (٥ , ٥٢، ٦)، (٥ , ٥٧، ٠).



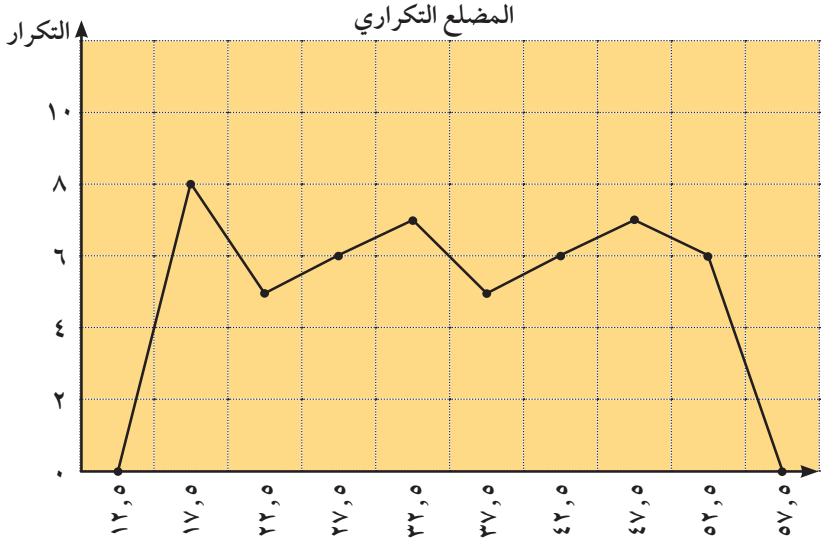
رسم المضلع التكراري من المدرج التكراري:

يمكن تمثيل البيانات باستخدام المضلع التكراري بحيث نتبع الخطوات نفسها عند رسم المنحنى التكراري من المدرج التكراري، ولكن نصل النقاط بقطع مستقيمة.



رسم المضلع التكراري باستخدام مراكز الفئات:

يمكن تمثيل البيانات باستخدام المضلع التكراري بحيث نتبع الخطوات نفسها عند رسم المنحنى التكراري باستخدام مراكز الفئات، ولكن نصل النقاط بقطع مستقيمة.



حاول أن تحل

٣ أ كون جدولًا مماثلًا، للجدول الوارد في حل المثال (٣)، على أن يكون طول الفئة يساوي ٨ ملجم مبينًا علامات التكرار والتكرار ومركز الفئة.

ب ارسم المدرج التكراري – المنحنى التكراري – المضلع التكراري لهذه الفئات.

(٣-١-ب-٣) المضلع التكراري المتجمع الصاعد – المضلع التكراري المتجمع النازل

Increasing Cumulative Polygon and Decreasing Cumulative Polygon

يمكن تمثيل البيانات بالمضلع التكراري المتجمع الصاعد – المضلع التكراري المتجمع النازل.

مثال (٤)

يبين الجدول التالي حركة الاتصالات الهاتفية التي يتلقاها أحد مكاتب الخدمات حيث العمل من الساعة الثامنة صباحًا إلى الساعة السادسة مساء.

فترة تسجيل الاتصالات	٨:٠٠-	١٠:٠٠-	١٢:٠٠-	١٤:٠٠-	١٦:٠٠-
عدد الاتصالات المسجلة (التكرار)	١٥	٤١	٧٥	٦٠	٣٤

أ أكمل الجدول بإضافة التكرار المتجمع الصاعد والتكرار المتجمع النازل.

ب ارسم المنحنى التكراري المتجمع الصاعد والمنحنى التكراري المتجمع النازل.

ج ارسم المضلع التكراري المتجمع الصاعد والمضلع التكراري المتجمع النازل.

د استنتج قيمة تقريبية لوسيط هذه البيانات.

الحل:

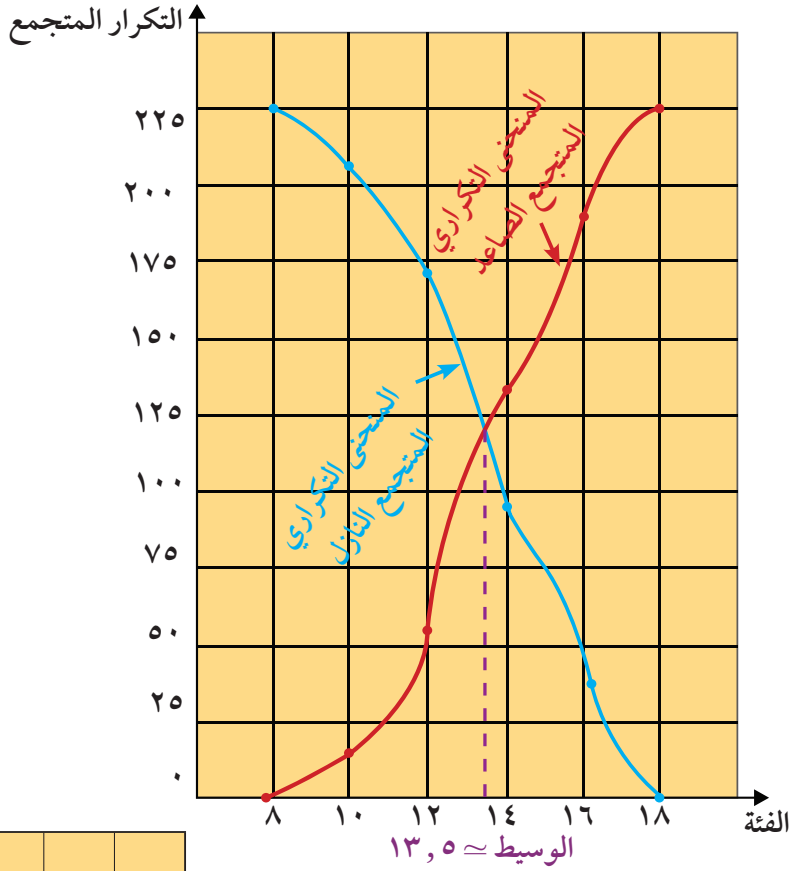
أ

جدول التكرار المتجمع الصاعد					
الفئة	٨:٠٠-	١٠:٠٠-	١٢:٠٠-	١٤:٠٠-	١٦:٠٠-
التكرار	١٥	٤١	٧٥	٦٠	٣٤
أقل من الحد الأعلى للفئة	أقل من ١٠	أقل من ١٢	أقل من ١٤	أقل من ١٦	أقل من ١٨
التكرار المجتمع الصاعد	١٥	٥٦	١٣١	١٩١	٢٢٥

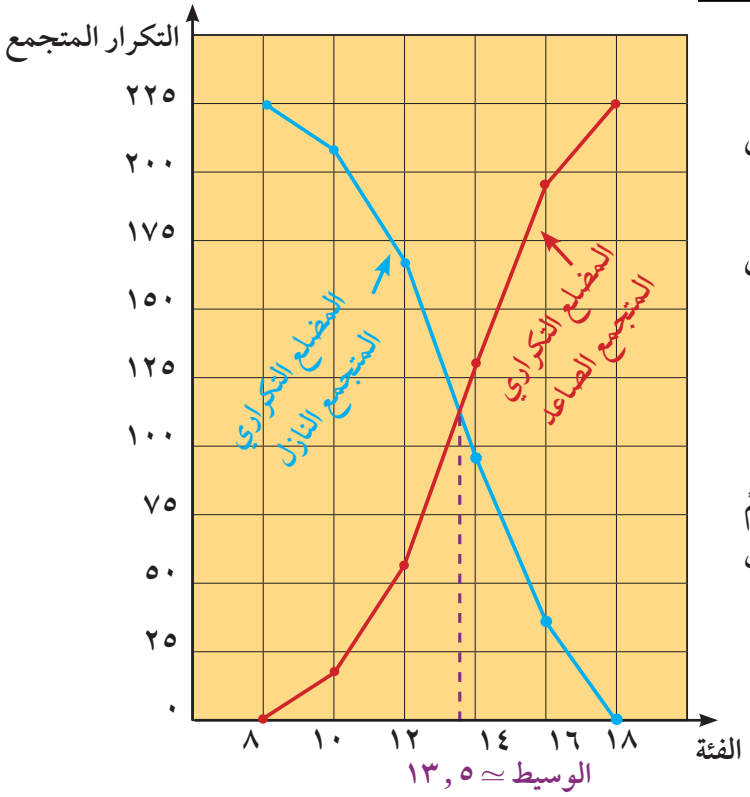
جدول التكرار المتجمع النازل					
الفئة	٨:٠٠-	١٠:٠٠-	١٢:٠٠-	١٤:٠٠-	١٦:٠٠-
التكرار	١٥	٤١	٧٥	٦٠	٣٤
الحد الأدنى للفئة فأكثر	٨ فأكثر	١٠ فأكثر	١٢ فأكثر	١٤ فأكثر	١٦ فأكثر
التكرار المتجمع النازل	٢٢٥	٢١٠	١٦٩	٩٤	٣٤

يمكن تمثيل البيانات باستخدام المنحنى التكراري المتجمع الصاعد والمنحنى التكراري المتجمع النازل كما في الشكل.

ب



ج يمكن تمثيل البيانات باستخدام المضلع التكراري المتجمع الصاعد والمضلع التكراري المتجمع النازل بحيث نتبع الخطوات نفسها عند رسم المنحنى التكراري المتجمع الصاعد والمنحنى التكراري المتجمع النازل ولكن نصل النقاط بقطع مستقيمة .



د نأخذ من نقطة تقاطع الرسمين البيانيين خطًّا مستقيمًا عموديًّا على الخط الأفقي، فنجد أن قيمة الوسيط هي عند الساعة ١٣:٣٠ تقريبًا.

حاول أن تحل

٤ معدل الدرجات السنوية في مادة الرياضيات لـ ٢٠ طالبًا من الصف الحادي عشر حيث النهاية العظمى ٢٠ درجة كما يلي: ١١، ٩، ١٢، ١١، ١٤، ١٠، ١٢، ١٠، ٩، ١٣، ١١، ١٠، ١٠، ١٤، ٩، ١٢، ١٠، ١٣، ١١، ١٠.

أ كوّن جدولًا تكراريًّا ذا فئات مبينًا: علامات التكرار – التكرار – التكرار المتجمع الصاعد – التكرار المتجمع النازل.

ب ارسم بيانيًّا المضلع التكراري المتجمع الصاعد والمضلع التكراري المتجمع النازل.

جـ استنتج قيمة تقريبية لوسيط هذه البيانات.

(٣-١-ب-٤) تمثيل البيانات باستخدام الخط المنكسر

Representing Data Using Line Graph

يمكن تمثيل البيانات بالخط المنكسر لدراسة مسار ظاهرة معينة خلال فترة زمنية محددة وتوقع نتائج يبنى عليها قرارات.

مثال (٥)

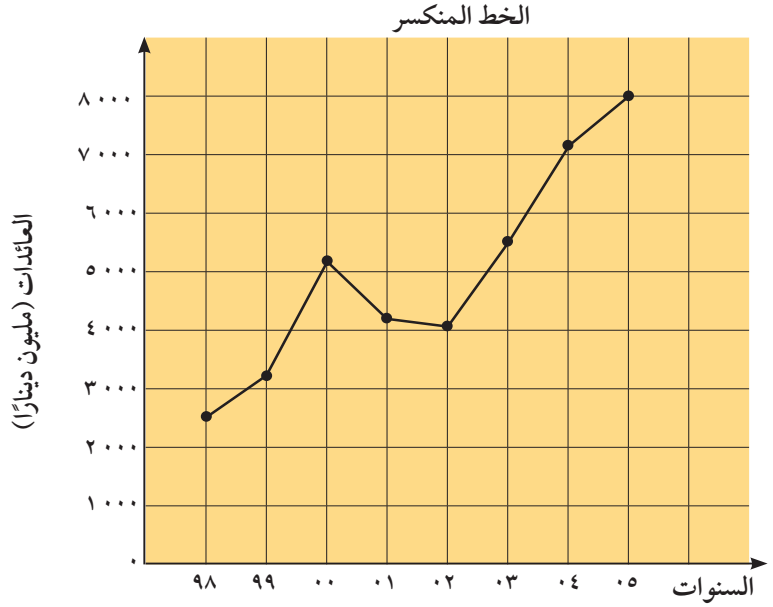
يبين الجدول التالي عائدات دولة ما بالمليون دينار خلال الفترة ١٩٩٨ – ٢٠٠٥م.

السنة	١٩٩٨	١٩٩٩	٢٠٠٠	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥
العائدات (بالمليون دينار)	٢٥٠٠	٣٢٠٠	٥٣٠٠	٤٣٠٠	٤٠٠٠	٥٥٠٠	٧١٠٠	٨٠٠٠

مثّل هذه البيانات باستخدام الخط المنكسر. ماذا تتوقع؟

الحل:

نأخذ على الخط الأفقي فترات متساوية للسنوات، وعلى الخط الرأسي فترات متساوية من ملايين الدنانير. ونضع النقاط التي تمثل كل زوج مرتب (سنة، عائدات).



نلاحظ أن عائدات هذه الدولة انخفضت خلال السنتين ٢٠٠١م و٢٠٠٢م، ثم عادت إلى الارتفاع في السنوات التالية. ومن المتوقع أن هذه العائدات سوف تستمر بالارتفاع.

حاول أن تحل

٥ يبين الجدول التالي بيانات إفتراضية عن الإنتاج السنوي للنفط لإحدى الدول من الفترة ٢٠٠٠م إلى ٢٠٠٥م (بالمليون برميل).

السنة	٢٠٠٠	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥
الإنتاج (مليون برميل)	١٥٠	٢٠٠	٣٠٠	٣٠٠	٣٥٠	٤٠٠

مثّل هذه البيانات بالخط المنكسر. ماذا تتوقع؟

مثال (٦)

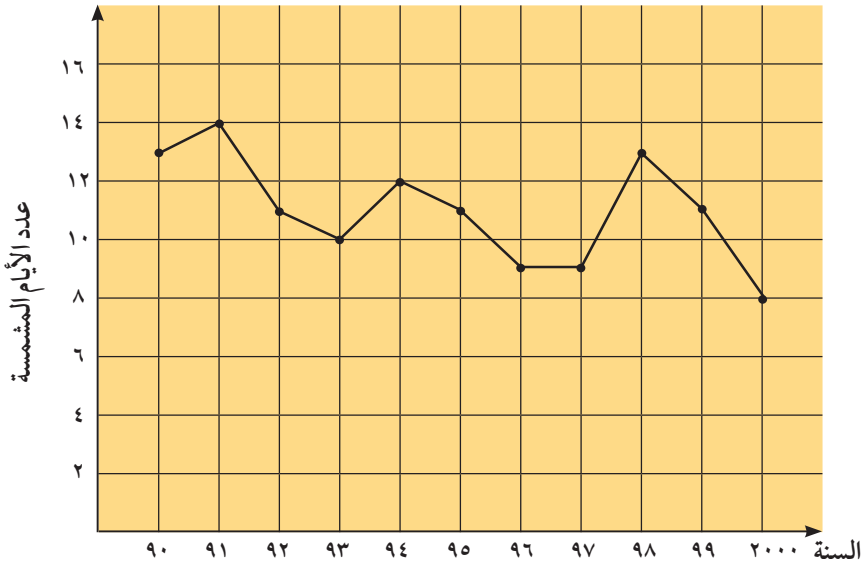
يبين الجدول التالي عدد الأيام المشمسة خلال شهر يوليو في إحدى المدن الباردة لعدة سنوات.

السنة	١٩٩٠	١٩٩١	١٩٩٢	١٩٩٣	١٩٩٤	١٩٩٥	١٩٩٦	١٩٩٧	١٩٩٨	١٩٩٩	٢٠٠٠
عدد الأيام المشمسة	١٣	١٤	١١	١٠	١٢	١١	٩	٩	١٣	١١	٨

مثّل هذه البيانات باستخدام الخط المنكسر. ماذا تلاحظ؟

الحل:

نأخذ على المحور الأفقي فترات متساوية للسنوات، وعلى المحور الرأسي فترات متساوية لعدد الأيام المشمسة. ونضع النقاط التي تمثل كل زوج مرتب (سنة، أيام).



نلاحظ أن عدد الأيام المشمسة يميل إلى التناقص على مر السنين.

حاول أن تحل

٦ يبين الجدول التالي كمية المطر (بالمليمتر) المسجلة في إحدى العواصم الأوروبية خلال أشهر سنة.

الشهر	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
الكمية	٥٤	٤٣	٣٢	٣٨	٥٢	٥٠	٥٥	٦٢	٥١	٤٩	٥٠	٤٩

مثل هذه البيانات باستخدام الخط المنكسر. ماذا تلاحظ؟

يبين الجدول التالي المدة الزمنية بالساعات لعمر ٥٠٠ مصباح كهربائي.

العمر (بالساعات)	-٣٠٠	-٥٠٠	-٧٠٠	-٩٠٠
التكرار	٤٥	١٥٥	٢٧٠	٣٠

أ أكمل هذا الجدول بإضافة التكرار المتجمع الصاعد والتكرار المتجمع النازل والتكرار النسبي والنسبة المئوية للتكرار.

ب مثّل هذه البيانات بالمدرج التكراري - المنحنى التكراري - المضلع التكراري.

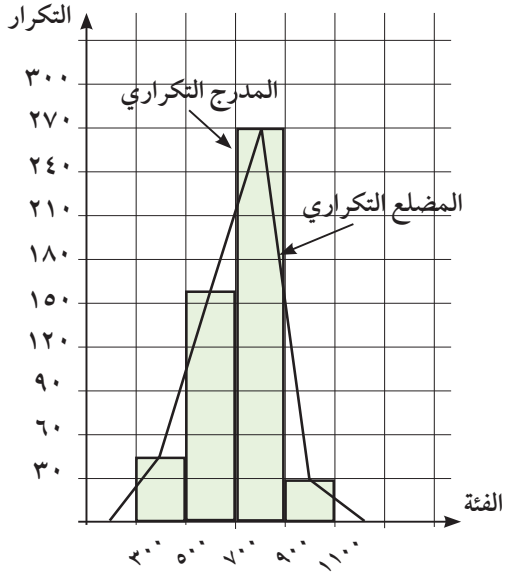
ج مثّل هذه البيانات بالقطاعات الدائرية.

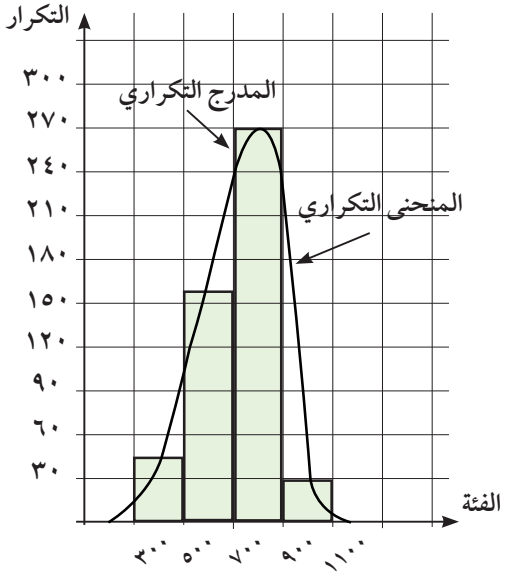
الحل:

أ

العمر (بالساعات)	-٣٠٠	-٥٠٠	-٧٠٠	-٩٠٠
التكرار	٤٥	١٥٥	٢٧٠	٣٠
التكرار المتجمع الصاعد	٤٥	٢٠٠	٤٧٠	٥٠٠
التكرار المتجمع النازل	٥٠٠	٤٥٥	٣٠٠	٣٠
التكرار النسبي	$\frac{٤٥}{٥٠٠} = \frac{٩}{١٠٠}$	$\frac{١٥٥}{٥٠٠} = \frac{٣١}{١٠٠}$	$\frac{٢٧٠}{٥٠٠} = \frac{٢٧}{٥٠}$	$\frac{٣٠}{٥٠٠} = \frac{٣}{٥٠}$
النسبة المئوية للتكرار	٪٩	٪٣١	٪٥٤	٪٦

ب التمثيل بالمدرج التكراري - المنحنى التكراري - المضلع التكراري.





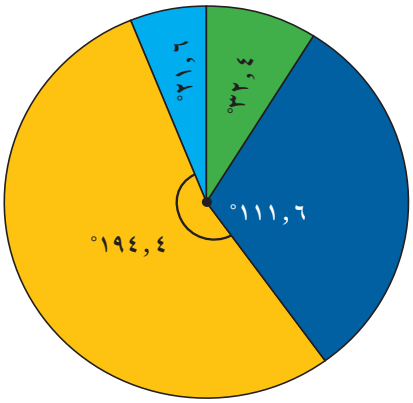
جـ التمثيل البياني بالقطاعات الدائرية.

$$\frac{٩}{١٠٠} \times ٣٦٠^\circ = \frac{١٢٦^\circ}{٥} = ٣٢,٤^\circ$$

$$\frac{٣١}{١٠٠} \times ٣٦٠^\circ = \frac{٥٥٨^\circ}{٥} = ١١١,٦^\circ$$

$$\frac{٢٧}{٥٠} \times ٣٦٠^\circ = \frac{٩٧٢^\circ}{٥} = ١٩٤,٤^\circ$$

$$\frac{٣}{٥٠} \times ٣٦٠^\circ = \frac{١٠٨^\circ}{٥} = ٢١,٦^\circ$$



مسألة إضافية

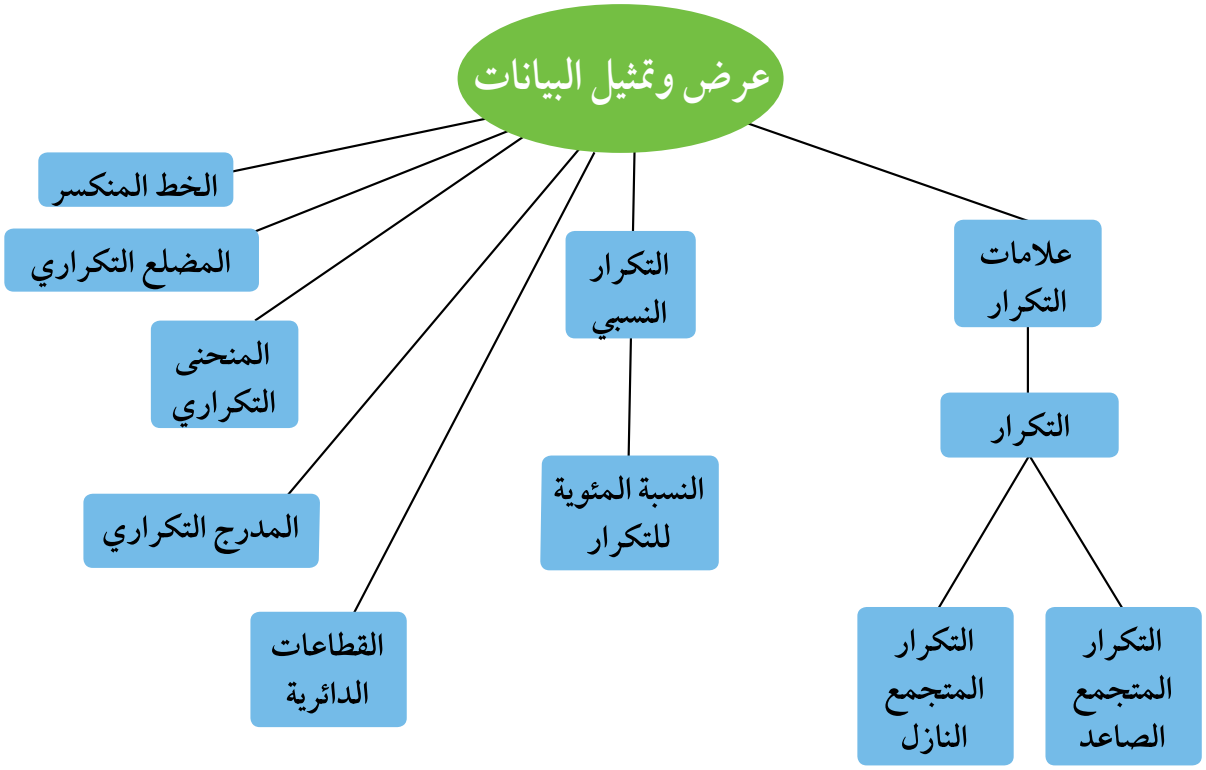
في إحصاء لألوان شعر الرأس عند ٢٥ طالبًا، تبين ما يلي:

أسود، بني، أسود، كستنائي، أسود، أسود، بني، أشقر، أسود، أشقر، كستنائي، بني، أسود، بني، كستنائي، أسود، أسود، بني، أسود، أسود، بني، أشقر، أسود، كستنائي، بني.

أ كون جدولًا تبين عليه علامات التكرار، التكرار النسبي، النسبة المئوية للتكرار.

ب مثّل هذه البيانات بالقطاعات الدائرية .

مخطط تنظيمي للوحدة الثالثة



ملخص

- تستخدم علامات التكرار لتبيان كل قيمة في البيانات.
- التكرار النسبي هو كسر يمثل ناتج قسمة تكرار كل قيمة على مجموع تكرارات القيم.
- النسبة المئوية لكل تكرار تساوي ناتج ضرب التكرار النسبي في ١٠٠.
- كل قطاع دائري له زاوية مركزية قياسها يساوي النسبة المئوية للتكرار × ٣٦٠°.
- يستخدم المدرج التكراري في تمثيل الفئات من بيانات.
- لرسم المنحنى التكراري نأخذ مركز الفئة في كل مستطيل ومنه نأخذ منتصف القطعة المستقيمة المقابلة في كل مستطيل، ثم نصل هذه المنتصفات لنحصل على المنحنى التكراري ونغلقه من طرفيه بإضافة فئة قبل الأولى وفئة ثانية بعد الأخيرة على أن يكون تكرار كل فئة مضافة يساوي صفرًا.
- الخط المنكسر يربط نقاطًا بعضها مع بعض بواسطة قطع مستقيمة، وإحداثيات هذه النقاط تمثل متغيرين في البيانات.

جدول الأعداد العشوائية

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	28138	28596	04819	50138	12598	96878	55684	01488	58963	25896	36987	47856	20150	18965
2	01055	53625	47739	51063	08445	33254	22542	50954	73949	11945	29947	86107	35420	77076
3	79603	31075	71532	38497	08236	78411	18237	48743	81472	31761	49582	70411	64708	59416
4	79261	96010	82558	15977	15827	55768	29668	73188	65198	24483	16219	63827	05092	47495
5	00005	37153	07206	78041	09457	97003	49739	75180	74018	90951	96161	31749	23314	55471
6	59282	86004	13259	59537	75702	66287	77941	27095	46176	67215	93007	84125	89302	92843
7	20119	41234	01600	61772	57765	43965	60952	86606	47653	71502	85121	56804	03494	98302
8	67205	41113	34514	03273	95516	68365	79855	50202	66262	31348	37260	56557	15116	38645
9	06244	02595	08941	24615	92256	43007	05022	48195	91554	42525	30499	92203	70717	92685
10	46210	35683	67486	77091	58196	08010	54826	97006	76740	76343	93982	66126	91164	53560
11	80851	80252	02993	92649	12421	00480	53258	45140	57226	10428	36478	24600	01401	29179
12	74684	98726	87312	70956	49731	45504	70689	57849	77383	53581	05100	07629	04450	54826
13	82136	32120	31733	10371	01132	25110	67123	59517	89996	58905	75260	21509	87839	68376
14	73419	88893	89748	44745	46390	54781	31307	62656	69777	24494	91659	29133	46122	75769
15	66082	76594	77480	38397	64521	18712	50625	39027	39168	07835	13446	17758	19166	86050
16	72300	93912	87548	69024	17509	52647	64335	84663	79524	34618	72718	51651	10486	81509
17	46805	82648	27550	65291	27181	92637	13539	87601	15442	70131	62278	99491	41647	11029
18	59068	93270	15829	34926	46252	90487	92734	04850	90175	84906	46435	91518	86972	25705
19	63089	93954	30250	80347	81506	53768	75611	62054	89867	16083	45585	39555	96236	37875
20	54384	64888	28929	46575	08301	86288	52656	19225	65019	74795	25915	71637	49063	17695
21	41219	63211	39429	15290	78067	66741	08485	64653	87698	04983	47255	72768	90770	82930
22	20939	02271	71831	53134	73002	86087	98213	24484	08574	34915	03881	26259	83583	55337
23	66587	02998	73357	00128	97188	71660	47602	52022	28157	21602	30212	53762	94149	66526
24	71255	04641	38419	79552	62599	76281	10226	60287	16627	85028	41218	20667	63917	49254
25	08584	91510	57892	75011	49221	69960	90413	62400	23239	76854	66983	15964	70808	41341
26	31552	70340	48274	81006	74831	19177	49160	50762	89666	93535	12381	29770	33895	90381
27	02779	92197	83606	60964	65448	64964	19444	31357	16774	68021	46076	43831	09372	71527
28	22739	38348	29275	50087	91312	68984	37018	03447	05352	00798	61243	86397	98949	07622
29	21255	64526	97920	04791	77315	49905	74232	67222	89562	14683	81533	60057	31164	21824
30	95796	88317	77167	07879	03499	00804	27377	18693	75652	32509	38279	28588	16753	86119
31	75902	33821	35579	75020	78575	43912	99570	79216	04682	53316	95976	11938	56490	43868
32	36028	73731	05339	82203	22856	72459	00237	17627	50326	98629	71967	48402	61549	83717
33	06836	03795	80497	34107	29215	17117	69538	63274	96690	78884	38149	84592	67096	84551
34	35984	71052	01657	19690	99783	13513	37517	96508	49098	86592	10874	18125	00876	14549
35	87635	49443	55077	18157	20552	27316	12591	68157	34316	20447	53989	40096	69123	74210
36	41484	58832	43633	92072	54522	60783	05639	78371	20340	90174	90549	60250	80858	97632
37	65736	34031	37846	47294	50168	96397	50329	17390	04554	96190	02594	44229	24198	03064
38	16118	88260	28975	20036	77353	96179	08143	29222	57871	01292	52420	07130	11896	94088
39	62064	36947	31193	72328	10262	75428	50450	31620	17855	27018	75910	60965	39988	73389
40	23472	61332	48829	99113	90538	74066	38628	09270	72856	71411	78860	50745	42966	27424
41	05654	41781	99888	60787	56313	83221	82631	91989	32577	68175	24897	23456	16419	41727
42	83428	17512	78322	01942	42061	60659	32746	95367	20551	99885	79334	03732	97058	80356
43	65126	87369	56266	48697	33094	07522	92724	05676	91022	64262	24239	60242	01049	42945
44	28042	84729	34846	05880	34188	27048	30623	23204	05034	93136	19192	91674	47022	48523
45	53148	70847	48117	16103	83773	13224	76143	39148	06742	08298	52014	61711	79466	78334

تابع جدول الأعداد العشوائية

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
46	13560	38973	76536	54464	57626	10247	67051	83850	93002	30930	83842	09990	39203	85693
47	74560	04842	75720	98173	35124	18019	70681	73624	86300	76894	55504	20022	27144	03239
48	27449	10887	55047	76702	62587	20131	63452	96127	15802	65271	74663	37237	95812	19427
49	44413	47571	63342	67062	19900	42511	71024	44364	02775	41081	33177	09580	71047	33820
50	64512	50481	41107	21553	86471	16380	45959	16065	75195	31120	33822	43200	82566	43078
51	00095	29635	33618	55201	12075	97285	80296	92250	92579	69296	68423	91353	35553	77036
52	09638	68500	84152	55279	29481	48723	87785	06304	53198	79425	41344	87395	54720	72911
53	08589	28972	20500	26761	61852	87387	17967	50345	20479	37841	16337	88163	38585	02798
54	54883	36854	75468	31821	08464	13393	24322	56872	39507	16845	92039	13209	47035	57686
55	15444	18858	69256	81949	85766	20284	15914	76382	25665	84484	36409	87271	14949	12069
56	71565	25235	48604	04697	60513	89675	34337	06619	67509	03365	67431	43725	60359	33823
57	92871	06972	97272	98081	58945	98039	47815	55173	93203	03385	58309	47970	27985	73782
58	68849	33525	22034	44200	90628	39212	75363	00247	96303	51838	99956	34321	85809	87275
59	98827	81751	86350	27162	56861	00566	32360	52560	05152	97370	29229	98503	44100	59854
60	66803	20412	23097	36884	14158	51578	82839	04323	01877	91180	22403	31175	67942	14508
61	41516	62122	37492	78385	08100	01107	49028	80607	92813	75169	25796	12643	75026	04170
62	12162	72695	70213	28844	94220	04677	63128	96254	60006	42148	63974	24739	46064	93416
63	13274	51517	40925	25926	47062	06867	80018	43394	68316	19197	74832	95805	26126	29623
64	52918	26336	17452	70092	22425	68294	14624	12683	60030	18091	76824	45533	29768	59678
65	30361	58894	77995	22650	20266	21791	25773	37748	38058	73835	57440	33610	24749	56691
66	46377	07121	20251	41301	07635	66029	80470	25523	16429	40640	40041	79302	98712	95368
67	27423	28968	39623	90457	26780	14540	15082	90327	56459	77107	60727	26328	59556	93557
68	73886	44934	65197	86001	51613	92940	24998	35378	35732	05469	05791	07309	23107	37543
69	70336	30279	09961	58625	11044	73699	32481	85490	58333	12277	98355	86413	87883	23945
70	97903	34498	31282	11249	13179	41489	87962	89071	61922	02704	83626	67269	26568	09110
71	86205	97851	61543	40666	78098	05621	86072	21202	84985	65253	09306	56791	86227	73343
72	70718	31353	96295	21718	03495	83149	48733	21496	68430	91459	18409	86552	53261	30280
73	79073	05288	57087	27201	29661	08888	42984	96272	93656	50805	32057	36231	03532	64408
74	37479	85240	68508	36333	90080	46063	78129	96854	65844	71369	15432	66145	29223	87139
75	56009	81470	06181	98341	92406	61704	57770	28984	92858	88178	80042	83674	23736	64497
76	97012	75201	16764	31720	59414	81005	63959	15445	12347	71939	23651	29846	20962	77463
77	89839	94534	78223	94989	54376	61163	21914	19430	86856	38116	83201	10117	77879	04504
78	81048	37891	24924	18757	54550	54788	72430	24611	18643	55647	11806	78567	76679	58222
79	96743	96838	50696	57648	15325	72557	77193	50894	33206	44420	37986	84257	02031	65384
80	87649	00751	47483	48564	13103	20941	49793	68972	27994	75845	84616	37040	97110	95953
81	18173	87553	45854	18750	16506	57202	60428	61710	35887	19879	49893	04512	62556	63742
82	27613	72032	94334	38239	00395	05486	96365	01758	99314	41866	25760	74573	72169	25744
83	67517	04195	89100	21434	52923	90818	09206	19493	00233	62413	39127	76457	39419	35023
84	23574	88907	08133	85126	84643	94128	89259	18791	71035	84179	82500	92193	31383	34150
85	98721	90145	05695	14882	11827	56881	14143	68069	88481	08328	58607	81737	11660	96892
86	85556	83652	92934	55451	94792	45056	50732	83305	46303	37510	15539	52534	47250	75231
87	63282	48334	46961	05993	16605	63422	23375	44298	16226	10617	96722	42776	53376	94366
88	34033	36344	41107	77495	73985	79352	14844	44334	30781	16339	38031	28104	60054	05725
89	75567	31423	72507	48162	30150	44912	76250	12017	12136	47687	90279	67127	83889	87957
90	45101	69475	96924	76548	57756	14741	26052	42807	52824	61981	87866	35512	23771	43130

تطرح سلسلة الرّياضيّات مواقف حياتيّة يوميّة، وتؤمّن فرص تعلُّم كثيرة. فهي تعزّز المهارات الأساسيّة، والحسّ العدديّ، وحلّ المسائل، والجهوزيّة لدراسة الجبر، والهندسة، وتنمّي مهارتَي التّعبير الشّفهيّ والكتابيّ ومهارات التفكير في الرّياضيّات. وهي تتكامل مع الموادّ الدراسيّة الأخرى فتكون جزءًا من ثقافة شاملة متماسكة تحفّز الطلّاب على اختلاف قدراتهم وتشجّعهم على حبّ المعرفة.

تتكوّن السلسلة من:

- كتاب الطالب
- كتاب المعلّم
- كرّاسة التمارين
- كرّاسة التمارين مع الإجابات

ISBN 978-614-406-328-6

PEARSON
Scott Foresman